LATINALAISTEN NELIÖIDEN MUODOSTAMISESTA

Aleksi Virtanen

Pro gradu -tutkielma
Maaliskuu 2012

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

VIRTANEN, ALEKSI: Latinalaisten neliöiden muodostamisesta
Pro gradu -tutkielma, 50 s.
Matematiikka
Maaliskuu 2012

Tässä pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan latinalaisten neliöiden muodostamiseen liittyviä kysymyksiä. Latinalaiset neliöt ovat kombinatorisia objekteja, joita on tutkittu 1700-luvulta lähtien. Jos kukin luvuista $1, 2, \ldots, n$ esiintyy tarkalleen kerran tyyppiä $n \times n$ olevan neliömatriisin jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa, niin neliömatriisia kutsutaan kertalukua n olevaksi latinalaiseksi neliöksi.

Tutkielma perustuu joukko-opista tuttuun Hallin lauseeseen, joka antaa välttämättömät ja riittävät ehdot sille, milloin äärellisillä joukoilla on olemassa eri edustajien systeemi. Erityisesti tutkielmassa keskitytään osittaisten latinalaisten neliöiden täydentämiseen ja upottamiseen liittyviin kysymyksiin. Niitä varten esitetään Herbert Ryseriltä peräisin oleva lause, jonka mukaan kertalukua $r \times s$ oleva luvuista $1, 2, \ldots, n$ muodostettu latinalainen suorakulmio voidaan laajentaa latinalaiseksi neliöksi jos ja vain jos kukin luvuista $1, 2, \ldots, n$ esiintyy suorakulmiossa vähintään $r + s - n$ kertaa.

Seuraavaksi esitetään Ryserin lauseeseen perustuva Trevor Evansin tulos vuodelta 1960. Evansin lauseen mukaan riittävä ehto kertalukua n olevan osittaisen latinalaisen neliön upottamiselle kertalukua t olevaan latinalaiseen neliöön on, että $t \geq 2n$. Evans osoitti tämän riittävän ehdon olevan myös välttämätön kertaluvun arvoilla $n \geq 4$.

Tutkielman tärkeimmän osan muodostaa Charles Lindnerin ja Bohdan Smetaniukin todistus Trevor Evansin esittämälle konjektuurille. Konjektuurin mukaan $n - 1$ valmiiksi täytettyä alkiota sisältävä kertaluvun n osittainen latinalainen neliö voidaan aina täydentää kertalukua n olevaksi latinalaiseksi neliöksi. Evansin konjektuurin todistuksen jälkeen esitellään vielä Allan Cruselta peräisin olevia kommutatiivisia ja idempotentteja latinalaisia neliöitä koskevia tuloksia.

Käytetyistä lähteistä keskeisin on Charles Lindnerin kirjoittama luku Dénesin ja Keedwellin teoksessa Latin Squares: New Developments in the Theory and Applications. Tutkielman kannalta tärkeässä asemassa on ollut myös Aignerin ja Zieglerin teoksessa Proofs from The Book oleva latinalaisia neliöitä käsittelevä luku. Lisäksi lähteinä on käytetty alan tutkijoiden alkuperäisiä artikkeleita.

Asiasanat: latinalainen neliö, latinalainen suorakulmio, osittainen latinalainen neliö, eri edustajien systeemi.

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Perusteita **3**

2.1 Latinalaiset neliöt ja suorakulmiot 3

2.2 Osittaiset latinalaiset neliöt ja upotukset 5

2.3 Kommutatiiviset ja idempotentit latinalaiset neliöt 6

3 Latinalaisten suorakulmioiden laajentaminen **9**

3.1 Eri edustajien systeemeistä 9

3.2 Marshall Hallin eksistenssilause 12

3.3 Ryserin lause 14

4 Evansin lauseet **21**

4.1 Riittävä ehto 21

4.2 Välttämätön ehto 22

5 Evansin konjektuuri **27**

5.1 Tarkasteltava ongelma 27

5.2 Lindnerin osittainen ratkaisu 28

5.3 Smetaniukin todistus 35

6 Crusen lauseista **43**

6.1 Ryserin lauseen analogia 43

6.2 Cruse ja upotukset 44

6.3 Lopuksi 47

Kirjallisuutta **49**

1 Johdanto

Latinalaiset neliöt kuuluvat kombinatoristen objektien joukkoon. Latinalaisen neliön määritelmää varten pitää kiinnittää jokin symbolijoukko, esimerkiksi luvut $1, 2, \ldots, n$. Jos kukin näistä luvuista esiintyy tyyppiä $n \times n$ olevassa neliömatriisissa tarkalleen kerran jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa, niin matriisia kutsutaan *kertalukua n* olevaksi *latinalaiseksi neliöksi.*

Latinalaisten neliöiden tutkimuksen voidaan sanoa alkaneen 1700-luvulla. Tuolloin Leonhard Euler tutki niin sanottuja *ortogonaalisia latinalaisia neliöitä*, mikä synnytti yleisen mielenkiinnon aihepiiriä kohtaan. Termi latinalainen neliö on peräisin siitä, että Euler käytti tutkimiensa neliöiden alkioina kirjaimia. Latinalaisten neliöiden tutkimus liittyy kombinatoriikan lisäksi muun muassa algebraan ja geometriaan. Varsinaiset sovellukset ovat olleet useimmiten yhteydessä Eulerin tutkimiin ortogonaalisiin neliöihin. Erilaiset tilastolliset koesuunnittelutilanteet ja virheitä korjaavien koodien teoria ovat olleet tyypillisimpiä latinalaisten neliöiden sovelluskohteita.

Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan tarkastella ortogonaalisia latinalaisia neliöitä, vaan mielenkiinto kohdistuu latinalaisten neliöiden muodostamiseen. Erityisesti tarkastellaan sitä, millaisten ehtojen vallitessa osittain täytettyjä latinalaisia neliöitä voidaan täydentää suuremmiksi latinalaisiksi neliöiksi. Osoittautuu, että tällaisille ongelmille on olemassa täsmällisiä ja kauniita ratkaisuja. Osittaisiin latinalaisiin neliöihin liittyviä kysymyksiä on tutkittu perusteellisesti vasta toisen maailmansodan jälkeen. 1940-luvun puolivälissä käynnistyi kehitys, joka on tähän päivään mennessä antanut vastauksia huomattavan syvällisiin kysymyksiin.

Käsillä oleva pro gradu -tutkielma mukailee edellisessä kappaleessa kuvattua historiallista kehitystä. Ensin on kuitenkin syytä esitellä tutkielman kannalta olennaiset käsitteet. Tämä pohjatyö tehdään luvussa 2. Luvussa 3 esitetään Philip Hallilta peräisin oleva joukko-opillinen lause, joka muodostaa perustan kaikelle osittaisia latinalaisia neliöitä koskevalle tutkimukselle. Luvussa 3 esitetään myös ensimmäiset latinalaisten neliöiden muodostamista koskevat tulokset, nimittäin Marshall Hallin ja Herbert Ryserin nimeä kantavat lauseet. Luvussa 4 käsitellään Trevor Evansin merkittäviä tuloksia, jotka koskevat osittaisten latinalaisten neliöiden laajentamista kokonaisiksi latinalaisiksi neliöiksi.

Tutkielma huipentuu lukuun 5, jossa esitetään ja todistetaan Trevor Evansin esittämä osittain täytettyjä latinalaisia neliöitä koskeva konjektuuri. Konjektuuri esitettiin vuonna 1960 ja sen ratkaisua saatiin odottaa yli kaksikymmnetä vuotta. Luvussa 6 tarkastellaan vielä lyhyesti Allan Crusen tutkimuksia, jotka liittyvät *kommutatiivisten* ja *idempotenttien* latinalaisten neliöiden muodostamiseen.

Käytetyistä lähteistä keskeisin on Charles Lindnerin kirjoittama osuus teoksessa [4]. Kyseinen esitys tarjoaa yleisluontoisen katsauksen latinalaisten neliöiden muodostamiseen liittyviin kysymyksiin. Tutkielmassa esitettävien tulosten yhteydessä on pyritty hyödyntämään teorian kehittäjien alkuperäisiä artikkeleita. Tämän tarkoituksena on aihepiirin historiallisen kehityksen havainnollistaminen. Tiedot käytetyistä artikkeleista on esitetty tutkielman lopussa.

Matematiikkaa voi luonnehtia täsmällisten vastausten etsimisenä esitettyihin ongelmiin. Tämä matematiikan piirre on selvästi näkyvissä tämän esityksen sisällössä. Latinalaisten neliöiden muodostamiseen liittyvät lauseet ovat nimittäin lähes poikkeuksetta olleet vastauksia joihinkin konkreettisiin ongelmiin. Tutkielman voidaankin toivoa tuovan esiin joitakin piirteitä matematiikan merkityksestä.

Toinen matematiikan merkittävä piirre on sen kumulatiivisuus. Uudet lauseet rakentuvat aina edellisten tulosten varaan. Hieman yleistäen voidaan sanoa, että matematiikassa ei ole tarpeen korjata vanhoja tuloksia, vaan niiden varaan voidaan luottavaisesti rakentaa uutta tietoa. Latinalaisten neliöiden muodostaminen tarjoaa erinomaisen tavan havainnollistaa tätä matematiikan kumulatiivista ominaisuutta. Myöhemmin esitettävä teoria rakentuu saumattomasti tutkielman varsinaisen aiheen kannalta irrallisen Hallin lauseen varaan. Lukijalta ei myöskään vaadita erityisiä matemaattisia esitietoja, vaan tulokset voidaan perustella varsin kevyen formalismin avulla. Toivottavasti historiallisen kehityksen seuraaminen, kumulatiivinen esitystapa ja käsiteltävät huomattavan konkreettiset kysymykset antavat tälle tutkielmalle myös pedagogista arvoa.

2 Perusteita

Tässä luvussa esitetään tutkielman ymmärtämisen kannalta olennaiset käsitteet ja havainnollistetaan niitä esimerkkien avulla. Lukijalta oletetaan matemaattisen yleissivistyksen lisäksi kombinatoriikan perusmenetelmien hallinta. Kaikki tässä tutkielmassa esiintyvät muuttujat kuuluvat positiivisten kokonaislukujen joukkoon ellei toisin mainita.

2.1 Latinalaiset neliöt ja suorakulmiot

Aloitetaan latinalaisten neliöiden tutkiminen määrittelemällä *latinalaisen neliön* käsite. Tämän luvun määritelmät löytyvät esimerkiksi teoksesta [4].

Määritelmä 2.1. Olkoon L tyyppiä $n \times n$ oleva neliömatriisi, jonka alkiot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jos kukin symboleista $1, 2, \ldots, n$ esiintyy matriisin jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa tarkalleen kerran, niin matriisia L kutsutaan *latinalaiseksi neliöksi*. Lukua n sanotaan neliön *kertaluvuksi*.

Kahta tai useampaa latinalaista neliötä voidaan käsitellä matemaattisesti samanlaisina, vaikka ne poikkeaisivat ulkoisesti toisistaan. Tähän liittyy niin sanottu *konjugoinnin* käsite.

Huomautus 2.2. Määritelmän 2.1 ehdot pysyvät selvästi voimassa, vaikka neliön L

1. rivejä permutoidaan,
2. sarakkeita permutoidaan,
3. symboleja permutoidaan,
4. täyttämiseen käytettävää symbolijoukkoa vaihdetaan.

Näiden operaatioiden tuloksena syntyviä neliöitä sanotaan alkuperäisen neliön *konjugaateiksi*. Konjugaateilla on sama matemaattinen rakenne. Ainoa rajoitus neliön täyttämiseen käytettävälle symbolijoukolle on, että joukon koon pitää olla yhtä suuri kuin neliön kertaluku. Tässä esityksessä valitaan symbolijoukoksi luonnolliset luvut $1, 2, \ldots, n$.

Latinalaisen suorakulmion käsite on tärkeä teoreettinen apuväline tarkasteltaessa latinalaisten neliöiden muodostamista. Käsitteelle on kaksi toisistaan hieman poikkeavaa määritelmää. Käytettävä määritelmä riippuu tarkasteltavasta tilanteesta. Seuraava muotoilu on hieman luonnollisempi.

Määritelmä 2.3. Oletetaan, että $r \leq n$. Tyyppiä $r \times n$ olevaa matriisia R sanotaan kertalukua $r \times n$ olevaksi *latinalaiseksi suorakulmioksi*, jos sen

(i) alkiot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$,

(ii) jokainen rivi sisältää kunkin luvuista $1, 2, \ldots, n$ tarkalleen kerran,

(iii) jokainen sarake sisältää kunkin luvuista $1, 2, \ldots, n$ korkeintaan kerran.

Joissakin tilanteissa on hyödyllisempää käyttää edellistä yleisempää määritelmää. Näin on esimerkiksi luvussa 3 esitettävän Ryserin lauseen tapauksessa. Jatkossa termillä latinalainen suorakulmio tarkoitetaan määritelmässä 2.4 esitettävää muotoilua ellei toisin mainita.

Määritelmä 2.4. Oletetaan, että $r, s \leq n$ ja olkoon R tyyppiä $r \times s$ oleva matriisi. Jos

(i) matriisin R alkiot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$,

(ii) kukin luvuista $1, 2, \ldots, n$ esiintyy korkeintaan kerran matriisin R kullakin rivillä ja kussakin sarakkeessa,

niin matriisia kutsutaan kertalukua $r \times s$ olevaksi latinalaiseksi suorakulmioksi.

Seuraava esimerkki selventää esitettyjä käsitteitä.

Esimerkki 2.5. Tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriisi A on kertalukua 4 oleva latinalainen neliö. Se on myös kertalukua 4×4 oleva määritelmien 2.3 sekä 2.4 mukainen latinalainen suorakulmio. Matriisi B on määritelmien 2.3 ja 2.4 mukainen kertaluvun 2×3 latinalainen suorakulmio. Sen sijaan matriisi C toteuttaa ainoastaan yleistetyn määritelmän 2.4.

2.2 Osittaiset latinalaiset neliöt ja upotukset

Aletaan täyttämään tyyppiä $n \times n$ olevaa neliömatriisia mielivaltaisessa järjestyksessä luvuilla $1, 2, \ldots, n$ siten, että kukin luku esiintyy jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa korkeintaan kerran. Lopetetaan sitten neliön täyttäminen jollakin hetkellä. Tällaista matriisia kutsutaan kertalukua n olevaksi *osittaiseksi latinalaiseksi neliöksi.* Kannattaa huomata, että latinalainen neliö on myös osittainen latinalainen neliö. Esitetään tästäkin käsitteestä esimerkki.

