Todennäköisyyslaskennan klassisia ongelmia

Joni Hiltunen

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2013

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HILTUNEN, JONI: Todennäköisyyslaskennan klassisia ongelmia
Pro gradu -tutkielma, 61 s.
Matematiikka
Toukokuu 2013

Tutkielma käsittelee todennäköisyyslaskennan klassisia ongelmia. Tutkielman aluksi on johdanto todennäköisyyslaskentaan, missä esitellään todennäköisyyslaskennan yleisempiä määritelmiä ja lemmoja. Yleisempiä tuloksia on myös havainnollistettu esimerkkitehtävien avulla. Tutkielmassa käsitellään nimenomaan vanhoja sekä tunnettuja todennäköisyyslaskennan ongelmia, kuten Monty Hallin ongelma ja Newton-Pepys ongelma. Kaikkien tutkielmassa esiintyvien ongelmien ratkaisut perustellaan johdatusta todennäköisyyslaskentaan luvun lemmojen ja määritelmien avulla.

Tutkielma koostuu tutkielman tekijän valitsemista todennäköisyyslaskennan klassisista ongelmista. Koska kyseessä on opettajalinjan tutkielma, on tutkielman lopussa käsitelty myös ylioppilaskoetehtäviä.

Asiasanat: matematiikka, todennäköisyyslaskenta, klassinen ongelma.

Sisältö

1 Johdanto

Pro graduni luonne on kirjallisuustutkielma. Olen lukenut työtäni varten useita todennäköisyyslaskennan teoksia ja valinnut niistä ongelmia, jotka vaikuttivat kaikkein mielenkiintoisimmilta. Tutkielmassani olen siis käyttänyt lähteinä muun muassa kirjoja *Classic Problems of Probability* [2] ja *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions* [6]. Jokaisesta ongelmasta olen tehnyt sellaisen esityksen, joka mielestäni esittää sekä itse ongelman että sen ratkaisun mahdollisimman selkeästi ja ymmärrettävästi. Tutkielmaan olen myös kehittänyt itse ongelmia esimerkiksi loton todennäköisyyksistä ja johdatusta todennäköisyyslaskentaan kappaleen esimerkkejä.

Tutkielmani käsittelee todennäköisyyslaskennan klassisia ongelmia. Olen ollut aina hyvin kiinnostunut todennäköisyyslaskennasta ja koen, että sen tuntemisesta on ollut minulle hyötyä jopa elämässä yleisesti. Niinpä pro gradun kirjoittaminen todennäköisyyslaskennasta tuntui varsin luontevalta ajatukselta. Aiheeksi valikoitui klassiset ongelmat, koska todennäköisyyslaskennassa on niin monia mielenkiintoisia aihealueita, etten halunnut rajoittua vain yhteen. Toisaalta todennäköisyyslaskennan ongelmien ratkaisut ovat yleensä niin lyhyitä, ettei yhdestä ongelmasta helposti saa koko tutkielmaa aikaiseksi. Olen kuitenkin luonteeltani tyypillinen matemaatikko, enkä siedä loputonta jaarittelua samasta aiheesta. Siksi olenkin pyrkinyt pitämään ongelmien ratkaisut tiiviinä, mutta samalla mahdollisimman selkeinä.

Tutkielman toinen luku on johdanto todennäköisyyslaskennan yleisiin tuloksiin, joita käytetään klassisten ongelmien ratkaisuihin. Tutkielmassa käsitellään muun muassa tunnettu todennäköisyyslaskennan pulma Monty Hallin ongelma. Tutkielman lähteinä on käytetty todennäköisyyslaskennan ongelmia käsitteleviä kirjoja ja tutkielmia. Ainoastaan luvuissa loton todennäköisyyksiä ja blackjack ei ole varsinaista lähdettä, vaan luvut ovat tutkielman tekijän oma näkemys klassisista todennäköisyyslaskennan ongelmista.

Tutkielma ei ole varsinaisesti suunnattu lukiolaisille tai yliopistossa opiskeleville. Tutkielman määritelmät ja lauseet ovat kylläkin kirjoitettu yliopistomatematiikan tapaisesti, mutta niiden pitäisi olla myös lukion pitkän matematiikan osaaville ymmärrettävissä. Tutkielman lukemisesta voisi hyötyä siis sekä lukiolainen että yliopistossa opiskeleva, joka haluaisi perehtyä enemmän todennäköisyyslaskentaan.

2 Johdatusta todennäköisyyslaskentaan

Tämän luvun määritelmät ja lemmat ovat peräisin luentomonisteista [7, 8].

Määritelmä 2.1.
Olkoon otosavaruus S kaikkien alkeistapausten äärellinen joukko, jossa jokaisen alkeistapahtuman todennäköisyys on yhtä suuri. Merkitään S:n kaikkien alkeistapausten lukumäärää s:llä. Merkitään edelleen, että tapaus $A \subset S$ sisältää a kappaletta alkeistapauksia. Tällöin tapauksen A todennäköisyys klassisen todennäköisyyden määritelmän mukaan on

$$P(A) = \frac{a}{s}$$

Määritelmä 2.2.
Tapaukset A ja B ovat toisensa poissulkevat, jos $A \cap B = \emptyset$.

Määritelmä 2.3.
Olkoot otosavaruus S kaikkien alkeistapausten joukko. Tällöin seuraavat kolme aksioomaa ovat voimassa:

A1. $P(A) \geq 0$, kaikille tapauksille A ;
A2. $P(S) = 1$;
A3. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, jos tapaukset A_i ovat toisensa poissulkevat.

Lemma 2.4. Todennäköisyydellä on seuraavat ominaisuudet:

1. $P(\emptyset) = 0$;

2. $P(A) = 1 - P(A^c),$ kun $A^c = S \setminus A$;

3. Jos $B \subset A$, niin $P(B) \leq P(A)$;

4. $P(A) \leq 1$;

5. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$;

6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Todistus. Todistuksessa viitataan määritelmän 2.3 aksioomiin A1, A2 ja A3. Tässä määritelmässä jo todistettuihin tuloksiin viitataan numeroin 1-6.

1. Koska $P(A) = P(A \cup \emptyset) \overset{A3}{=} P(A) + P(\emptyset)$, niin $P(\emptyset) = 0$.

2. Koska $P(S) \overset{A2}{=} 1$ ja $P(S) = P(A \cup A^c) \overset{A3}{=} P(A) + P(A^c)$,
   niin $P(A) = 1 - P(A^c)$.

3. Koska $P(A) = P\left[(A \setminus B) \cup B\right] \overset{A3}{=} P(A \setminus B) + P(B)$,
   missä $P(A \setminus B) \overset{A1}{\geq} 0$, niin $P(B) \leq P(A)$.