Esimerkki 2.6. Matriisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & 4 \\ \cdot & 1 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

on esimerkki kertaluvun 4 osittaisesta latinalaisesta neliöstä. Osittaista neliötä P ei kuitenkaan voida täydentää latinalaiseksi neliöksi, sillä soluun $(1, 3)$ pitäisi sijoittaa jompikumpi luvuista 2 tai 3. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, koska kummatkin luvut ovat jo kolmannen sarakkeen alkioita.

Edellinen esimerkki antaa aiheen pohtia, miten neliö P voitaisiin täydentää latinalaiseksi neliöksi? Suoraviivainen menetelmä olisi laajentaa neliötä P ja ottaa käyttöön laajennuksen suuruudesta riippuva määrä uusia symboleja. Jos tällaisen laajennuksen avulla voidaan muodostaa sellainen latinalainen neliö L, että alkuperäinen neliö P on sen vasemmassa yläkulmassa, niin neliön P sanotaan olevan *upotettu* neliöön L. Edellisen esimerkin osittainen latinalainen neliö P voidaan upottaa esimerkiksi neliöön

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ainakin esimerkin 2.6 tapauksessa oli mahdollista löytää latinalainen neliö, johon osittainen latinalainen neliö P voitiin upottaa. Erittäin mielenkiintoinen kysymys on, voidaanko kaikki osittaiset latinalaiset neliöt upottaa johonkin laajempaan neliöön ja jos voidaan, niin millä ehdoilla? Näitä kysymyksiä käsitellään tarkemmin luvussa 4.

2.3 Kommutatiiviset ja idempotentit latinalaiset neliöt

Luvussa 6 tarkastellaan *osittaisia kommutatiivisia* ja *osittaisia idempotentteja latinalaisia neliöitä*. Esitetään tätä varten kyseisten neliöiden määritelmät.

Määritelmä 2.7. Olkoon P osittainen latinalainen neliö ja olkoon x mielivaltaisesti valittu neliön täytetty alkio. Oletetaan, että alkio x on solussa (i, j). Jos myös solussa (j, i) on valmiiksi täytettynä alkiona x, niin neliötä P kutsutaan *osittaiseksi kommutatiiviseksi latinalaiseksi neliöksi.*

Neliön kommutatiivisuudelle voidaan käyttää myös vaihtoehtoista ilmaisua *symmetrinen.* Näin on tehty esimerkiksi artikkelissa [3]. Tässä tutkielmassa pitäydytään kuitenkin edellisessä termissä.

Seuraavaksi esitettävässä *idempotentin latinalaisen neliön* määritelmässä tarvitaan neliön *päädiagonaalin* käsitettä. Kertalukua n olevan neliön *päädiagonaalilla* tarkoitetaan soluja (i, i), missä $1 \leq i \leq n$.

Määritelmä 2.8. Osittaista latinalaista neliötä sanotaan *osittaiseksi idempotentiksi latinalaiseksi neliöksi*, jos

(i) neliön päädiagonaalilla ei ole tyhjiä soluja,

(ii) päädiagonaalin solussa (i, i) on alkio i.

Jos osittaisen latinalaisen neliön päädiagonaalilla ei ole tyhjiä soluja eikä kahta tai useampaa samaa alkiota, niin neliöstä saadaan idempotentti konjugoimalla sitä sopivalla tavalla.

Määritelmät 2.7 ja 2.8 koskevat myös normaaleja latinalaisia neliöitä. Tällöin puhutaan kommutatiivisista ja idempotenteista latinalaisista neliöistä. Määritellään vielä vastaavat käsitteet latinalaisten suorakulmioiden tapauksessa.

Määritelmä 2.9. Olkoon $n \geq r$. Luvuista $1, 2, \ldots, n$ muodostettua ja kertalukua $r \times r$ olevaa latinalaista suorakulmiota kutsutaan *kommutatiiviseksi latinalaiseksi suorakulmioksi*, jos solut (i, j) ja (j, i) sisältävät aina saman alkion. Jos vastaavan latinalaisen suorakulmion soluissa (i, i) on alkio i kaikilla $i = 1, 2, \ldots, r$, niin suorakulmiota sanotaan *idempotentiksi latinalaiseksi suorakulmioksi*.

Esimerkki 2.10 on yhteenveto kommutatiivisista ja idempotenteista latinalaisista neliöistä ja suorakulmioista.

Esimerkki 2.10. Tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisi A on kommutatiivinen ja idempotentti osittainen latinalainen neliö. Matriisi B on latinalainen suorakulmio mutta se ei ole kommutatiivinen eikä myöskään idempotentti.

3 Latinalaisten suorakulmioiden laajentaminen

3.1 Eri edustajien systeemeistä

Niin sanottu *Hallin lause* muodostaa teoreettisen perustan kaikille tämän tutkielman tuloksille. Lause on yleinen joukko-opillinen tulos, eikä se alun perin liittynyt millään tavalla latinalaisiin neliöihin. Hallin lauseen todisti ensimmäisenä Philip Hall vuonna 1935 ilmestyneessä artikkelissa [8]. Pohjustetaan lausetta määrittelemällä tärkeä käsite *eri edustajien systeemi*, johon jatkossa viitataan lyhenteellä SDR (*system of distinct representatives*).

Määritelmä 3.1. Olkoon X äärellinen joukko ja olkoot $S_1, S_2, \dots, S_n$ joukon X osajoukkoja, joiden ei tarvitse olla eri joukkoja. Vektoria $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kutsutaan joukkojen $S_1, S_2, \dots, S_n$ *eri edustajien systeemiksi*, jos kaikilla indekseillä $i = 1, 2, \dots, n$ on voimassa

(i) $x_i \in S_i$,

(ii) $x_i \neq x_j$, jos $i \neq j$.

Esitetään esimerkki eri edustajien systeemeistä.

Esimerkki 3.2. Määritellään joukot $S_1, S_2, \dots, S_n$ siten, että $S_i = \{1, 2, \dots, i\}$, missä $i = 1, 2, \dots, n$. Tällöin joukoilla on olemassa vain yksi SDR, nimittäin vektori $(1, 2, \dots, n)$. Tämä vektori selvästi täyttää määritelmän 3.1 ehdot. Vektorin yksikäsitteisyys seuraa siitä, että eri edustajien systeemissä pitää olla n kappaletta eri komponentteja. Yleisesti SDR ei ole yksikäsitteinen.

On helppo konstruoida sellainen kokoelma joukkoja, että niillä ei ole olemassa eri edustajien systeemiä.

Esimerkki 3.3. Tyhjällä joukolla $\varnothing$ ei ole olemassa eri edustajien systeemiä. SDR on mahdoton löytää myös joukoille S_1, S_2, S_3, S_4, missä $S_1 = \{1, 4, 6\}$, $S_2 = \{1, 2\}$, $S_3 = \{1, 2\}$ ja $S_4 = \{1\}$. Joukoille S_2, S_3 ja S_4 pitäisi nimittäin löytää kolme eri edustajaa, mutta on voimassa $|S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 2$.

Hallin lause antaa välttämättömät ja riittävät ehdot eri edustajien systeemin olemassaololle. Lauseelle on myöhemmin esitetty alkuperäistä todistusta lyhyempiä perusteluja. Tässä esitettävän suoraviivaisen todistuksen julkaisi ensimmäisenä Thomas Easterfield [5]. Paul Halmos ja Herbert Vaughan keksivät sen myöhemmin uudelleen ja julkaisivat työnsä artikkelissa [9].

Lause 3.4 (P. Hall). *Olkoot $S_1, S_2, \ldots, S_n$ äärellisen joukon X osajoukkoja ja olkoon $\mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ indeksijoukko. Tällöin joukoilla $S_1, S_2, \ldots, S_n$ on olemassa SDR jos ja vain jos mielivaltaiselle m alkiota sisältävälle joukoista $S_1, S_2, \ldots, S_n$ muodostetulle unionille on voimassa ehto*

$$\Big| \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ |\mathcal{I}|=m}} S_i \Big| \geq m, \qquad 1 \leq m \leq n. \tag{1}$$

Todistus. Ehtoa (1) sanotaan *Hallin ehdoksi.* Sitä merkitään jatkossa lyhenteellä (H). Todistetaan lause erikseen molempiin suuntiin.
($\Longrightarrow$) Oletetaan, että SDR on olemassa ja tehdään vastaoletus, jonka mukaan unionissa (1) on vähemmän kuin m kappaletta alkioita. Tällöin joukoista $S_1, S_2, \ldots, S_n$ on selvästi mahdotonta valita sellaista edustajistoa, joka täyttäisi määritelmän 3.1 ehdot. Tämä ristiriita oletuksen kanssa todistaa, että ehto (H) on välttämätön.
($\Longleftarrow$) Oletetaan kääntäen, että ehto (H) on voimassa. Todistetaan väite induktiolla indeksin n suhteen.

Tapauksessa $n = 1$ tarkastellaan vain yhtä osajoukkoa, jolloin SDR on triviaalisti olemassa ja väite pätee.

Olkoon nyt $n > 1$. Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan SDR on olemassa kaikilla arvoilla $k < n$ ja pyritään osoittamaan, että väite pätee myös arvolla n. Otetaan aluksi käyttöön hyödyllinen apukäsite. Kokoelmaa, jossa on ℓ kappaletta joukkoja S_i, missä $1 \leq \ell < n$ kutsutaan *kriittiseksi perheeksi*, jos kokoelman unionin kardinaliteetti on ℓ. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan.
(1) Kriittistä perhettä ei ole olemassa
Valitaan mielivaltaisesti alkio $x \in S_n$. Poistetaan alkio x joukosta X ja tarkastellaan joukkoja $S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1}$, missä $S'_i = S_i \setminus \{x\}$. Koska ehto (H) on voimassa ja koska kriittistä perhettä ei ole olemassa, on kaikissa m-alkioisissa joukkojen S'_i unioneissa vähintään m kappaletta alkioita. Induktio-oletuksen

perusteella joukoilla $S_1', S_2', \ldots, S_{n-1}'$ on olemassa SDR. Olkoon tämä systeemi $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Lisättäessä tähän edustajistoon joukosta S_n poimittu alkio $x_n = x$ saadaan SDR alkuperäiselle kokoelmalle $S_1, S_2, \ldots, S_n$, jolloin väite on todistettu.

(2) Kriittinen perhe on olemassa

Numeroimalla tarvittaessa joukot uudelleen voidaan olettaa, että kriittinen perhe on kokoelma $S_1, S_2, \ldots, S_\ell$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\bigcup_{i=1}^{\ell} S_i = \tilde{X},$$

missä $|\tilde{X}| = \ell$. Indeksistä ℓ oletettiin, että $\ell < n$, jolloin induktio-oletuksesta seuraa SDR:n olemassaolo joukoille $S_1, S_2, \ldots, S_\ell$. On siis olemassa sellainen joukon $\tilde{X}$ alkioista muodostettu vektori $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$, että $x_i \in S_i$ kaikilla $1 \leq i \leq \ell$.

Tutkitaan seuraavaksi jäljellä olevaa osajoukkojen kokoelmaa $S_{\ell+1}, S_{\ell+2}, \ldots, S_n$ ja valitaan siitä mielivaltainen m-alkioinen kokoelma joukkoja. Merkitään tätä kokoelmaa kirjaimella J. Ehdosta (H) seuraa nyt, että joukkojen $S_1, S_2, \ldots, S_\ell$ ja kokoelman J unionissa on vähintään $\ell + m$ alkiota. Koska kokoelman $S_1, S_2, \ldots, S_\ell$ joukkojen unioni muodostaa joukon $\tilde{X}$, niin voidaan päätellä, että kokoelma J sisältää vähintään m kappaletta sellaisia alkioita, jotka eivät kuulu joukkoon $\tilde{X}$. Toisin sanoen ehto (H) on nyt voimassa joukoille

$$S_{\ell+1} \setminus \tilde{X}, S_{\ell+2} \setminus \tilde{X}, \ldots, S_n \setminus \tilde{X}. \tag{2}$$

Induktio-oletuksen perusteella kokoelmalla (2) on olemassa SDR. Kun tähän edustajistoon yhdistetään vektori $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ saadaan muodostettua SDR joukoille $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Kokoelman (2) leikkaus joukon $\tilde{X}$ kanssa on nimittäin tyhjä. Täten väite on tässäkin tapauksessa voimassa ja todistus on valmis. $\square$

Hallin lauseelle voidaan muotoilla seuraavassa huomautuksessa esitettävä arkielämään liittyvä tulkinta, minkä vuoksi lausetta kutsutaan myös *Hallin avioliittolauseeksi.*

Huomautus 3.5. Oletetaan, että tarkasteltavana on n naista ja m miestä. Hallin lauseen joukko X koostuu nyt alkioista $1, 2, \ldots, m$. Jokaisella naisella i on lista miehistä, joiden kanssa hän olisi valmis avioitumaan. Olkoon tämä lista joukko S_i. Miehet eivät ole tarkkoja vaimon valinnan suhteen ja heille kelpaavat kaikki naiset. Nyt Hallin lause sanoo, että kaikki naiset voivat avioitua onnellisesti jos ja vain jos kaikkia k naisen muodostamia joukkoja vastaa vähintään k eri miestä, joista jokaisen kanssa ainakin yksi nainen olisi valmis avioitumaan.

3.2 Marshall Hallin eksistenssilause

Kertalukua n olevan latinalaisen neliön mitkä tahansa $r < n$ ensimmäistä riviä muodostavat määritelmän 2.3 mukaisen latinalaisen suorakulmion. Nyt on luonnollista kysyä, voidaanko mielivaltainen $r < n$ riviä sisältävä latinalainen suorakulmio laajentaa latinalaiseksi neliöksi?

Tapaus $r = 1$ ei tuota suuria ongelmia. Muodostetaan valmiista rivistä sykli, jota rotatoidaan askel kerrallaan, jolloin tuloksena saadaan latinalainen neliö. Esimerkissä 3.6 muodostetaan latinalainen neliö tämän periaatteen avulla.

Esimerkki 3.6. Vektorista $(1, 5, 2, 4, 3)$ voidaan muodostaa latinalainen neliö aloittamalla sykli $(1\,5\,2\,4\,3)$ vuorotellen eri alkiosta ja kirjoittamalla tuloksena olevat viisi sykliä allekkain neliömatriisiksi. Tällä tavalla saadaan esimerkiksi neliö

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esimerkin perusteella on intuitiivisesti selvää, että jokaista kertalukua n vastaa ainakin yksi latinalainen neliö.

Marshall Hall (ei sukua Philip Hallille) todisti vuonna 1945 ilmestyneessä artikkelissaan [7], että määritelmän 2.3 mukaisen latinalaisen suorakulmion laajentaminen latinalaiseksi neliöksi on aina mahdollista suorakulmion koosta tai sen rakenteesta riippumatta. Tämä tulos aloitti osittaisten latinalaisten neliöiden täydentämistä koskevien kysymysten tutkimuksen. Se myös osoitti Hallin lauseen liittyvän latinalaisten neliöiden teoriaan.