4. Koska $A \subset S$, niin $P(A) \overset{3}{\leq} P(S) \overset{A2}{\leq} 1$.

5. $P(A) = P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] \overset{A3}{=} P(A \setminus B) + P(A \cap B)$.

6. $P(A \cup B) = P[(A \setminus B) \cup B] \overset{A3}{=} P(A \setminus B) + P(B)$
   $\overset{5}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. □

Esimerkki 2.5. Millä todennäköisyydellä korttipakasta satunnaisesti valittu kortti on joko 9 tai risti?

Merkitään $A =$ "Saadaan yhdeksän", $B =$ "Saadaan risti". Korttipakassa on yhteensä 4 yhdeksikköä ja 13 ristiä (kaikkiaan kortteja on pakassa 52 kappaletta), joten määritelmän 2.1 mukaan saadaan

$$P(A) = \frac{4}{52} \text{ ja } P(B) = \frac{13}{52}\,.$$

Ristiyhdeksän on kuitenkin sekä yhdeksän että risti, joten $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$. Nyt lemman 2.4 mukaan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \approx 31\%\,.$$

Esimerkki 2.6. Millä todennäköisyydellä korttipakasta satunnaisesti vedetty kortti on yhdeksän, mutta ei risti?

Käytetään esimerkin 2.5 merkintöjä, jolloin $P(A) = \frac{4}{52}$ ja $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$. Nyt lemman 2.4 avulla saadaan

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{3}{52} \approx 5{,}8\%\,.$$

Esimerkki 2.7. Korttipakasta otetaan umpimähkään yksi kortti. Millä todennäköisyydellä kortti ei ole 9 tai risti?

Merkitään K = ”Kortti ei ole yhdeksän tai risti”, jolloin tapauksen K vastatapahtuma on K^c = ”Kortti on yhdeksän tai risti”. Esimerkissä 2.5 laskettiin, että $P(K^c) = \frac{4}{13}$, joten lemman 2.4 mukaan

$$P(K) = 1 - P(K^c) = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13} \approx 69\% \, .$$

Lemma 2.8.
Jos tapahtumat A ja B ovat riippumattomat, niin

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \, .$$

Todistus. Kun tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, niin määritelmän 2.32 mukaan

$$P(A) = P(A|B) \, .$$

Määritelmän 2.31 mukaan puolestaan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \, .$$

Siispä saadaan

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \, . \qquad \square$$

Esimerkki 2.9. Millä todennäköisyydellä korttipakasta nostetaan pata ja perään heitetään nopalla silmäluku 5 tai 6?

Olkoon A = ”Nostetaan korttipakasta pata” ja B = ”heitetään nopalla 5 tai 6”. Koska kortin nosto korttipakasta ja nopan heittäminen ovat toisistaan riippumattomia, niin lemman 2.8 mukaan

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{12} \, .$$

Esimerkki 2.10. Kaksi tietokonetta toimii toisistaan riippumatta niin, että kone nro 1 on rikki keskimäärin 25 % ajasta ja kone nro 2 20 % ajasta. Millä todennäköisyydellä molemmat koneet ovat rikki, entä millä todennäköisyydellä molemmat toimivat?

Merkitään $A =$ "Kone 1 on rikki" ja $B =$ "Kone 2 on rikki", jolloin

$$P(A) = 0{,}25 \text{ ja } P(B) = 0{,}20 \ .$$

Koska koneet toimivat toisistaan riippumatta, niin lemman 2.8 mukaan

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}25 \cdot 0{,}20 = 5\% \ .$$

Molemmat koneet ovat siis rikki 5 % ajasta.

Tapahtuman A vastatapahtuma on selvästi $A^c =$ "Kone 1 toimii" (vastaavasti tapahtumalle B), jolloin lemman 2.4 mukaan saadaan

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \ ,$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80 \ .$$

Todennäköisyys, että molemmat koneet toimivat, on siis lemman 2.8 mukaan

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = 0{,}75 \cdot 0{,}80 = 60\% \ .$$

2.1 Satunnaismuuttujat

Satunnaismuuttuja liittää kaikkiin mahdollisiin alkeistapauksiin todennäköisyyden. Satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma muodostuu muuttujan arvoista x ja niihin liittyvistä todennäköisyyksistä p. Satunnaismuuttuja on diskreetti, jos se voi saada vain äärellisen tai numeroituvasti äärettömän määrän arvoja erillisissä pisteissä. Merkitään K:lla satunnaismuuttujan X saamien arvojen joukkoa. Tässä tutkielmassa oletetaan, että $K \subset \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.11. (Diskreetti satunnaismuuttuja)
Olkoon K äärellinen tai numeroituvasti ääretön joukko. Tällöin kuvaus $X : S \to K$ on diskreetti satunnaismuuttuja, jos

$$\sum_{k \in K} P(X = k) = 1 \, .$$

Määritelmä 2.12.
Diskreetin satunnaismuuttujan $X : S \to K$ todennäköisyysfunktio on

$$p(k) = P(X = k), \; k \in K$$

ja jakautumafunktio eli kertymäfunktio on

$$F(x) = P(X \leq x), \; x \in \mathbb{R} \, .$$

Esimerkki 2.13. Rahaa heitetään kaksi kertaa. Merkitään r = ”Saadaan kruuna” ja l = ”Saadaan klaava” ja X = ”kruunujen lukumäärä”. Tällöin otosavaruus S sisältää tapaukset:

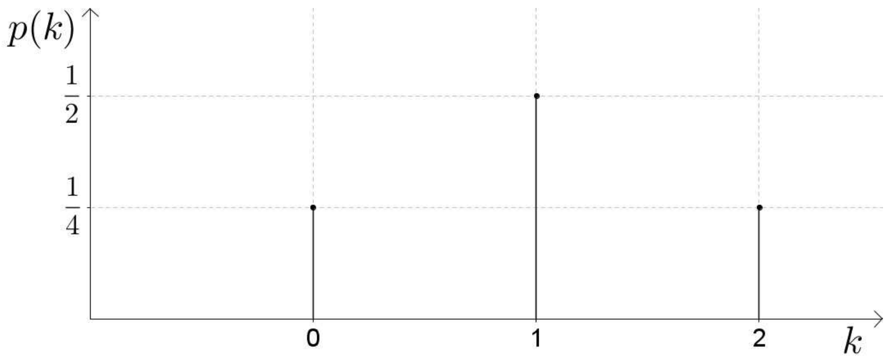
$$S = \{(r,r), (r,l), (l,r), (l,l)\}$$

Niinpä satunnaismuuttuja X voi saada arvoja

$$X(s) = \begin{cases} 0 & , \; s = (l,l) \\ 1 & , \; s = (l,r) \text{ tai } s = (r,l) \\ 2 & , \; s = (r,r) \end{cases}$$