Lause 3.7 (**M. Hall**). *Olkoon $1 \leq r < n$. Kertalukua $r \times n$ oleva määritelmän 2.3 mukainen latinalainen suorakulmio R voidaan aina laajentaa kertalukua n olevaksi latinalaiseksi neliöksi.*

Todistus. Todistuksen ajatuksena on osoittaa, että kertalukua $r \times n$ olevaan suorakulmioon R voidaan aina lisätä uusi rivi siten, että syntynyt matriisi R' täyttää määritelmän 2.3 ehdot. Tämän todistamisessa hyödynnetään lausetta 3.4. Toistamalla prosessia riittävän monta kertaa saadaan muodostettua haluttu latinalainen neliö.

Suoritetaan todistus induktiolla indeksin r suhteen. Jos $r = 1$, niin suorakulmioon voidaan selvästi lisätä rivi siten, että uusi suorakulmio R' täyttää määritelmän 2.3 ehdot. Oletetaan seuraavaksi, että $r > 1$.

Olkoon S_i suorakulmion R sarakkeeseen i kuulumattomista alkioista muodostettu joukko. Merkitään jälleen luvuista $1, 2, \ldots, n$ koostuvaa indeksijoukkoa symbolilla $\mathcal{I}$. Valittaessa mitkä tahansa ℓ kappaletta joukkoja S_i saadaan joukkojen alkioiden lukumäärien summaksi

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ |\mathcal{I}| = \ell}} |S_i| = \ell(n - r), \qquad 1 \leq \ell \leq n. \tag{3}$$

Jokaisessa suorakulmion R sarakkeessa on r symbolia. Lisäksi kukin luvuista $1, 2, \ldots, n$ esiintyy tarkalleen kerran jokaisella suorakulmion valmiiksi täytetyllä rivillä. Kukin luvuista $1, 2, \ldots, n$ esiintyy siis r kertaa käytäessä läpi suorakulmion kaikki n saraketta. Tällöin jokainen näistä luvuista kuuluu tarkalleen $n - r$ kappaleeseen joukkoja S_i. Siis valittaessa mitkä tahansa ℓ joukkoa S_i, mikä tahansa luvuista $1, 2, \ldots, n$ kuuluu enintään $n-r$ kappaleeseen näitä joukkoja. Nyt summan (3) avulla voidaan päätellä, että valittujen joukkojen S_i unionin alkioiden lukumäärälle on voimassa

$$\Big| \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ |\mathcal{I}| = \ell}} S_i \Big| \geq \frac{\ell(n - r)}{n - r} = \ell. \tag{4}$$

Epäyhtälö (4) todistaa itse asiassa Hallin ehdon (H) voimassaolon joukoille $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Niillä on siis olemassa SDR. Lisätään tämä SDR riviksi suorakulmioon R, jolloin saadaan uusi tyyppiä $(r+1) \times n$ oleva matriisi R'. Koska lisätty rivi oli SDR, on matriisi R' määritelmän 2.3 mukainen latinalainen suorakulmio. Induktio osoittaa nyt, että mielivaltainen määritelmän 2.3 mukainen latinalainen suorakulmio voidaan täydentää latinalaiseksi neliöksi. □

3.3 Ryserin lause

Herbert Ryser todisti vuoden 1951 artikkelissaan [14] merkittävän latinalaisten neliöiden muodostamista koskevan tuloksen, jota tässä yhteydessä kutsutaan *Ryserin lauseeksi*. Ryserin lause on oikeastaan lauseen 3.7 yleistys. Se kertoo, millaisten ehtojen vallitessa latinalainen suorakulmio voidaan laajentaa latinalaiseksi neliöksi. Ryser ja Henry Mann esittivät vuonna 1953 lauseelle hieman alkuperäistä lyhyemmän perustelun artikkelissa [13]. Tässä esityksessä seurataan kuitenkin Ryserin alkuperäisessä artikkelissa [14] esitettyä päättelyä. Aloitetaan lauseen pohjustus kombinatorisella lemmalla.

Lemma 3.8. *Olkoon A tyyppiä $r \times n$ oleva matriisi, joka koostuu pelkästään nollista ja ykkösistä. Matriisin jokaisella rivillä on tarkalleen k kappaletta ykkösiä. Lisäksi on voimassa $1 \leq r < n$. Olkoon matriisin A sarakkeessa i olevien ykkösten määrä $N(i)$. Jos kaikille indekseille $i = 1, 2, \ldots, n$ pätee*

$$k - (n - r) \leq N(i) \leq k, \tag{5}$$

niin matriisiin A voidaan lisätä $n - r$ kappaletta nollista ja ykkösistä koostuvaa riviä, jolloin tuloksena on neliömatriisi, jonka jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa on k kappaletta ykkösiä.

Todistus. Todistetaan lemma induktiolla rivien lukumäärän r suhteen. Ajatuksena on osoittaa, että ehdon (5) toteuttavaan matriisiin A voidaan aina lisätä sellainen rivi, että ehto (5) on voimassa myös uudelle matriisille A'.

Tutkitaan ensin tapausta $r = 1$. Oletetaan sitä varten, että A on nollista ja ykkösistä koostuva tyyppiä $1 \times n$ oleva matriisi, jonka ainoalla rivillä on k kappaletta ykkösiä. Ehto (5) on nyt voimassa kaikilla luvun k arvoilla. Tarkasteltavaan yhden rivin matriisiin voidaan aina lisätä $n-1$ riviä siten, että syntyvässä neliömatriisissa on k kappaletta ykkösiä jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa. Kyseinen täydennys voidaan konstruoida rotatoimalla matriisin A ainoaa riviä aloittaen se vuorotellen eri alkiosta ja kirjoittamalla syntyvät rivit allekkain neliömatriisiksi. Idea on samankaltainen, mitä käytettiin esimerkissä 3.6. Tapaus $r=1$ on siis selvä. Oletetaan sitten, että $r>1$ ja tarkastellaan tyyppiä $r \times n$ olevaa ehdon (5) toteuttavaa matriisia A.

Olkoon t sellaisten matriisin A sarakkeiden lukumäärä, joille on voimassa $N(i)<k$. Koska oletuksen mukaan $N(i) \leq k$, niin nyt niiden sarakkeiden lukumäärä, joille $N(i)=k$ on $n-t$. Toisaalta oletuksen mukaan $N(i)$ on vähintään $k-(n-r)$, jolloin matriisissa olevien ykkösten määräksi voidaan kirjoittaa

$$kr \geq (n-t)k + t(k-(n-r)). \tag{6}$$

Sieventämällä kaavaa (6) saadaan epäyhtälö $k(r-n) \geq t(r-n)$ ja koska $n>r$, voidaan päätellä, että $t \geq k$. Niiden sarakkeiden lukumäärä, joille $N(i)<k$ on siis vähintään k.

Suoritetaan edellisen kaltainen päättely, mutta merkitään nyt symbolilla p niiden matriisin A sarakkeiden lukumäärää, joille on voimassa $N(i)=k-(n-r)$. Tällöin niiden sarakkeiden lukumäärä, joille $N(i)>k-(n-r)$ on $n-p$. Matriisissa olevien ykkösten lukumääräksi saadaan tässä tapauksessa

$$kr \leq p(k-(n-r)) + (n-p)k,$$

joka voidaan sieventää muotoon $k(r-n) \leq p(r-n)$. Tästä nähdään, että $p \leq k$.

Lisätään seuraavaksi matriisiin A rivi, jossa on k kappaletta ykkösiä ja siten $n-k$ kappaletta nollia. Edellä esitetyn päättelyn perusteella $t \geq k$, joten lisättävässä rivissä on ainakin k paikkaa, joihin ykköset voidaan sijoittaa siten, että tyyppiä $(r+1) \times n$ olevassa uudessa matriisissa A' on enintään k kappaletta ykkösiä missä tahansa sarakkeessaan. Lisäksi tuloksesta $p \leq k$ seuraa, että ykköset voidaan lisätä kaikkiin sellaisiin kohtiin, että niitä vastaaville matriisin A sarakkeille pätee $N(i)=k-(n-r)$. Täten ehto

(5) on voimassa myös uudelle $(r+1)$-riviselle matriisille. Toisin sanoen: jos matriisin A' sarakkeessa i olevien ykkösten lukumäärä on $M(i)$, niin

$$k - (n - (r+1)) \leq M(i) \leq k.$$

Induktiosta seuraa, että mielivaltainen lauseen oletusten mukainen matriisi voidaan täydentää rivi kerrallaan neliömatriisiksi, jossa on k kappaletta ykkösiä jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa. Alkuperäinen väite on näin todistettu. $\square$

Jatketaan Ryserin lauseen alustamista johtamalla tarpeellinen seuraus lemmasta 3.8. Määritellään tätä varten *permutaatiomatriisin* käsite.

Määritelmä 3.9. Olkoot Q ykkösistä ja nollista koostuva tyyppiä $m \times n$ oleva matriisi, Q^T sen transpoosi sekä I identiteettimatriisi. Jos matriisille Q on voimassa yhtälö

$$QQ^T = I,$$

niin sitä sanotaan *permutaatiomatriisiksi*.

Määritelmä 3.9 poikkeaa hieman tavanomaisesta permutaatiomatriisin määritelmästä. Yleensä permutaatiomatriisit määritellään nollista ja ykkösistä koostuvina neliömatriiseina, joissa on tarkalleen yksi ykkönen jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa. Tällaiset permutaatiomatriisit saadaan määritelmästä 3.9 erikoistapauksena $m = n$. Määritelmän 3.9 ajatuksena on rajata määritelmän piiriin myös sellaiset nollista ja ykkösistä koostuvat matriisit, joissa on enemmän sarakkeita kuin rivejä ja joissa on tarkalleen yksi ykkönen jokaisella rivillä ja korkeintaan yksi ykkönen kussakin sarakkeessa. Näin muodostetut matriisit toteuttavat ehdon $QQ^T = I$, sillä matriisin kertominen transpoosillaan palautuu vaakarivien sisätulojen laskemiseen. Tällaisia laajennettuja permutaatiomatriiseja tarvitaan Ryserin lauseen todistuksessa.

Lemma 3.10 on tähän yhteyteen sopivaksi muotoiltu erikoistapaus Hallin lauseesta. Tulos ilmestyi ensimmäisen kerran Dénes Königin artikkelissa [10], jossa lause esitettiin graafiteorian terminologiaan sovellettuna. Tässä esitettävä todistus on peräisin artikkelista [13].

Lemma 3.10. *Olkoon A tyyppiä $n \times n$ oleva neliömatriisi, jossa on k kappaletta ykkösiä jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa. Tällöin on voimassa kaava*

$$A = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_k,$$

missä matriisit Q_i ovat permutaatiomatriiseja.

Todistus. Olkoot matriisin A rivillä i olevia ykkösiä vastaavat sarakkeet $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Muodostetaan tällä tavalla n kappaletta joukkoja $S_i = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Jokaista matriisin riviä siis vastaa yksi joukko. Nyt mielivaltaisesti valituille joukoille S_i on voimassa kaava

$$\Big| \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ |\mathcal{I}| = \ell}} S_i \Big| \geq \ell, \qquad 1 \leq \ell \leq n, \tag{7}$$

missä $\mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ on indeksijoukko. Kaavan (7) voimassaolo nähdään tekemällä vastaoletus, jonka mukaan unionissa olisi enintään $\ell - 1$ alkiota. Tällöin matriisin A indeksijoukkoa $\mathcal{I}$ vastaavilla riveillä olisi korkeintaan $k(\ell - 1)$ kappaletta ykkösiä. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä kyseisten rivien ykkösten lukumäärä on selvästi $k\ell$.

Kaava (7) on itse asiassa Hallin ehto, joten lauseen 3.4 perusteella joukoilla $S_1, S_2, \ldots, S_n$ on olemassa SDR. Muodostetaan nyt tyyppiä $n \times n$ oleva matriisi Q_1 siten, että joukon S_i edustaja eri edustajien systeemissä määrittää matriisin Q_1 rivillä i olevan ykkösen paikan. Tällä tavalla saatavalle matriisille on voimassa $Q_1 Q_1^T = I$, joten se on itse asiassa permutaatiomatriisi.

Sovelletaan edellä kuvattua prosessia uudelleen matriisiin $A' = A - Q_1$. Uusista joukoista $S_1', S_2', \ldots, S_n'$ saadaan muodostettua uusi SDR, joka antaa toisen permutaatiomatriisin Q_2. Jatkamalla samalla tavalla saadaan matriisi A hajotettua permutaatiomatriisien summaksi lemman esittämällä tavalla. □

Seuraava tulos seuraa lemmoista 3.8 ja 3.10.

Seuraus 3.11. *Lemman 3.8 mukaiselle matriisille A on voimassa kaava*

$$A = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_k, \tag{8}$$

missä matriisit Q_i ovat permutaatiomatriiseja.

Todistus. Koska lemman 3.8 ehdot ovat oletuksen perustella voimassa, voidaan matriisi A täydentää lemman 3.10 mukaiseksi neliömatriisiksi. Hajotetaan tämä neliömatriisi permutaatiomatriisien summaksi käyttäen lemmaa 3.10. Kaava (8) nähdään todeksi valitsemalla kaikista hajotelman matriiseista $r < n$ ensimmäistä riviä. □

Nyt voidaan esittää ja todistaa varsinainen Ryserin lause. Merkinnällä $N(i)$ tarkoitetaan symbolin i esiintymisten lukumäärää latinalaisessa suorakulmiossa. Lisäksi oletetaan, että $r, s \leq n$.

Lause 3.12 (H. Ryser). *Luvuista $1, 2, \ldots, n$ muodostettu kertalukua $r \times s$ oleva latinalainen suorakulmio R voidaan laajentaa kertalukua n olevaksi latinalaiseksi neliöksi jos ja vain jos $N(i) \geq r + s - n$ kaikilla indekseillä $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Todistus. Osoitetaan erikseen, että Ryserin lauseen ehto on sekä välttämätön että riittävä.
($\Longrightarrow$) Todistetaan ensin, että lauseen ehto on välttämätön. Oletetaan tätä varten, että kertalukua $r \times s$ oleva latinalainen suorakulmio R voidaan laajentaa kertaluvun n latinalaiseksi neliöksi. Merkitään symbolilla S_i niiden $k = n - s$ kokonaisluvun joukkoa, jotka eivät ole suorakulmion R rivillä i. Merkinnällä $M(i)$ tarkoitetaan luvun i esiintymisten lukumäärää joukoissa $S_1, S_2, \ldots, S_r$.