Kaikkien alkeistapausten todennäköisyys on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, jolloin todennäköisyysfunktio $p(k)$ on

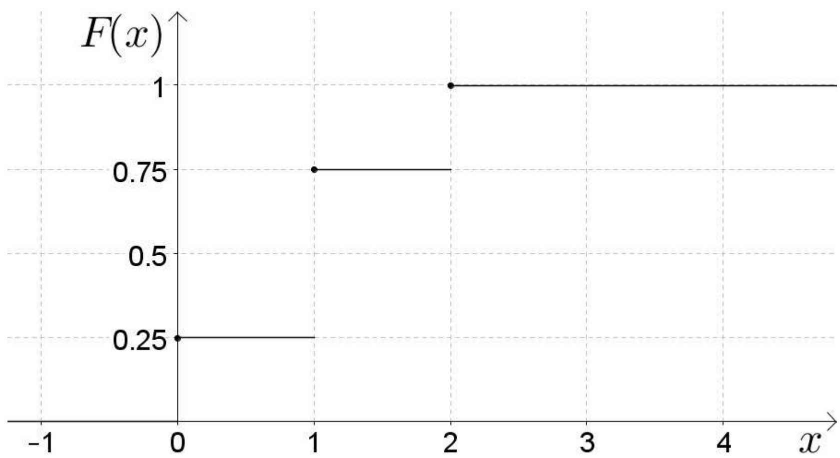
$$p(k) = P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \; k = 0 \\ \frac{1}{2} & , \; k = 1 \\ \frac{1}{4} & , \; k = 2 \end{cases}$$



Kuva 1: Todennäköisyysfunktio $p(k)$.

Jakautumafunktio $F(x)$ puolestaan on

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{1}{4} & , \ 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & , \ 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \ x \geq 2 \end{cases}$$



Kuva 2: Jakautumafunktio $F(x)$.

Määritelmä 2.14. (Odotusarvo)
Diskreetin satunnaismuuttujan $X : S \to K$ odotusarvo on

$$E(X) = \sum_{k \in K} k\, p(k),$$

jos summa suppenee itseisesti eli $\sum_{k \in K} |k|\, p(k) < \infty$.
Usein merkitään $E(X) = \mu$.

Esimerkki 2.15. Kahta kolikkoa heitetään. Mikä on kruunujen lukumäärän odotusarvo?

Käytetään esimerkin 2.13 merkintöjä. Nyt määritelmän 2.14 mukaan saadaan

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2} k\, p(k) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1\,.$$

Kruunujen lukumäärän odotusarvo on siis 1.

Määritelmä 2.16. (Varianssi)
Satunnaismuuttujan $X : S \to K$ varianssi on

$$Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right]\,.$$

Diskreetin satunnaismuuttujan X varianssi on siis

$$Var(X) = \sum_{k \in K} (k - \mu)^2 p(k)\,.$$

Usein merkitään $Var(X) = \sigma^2$. Puolestaan satunnaismuuttujan keskihajonta on $\sqrt{Var(X)} = \sigma$.

Esimerkki 2.17. Mikä on yhden nopanheiton silmäluvun varianssi?

Olkoon $X =$ "Nopan silmäluku". Määritetään ensin odotusarvo määritelmän 2.14 avulla:

$$\mu = E(X) = \sum_{k=1}^{6} k\, p(k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}\,.$$

Nyt varianssi saadaan laskettua määritelmän 2.16 mukaan.

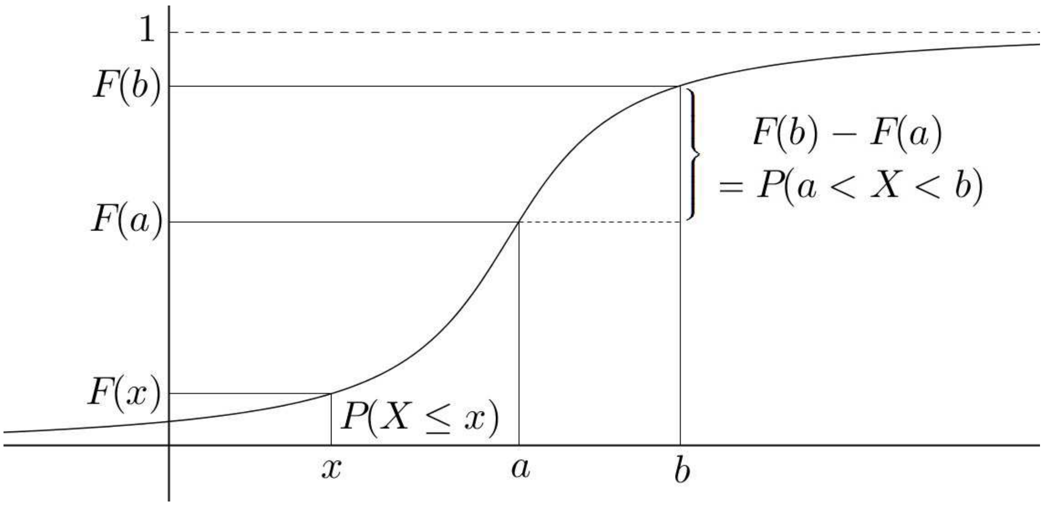
$$Var(X) = \sum_{k=1}^{6} (k - \mu)^2 p(k) = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}\,.$$

Huomautus. Kun otosavaruus S on ylinumeroituvasti ääretön, voidaan siihen liittää jatkuva satunnaismuuttuja, joka saa arvoja yhdeltä tai useammalta reaalilukuväliltä. Tässä työssä ei esitetä jatkuville satunnaismuuttujille tarkkaa määritelmää ja näin tyydytään vain olettamaan, että jatkuvien satunnaismuuttujien jakautumafunktiot ovat derivoituvia ja tiheysfunktiot integroituvia.

Määritelmä 2.18.
Jatkuvan satunnaismuuttujan $X : S \to K$ jakaumafunktio on

$$F(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan jakaumafunktio kohdassa x ilmaisee sen, millä todennäköisyydellä satunnaismuuttuja X saa arvon, joka on korkeintaan x.



Kuva 3: Jakautumafunktio $F(x)$.

Huomautus. Jatkuvalla satunnaismuuttujalla on minkä tahansa yksittäisen pisteen todennäköisyys nolla:

$$P(X = a) = 0, \text{ kaikilla } a.$$

Näin ollen on myös $P(X \leq x) = P(X < x)$.