Jos R on laajennettavissa latinalaiseksi neliöksi, niin luku i ei voi esiintyä joukoissa $S_1, S_2, \ldots, S_r$ enempää kuin $k = n - s$ kertaa. Muuten muodostettavaan latinalaiseen neliöön tulisi ainakin yksi sarake, jossa jokin luku esiintyisi vähintään kaksi kertaa. Täten on voimassa $M(i) \leq n - s$. Lisäksi mielivaltainen luku $i = 1, 2, \ldots, n$ esiintyy tarkalleen kerran joko suorakulmion R rivillä j tai joukossa S_j. On siis voimassa $N(i) + M(i) = r$. Yhdistämällä saadut kaksi tulosta voidaan kirjoittaa

$$N(i) = r - M(i) \geq r + s - n,$$

mikä todistaa väitteen.
($\Longleftarrow$) Todistetaan seuraavaksi, että lauseen ehto on riittävä. Oletetaan siis,

että $N(i) \geq r + s - n$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Olkoot joukot S_i muodostettu luvuista $i_1, i_2, \ldots, i_k$, missä siis jälleen $k = n - s$. Konstruoidaan tyyppiä $r \times n$ oleva matriisi A siten, että matriisin riville i tulee alkioksi ykkönen sarakkeisiin $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ja nolla muihin kohtiin. Matriisissa on siis k kappaletta ykkösiä jokaisella rivillä.

Osoitetaan, että A täyttää lemman 3.8 ehdon (5). Matriisin kussakin sarakkeessa olevien ykkösten määrä kertoo sen, kuinka monta kertaa saraketta vastaava alkio esiintyy joukoissa $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Todistuksessa käytettyjen merkintöjen avulla ilmaistuna matriisin A sarakkeen i alkioiden summa on $M(i)$. Oletuksesta $N(i) \geq r + s - n$ sekä siitä, että $N(i) + M(i) = r$ seuraa epäyhtälö

$$N(i) = r - M(i) \geq r + s - n. \tag{9}$$

Kaavasta (9) nähdään, että $M(i) \leq n - s = k$ eli ehdon (5) ylärajaa koskeva osa on voimassa. Lisäksi koska R on oletuksen perusteella tyyppiä $r \times s$ oleva latinalainen suorakulmio, niin $N(i) \leq s$. Tästä ja kaavan (9) alkuosasta nähdään, että

$$M(i) \geq r - s = k - (n - r)$$

eli ehdon (5) alarajaakin koskeva osa on voimassa. Näin matriisi A totetuttaa lemman 3.8 ehdot.

Seurauksen 3.11 perusteella voidaan nyt kirjoittaa

$$A = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_k, \tag{10}$$

missä matriisit Q_i ovat tyyppiä $r \times n$ olevia permutaatiomatriiseja. Koska $r \leq n$, on matriiseissa Q_i jokaisella rivillä tarkalleen yksi ykkönen. Olkoon sitten matriisin Q_t rivillä j oleva ykkönen sarakkeessa t_j. Muodostetaan luvuista t_j k kappaletta vektoreita $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$. Kukin vektoreista on siis muodostettu siten, että käydään tietty matriisi Q_t läpi rivi riviltä ja valitaan rivin j ykköstä vastaava sarake vektorin komponentiksi t_j. Permutaatiomatriisin määritelmästä seuraa, että $t_1, t_2, \ldots, t_r$ ovat eri lukuja. Summasta (10) puolestaan nähdään, että kaikilla indekseillä $u \neq v$ on voimassa $u_j \neq v_j$. Summassa kahdella matriisilla ei siis ole ykköstä samassa sarakkeessa millään rivillä.

Liitetään seuraavaksi konstruoidut k vektoria $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ kertalukua $r \times s$ olevaan latinalaiseen suorakulmioon R, jolloin saadaan tyyppiä $r \times n$ oleva matriisi R'. Edellisistä huomioista voidaan päätellä, että matriisi R' on määritelmän 2.3 ehdot täyttävä latinalainen suorakulmio. Tämä suorakulmio R' voidaan laajentaa kertalukua n olevaksi latinalaiseksi neliöksi soveltamalla Marshall Hallin eksistenssilausetta. Tämä osoittaa, että Ryserin lauseen ehto on myös riittävä. $\square$

Tutkittaessa Ryserin lauseen muotoilua huomataan, että valitsemalla $s = n$ saadaan erikoistapauksena Marshall Hallin eksistenssilause. Edellä Marshall Hallin lausetta käytettiin Ryserin lauseen todistuksen viimeistelyyn. Tämä ei kuitenkaan olisi ollut välttämätöntä. Todistuksessa nimittäin laajennettiin ehdon $N(i) \geq r + s - n$ toteuttava kertaluvun $r \times s$ latinalainen suorakulmio kertaluvun $r \times n$ suorakulmioksi käyttämättä Marshall Hallin lausetta. Tarkasteltaessa Ryserin lauseen ehtoa kertaluvun $r \times n$ suorakulmion transpoosin eli kertalukua $n \times r$ olevan latinalaisen suorakulmion tapauksessa, saadaan $N(i) \geq n + r - n = r$ eli ehto on selvästi voimassa. Tämä tarkoittaa sitä, että Ryserin lauseen todistuksessa käytettyä menetelmää voidaan soveltaa myös kertalukua $n \times r$ olevaan suorakulmioon, jolloin se saadaan laajennettua latinalaiseksi neliöksi ilman Marshall Hallin lausetta. Marshall Hallin eksistenssilause esitettiin tässä tutkielmassa sen historiallisen merkityksen vuoksi. Lisäksi se helpottaa Ryserin lauseen omaksumista.

4 Evansin lauseet

4.1 Riittävä ehto

Luvussa 2 selvisi, että kaikkia osittaisia latinalaisia neliöitä ei voida täydentää kokonaisiksi latinalaisiksi neliöiksi. Luvussa esitettiin kuitenkin kysymys siitä, voidaanko mielivaltainen osittainen latinalainen neliö upottaa johonkin laajempaan latinalaiseen neliöön?

Trevor Evans ratkaisi tämän ongelman vuonna 1960 ilmestyneessä artikkelissaan [6]. Evans antaa artikkelissaan riittävän ehdon sille, milloin osittainen latinalainen neliö voidaan upottaa suurempaan latinalaiseen neliöön. Samassa artikkelissa [6] Evans osoitti, että tämä riittävä ehto on pienin lisärajoituksin myös välttämätön. Täten Evansin lauseissa esitettävä ehto osittaisten latinalaisten neliöiden upottamiselle on tietyssä mielessä paras mahdollinen. Lause 4.1 antaa riittävän ehdon osittaisen neliön upottamiselle.

Lause 4.1 (T. Evans). *Olkoon P mielivaltainen kertalukua n oleva osittainen latinalainen neliö. Tällöin jokaista kertalukua $t \geq 2n$ kohden on olemassa latinalainen neliö, johon neliö P voidaan upottaa.*

Todistus. Olkoon P kertalukua n oleva osittainen latinalainen neliö, joka on muodostettu luvuista $1, 2, \ldots, n$. Oletetaan lisäksi, että $t \geq 2n$. Olkoon B luvuista $n+1, n+2, \ldots, 2n$ muodostettu kertalukua n oleva latinalainen neliö. Täytetään neliön P tyhjät solut kyseisiä soluja vastaavilla neliön B alkioilla. Näin saadaan kertalukua $n \times n$ oleva latinalainen suorakulmio P', jonka alkiot ovat lukuja $1, 2, \ldots, 2n$. Koska $t \geq 2n$, voidaan myös ajatella, että suorakulmio P' on muodostettu luvuista $1, 2, \ldots, t$. Ryserin lauseen mukaan P' voidaan laajentaa kertaluvun t latinalaiseksi neliöksi jos ja vain jos jokainen luvuista $1, 2, \ldots, t$ esiintyy suorakulmiossa P' vähintään $n + n - t = 2n - t$ kertaa. Oletuksesta $t \geq 2n$ seuraa, että $2n - t \leq 0$, joten Ryserin lauseen ehto on triviaalisti voimassa. Täten P' voidaan laajentaa kertalukua t olevaksi latinalaiseksi neliöksi L, johon siis osittainen latinalainen neliö P voidaan upottaa. $\square$

4.2 Välttämätön ehto

Tässä pykälässä osoitetaan, että ehto $t \geq 2n$ on osittaisten latinalaisten neliöiden upottamisen kannalta välttämätön. Nyt upotettavan neliön koolle asetetaan rajoitus $n \geq 4$.

Lause 4.2 (**T. Evans**). *Olkoot $n \geq 4$ ja P mielivaltainen kertalukua n oleva osittainen latinalainen neliö. Jos neliö P voidaan upottaa kertalukua t olevaan latinalaiseen neliöön, niin $t \geq 2n$.*

Todistus. Käytetään epäsuoraa todistusta. Tehdään sitä varten vastaoletus, jonka mukaan mielivaltainen kertaluvun n osittainen latinalainen neliö P voidaan upottaa johonkin kertalukua $t < 2n$ olevaan latinalaiseen neliöön. Todistuksen ajatuksena on konstruoida sellainen osittainen neliö P, jota ei voida upottaa mihinkään kertalukua $t < 2n$ olevaan latinalaiseen neliöön. Tästä syntyvä ristiriita todistaa lauseen väitteen.

Olkoon P kertalukua n oleva osittainen latinalainen neliö, jonka rivillä $n-1$ sarakkeessa 2 oleva alkio on 1. Rivin $n-1$ sarakkeessa 3, sekä rivin n sarakkeessa 2 olevat solut ovat tyhjiä. Neliön kaikki muut alkiot on valittu siten, että rivin i sarakkeessa j oleva alkio on $i + j - 1 \pmod{n}$. Neliö P on siis muotoa

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & \square & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & \square & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Oletetaan, että osittainen neliö P on upotettu luvuista $1, 2, \ldots, t$ muodostettuun latinalaiseen neliöön L. Kaavasta (11) nähdään, että neliön P tyhjiä soluja ei voida täyttää millään luvuista $1, 2, \ldots, n$. Näin ollen neliön L on oltava suurempi kuin neliö P. On siis voimassa $t \geq n+1$. Neliön P ensimmäisillä $n-2$ riveillä ei ole tyhjiä soluja. Koska alkio $n+1$ ei tietenkään kuulu neliöön P, on sen sijaittava neliön P ulkopuolella jokaisella neliön L ensimmäisellä $n-2$ rivillä. Täten neliössä L on oltava neliön P tuomien n sarakkeen lisäksi vielä vähintään $n-2$ saraketta, jotta latinalaisen neliön määritelmä olisi voimassa. Neliön L koolle saadaan siis alaraja $t \geq n+n-2 = 2n-2$.

Lisätään seuraavaksi neliön P kahteen tyhjään soluun näitä soluja vastaavat alkiot neliöstä L. Olkoon syntyvä neliö P'. Nyt neliötä P' voidaan käsitellä luvuista $1, 2, \ldots, n, \ldots, t$ muodostettuna latinalaisena suorakulmiona. Sovelletaan tähän suorakulmioon Ryserin lausetta. Vastaoletuksen mukaan on voimassa $t < 2n$, joten Ryserin lauseen ehto on nyt $N(i) \geq n+n-t = 2n-t > 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että jokainen luvuista $1, 2, \ldots, t$ esiintyy ainakin kerran neliössä P'. Toisaalta neliössä P oli alun perin kaksi tyhjää paikkaa. Neliössä P' on siis korkeintaan kaksi alkiota joukosta $\{n+1, n+2, \ldots, t\}$. Edellä kuitenkin osoitettiin, että $t \geq 2n-2$. Tästä seuraa ristiriita, jos $n > 4$. Joukossa $\{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, t\}$ on nimittäin vähintään kahdeksan alkiota, jolloin ainakin yksi alkioista $\{n+1, n+2, \ldots, t\}$ jää valitsematta neliöön P'.

Tapauksessa $n = 4$ on oltava $t = 6$ tai $t = 7$, sillä parametrin t on oltava välillä $2n-2 \leq t < 2n$. Jos $t = 7$, niin $\{n+1, n+2, \ldots, t\} = \{5, 6, 7\}$, jolloin kaikkia kolmea alkiota ei taaskaan voida valita ja seurauksena on ristiriita. Jos taas $t = 6$, niin Ryserin lauseen ehto on $N(i) \geq n+n-t = 2$ eli jokainen alkioista $1, 2, \ldots, 6$ esiintyy vähintään kaksi kertaa neliössä P'. Jos neliön P tyhjät paikat on täytetty samalla alkiolla neliössä P', niin toinen joukon $\{5, 6\}$ alkioista ei esiinny tässä neliössä, mikä on ristiriita. Jos taas kumpikin joukon $\{5, 6\}$ alkio esiintyy neliössä P', niin ne kumpikin esiintyvät siinä vain kerran, mikä johtaa jälleen ristiriitaan.

Näin ollen mielivaltaista osittaista kertalukua $n \geq 4$ olevaa latinalaista neliötä ei voi upottaa kertalukua t olevaan latinalaiseen neliöön, jos $t < 2n$. □

Lause 4.2 koski vain kertaluvun arvoja $n \geq 4$. Tätä pienemmät arvot ovat erikoistapauksia eivätkä ne sen vuoksi ole erityisen kiinnostavia. Trevor Evans toteaa artikkelissaan [6] näistä kertaluvun arvoista, että

(i) jokainen kertalukua $n = 2$ oleva osittainen latinalainen neliö voidaan aina upottaa johonkin kertalukua 3 tai 4 olevaan latinalaiseen neliöön ja on olemassa kertalukua 2 oleva osittainen latinalainen neliö, jota ei voida upottaa mihinkään kertaluvun 2 latinalaiseen neliöön,

(ii) jokainen kertalukua $n = 3$ oleva osittainen latinalainen neliö voidaan aina upottaa johonkin kertalukua 3, 4 tai 5 olevaan latinalaiseen neliöön ja on olemassa kertalukua 3 oleva osittainen latinalainen neliö, jota ei voida upottaa mihinkään kertalukua 3 tai 4 olevaan latinalaiseen neliöön.

Nämä Evansin esittämät huomiot osoittavat, että ehto $t \geq 2n$ ei ole välttämätön osittaisten latinalaisten neliöiden upottamiselle kertalukujen $n = 2$ ja $n = 3$ tapauksissa. Sen sijaan ehdon riittävyys pätee kaikille kertaluvun n arvoille, kuten lause 4.1 osoittaa.

Marshall Hallin, Herbert Ryserin ja Trevor Evansin lauseiden todistukset ovat siinä mielessä kauniita, että ne eivät ainoastaan todista lauseiden väitteitä, vaan tarjoavat myös tavan konstruoida latinalaisia neliöitä. Seuraavassa esimerkissä muodostetaan latinalainen neliö käyttämällä näiden lauseiden todistusten menetelmiä.

Esimerkki 4.3. Tutkitaan luvuista $1, 2, 3$ ja 4 muodostettua kertalukua 4 olevaa osittaista latinalaista neliötä

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdot \\ \cdot & 3 & 2 & 4 \\ \cdot & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

ja pyritään etsimään kertalukua 8 oleva latinalainen neliö, johon se voidaan upottaa.

Tarkastelemalla neliön ensimmäistä riviä huomataan heti, että neliötä ei voida täydentää suoraan latinalaiseksi neliöksi. Sen sijaan se voidaan upottaa lauseen 4.1 perusteella johonkin kertalukua $t \geq 2n = 8$ olevaan latinalaiseen neliöön. Toimitaan kuten lauseen 4.1 todistuksessa ja muodostetaan luvuista $5, 6, 7$ ja 8 koostuva mielivaltainen latinalainen neliö. Käyttämällä esimerkin

3.6 menetelmää saadaan yhdeksi mahdolliseksi neliöksi

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Täydennetään seuraavaksi osittainen neliö P ottamalla puuttuvat alkiot neliöstä B. Tuloksena on latinalainen suorakulmio

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jotta Ryserin lauseen ehto olisi voimassa, on jokaisen luvuista $1, 2, \ldots, 8$ esiinnyttävä vähintään $4 + 4 - 8 = 0$ kertaa suorakulmiossa P'. Ehto on selvästi voimassa, joten P' voidaan laajentaa kertaluvun 8 latinalaiseksi neliöksi. Muodostetaan Ryserin ja Marshall Hallin lauseiden avulla eräs tällainen neliö L. Laajennetaan ensin kertalukua 4×4 oleva suorakulmio kertaluvun 4×8 latinalaiseksi suorakulmioksi lauseen 3.12 todistuksen menetelmällä. Muodostetaan tätä varten joukot

$$\begin{aligned} S_1 &= \{4, 5, 6, 7\}, \qquad & S_2 &= \{1, 5, 7, 8\} \\ S_3 &= \{2, 3, 5, 8\}, \qquad & S_4 &= \{2, 3, 4, 7\}, \end{aligned}$$

jotka siis koostuvat suorakulmion P' riveiltä puuttuvista alkioista.

Muodostetaan seuraavaksi joukoista S_i Ryserin lauseen todistuksen mukainen matriisi A ja hajotetaan se summaksi

$$A = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

missä Q_1, Q_2, Q_3 ja Q_4 ovat permutaatiomatriiseja. Näistä permutaatiomatriiseista voidaan sitten muodostaa neljä vektoria, jotka voidaan lisätä suorakulmion P' pystyriveiksi. Tällöin saadaan uusi kertalukua 4×8 oleva suorakulmio P''. Suoritetuissa toimenpiteissä etsitään itse asiassa neljä eri edustajien systeemiä joukoille S_i ja permutaatiomatriiseista muodostettavat vektorit ovat juuri nämä neljä systeemiä. Tässä tapauksessa yksi mahdollisista syntyvistä suorakulmioista on

$$P'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 7 & 1 & 8 & 5 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 2 & 8 & 5 & 3 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 3 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisi P'' on määritelmän 2.3 mukainen latinalainen suorakulmio, joten se voidaan laajentaa lauseen 3.7 avulla kertaluvun 8 latinalaiseksi neliöksi L. Olkoot $S'_1, S'_2, \ldots, S'_8$ suorakulmion P'' sarakkeista puuttuvista alkioista muodostetut joukot. Konstruoidaan näistä joukoista neljä eri edustajien systeemiä, joiden olemassaolon Marshall Hallin lauseen todistus takaa. Liitetään nämä systeemit suorakulmion uusiksi riveiksi, jolloin tuloksena on latinalainen neliö. Tässä tapauksessa puuttuvista alkioista koostuvat joukot ovat

$$\begin{aligned} S'_1 &= \{2,3,4,5\}, & S'_2 &= \{1,6,7,8\} \\ S'_3 &= \{4,5,7,8\}, & S'_4 &= \{2,3,5,7\} \\ S'_5 &= \{1,5,6,8\}, & S'_6 &= \{2,3,4,6\} \\ S'_7 &= \{1,3,4,7\}, & S'_8 &= \{1,2,6,8\}. \end{aligned}$$

Näin lopulliseksi latinalaiseksi neliöksi L voidaan kirjoittaa

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 7 & 1 & 8 & 5 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 2 & 8 & 5 & 3 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 8 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 5 & 2 & 6 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 7 & 5 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

5 Evansin konjektuuri

5.1 Tarkasteltava ongelma

Pohditaan jälleen osittaisten latinalaisten neliöiden täydentämiseen liittyviä kysymyksiä. Rajoitetaan tässä yhteydessä tarkastelu koskemaan sitä, milloin osittainen latinalainen neliö voidaan täydentää suoraan latinalaiseksi neliöksi. Nyt ei siis sallita upotuksia suurempiin neliöihin. Pohjustetaan tässä luvussa tutkittavaa ongelmaa esimerkin avulla.

Esimerkki 5.1. Esimerkissä 2.6 esitettiin osittainen latinalainen neliö, jota ei voitu täydentää latinalaiseksi neliöksi. Itse asiassa vastaava tilanne saadaan syntymään jo silloin kun osittaisessa neliössä on kertalukunsa ilmoittama määrä täytettyjä alkioita. Kertalukua n olevaa neliötä

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & \square \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

ei nimittäin voida täydentää latinalaiseksi neliöksi.

Trevor Evans esitti artikkelissaan [6] kysymyksen, voidaanko kertalukua n oleva osittainen latinalainen neliö, jossa on enintään $n-1$ valmiiksi täytettyä alkiota täydentää kertaluvun n latinalaiseksi neliöksi? Evans otaksui, että tämä on aina mahdollista ja hänen arvaustaan alettiinkin kutsua kirjallisuudessa *Evansin konjektuuriksi*. Otaksuman puolesta saatiin vankkaa empiiristä näyttöä, minkä lisäksi se todistettiin monessa suhteessa ainakin osittain paikkansa pitäväksi. Kaikissa näissä todistuksissa jouduttiin kuitenkin tekemään tarkasteltaville osittaisille neliöille jonkinlaisia lisäoletuksia ja täydellinen todistus antoi yhä odottaa itseään.

Vuonna 1981 ilmestynyt Bohdan Smetaniukin artikkeli [15] sisälsi lopulta täydellisen todistuksen Evansin konjektuurille. Samoihin aikoihin Lars Andersen ja Anthony Hilton keksivät itsenäisesti toisenlaisen todistuksen. Heidän todistuksensa oli kuitenkin selvästi monimutkaisempi ja tämän vuoksi se julkaistiin vasta vuonna 1983 artikkelissa [1]. Tämä monimutkaisempi todistus sisälsi kuitenkin tiettyjä kriteerejä sille, milloin n täytettyä alkiota sisältävä osittainen kertalukua n oleva latinalainen neliö voidaan täydentää kokonaiseksi neliöksi. Monimutkaisemmallakin todistuksella on siis hyvät puolensa.

Tässä tutkielmassa esitetään Smetaniukin todistus Evansin konjektuurille. Todistus perustuu induktioon ja se on konstruktiivinen. Annettu osittainen neliö voidaan näin ollen täydentää todistuksessa esitettyä menetelmää käyttäen. Esimerkissä 5.8 täytetään eräs osittainen latinalainen neliö Smetaniukin konstruktion mukaisesti. Lisäksi esimerkki 5.1 osoittaa, että Evansin konjektuurin tulosta ei voida parantaa. Se on siis paras mahdollinen laatuaan.

5.2 Lindnerin osittainen ratkaisu

Valmistellaan Smetaniukin varsinaista todistusta tuloksella, joka on peräisin Charles Lindnerin artikkelista [12]. Kyse on eräästä edellä mainituista Evansin konjektuurin osittaisista todistuksista. Tässä esitettävä todistus löytyy myös teoksesta [2]. Kyseisessä teoksessa on esitetty lisäksi Smetaniukin todistus, sekä todistukset Hallin avioliittolauseelle ja Marshall Hallin eksistenssilauseelle. Lindnerin todistusta täytyy kuitenkin vielä pohjustaa esittämällä eräitä osittaisia latinalaisia neliöitä koskevia tärkeitä huomioita.

Huomautus 5.2. Latinalaisia neliöitä voidaan tutkia myös niin sanotussa *rivikaaviomuodossa*. Rivikaavio on tyyppiä $3 \times n^2$ oleva matriisi, josta käy täysin ilmi kertalukua n olevan latinalaisen neliön rakenne. Kyseessä on siis normaalin matriisiesityksen kanssa ekvivalentti tapa esittää latinalaisia neliöitä. Latinalaista neliötä vastaavan rivikaavion kolmannella rivillä on esitetty kaikki neliön alkiot. Rivikaavion kaksi ylintä riviä ilmaisevat kunkin alkion paikan neliössä siten, että kaavion ylin rivi kertoo alkiota vastaavan rivin ja kaavion toinen rivi kertoo alkiota vastaavan sarakkeen. Näin ollen yksi rivikaavion sarake sisältää tiedon latinalaisen neliön tietyssä solussa olevasta alkiosta. Asia voidaan esittää parhaiten esimerkin avulla. Neliötä

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

kuvaava rivikaavio on

$$\begin{array}{r} R: \\ C: \\ E: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi mielivaltaista tyyppiä $3 \times n^2$ olevaa rivikaaviota. Valitaan kaaviosta kaksi riviä ja muodostetaan näiden rivien alkioista n^2 kappaletta vektoreita (i, j) siten, että i ja j valitaan eri riveiltä mutta samasta sarakkeesta. Rivikaavion kahden vaakarivin sanotaan olevan *ortogonaalisia* jos kukin pari (i, j) esiintyy näistä riveistä muodostettujen vektorien joukossa tarkalleen kerran. Jos rivikaavion kaikki vaakarivit ovat parittain ortogonaalisia, niin rivikaavio on ortogonaalinen. Nyt tyyppiä $3 \times n^2$ oleva rivikaavio kuvaa kertalukua n olevaa latinalaista neliötä jos ja vain jos rivikaavio on ortogonaalinen.

Kaksi rivikaaviota, jotka eroavat ainoastaan sarakkeiden järjestyksen suhteen esittävät samaa latinalaista neliötä. Tässä mielessä rivikaavion sarakkeiden järjestyksellä ei siis ole merkitystä. Lisäksi rivikaavion kokonaisten vaakarivien permutointi ei vaikuta sen ortogonaalisuuteen. Latinalaista neliötä vastaava rivikaavio esittää siten jotakin latinalaista neliötä, vaikka rivikaavion vaakarivejä permutoitaisiin.

Olkoon sitten P osittainen latinalainen neliö, jossa on t kappaletta valmiiksi täytettyjä alkioita. Tällainen osittainen neliö vastaa rivikaaviota, josta on täytetty t saraketta muiden sarakkeiden ollessa tyhjiä. Lisäksi yksikään pari (i, j) ei esiinny rivikaaviossa useammin kuin kerran millään kahdella vaakarivillä. Olkoon tämä neliötä P vastaava rivikaavio A. Nyt osittainen latinalainen neliö P voidaan täydentää latinalaiseksi neliöksi jos ja vain jos rivikaavio A voidaan täydentää ortogonaaliseksi rivikaavioksi.

Vaihdetaan seuraavaksi rivikaavion A ensimmäisen ja kolmannen vaakarivin paikkoja, jolloin saadaan uusi rivikaavio A'. Edellä todettiin, että vaakarivien permutointi ei vaikuta rivikaavion ortogonaalisuuteen. Rivikaavio A voidaan siis täydentää ortogonaaliseksi rivikaavioksi jos ja vain jos A' voidaan täydentää ortogonaaliseksi rivikaavioksi.

Nyt voidaan siirtyä tarkastelemaan Charles Lindnerin osittaista ratkaisua Evansin konjektuurille.

Lause 5.3 (**C. Lindner**). *Olkoon P kertalukua n oleva osittainen latinalainen neliö. Oletetaan, että neliössä P on korkeintaan $n-1$ valmiiksi täytettyä alkiota. Oletetaan lisäksi, että neliössä on korkeintaan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ eri alkiota. Tällöin P voidaan täydentää kertalukua n olevaksi latinalaiseksi neliöksi.*

Todistus. Muunnetaan tarkasteltava ongelma ensin mukavampaan muotoon huomautuksen 5.2 avulla. Olkoon P lauseen oletusten mukainen osittainen latinalainen neliö. Tarkastellaan neliötä P sen rivikaavioesityksen avulla. Koska neliössä P on enintään $n-1$ valmiiksi täytettyä alkiota, on neliötä vastaavassa rivikaaviossa korkeintaan $n-1$ valmiiksi täytettyä saraketta. Lisäksi rivikaavion alimmalla rivillä on enintään $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ eri alkiota, sillä neliössä P on oletuksen mukaan korkeintaan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ eri alkiota. Rivikaavion ensimmäisen ja kolmannen vaakarivin paikkoja voidaan vaihtaa tarkasteltavan ongelman olennaisesti muuttumatta. Vaihdon tuloksena olevassa rivikaaviossa on enintään $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ eri symbolia ylimmällä vaakarivillä. Tämä tarkoittaa sitä, että ehto enintään $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ eri alkiosta voidaan korvata muotoilulla, jonka mukaan neliön P valmiiksi täytetyt alkiot sijaitsevat enintään $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ neliön rivillä. Nimeämällä tarvittaessa alkuperäisen neliön valmiiksi täytetyt alkiot uudelleen voidaan vielä olettaa, että kyseiset rivit ovat neliön P ensimmäiset rivit.

Oletetaan siis, että P on lauseen oletukset täyttävä osittainen latinalainen neliö, jonka valmiiksi täytetyt alkiot ovat riveillä $1, 2, \ldots, r$, missä $r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Merkitään rivillä i olevien alkioiden lukumäärää symbolilla f_i. Nyt on voimassa epäyhtälö $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$. Permutoimalla tarvittaessa rivejä voidaan vielä olettaa, että $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_r$. Todistuksen ideana on osoittaa, että rivit $1, 2, \ldots, r$ voidaan aina täyttää yksitellen, jolloin tuloksena on määritelmän 2.3 mukainen latinalainen suorakulmio. Tämä suorakulmio voidaan sitten laajentaa latinalaiseksi neliöksi lauseen 3.7 avulla.