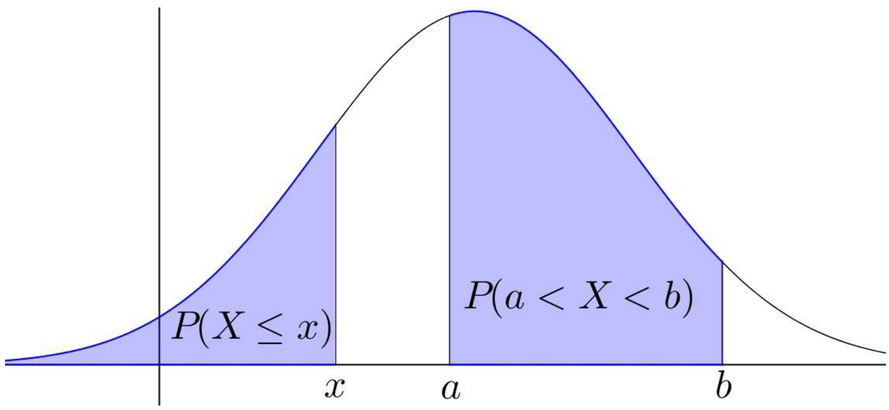
Määritelmä 2.19.
Jatkuvan satunnaismuuttujan $X : S \to K$ tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio ilmaisee todennäköisyysjakauman pisteessä x.

Lemma 2.20.
Määritelmien 2.18 ja 2.19 suorana seurauksena saadaan

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ ,$$
$$P(X > x) = \int_{x}^{\infty} f(t)dt\ ,$$
$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt\ .$$



Kuva 4: Tiheysfunktio $f(x)$.

Määritelmä 2.21. (Odotusarvo)
Jatkuvan satunnaismuuttujan $X : S \to K$ odotusarvo on

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx\ ,$$

jos $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$.

Lemma 2.22.
Varianssi voidaan myös laskea kaavasta:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 .$$

Todistus. Määritelmän 2.16 mukaan:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + X^2\right]$$
$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 . \qquad \square$$

Määritelmä 2.23. (Tasainen jakauma)
Jos satunnaismuuttujan $X : S \to (a,b)$ jakauma- ja tiheysfunktiot ovat

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a},\ f(x) = \frac{1}{b-a},\ a < x < b,$$

niin sanotaan, että satunnaismuuttujalla X on tasainen jakauma välillä (a,b), merkitään $X \sim U(a,b)$. Nimitys johtuu siitä, että tiheysfunktio on tasainen eli vakio välillä (a,b). Tällöin X saa arvon tietyltä väliltä yhtä suurella todennäköisyydellä kuin miltä tahansa samanpituiselta väliltä. Sanotaan myös, että X saa arvoja satunnaisesti väliltä (a,b).

Lemma 2.24.
Olkoot $X \sim U(a,b)$ ja $(c,d) \subset (a,b)$. Todennäköisyys sille, että $X \in (c,d)$ voidaan laskea janojen pituuksien suhteina:

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a} .$$

Todistus. Koska $P(X = y) = 0, \forall y \in (a,b)$, niin määritelmän 2.18 avulla saadaan

$$P(c < X < d) = P(X < d) - P(X < c) = F(d) - F(c) .$$

Nyt määritelmän 2.23 mukaan

$$F(d) - F(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{d-c}{b-a} . \qquad \square$$

Esimerkki 2.25. Bussi kulkee 10 minuutin välein. Jos saapuu pysäkille satunnaisena hetkenä, niin odotusaika $X \sim U(0,10)$. Tällöin todennäköisyys, että bussia joutuu odottamaan korkeintaan 6 minuuttia, on määritelmän 2.23 mukaan

$$P(X < 6) = \frac{6-0}{10-0} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\,.$$

Puolestaan todennäköisyys, että bussia joutuu odottamaan ainakin 2 minuuttia, mutta korkeintaan 7 minuuttia on lemman 2.24 mukaan

$$P(2 < X < 7) = \frac{7-2}{10-0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\,.$$

Lemma 2.26. Kaksiulotteinen tasainen jakauma.
Satunnaisvektorilla (X,Y) on kaksiulotteinen tasainen jakautuma alueessa A, jos yhteistiheysfunktio $f_{X,Y}(x,y) = c$ on vakio alueessa A ja nolla muualla. Olkoon $|A|$ alueen A pinta-ala ja $|B|$ alueen $B \subset A$ pinta-ala. Tällöin

$$P\left[(X,Y) \in B\right] = \frac{|B|}{|A|}\,.$$

Tasaisen jakauman todennäköisyyksiä voidaan siis laskea pinta-alojen suhteilla.

Todistus.

$$1 = \int\int_A c dx dy = c|A|$$
$$\Rightarrow c = \frac{1}{|A|}$$

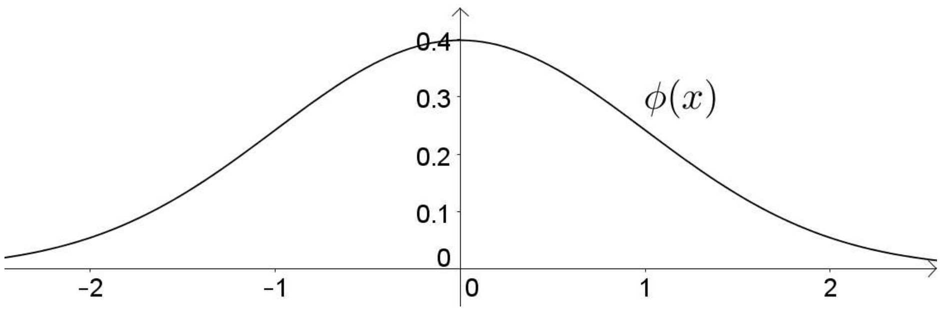
Näin ollen

$$P\left[(X,Y) \in B\right] = \int\int_B c dx dy = c|B| = \frac{|B|}{|A|}\,. \qquad \square$$

Määritelmä 2.27. (Normaalijakauma)
Jos satunnaismuuttujan X jakaumafunktio $\Phi(x)$ ja tiheysfunktio $\phi(x)$ ovat

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2},\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,\ -\infty < x < \infty,$$

niin sanotaan, että satunnaismuuttujalla X on standardoitu normaalijakauma, merkitään $X \sim N(0,1)$. Jos $X \sim N(0,1)$, niin satunnaismuuttujalla $Y = \sigma X + \mu$ sanotaan olevan normaalijakautuma $N(\mu,\sigma^2)$.



Kuva 5: Standardoidun normaalijakauman tiheysfunktio $\phi(x)$.

Lemma 2.28.
Standardoidulla normaalijakaumalla on seuraavat ominaisuudet.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$

2. $E(X) = 0,\ Var(X) = 1$

3. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Todistus. 1. Korottamalla alkuperäinen yhtälö toiseen potenssiin ja sijoittamalla määritelmän 2.27 mukainen $\phi(x)$:n funktio saadaan ehdolle 1 ekvivalenssi ehto:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx\right]^2 = 1 \text{ eli } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = 2\pi\,.$$

Olkoon $x = r\cos\theta$ ja $y = r\sin\theta$. Tällöin $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2}d\theta\right]dr$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2}dr \int_{0}^{2\pi} d\theta = 2\pi\,.$$

2. Koska $x\phi(x)$ on pariton funktio, niin odotusarvon määritelmän 2.21 mukaan saadaan:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 0\,.$$

Edelleen määritelmän 2.22 mukaan

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2)\,.$$

Käytetään jälleen odotusarvon määritelmää ja sijoitetaan $\phi(x)$, niin saadaan

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 \, .$$

3. Määritelmän 2.27 mukaan saadaan:

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \phi(t)\, dt \, .$$

Nyt funktion $\phi(t)$ parillisuudesta ja tämän määritelmän ensimäisestä kohdasta seuraa

$$= \int_{x}^{\infty} \phi(t)\, dt = 1 - \Phi(x) \, . \qquad \square$$

Lemma 2.29.
Normaalijakaumalla $N(\mu,\sigma^2)$ on seuraavat ominaisuudet.

1. $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$;

2. $E(X) = \mu,\ Var(X) = \sigma^2$.

Esimerkki 2.30. Eräässä kokeessa tulosten pistemäärä on likimain normaalisti jakautunut. Keskiarvo on 62 ja keskihajonta 17 pistettä. Kiitettävien arvosanojen osuudeksi halutaan 30 %. Mikä on kiitettävän pisteraja?

Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun oppilaan pistemäärä, jolloin $X \sim N(62{,}17^2)$. On määritettävä kiitettävän pistemäärä x niin, että $P(X \geq x) = 0{,}30$ eli

$$P(X < x) = 0{,}70 \, .$$

Määritelmän 2.18 mukaan $P(X < x) = F(x)$ ja lemman 2.29 mukaan $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, joten saadaan

$$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = 0{,}70 \, .$$

Taulukkokirjan [3] mukaan lähin sellainen z:n arvo, jolle $\Phi(z) = 0{,}70$ on $z = 0{,}52$, siispä

$$\frac{x-62}{17} = 0{,}52$$

$$\Rightarrow x = 62 + 0{,}52 \cdot 17 \approx 71$$

Kiitettävän arvosanan pisterajaksi on siis asetettava 71 pistettä.

2.2 Ehdollinen todennäköisyys

Määritelmä 2.31.
Tapauksen A ehdollinen todennäköisyys ehdolla B on

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} ,$$

jos $P(B) > 0$.

Määritelmä 2.32.
Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos ja vain jos

$$P(A|B) = P(A) .$$

Määritelmä 2.33.
Tapaukset A_1,...,A_n muodostavat otosavaruuden S osituksen, jos tapaukset A_i ovat toisensa poissulkevat, $S = A_1 \cup ... \cup A_n$ ja $P(A_i) > 0$ kaikilla i.

Lemma 2.34. (Kokonaistodennäköisyyslause)
Jos tapaukset A_1,...,A_n muodostavat otosavaruuden S osituksen, niin

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) .$$

Todistus. Koska tapaukset $B \cap A_i$ ovat toisensa poissulkevat, niin

$$P(B) = P(B \cap S) = P(B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) . \qquad \square$$

Lemma 2.35. (Bayesin lause)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} ,$$

jos $P(B) > 0$.

Todistus. Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän (määr. 2.31) mukaan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Siispä

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) .$$

Vastaavasti saadaan myös

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) .$$

Näistä kahdesta yhtälöstä saadaan

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} . \qquad \square$$

Esimerkki 2.36. Hatussa 1 on kaksi mustaa ja yksi valkoinen pallo. Hatussa 2 on kolme mustaa ja kaksi valkoista palloa. Satunnaisesta hatusta nostetaan umpimähkään yksi pallo. Millä todennäköisyydellä nostettu pallo on valkoinen? Millä todennäköisyydellä pallo on otettu hatusta 1, kun tiedetään sen olevan valkoinen?

Merkitään H_1 = ”Valitaan hattu 1”, H_2 = ”Valitaan hattu 2” ja V = ”Saadaan valkoinen pallo”. Koska hattu valitaan satunnaisesti kahdesta mahdollisesta, on selvästi $P(H_1) = \frac{1}{2}$ ja $P(H_2) = \frac{1}{2}$. Nyt kokonaistodennäköisyyslauseen (lemma 2.34) mukaan

$$\begin{aligned} P(V) &= \sum_{i=1}^{2} P(V|H_i)P(H_i) \\ &= P(V|H_1)P(H_1) + P(V|H_2)P(H_2) . \end{aligned}$$

Hatussa 1 on kolme palloa, joista yksi valkoinen, joten $P(V|H_1) = \frac{1}{3}$. Hatussa 2 oli puolestaan viisi palloa, joista kaksi valkoista eli $P(V|H_2) = \frac{2}{5}$. Siispä

$$P(V|H_1)P(H_1) + P(V|H_2)P(H_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{30} .$$

Bayesin lauseen (lemma 2.35) mukaan

$$P(H_1|V) = \frac{P(V|H_1)P(H_1)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11} .$$

Umpimähkään nostettu pallo on valkoinen todennäköisyydellä $\frac{11}{30}$ ja pallo on peräisin hatusta 1 todennäköisyydellä $\frac{5}{11}$, jos se on valkoinen.

2.3 Kombinatoriikka

Joukosta voidaan ottaa alkioita eli suorittaa otanta kahdella tavalla. Otanta tehdään palauttamatta, jos joukosta otetaan pois yksi alkio kerrallaan. Otanta tehdään palauttaen, jos jokaisen alkion oton jälkeen alkio palautetaan joukkoon.

Olkoon A n-alkioinen joukko. A:n k-alkioista osajoukkoa kutsutaan A:n k-kombinaatioksi. A:n k-alkioista jonoa kutsutaan A:n k-permutaatioksi. k-kombinaatiossa alkioiden keskinäisellä järjestyksellä ei ole väliä, kun taas k-permutaatiossa on.