Oletetaan, että rivit $1, 2, \ldots, \ell - 1$ on jo saatu täytettyä ja täydennetään rivi ℓ Hallin lauseen avulla. Valittujen merkintöjen mukaan rivillä ℓ on f_ℓ kappaletta täytettyjä alkioita. Permutoimalla tarvittaessa sarakkeita voidaan olettaa, että nämä alkiot ovat rivin lopussa. Olkoon X rivillä ℓ esiintymättömistä alkioista muodostettu joukko. Täten joukon X koolle pätee $|X| = n - f_\ell$. Merkitään lisäksi symbolilla A_j niiden joukon X alkioiden joukkoa, jotka eivät esiinny sarakkeessa j, missä $j = 1, 2, \ldots n - f_\ell$. Rivi ℓ voidaan nyt täydentää etsimällä SDR joukoille $A_1, A_2, \ldots, A_{n-f_\ell}$. Tätä varten pitää osoittaa, että Hallin ehto on voimassa.

Aloitetaan ehdon (H) todentaminen todistamalla epäyhtälö

$$n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \cdots + f_r. \tag{12}$$

Tapauksessa $\ell = 1$ epäyhtälö saa muodon

$$n > f_1 + f_2 + \cdots + f_r,$$

joten se on voimassa. Oletetaan seuraavaksi, että $\ell > 1$. Koska $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_r$, voidaan kirjoittaa

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_{\ell-1} \geq f_{\ell-1} + \cdots + f_{\ell-1} = (\ell - 1) f_{\ell-1}.$$

Kun otetaan vielä huomioon, että $\sum_{i=1}^{r} f_i < n$ ja $1 < \ell \leq r$ saadaan epäyhtälö

$$n > \sum_{i=1}^{r} f_i \geq (\ell - 1) f_{\ell-1} + f_\ell + \cdots + f_r. \tag{13}$$

Jos $f_{\ell-1} \geq 2$, niin kaava (13) sievenee muotoon

$$n > 2(\ell - 1) + f_\ell + \cdots + f_r,$$

joka on ekvivalentti epäyhtälön (12) kanssa. Jos taas $f_{\ell-1} = 1$, niin $f_\ell = f_{\ell+1} = \ldots = f_r = 1$ ja epäyhtälö (12) saa muodon

$$n > 2(\ell - 1) + r - \ell + 1 = r + \ell - 1.$$

Tämä epäyhtälö pitää paikkansa, sillä on voimassa $\ell \leq r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Tapausta $f_{\ell-1} = 0$ ei tarvitse enää tutkia, sillä rivien $1, 2, \ldots, r$ oletettiin sisältävän ainakin yhden valmiiksi täytetyn alkion. Epäyhtälö (12) on siis yleisesti voimassa.

Valitaan seuraavaksi m kappaletta joukkoja A_j, missä $1 \leq m \leq n - f_\ell$. Merkitään näiden joukkojen unionia symbolilla B. Hallin ehdoksi voidaan nyt kirjoittaa $|B| \geq m$. Osoitetaan, että ehto on voimassa. Tutkitaan tätä varten niitä neliön P sarakkeita, jotka vastaavat joukkoja A_j. Olkoon c näissä sarakkeissa olevien sellaisten solujen lukumäärä, jotka sisältävät joukkoon X kuuluvan alkion. Rivin ℓ yläpuolella on tällaisia soluja korkeintaan $(\ell - 1)m$ kappaletta. Rivin ℓ alapuolella kyseisten solujen lukumäärä on enintään $f_{\ell+1} + \cdots + f_r$. Näin saadaan arvio

$$c \leq (\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \cdots + f_r. \tag{14}$$

Toisaalta jokainen alkioista $x \in X \setminus B$ on jokaisessa m sarakkeessa. Tästä saadaan alaraja

$$c \geq m(|X| - |B|). \tag{15}$$

Järjestelemällä termejä ja ottamalla huomioon kaava (14) sekä tieto $|X| = n - f_\ell$, voidaan epäyhtälö (15) kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} |B| &\geq |X| - \frac{1}{m}c \\ &\geq n - f_\ell - (\ell - 1) - \frac{1}{m}(f_{\ell+1} + \cdots + f_r). \end{aligned} \tag{16}$$

Kaavasta (16) seuraa, että $|B| \geq m$, jos pätee

$$n - f_\ell - (\ell - 1) - \frac{1}{m}(f_{\ell+1} + \cdots + f_r) > m - 1$$

eli jos

$$m(n - f_\ell - \ell + 2 - m) > f_{\ell+1} + \cdots + f_r. \tag{17}$$

Todistetaan, että epäyhtälö (17) on voimassa. Tapauksessa $m = 1$ epäyhtälö sievenee muotoon

$$n - \ell + 1 > f_\ell + \cdots + f_r,$$

jonka nähdään olevan voimassa vertaamalla epäyhtälöä kaavaan (12). Sijoitetaan sitten arvo $m = n - f_\ell - \ell + 1$ kaavaan (17), jolloin saadaan tulokseksi

$$n - f_\ell - \ell + 1 > f_{\ell+1} + \cdots + f_r,$$

mikä niin ikään pitää paikkansa kaavan (12) perusteella. Lisäksi epäyhtälö (17) on toisen asteen polynomi muuttujan m suhteen. Polynomin johtava kerroin on -1, mikä tarkoitaa sitä, että epäyhtälö (17) on voimassa myös arvoilla $1 < m < n - f_\ell - \ell + 1$. Jäljelle jäävät enää muuttujan arvot $m > n - f_\ell - \ell + 1$. Todetaan, että mielivaltainen alkio $x \in X$ esiintyy neliössä P korkeintaan $\ell - 1 + f_{\ell+1} + \cdots + f_r$ rivillä ja siten myös korkeintaan yhtä monessa sarakkeessa. Toisaalta ehdosta $m > n - f_\ell - \ell + 1$ ja kaavasta (12) seuraa, että

$$m > n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \cdots + f_r.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että alkio x kuuluu johonkin joukoista A_j, joten tässä tapauksessa on voimassa $B = X$, jolloin $|B| = n - f_\ell \geq m$.

Näin ollen Hallin ehto on todellakin voimassa kokoelmalle $A_1, A_2, \ldots, A_{n-f_\ell}$. Rivi ℓ täydennetään valitsemalla jokin SDR joukoista $A_1, A_2, \ldots, A_{n-f_\ell}$. Neliöstä P voidaan siis muodostaa kertalukua $r \times n$ oleva määritelmän 2.3 mukainen latinalainen suorakulmio täyttämällä yksitellen rivit $1, 2 \ldots, r$. Tämä suorakulmio voidaan laajentaa latinalaiseksi neliöksi lauseen 3.7 perusteella. Alkuperäinen lause on täten todistettu. $\square$

Esitetty todistus antaa jälleen tavan muodostaa latinalaisia neliöitä.

Esimerkki 5.4. Tarkastellaan osittaista latinalaista neliötä

$$P = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 7 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Todetaan aluksi, että Lindnerin lauseen ehdot ovat voimassa. Permutoidaan seuraavaksi rivit vastaamaan epäyhtälöketjua $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq f_4$. Muodostetaan sitten neliön ensimmäinen rivi Lindnerin lauseen todistuksen menetelmällä. Permutoidaan tätä varten neliön sarakkeita siten, että ensimmäisen rivin täytetyt alkiot ovat rivin viimeisinä. Neliö on nyt muotoa

$$P' = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 7 \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Todistuksen joukot ovat $X = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A_1 = A_2 = A_3 = A_5 = X$ sekä $A_4 = \{1, 3, 5, 6\}$. Kokoelman $A_1, \ldots, A_5$ eri edustajien systeemiksi kelpaa esimerkiksi vektori $(1, 3, 4, 5, 6)$. Lisätään saatu SDR ensimmäisen rivin alkuun, jolloin rivi saadaan täytettyä.

Toimitaan vastaavasti neliön toisen rivin tapauksessa. Permutoidaan alkiot rivin loppuun, muodostetaan sopiva SDR ja lisätään se rivin alkuosaksi. Tässä tapauksessa $X = \{1, 3, 5, 6, 7\}$, $A_1 = \{3, 5, 6, 7\}$, $A_2 = \{1, 5, 6, 7\}$, $A_3 = X$, $A_4 = \{1, 3, 6, 7\}$ sekä $A_5 = \{1, 3, 5, 7\}$. Nyt vektori $(3, 1, 5, 6, 7)$ on eräs kokoelman $A_1, \ldots, A_5$ SDR. Jatketaan samalla tavalla kolmannen ja neljännen rivin tapauksissa ja laajennetaan lopuksi syntynyt suorakulmio latinalaiseksi neliöksi L. Tämä latinalainen neliö on alkuperäistä osittaista neliötä P vastaavan latinalaisen neliön L' konjugaatti. Jos neliö L on syntynyt kuvaustulosta $\alpha_m\alpha_{m-1}\cdots\alpha_1(P)$, niin neliöksi L' saadaan $\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\cdots\alpha_m^{-1}(L)$. Esimerkin tapauksessa eräät mahdolliset neliöt L ja L' ovat

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 3 & 7 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 7 & 6 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad L' = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 1 & 7 \\ 7 & 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

5.3 Smetaniukin todistus

Evansin konjektuurin lopullista todistusta varten otetaan vielä käyttöön graafiteoriasta tuttu käsite *kaksijakoinen graafi*. Tätä ennen on syytä esittää *graafin* määritelmä.

Määritelmä 5.5. Olkoon $V \neq \varnothing$ äärellinen joukko. Määritellään lisäksi osajoukko $E \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in V, u \neq v\}$. Paria (V,E) sanotaan *graafiksi* G. Joukon V alkioita kutsutaan graafin *pisteiksi* ja joukon E alkioita graafin *viivoiksi*.

Pisteestä lähtevien viivojen lukumäärää sanotaan pisteen *asteeksi*. *Kaksijakoinen graafi* on erikoistapaus yleisestä graafista.

Määritelmä 5.6. Olkoot U ja V äärellisiä ja ei-tyhjiä joukkoja. Oletetaan lisäksi, että $U \cap V = \varnothing$. Jos graafi G koostuu pisteistä $U \cup V$ ja graafin jokainen viiva yhdistää kaksi joukkojen U ja V pistettä, niin graafia $G = (U,V,E)$ kutsutaan *kaksijakoiseksi graafiksi.*

Nyt voidaan siirtyä Smetaniukin todistukseen. Todistuksen rinnalla on syytä tutkia esimerkkiä 5.8, jossa täydennetään todistuksen menetelmää käyttäen eräs osittainen latinalainen neliö.

Lause 5.7 (**B. Smetaniuk**). *Kertalukua n oleva osittainen latinalainen neliö, jossa on enintään $n-1$ valmiiksi täytettyä alkiota voidaan täydentää kertalukua n olevaksi latinalaiseksi neliöksi.*

Todistus. Todistetaan lause induktiolla indeksin n suhteen. Jaetaan todistus selvyyden vuoksi yhdeksään vaiheeseen.
Vaihe 1. Kertalukua 1 oleva osittainen neliö täydennetään lisäämällä neliön ainoa alkio. Kertalukua 2 oleva ja yhden alkion sisältävä osittainen neliö voidaan selvästi aina täydentää kokonaiseksi neliöksi. Väite on siis voimassa arvoilla $n \leq 2$. Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan kertalukua $n-1$ oleva osittainen latinalainen neliö, jossa on korkeintaan $n-2$ täytettyä alkiota voidaan täydentää kertalukua $n-1$ olevaksi latinalaiseksi neliöksi. Osoitetaan sitten, että kertalukua $n \geq 3$ oleva korkeintaan $n-1$ täytettyä alkiota sisältävä neliö P_1 voidaan täydentää kokonaiseksi latinalaiseksi neliöksi.
Vaihe 2. Käytetään samoja merkintöjä kuin lauseessa 5.3. Neliön P_1 valmiiksi täytetyt alkiot siis sijaitsevat $r \leq n-1$ eri rivillä, joita merkitään tässä yhteydessä $s_1, s_2, \ldots, s_r$. Näiden rivien valmiiksi täytettyjen alkioiden lukumäärille pätee $f_1, f_2, \ldots, f_r > 0$ sekä $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$. Lauseessa 5.3 on tutkittu tapaukset, joissa eri alkioita on korkeintaan $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Siksi nyt voidaan olettaa, että tutkittavissa neliöissä on eri alkioita enemmän kuin $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ kappaletta. Koska täytettyjä alkioita on enintään $n-1$ kappaletta, on olemassa ainakin yksi alkio, joka esiintyy neliössä vain kerran. Permutoimalla tarvittaessa symboleja ja rivejä voidaan olettaa, että alkio n esiintyy neliössä P_1 ainoastaan kerran ja että tämä esiintymä on rivillä s_1. Olkoon muodostunut neliö P_2.
Vaihe 3. Todistuksen tässä vaiheessa pyritään permutoimaan neliön P_2 rivejä siten, että kaikki täytetyt alkiot alkiota n lukuun ottamatta sijaitsevat neliön päädiagonaalin alapuolella. Alkio n pyritään sijoittamaan päädiagonaalille. Tämä tavoite saavutetaan seuraavalla tavalla. Permutoidaan ensin alkion n sisältävä rivi s_1 riville, jonka järjestysnumero on f_1. Permutoidaan tämän jälkeen neliön sarakkeita siten, että rivin s_1 viimeinen alkio on n. Koska rivi s_1 on nyt kohdassa f_1, sijaitsee alkio n sarakkeiden permutoinnin jälkeen neliön päädiagonaalilla. Lisäksi rivi täyttyy päädiagonaaliin asti kokonaan. Rivi s_2 permutoidaan seuraavaksi kohtaan $1 + f_1 + f_2$, minkä jälkeen rivin täytettyjä alkioita permutoidaan niin paljon vasemmalle rivin alkuun kuin on mahdollista. Rivin s_2 uusi paikka varmistaa sen, että mikään alkio ei ole neliön päädiagonaalilla ja että kaikille alkioille on varmasti tilaa. Yleisesti

indeksejä $1 < i \leq r$ vastaavat rivit s_i siirretään kohtiin $1+f_1+f_2+\cdots+f_i$ ja valmiiksi täytettyjä alkioita permutoidaan niin paljon vasemmalle kuin mahdollista. Koska $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$, on rivejä varmasti riittävästi. Edellä on jo todettu, että kullakin rivillä on alkioille tarpeeksi tilaa ja että neliön päädiagonaalille ei tule muita alkioita alkion n lisäksi. Tämän vaiheen tavoite on siis esitettyjen toimenpiteiden suorittamisen jälkeen saavutettu. Prosessin tuloksena syntyy neliö P_3.