Lemma 2.37. (järjestetty otanta palauttamatta)
Jos joukossa on n erilaista alkiota ja joukosta otetaan k alkiota palauttamatta, niin erilaisia k-permutaatioita on mahdollista saada

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

kappaletta. Erikoisesti n alkiota on mahdollista järjestää jonoon $n!$ eri tavalla.

Todistus. Kun n-alkioisesta joukosta valitaan k-permutaatiota palauttamatta, voidaan ajatella, että k-alkioisen jonon ensimmäiselle paikalle on n vaihtoehtoa, toiselle $(n-1)$ jne. Siispä erilaisia k-permutaatioita on yhteensä

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \qquad \square$$

Lemma 2.38. (järjestetty otanta palauttaen)
Jos joukossa on n erilaista alkiota ja joukosta otetaan k alkiota palauttaen, niin erilaisia k-permutaatioita on mahdollista saada

$$n^k$$

kappaletta.

Todistus. Kun n-alkioisesta joukosta valitaan k-permutaatiota palauttaen, voidaan ajatella, että k-alkioisen jonon jokaiselle paikalle on n vaihtoehtoa. Siispä erilaisia k-permutaatioita on yhteensä

$$\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{k \text{ kpl}} = n^k\,. \qquad \square$$

Lemma 2.39. (järjestämätön otanta palauttamatta)
Jos joukossa on n erilaista alkiota ja joukosta otetaan k alkiota palauttamatta, niin erilaisia k-kombinaatioita on mahdollista saada

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kappaletta.

Todistus. Lemman 2.37 mukaan erilaisia k-permutaatioita on $\frac{n!}{(n-k)!}$. Koska k-permutaatiossa järjestyksellä on väliä ja lemman 2.37 mukaan k alkiota voidaan järjestää $k!$ eri tavalla, niin erilaisia k-kombinaatioita on oltava yhteensä

$$\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kappaletta. □

Lemma 2.40. (Binomitodennäköisyys)
Koe, joka onnistuu todennäköisyydellä p ja epäonnistuu todennäköisyydellä $q = 1 - p$ toistetaan riippumattomasti n kertaa. Olkoon X onnistuneiden kokeiden lukumäärä, jolloin

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ , \ k = 0,1,2,\ldots,n.$$

Todistus. Todennäköisyys, että riippumaton koe ensin onnistuu k kertaa ja sitten epäonnistuu $(n-k)$ kertaa on lemman 2.8 mukaan $p^k q^{n-k}$. Onnistuneet kokeet voivat kuitenkin olla muissakin paikoissa ja jokaisen todennäköisyys on $p^k q^{n-k}$. Mahdollisia koesarjoja on lemman 2.39 mukaan $\binom{n}{k}$ kappaletta. Olkoot A_i i:s näistä koesarjoista. Koska tapaukset A_i ovat toistensa poissulkevat, lemman 2.3 mukaan saadaan

$$P(X = k) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \, .$$

□

Esimerkki 2.41. Kuinka monella tavalla voidaan kirjaimet A, B, C, D ja E järjestää jonoon? Entä kuinka monta erilaista kahden kirjaimen jonoa niistä saa?

Kirjaimien järjestyksellä on selvästi väliä ja toisaalta kirjaimia ei palauteta. On siis kyseessä järjestetty otanta palauttamatta. Nyt lemman 2.37 erikoistapauksen mukaan erilaisia viiden kirjaimen jonoja on $5! = 120$ kappaletta. Puolestaan kahden kirjaimen jonoja viidestä kirjaimesta saadaan yhteensä

$$\frac{5!}{(5-2)!} = 20 \text{ kappaletta.}$$

Esimerkki 2.42. Korissa on 15 kevytjuomaa ja 5 tavallista juomaa pulloissa, joista etiketit ovat irronneet. Millä todennäköisyydellä viisi umpimähkään valittua pulloa ovat kaikki kevytjuomaa?

Se, missä järjestyksessä pulloja otetaan korista, ei ole merkityksellistä. Otettuja pulloja ei myöskään palauteta takaisin koriin. Kyseessä on siis järjestämätön otanta palauttamatta. Lemman 2.39 mukaan 20 pullon joukosta voidaan ottaa viisi pulloa yhteensä

$$\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!(20-5)!} = 15504 \text{ tavalla.}$$

Toisaalta 15 kevytjuomapullon joukosta voidaan ottaa viisi pulloa yhteensä

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = 3003 \text{ tavalla.}$$

Kaikkia alkeistapauksia on siis yhteensä 15504 kappaletta ja suotuisia tapauksia 3003 kappaletta, joten

$$P(5 \text{ kevytjuomaa}) = \frac{3003}{15504} \approx 19\% \,.$$

Esimerkki 2.43. Syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia. Millä todennäköisyydellä nelilapsisessa perheessä on yhtä monta poikaa ja tyttöä?

Käytetään binomitodennäköisyyden kaavaa (lemma 2.40) ja merkitään pojan todennäköisyys $p = 0{,}512$ ja tytön $q = 1 - p = 0{,}488$. Tällöin

$$P(2 \text{ poikaa ja 2 tyttöä}) = \binom{4}{2} 0{,}512^2 \cdot 0{,}488^2 \approx 37{,}5\% \,.$$

Esimerkki 2.44. Kunnan asukkaista neljäsosa kannattaa moottoritien rakentamista. Moottoritie rakennetaan jos viisihenkisessä valtuustossa vähintään kolme jäsentä kannattaa sen rakentamista. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti kunnan asukkaista koottu valtuusto päättää rakentaa moottoritien?

Olkoon $K =$ "moottoritien rakentamista kannattavien valtuuston jäsenten lukumäärä". Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu kuntalainen kannattaa moottoritien rakentamista, on $p = 0{,}25$ ja vastaavasti vastustaa rakentamista on $q = 1 - p = 0{,}75$. Lemman 2.40 mukaan

$$P(K = k) = \binom{5}{k} p^k q^{5-k} \ , \ k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5.$$

Moottoritie rakennetaan, jos kolme, neljä tai viisi valtuuston jäsentä kannattaa sen rakentamista. Näiden tapausten todennäköisyydet ovat

$$P(K = 3) = \binom{5}{3} 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^2 = \frac{45}{512} \, ,$$

$$P(K = 4) = \binom{5}{4} 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^1 = \frac{15}{1024} \, ,$$

$$P(K = 5) = \binom{5}{5} 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^0 = \frac{1}{1024} \, .$$

Siispä todennäköisyys, että moottoritie rakennetaan, on

$$P(\text{Tie rakennetaan}) = \frac{45}{512} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{53}{512} \approx 10\% \, .$$

3 Monty Hallin ongelma

Monty Hallin ongelma on alun perin lähtöisin "Let's make a deal" tv-ohjelmasta, jota Monty Hall juonsi. Kyseessä oli ohjelma, jossa kilpailijat yrittivät voittaa palkintoja. Kyseessä on seuraavanlainen ongelma: kilpailija saa valita kolmesta ovesta yhden, jonka takaa paljastuvan palkinnon hän voittaa. Kahden oven takana on vuohi ja yhden oven takana urheiluauto. Kun kilpailija on valinnut oven, avataan kahdesta jäljelle jääneestä ovesta toinen, jonka takana on vuohi. Tämän jälkeen kilpailijalle annetaan mahdollisuus vaihtaa alkuperäinen valintansa, jos hän niin haluaa. Monty Hallin ongelman kysymys kuuluukin, kannattaako oven vaihtaminen?

Kysymyksen esitti alunperin "Ask Marilyn" -kolumnin lukija Parade Magazinessa 1990 [9]. Marilyn vos Savantin vastaus kysymykseen nostatti kohua matemaatikkojen keskuudessa, sillä ongelman ratkaisu on intuition vastainen. Von Savantin vastauksen mukaan voiton todennäköisyys on 1/3 alkuperäisen oven valitsemalla ja toisaalta ovea vaihtamalla voiton todennäköisyys on 2/3. Suurin osa hänen kolumninsa lukijoistaan kuitenkin väitti molempien ovien voitto todennäköisyyden olevan 50%. Psykologi Massimo Piattelli-Palmarini on muun muassa sanonut, että mikään muu todennäköisyyslaskennan ongelma ei pääse näin lähelle hämäämään kaikkia ihmisiä kaiken aikaa ja jopa Nobel-palkitut fyysikot antavat ongelmaan väärän vastauksen ja ovat valmiita väittelemään sen puolesta julkaisuissa.

3.1 Pelkistetty ratkaisu

Marilyn von Savant esitti ongelmaan pelkistetyn ratkaisun kolumnissaan [9]. Alkuperäisen oven voitto todennäköisyys ei voi nousta 1/2:aan, vaikka juontaja paljastaakin yhden oven takaa vuohen. Osoitetaan tämä tarkastelemalla kaikkia kuutta mahdollista peliä ja niiden lopputulokset. Olkoot selvyyden vuoksi A, B ja C ovien nimet. Auto voi siis olla joko oven A, B tai C takana ja pelaaja voi joko vaihtaa oven tai tyytyä alkuperäiseen valintaansa. Oletetaan näissä peleissä, että pelaaja on alun perin valinnut oven A. Kaikki kuusi pelien eri vaihtoehtoa ovat näkyvissä taulukossa 1.

Taulukko 1: Kaikki mahdolliset pelit

	Ovi A	**Ovi B**	**Ovi C**	**Tulos**
Peli 1	Auto	Vuohi	Vuohi	Vaihto ja häviö
Peli 2	Vuohi	Auto	Vuohi	Vaihto ja voitto
Peli 3	Vuohi	Vuohi	Auto	Vaihto ja voitto
Peli 4	Auto	Vuohi	Vuohi	Ei vaihtoa ja voitto
Peli 5	Vuohi	Auto	Vuohi	Ei vaihtoa ja häviö
Peli 6	Vuohi	Vuohi	Auto	Ei vaihtoa ja häviö

Peleissä 1-3 pelaaja vaihtaa alkuperäisen valintansa toiseen oveen ja voittaa näistä peleistä 2. Siispä voitto todennäköisyys ovea vaihtamalla on $2/3$. Peleissä 4-6 pelaaja puolestaan jää alkuperäiseen oven valintaan ja voittaa näistä peleistä yhden. Näin ollen voitto todennäköisyys jäämällä alkuperäiseen oveen on $1/3$.

3.2 Todennäköisyysteoreettinen ratkaisu

Tämän kappaleen pääasiallisena lähteenä on Afra Zomorodianin raportti [10]. Ongelman matemaattisesti muuttumatta voidaan olettaa, että kilpailija on ensin valinnut oven A, Monty Hall paljastaa oven B ja kolmas ovi on C. Käytetään seuraavia merkintöjä:

$$\hat{A} = \text{"palkinto on oven } A \text{ takana"}\ ,$$

$$\hat{B} = \text{"palkinto on oven } B \text{ takana"}\ ,$$

$$\hat{C} = \text{"palkinto on oven } C \text{ takana"}\ ,$$

$$M = \text{"Monty Hall aukaisee oven } B\text{"}\ .$$

Nyt Monty Hallin ongelma voidaan kirjoittaa seuraavasti: onko $P(\hat{A}|M) = P(\hat{C}|M)$?

Bayesin lauseen (Määr. 2.35) avulla saadaan

$$P(\hat{A}|M) = \frac{P(M|\hat{A})P(\hat{A})}{P(M)},$$

$$P(\hat{C}|M) = \frac{P(M|\hat{C})P(\hat{C})}{P(M)}.$$

Oletetaan, että palkinto on satunnaisen oven takana, jolloin

$$P(\hat{A}) = P(\hat{B}) = P(\hat{C}) = \frac{1}{3}.$$

Lasketaan seuraavaksi ehdolliset todennäköisyydet tapahtumalle M.

$P(M|\hat{A}) = \frac{1}{2}$, jos palkinto on oven A takana, voi Monty Hall aukaista oven B tai C.

$P(M|\hat{B}) = 0$, jos palkinto on oven B takana, täytyy Monty Hallin aukaista ovi C.

$P(M|\hat{C}) = 1$, jos palkinto on oven C takana, täytyy Monty Hallin aukaista ovi B.

Merkitään nyt $M = (M \cap \hat{A}) \cup (M \cap \hat{B}) \cup (M \cap \hat{C})$. Tapaukset $(M \cap \hat{A})$, $(M \cap \hat{B})$ ja $(M \cap \hat{C})$ ovat selvästi toisensa poissulkevat, koska palkinto voi olla vain yhden oven takana. Siispä määritelmän 2.3 aksiooman kolme ja määritelmän 2.31 mukaan saadaan

$$P(M) = P(M \cap \hat{A}) + P(M \cap \hat{B}) + P(M \cap \hat{C})$$

$$= P(\hat{A})P(M|\hat{A}) + P(\hat{B})P(M|\hat{B}) + P(\hat{C})P(M|\hat{C})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Nyt saadaan laskettua $P(\hat{A}|M)$ sijoittamalla tulokset yhtälöön

$$P(\hat{A}|M) = \frac{P(M|\hat{A})P(\hat{A})}{P(M)} = \frac{(1/3) \cdot (1/2)}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Vastaavasti saadaan

$$P(\hat{C}|M) = \frac{P(M|\hat{C})P(\hat{C})}{P(M)} = \frac{(1/3) \cdot (1)}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Lopulta siis tulokseksi saatiin, että ovea vaihtamalla voiton todennäköisyys tuplaantuu. Tulos on sama kuin pelkistetyllä ratkaisulla.