Vaihe 4. Poistetaan seuraavaksi alkio n neliön P_3 päädiagonaalilta ja jätetään huomioimatta neliön ensimmäinen rivi ja viimeinen sarake. Vaiheen 3 konstruktion perusteella ensimmäinen rivi ja viimeinen sarake eivät sisällä muita alkioita kuin mahdollisesti alkion n. Täten neliöstä P_3 jää jäljelle kertalukua $n-1$ oleva osittainen latinalainen neliö, jonka soluista korkeintaan $n-2$ ovat valmiiksi täytettyjä. Induktio-oletuksen mukaan tämä pienempi neliö voidaan täydentää kertalukua $n-1$ olevaksi latinalaiseksi neliöksi. Olkoon näin muodostunut kertaluvun n osittainen latinalainen neliö P_4. Neliö P_4 on siis täytetty lukuun ottamatta sen ensimmäistä riviä ja viimeistä saraketta, jotka ovat täysin tyhjiä.

Vaihe 5. Tässä vaiheessa on tavoitteena siirtää neliön P_4 päädiagonaalilla olevat alkiot neliön viimeiseen sarakkeeseen, joka on siis tyhjä. Siirrettävien alkioiden paikalle voidaan sitten sijoittaa alkioksi n, sillä se ei esiinny kertaakaan neliössä P_4. Yleisesti ottaen kuvattu prosessi ei kuitenkaan ole mahdollinen, sillä neliön päädiagonaalilla olevat alkiot eivät välttämättä ole eri alkioita. Tämän vuoksi on suoritettava lisätoimenpiteitä. Tarkastellaan neliön P_4 rivejä $k = 2, 3, \ldots, n-1$ ja asetetaan ensin alkio n kaikkiin soluihin (k, n). Käydään sitten rivit uudelleen läpi yksi kerrallaan ja vaihdetaan päädiagonaalisolussa (k, k) olevan alkion x_k ja solussa (k, n) olevan alkion eli alkion n paikkoja. Jos alkio x_k ei ennestään ole neliön viimeisessä sarakkeessa, niin tarvittavat toimenpiteet arvon k suhteen on suoritettu loppuun ja sarakkeen k alkiot ovat lopullisella paikallaan. Jos alkio x_k esiintyy ennestään viimeisessä sarakkeessa, niin sovelletaan kyseiseen indeksin arvoon vaiheessa 6 kuvattavia toimenpiteitä.

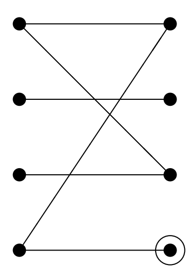
Vaihe 6. Tarkastellaan saraketta k. Oletetaan, että alkio x_k esiintyy neliön solussa (j, n), missä $2 \leq j < k$. Vaihdetaan tällöin rivillä j sarakkeessa n

oleva alkio x_k alkioon x'_k, joka sijaitsee solussa (j,k). Jos puolestaan alkio x'_k esiintyy solussa (j',n), niin vaihdetaan rivillä j' soluissa (j',n) ja (j',k) olevat alkiot keskenään. Suoritettavia toimenpiteitä voidaan havainnollistaa kuvion

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & x'_k & x_k \\ & & \\ & x''_k & x'_k \\ & x_k & n \\ & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ j \\ \\ j' \\ k \\ \\ \end{array} \end{array}$$

avulla. Tätä prosessia toistetaan, kunnes neliön viimeiseen sarakkeeseen saadaan uusi alkio. Tämän jälkeen voidaan siirtyä seuraavan rivin käsittelyyn. Tämän vaiheen tuloksena syntyy neliö P_6. Kuvatut toimenpiteet varmistavat sen, että millekään riville ei tule kahta samaa alkiota. Käytetty menetelmä takaa myös sen, että neliön mihinkään sarakkeeseen ei tule kahta samaa alkiota. Ei kuitenkaan ole selvää, että tässä vaiheessa kuvattu vaihtoprosessi ei johda äärettömään silmukkaan. Seuraavassa vaiheessa todistetaan, että äärettömän silmukan syntyminen ei ole mahdollista.

Vaihe 7. Tarkastellaan kaksijakoista graafia G_k, jonka pisteinä ovat joukot $U = \{(i,k) \,|\, 2 \leq i \leq k\}$ sekä $V = \{(j,n) \,|\, 2 \leq j \leq k\}$. Joukkojen U ja V alkioita voidaan vaihtaa keskenään. Tämä kuvaa vaiheissa 5 ja 6 esitettyä alkioiden vaihtoprosessia. Graafissa G_k on viiva pisteiden (i,k) ja (j,n) välillä, jos kyseisiä pisteitä vastaavat neliön solut ovat samalla rivillä eli jos $i = j$. Viiva on myös niiden pisteiden välillä, jotka sisältävät ennen alkioiden vaihtoprosessia saman alkion. Tässä tapauksessa on oltava $i \neq j$. Graafi G_k on siis muotoa



.

Kaikista graafin pisteistä lähtee selvästi vähintään yksi viiva. Toisaalta mistään pisteestä ei voi lähteä enempää kuin kaksi viivaa, sillä vaiheen 5 perusteella neliön sarakkeissa k ja n ei ole kahta samaa alkiota rivillä k tai sen yläpuolella. Kaikkien graafin pisteiden aste on siis 1 tai 2. Pisteestä (k, n) lähtee vain yksi viiva. Se on tarkasteltavan polun aloituspiste. Yllä olevassa kuviossa polun aloittava graafin piste on ympyröity. Polku kulkee ensin soluun (k, k), jossa on alkio x_k. Jos tämä alkio esiintyy sarakkeessa n, niin polku jatkuu graafin viivaa pitkin soluun (j, n), jossa on siis alkio x_k. Tämän jälkeen suoritettava vaihto vie polun soluun (j, k), mistä matka jatkuu mahdollisesti rivin j' sarakkeeseen n ja niin edelleen. Edellä esitetty graafin G_k havainnollistus selventää polun kulkua. Koska kaikkien graafin G_k pisteiden aste on 1 tai 2, on sarakkeeseen n tultava jossain vaiheessa uusi alkio. Tämä on vaihto-operaatiot lopettava polun päätepiste. Sarake k on saatu tällöin valmiiksi ja voidaan siirtyä seuraavan rivin tarkasteluun. Tähän uuteen riviin sovelletaan jälleen vaiheissa 5 ja 6 kuvattuja toimenpiteitä. Vaiheessa 6 ei siis voi syntyä ääretöntä silmukkaa.

Vaihe 8. Asetetaan lopuksi alkio n rivin n ainoaan tyhjään soluun (n, n). Syntyvä osittainen latinalainen neliö P_8 on myös määritelmän 2.3 mukainen latinalainen suorakulmio, joka Marshall Hallin eksistenssilauseen mukaan voidaan täydentää latinalaiseksi neliöksi L. Nyt tehtävä on helppo, sillä neliön ensimmäinen rivi voidaan täyttää kustakin sarakkeesta puuttuvalla alkiolla. Tämä viimeistelee koko todistuksen. On kuitenkin syytä huomata, että suoritettu konstruktio ei vielä anna oikeaa täydennystä alkuperäiselle neliölle P_1, vaan sen jollekin konjugaatille. Tämä johtuu siitä, että neliötä muokattiin todistuksen alussa sopivilla permutaatioilla. Vaiheessa 9 muodostetaan alkuperäistä osittaista neliötä vastaava latinalainen neliö.

Vaihe 9. Olkoot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ neliölle P_1 suoritettavat permutaatiot. Vaiheessa 8 konstruoitu konjugaatti on siis muotoa $L = \alpha_m \alpha_{m-1} \cdots \alpha_1(P_1)$. Neliötä P_1 vastaava latinalainen neliö L' saadaan kääntämällä suoritetut permutaatiot eli $L' = \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \cdots \alpha_m^{-1}(L)$. $\square$

Täydennetään eräs osittainen latinalainen neliö Smetaniukin konstruktion avulla.

Esimerkki 5.8. Tutkitaan osittaista latinalaista neliötä

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \\ s_3 \\ \\ s_4 \end{array}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 7 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 5 & \cdot & 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Smetaniukin todistuksessa esiintyvät muuttujat saavat nyt arvot $n = 7$, $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, $s_3 = 5$ sekä $s_4 = 7$. Lisäksi pätee $f_1 = f_2 = 2$ ja $f_3 = f_4 = 1$. Neliön muodostamisessa on jo huomioitu, että alkion n pitää esiintyä vain kerran ja että esiintyminen tapahtuu rivillä s_1. Tarvittaessahan nämä ehdot saataisiin voimaan sopivilla permutaatioilla kuten aiemmin on jo todettu. Todistuksen vaiheet 1 ja 2 on nyt käyty läpi.

Suoritetaan seuraavaksi vaiheen 3 vaatimat toimenpiteet. Rivien vaihtoa kuvaava permutaatio on tässä tapauksessa $\alpha_1 = (1)(2)(356)(4)(7)$. Sarakkeita puolestaan järjestetään permutaation $\alpha_2 = (152)(3)(4)(6)(7)$ mukaisesti. On syytä huomata, että permutaatiot α_1 ja α_2 kuvaavat ainoastaan neliön alku- ja lopputilaa. Neliön muokkaus tulee tosiasiassa suorittaa kuten todistuksessa eli edetään rivi kerrallaan permutoiden ensin rivi ja sitten täytettyjä alkioita sisältävät sarakkeet. Syntyvä neliö on esitetty vasemmalla kuviossa

$$\begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & 5 & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 5 & \cdot & \bullet & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & \cdot \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & \cdot \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & \cdot \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & \cdot \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Päädiagonaalia on merkitty kuviossa mustilla ympyröillä. Oikealla oleva neliö kuvaa todistuksen vaihetta 4. Osittaisen neliön sisään muodostuva kertalukua $n - 1 = 6$ oleva latinalainen neliö on yksi esimerkki monista mahdollisuuksista.

Vaihe 5 onnistuu arvoilla $k = 2, 3$ ja 4. Diagonaalialkiot $3, 1$ ja 6 siirtyvät viimeiseen sarakkeeseen ja niiden tilalle tulee alkio $n = 7$. Prosessi etenee kuvion

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & \cdot \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & \cdot \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & \cdot \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & \cdot \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & \cdot \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & \cdot \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & \cdot \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & \cdot \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & \cdot \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & \cdot \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & \cdot \end{bmatrix}$$

mukaisesti. Selvyyden vuoksi viimeisen sarakkeen alkiot $n = 7$ on jätetty kirjoittamatta kuvioon. Viimeisessä neliössä tapahtuu vielä vaihto alkioiden 6 ja 7 välillä.

Arvolla $k = 5$ täytyy soveltaa todistuksen vaiheessa 6 kuvattua menetelmää. Alkio $x_5 = 3$ nimittäin esiintyy jo neliön viimeisessä sarakkeessa rivillä 2. Jätetään alkio $x_5 = 3$ viimeiseen sarakkeeseen ja vaihdetaan rivillä 2 alkiot $x_5' = 6$ ja 3 keskenään. Alkio $x_5' = 6$ esiintyy ennestään viimeisen sarakkeen rivillä 4, joten jätetään alkio $x_5' = 6$ viimeiseen sarakkeeseen ja edetään alkioon $x_5'' = 5$ riville 4. Alkio x_5'' ei esiinny neliön viimeisessä sarakkeessa, joten prosessi saadaan näin päätökseen. Edellä kuvattuja toimenpiteitä esittävät neliöt

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & \cdot \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & \cdot \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & \cdot \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Nyt jäljellä on enää arvo $k = n - 1 = 6$. Tässä tapauksessa vaihto sujuu ongelmitta, koska alkio 2 ei esiinny ennestään neliön viimeisessä sarakkeessa.

Suoritetaan seuraavaksi vaihe 8. Asetetaan alkio 7 soluun $(7, 7)$ ja täydennetään neliön ensimmäinen rivi kustakin sarakkeesta puuttuvalla joukon

$\{1, 2, \ldots, 7\}$ luvulla. Tulokseksi saadaan kertaluvun 7 latinalainen neliö. Tätä vaihetta esittää kuvio

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & \cdot \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Kuvataan neliötä vielä käänteispermutaatioilla $\alpha_2^{-1} = (125)(3)(4)(6)(7)$ ja $\alpha_1^{-1} = (1)(2)(365)(4)(7)$. Permutoidaan ensin sarakkeet kuvauksella α_2^{-1}. Tämän neliön rivien paikkoja vaihdetaan vielä permutaatiolla α_1^{-1}, jolloin tuloksena on esimerkin alkutilannetta vastaava latinalainen neliö. Lopulliseksi latinalaiseksi neliöksi saadaan näin

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

6 Crusen lauseista

6.1 Ryserin lauseen analogia

Tässä tutkielman viimeisessä luvussa tarkastellaan kommutatiivisia ja idempotentteja latinalaisia neliöitä. Luvussa 2 esitettyjen määritelmien pohjalta on mielekästä pohtia, voitaisiinko myös kommutatiivisille ja idempotenteille latinalaisille neliöille ja suorakulmioille löytää erilaisia täydentämiseen, laajentamiseen ja upotuksiin liittyviä ehtoja? Osoittautuu, että näin todellakin on asian laita. Esitettävät tulokset ovat laajennuksia tässä vaiheessa jo tutuille Ryserin ja Evansin lauseille. Lauseiden todistuksetkin muistuttavat melko paljon toisiaan. Tästä syystä kaikkia todistuksia ei enää esitetä. Luvun tarkoituksena on lähinnä esitellä Allan Crusen työtä, joka on suoraa jatkoa luvussa 4 esitetyille Trevor Evansin lauseille. Tämän luvun kaikki tulokset ovat peräisin Crusen vuonna 1974 ilmestyneestä artikkelista [3] ja niitä kutsutaankin tässä yhteydessä *Crusen lauseiksi.*

Esitetään ensin Ryserin lausetta muistuttava ehto kommutatiivisten latinalaisten suorakulmioiden laajentamiselle. Lause ilmaisee laajentamisen kannalta riittävät ja välttämättömät ehdot, joten tulos on jälleen laajennusten koon mielessä paras mahdollinen. Sama pätee muihinkin tässä luvussa esitettäviin lauseisiin. Näin ollen Crusen lauseet muodostavat elegantin jatkon muille jo esitellyille latinalaisten neliöiden muodostamista koskeville tuloksille.

Lause 6.1 (**A. Cruse**). *Olkoon R kertalukua $r \times r$ oleva kommutatiivinen latinalainen suorakulmio, joka on muodostettu luvuista $1, 2, \ldots, n$, missä $n \geq r$. Olkoon $R(i)$ luvun $i = 1, 2, \ldots, n$ esiintymisten lukumäärä suorakulmiossa R. Tällöin suorakulmio R voidaan laajentaa kertalukua n olevaksi kommutatiiviseksi latinalaiseksi neliöksi C jos ja vain jos*

(i) $R(i) \geq 2r - n$ *kaikilla* $i = 1, 2, \ldots, n,$

(ii) $R(i) \equiv n \pmod 2$ *ainakin r kappaleella lukuja* $i = 1, 2, \ldots, n.$

Todistus. ($\Longrightarrow$) Osoitetaan, että lauseen ehdot ovat välttämättömiä. Sovelletaan ensin suorakulmioon R lausetta 3.12, jolloin Ryserin ehdoksi saadaan

$R(i) \geq 2r - n$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$ eli ehto (i) on laajentamisen kannalta välttämätön. Ehto (ii) seuraa neliön C kommutatiivisuudesta. Koska C on kommutatiivinen, on kunkin alkion $i = 1, 2, \ldots, n$ esiintymisten lukumäärä neliön C päädiagonaalin ulkopuolella parillinen. Lisäksi latinalaisessa neliössä jokainen alkio esiintyy tarkalleen kerran kullakin rivillä ja kussakin sarakkeessa. Täten luvun i esiintymisten lukumäärä neliön C päädiagonaalilla on samaa pariteettia luvun n kanssa. Esiintymisten lukumäärän täytyy siis olla kongruentti luvun n kanssa modulo 2. Edellisen perusteella voidaan päätellä, että jos $R(i)$ on epäkongruentti luvun n kanssa modulo 2, niin luvun i on esiinnyttävä neliön C päädiagonaalilla suorakulmion R ulkopuolella. Koska tällaisia soluja on $n-r$ kappaletta, niin lukuja i, joille $R(i)$ on epäkongruentti luvun 2 kanssa modulo n voi olla korkeintaan $n-r$ kappaletta. Tämä tulos on ekvivalentti ehdon (ii) kanssa. Myös ehto (ii) on siis välttämätön.
($\Longleftarrow$) Ehtojen riittävyys todistetaan osoittamalla, että ehdot (i) ja (ii) toteuttava kertalukua $r \times r$ oleva kommutatiivinen latinalainen suorakulmio voidaan laajentaa kertalukua $(r+1) \times (r+1)$ olevaksi ehdot (i) ja (ii) toteuttavaksi kommutatiiviseksi latinalaiseksi suorakulmioksi. Vaadittava laajennus saadaan sitten konstruoitua induktion avulla. Todistuksen yksityiskohdat löytyvät Crusen artikkelista [3]. $\square$

6.2 Cruse ja upotukset

Ensimmäiset kommutatiivisten ja idempotenttien latinalaisten neliöiden upottamista koskevat tulokset ilmestyivät Charles Lindnerin artikkelissa [11]. Lindner todisti, että kyseiset neliöt voidaan upottaa äärellisen kokoisiin kommutatiivisiin ja idempotentteihin latinalaisiin neliöihin. Nämä todistukset olivat kuitenkin hyvin monimutkaisia, minkä lisäksi niiden antamat neliöt olivat erittäin suuria. Crusen lauseet sen sijaan antavat upotuksille parhaat mahdolliset rajat. Seuraava tulos muistuttaa lausetta 4.1, joka koski mielivaltaisia osittaisia latinalaisia neliöitä. Sen sijaan lauseen 6.2 neliöissä on mukana kommutatiivisuuden tuomaa symmetriaa.

Lause 6.2 (**A. Cruse**). *Olkoon P kertalukua n oleva osittainen kommutatiivinen latinalainen neliö. Tällöin neliö P voidaan upottaa johonkin kertalu-*

kua $t \geq 2n$ olevaan kommutatiiviseen latinalaiseen neliöön kaikilla parillisilla kertaluvun t arvoilla.

Todistus. Todistuksen ideana on muodostaa neliöstä P sellainen kommutatiivinen latinalainen suorakulmio, jolle lauseen 6.1 ehdot ovat voimassa. Tämän suorakulmion laajentaminen kommutatiiviseksi latinalaiseksi neliöksi antaa halutun upotuksen. Toimitaan kuten lauseessa 4.1 ja muodostetaan luvuista $n+1, n+2, \ldots, 2n$ koostuva kertalukua n oleva kommutatiivinen latinalainen neliö B. Pykälässä 6.3 osoitetaan, että tällainen neliö on varmasti olemassa. Täytetään sitten neliön P tyhjät solut vastaavilla neliön B alkioilla. Alkioiden lisäämisen tuloksena syntyy kertaluvun $n \times n$ kommutatiivinen latinalainen suorakulmio P', joka on siis muodostettu luvuista $1, 2, \ldots, 2n$. Sen voidaan ajatella muodostuvan myös luvuista $1, 2, \ldots, t$, jos $t \geq 2n$. Lauseen 6.1 ehto (i) on suorakulmion P' tapauksessa $P'(i) \geq 2n - t$. Tämä on selvästi voimassa, sillä nyt $2n - t \leq 0$.

Ehtoa (ii) varten todetaan, että ainakin n kappaletta luvuista $1, 2, \ldots, t$ ei esiinny suorakulmion P' päädiagonaalilla. Päädiagonaalilla voi nimittäin esiintyä korkeintaan n eri alkiota ja lisäksi $t \geq 2n$. Nyt $P'(i)$ on parillinen ainakin niille n kappaleelle luvuista $1, 2, \ldots, t$, jotka eivät esiinny suorakulmion P' päädiagonaalilla, sillä P' on kommutatiivinen. Koska t on parillinen, voidaan kirjoittaa, että $P'(i) \equiv t \pmod 2$ ainakin n kappaleelle luvuista $i = 1, 2, \ldots, t$. Täten ehto (ii) on voimassa, mistä yhdessä ehdon (i) kanssa seuraa lauseen väite. □

Jos $n \geq 4$, niin edellisen lauseen ehto $t \geq 2n$ on myös välttämätön. Tämä nähdään konstruoimalla kertalukua $n \geq 4$ oleva luvuista $1, 2, \ldots, n$ muodostettu osittainen kommutatiivinen latinalainen neliö P, jota ei voida upottaa mihinkään kertalukua $t < 2n$ olevaan latinalaiseen neliöön. Kyseisen neliön muodostaminen muistuttaa lauseen 4.2 konstruktiota. Nyt neliön P soluissa (i, j) on alkio $i + j - 1 \pmod n$ lukuun ottamatta soluja $(1, 2)$ ja $(2, 1)$, jotka jätetään tyhjiksi, sekä solua $(1, 1)$, jossa on alkio 2. Todistus sille, että neliötä P ei voida upottaa mihinkään kertalukua $t < 2n$ olevaan neliöön on olennaisesti sama kuin lauseen 4.2 päättelyketju.

Lauseessa 6.2 esiintyi vaatimus neliön parillisesta kertaluvusta. Tästä rajoituksesta voidaan luopua tarkastelemalla idempotentteja neliöitä.

Lause 6.3 (**A. Cruse**). *Kertalukua n oleva osittainen idempotentti kommutatiivinen latinalainen neliö P voidaan upottaa johonkin kertalukua t olevaan kommutatiiviseen latinalaiseen neliöön kaikilla $t \geq 2n$.*

Todistus. Jos t on parillinen, niin kyseessä on ainoastaan erikoistapaus lauseen 6.2 tilanteesta.

Olkoon sitten t pariton. Konstruoidaan kertalukua $n \times n$ oleva luvuista $1, 2, \ldots, 2n, \ldots, t$ muodostettu idempotentti kommutatiivinen latinalainen suorakulmio P' täyttämällä neliön P tyhjät solut lauseen 6.2 todistuksen mukaisesta neliöstä B. Osoitetaan sitten, että lauseen 6.1 ehdot ovat voimassa suorakulmiolle P'. Nyt $2n - t < 0$, koska $t \geq 2n + 1$. Siten $P'(i) \geq 2n - t$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, t$ ja ehto (i) on voimassa. Koska P on idempotentti, esiintyvät luvut $1, 2, \ldots, n$ suorakulmion P' päädiagonaalilla tarkalleen kerran. Suorakulmion P' kommutatiivisuudesta seuraa nyt, että kunkin luvun $1, 2, \ldots, n$ esiintymisten lukumäärä suorakulmiossa on pariton. Koska oletuksen mukaan t on pariton, on voimassa kongruenssi $P'(i) \equiv t \pmod 2$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Tämä tarkoittaa, että lauseen 6.1 toinen ehto on voimassa, jolloin todistus on valmis. $\square$

Esitetään vielä yksi upotuksia koskeva tulos. Tässä viimeisessä lauseessa idempotentti kommutatiivinen osittainen neliö upotetaan idempotenttiin kommutatiiviseen latinalaiseen neliöön.

Lause 6.4 (**A. Cruse**). *Kertalukua n oleva osittainen idempotentti kommutatiivinen latinalainen neliö voidaan upottaa kertalukua t olevaan idempotenttiin kommutatiiviseen latinalaiseen neliöön, jos t on pariton ja $t \geq 2n + 1$.*

Todistus. Olkoon P osittainen kertalukua n oleva idempotentti kommutatiivinen latinalainen neliö. Lauseen 6.3 mukaan P voidaan upottaa johonkin paritonta kertalukua $t \geq 2n + 1$ olevaan kommutatiiviseen latinalaiseen neliöön C. Edellä on jo todettu, että kommutatiivisessa latinalaisessa neliössä kunkin alkion esiintymisten lukumäärä päädiagonaalilla on oltava samaa pariteettia kuin neliön kertaluku. Nyt siis jokainen alkio $1, 2, \ldots, t$ esiintyy vähintään kerran neliön C päädiagonaalilla. Toisaalta mikään alkio ei voi esiintyä päädiagonaalilla useammin kuin kerran, sillä päädiagonaalin alkioiden lukumäärä on sama kuin neliön kertaluku. Jokainen alkio $1, 2, \ldots, t$ esiintyy siis tarkalleen kerran neliön C päädiagonaalilla. Permutoidaan vielä neliön C symboleja siten, että neliön P ulkopuolella olevat päädiagonaalin alkiot nimetään uudelleen symboleilla $n+1, n+2, \ldots, t$. Neliön P sisäpuolella olevat päädiagonaalin alkiot pysyvät ennallaan. Näin saadaan muodostettua idempotentti kommutatiivinen latinalainen neliö C'. Tämä neliön C konjugaatti antaa vaaditun upotuksen. □

6.3 Lopuksi

Crusen lauseet muodostavat luontevan päätepisteen tälle tutkielmalle. Käsitelty teoria on muodostanut jatkumon, joka lähti liikkeelle Hallin lauseesta ja päättyi idempotentteja ja kommutatiivisia latinalaisia neliöitä koskeneisiin tuloksiin. Lähtökohtana toiminut Hallin lause ei edes liittynyt latinalaisiin neliöihin mutta silti näinkin lyhyessä esityksessä ehdittiin ratkaista monia latinalaisiin neliöihin liittyviä kysymyksiä.

Teorian kehittelyä olisi luonnollista jatkaa pudottamalla neliöiden kommutatiivisuusoletus pois ja tarkastelemalla pelkkien idempotenttien latinalaisten neliöiden upotuksia. Ehkä hieman yllättäen osoittautuu, että kommutatiivisuudesta luopuminen vaikeuttaa tutkittavia ongelmia merkittävästi. Kommutatiivisten suorakulmioiden laajentamisessa välttämättömät ehdot olivat myös riittäviä mutta pelkkien idempotenttien neliöiden tapauksessa näin ei ole. Tämä on yksi syy siihen, miksi idempotenttien osittaisten latinalaisten neliöiden upottamiseen liittyvät kysymykset ovat huomattavan syvällisiä.

Toisenlainen näkökulma upotusten merkitykseen latinalaisten neliöiden teoriassa saataisiin käsittelemällä niin sanottuja *kvasiryhmiä* ja niiden yhteyksiä latinalaisiin neliöihin. Tällöin osoittautuisi, että latinalaiset neliöt ovat itse asiassa kvasiryhmien ryhmätauluja. Tähän liittyy myös havainto, jonka mukaan äärellisen ryhmän ryhmätaulu on aina latinalainen neliö. Esimerkiksi neliö

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

on Kleinin neliryhmän ryhmätaulu. Neliötä K tutkimalla huomataan sen olevan kommutatiivinen. Näin pitää tietysti ollakin, sillä Kleinin neliryhmä on tunnetusti Abelin ryhmä. Samoin tutkimalla esimerkin 3.6 latinalaista neliötä huomataan sen olevan syklisen ryhmän C_5 ryhmätaulu. Tämän neliön kommutatiivisuus seuraa syklisen ryhmän kommutatiivisuudesta. Koska mielivaltaista kokonaislukua n kohden on olemassa syklinen ryhmä C_n, niin myös mielivaltaista kertalukua n kohden on olemassa kommutatiivinen latinalainen neliö. Tätä tietoa tarvittiin lauseen 6.2 todistuksessa.

Charles Lindnerin kirjoittama luku teoksessa [4] käsittelee tämän tutkielman aiheiden lisäksi myös idempotenttien neliöiden ja kvasiryhmien upotuksia koskevia kysymyksiä.

Kirjallisuutta

[1] Andersen, L. & Hilton, A.: *Thank Evans!*, Proc. London Math. Soc. (3) 47 (1983), 507–522.

[2] Aigner, M. & Ziegler, G.: *Proofs from The Book*. Springer, Berlin, 1998.

[3] Cruse, A.: *On Embedding Incomplete Symmetric Latin Squares*, J. Combinatorial Theory A16 (1974), 18–22.

[4] Dénes, J. & Keedwell, A.: *Latin Squares: New Developments in the Theory and Applications*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991.

[5] Easterfield, T.: *A Combinatorial Algorithm*, J. London Math. Soc. 21 (1946), 219–226.

[6] Evans, T.: *Embedding Incomplete Latin Squares*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 958–961.

[7] Hall, M.: *An Existence Theorem for Latin Squares*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 387–388.

[8] Hall, P.: *On Representatives of Subsets*, J. London Math. Soc. 10 (1935), 26–30.

[9] Halmos, P. & Vaughan, H.: *The Marriage Problem*, Amer. J. Math. 72 (1950), 214–215.

[10] König, D.: *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. 77 (1916), 453–465.

[11] Lindner, C.: *Finite Embedding Theorems for Partial Latin Squares, Quasigroups, and Loops*, J. Combinatorial Theory A13 (1972), 339–345.

[12] Lindner, C.: *On Completing Latin Rectangles*, Canadian Math. Bulletin 13 (1970), 65–68.

[13] Mann, H. & Ryser, H.: *Systems of Distinct Representatives*, Amer. Math. Monthly 60 (1953), 397–401.

[14] Ryser, H.: *A Combinatorial Theorem with an Application to Latin Rectangles*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 550–552.

[15] Smetaniuk, B.: *A New Construction on Latin Squares I: A Proof of the Evans Conjecture*, Ars Combinatoria 11 (1981), 155–172.