4 Newton-Pepys ongelma

Samuel Pepys (1633–1703) oli englantilainen merenkulkuhallituksen virkamies ja kansanedustaja. Uhkapelivedon innoittamana hän kirjoitti vuonna 1693 Sir Isaac Newtonille kirjeen, jossa halusi tietää mikä kolmesta eri tapahtumasta on todennäköisin [2]. Ongelma kokonaisuudessaan oli seuraava: pelaaja A heittää kuusi noppaa ja lupaa saada ainakin yhden kutosen, pelaaja B heittää 12 noppaa ja lupaa saada ainakin 2 kutosta sekä pelaaja C heittää 18 noppaa ja lupaa saada ainakin 3 kutosta. Kuka pelaajista todennäköisemmin onnistuu pitämään lupauksensa?

Tämä ongelma on tiettävästi ainoa kerta kun Newton ratkaisi todennäköisyyslaskentaan liittyvää ongelmaa. Luultavasti Sir Isaac Newton ei yksinkertaisesti pitänyt uhkapeleistä tai todennäköisyyslaskenta ei ollut hänen paras osa-alue matematiikasta. Vaikka Newton laski jokaisen tapahtuman todennäköisyyden oikein, hän myös antoi Pepysille intuitiivisia selityksiä, jotka osoittautuivat vääriksi. Newton esimerkiksi ajatteli, että noppia heitetään kuuden sarjoissa. Näin hän perusteli, että pelaajalla A on paras todennäköisyys pitää lupauksensa, koska tämän tarvitsee saada kutonen vain yhdellä heittokerralla, kun taas pelaajan B pitää saada kutonen kahdella heittokerralla ja pelaajan C kolmesti. Tämä perustelu ei kuitenkaan ota huomioon, että kuuden nopan sarjassa voisi olla enemmän kutosia kuin yksi ja näin ei vastaa alkuperäiseen ongelmaan.

4.1 Newton-Pepys ongelman ratkaisu

Oletetaan aluksi, että kaikki nopat ovat tasapainotettuja, jolloin jokaisen silmäluvun todennäköisyys on yhtäsuuri, erityisesti siis $\frac{1}{6}$.

Lähdetään liikkeelle pelaajan A ongelmasta. Pelaajan A pitää siis kuudella nopan heitolla saada vähintään yksi kutonen. Lasketaan ensin mikä on todennäköisyys, että saadaan tarkalleen yksi kutonen. Todennäköisyys, että noppaa heittämällä saadaan ensinmäisellä heitolla kutonen ja sitten viisi muuta silmälukua, on $(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})(\frac{5}{6})(\frac{5}{6})(\frac{5}{6})(\frac{5}{6}) = (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^5$. Kutonen voidaan kuitenkin saada millä heitolla vain, joten edellinen todennäköisyys täytyy vielä kertoa yhden kutosen ja viiden ei-kutosen kaikkien mahdollisten järjestysten lukumäärällä. Lemman 2.39 perusteella tämä on $\binom{6}{1}$. Näin ollen saadaan

$$P(\text{kuudella heitolla saadaan yksi kutonen}) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5 .$$

Vastaavasti todennäköisyys, että saadaan x kutosta kun heitetään kuutta noppaa, on

$$P(\text{kuudella heitolla saadaan } x \text{ kutosta}) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{6-x}, x \in \{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

Nyt jos vielä merkitään heittojen lukumäärää n:llä saadaan

$$P(n\text{:llä heitolla saadaan } x \text{ kutosta}) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}, x \in \{0,1,...,n\} .$$

Kuutta noppaa heittämällä tapauksen "saadaan ainakin yksi kutonen" vastatapaus on, ettei saada yhtään kutosta, joten lemman 2.4 perusteella

$$P(\text{kuudella heitolla saadaan ainakin yksi kutonen})$$

$$= 1 - P(\text{kuudella heitolla ei saada kutosia})$$
$$= 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}665 .$$

Vastaavasti heittämällä $6n$ noppaa todennäköisyys, että saadaan ainakin n kutosta, on

$$P(6n \text{ heitolla saadaan ainakin } n \text{ kutosta})$$

$$= 1 - P(6n \text{ heitolla saadaan korkeintaan } n-1 \text{ kutosta})$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{n-1}\binom{6n}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-x} .$$

Seuraavassa taulukossa on laskettu edellisen kaavan mukaisia todennäköisyyksiä eri n:n arvoilla (ks. taulukko 2).

Taulukko 2: Todennäköisyydet eri n:n arvoilla

6n	**n**	**P(ainakin n kutosta)**
6	1	0,66510
12	2	0,61867
18	3	0,59735
24	4	0,58449
30	5	0,57566
60	10	0,55363
120	20	0,53796

Edellisen taulukon perusteella voidaan päätellä, että paras mahdollisuus pitää lupauksensa on pelaajalla A, joka siis heittää vain kuusi noppaa. Todennäköisyys saada vähintään yksi kuudesosa heitoista kutosia pienenee, mitä suuremman määrän valitaan heittoja, vaikka kutosten suhteellinen osuus pysyy samana. Näyttäisi myös siltä, että kyseinen todennäköisyys lähestyy puolikasta heittojen suurella lukumäärällä.

Asia on ehkä helpommin ymmärrettävissä, jos ajatellaankin noppien sijasta kolikkoja. Oletetaan siis, että $2n$ kolikonheitolla pitäisi saada vähintään n klaavaa ja ratkaistaan todennäköisyys tälle tapahtumalle. Jos $n = 1$, niin

$$P(\text{kahdella heitolla saadaan vähintään yksi klaava})$$

$$= 1 - P(\text{kahdella heitolla ei saada klaavoja}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}75\,.$$

Kuvitellaan seuraavaksi, että n on jokin suuri luku, esimerkiksi vaikka 1000. Nyt siis 2000 heitolla pitäisi saada vähintään 1000 klaavaa. Koska heittojen määrä on valtava niin todennäköisyys, että saadaan tarkalleen 1000 klaavaa, on äärimmäisen pieni. Toisaalta todennäköisyydet, että saadaan ainakin 1001 klaavaa tai korkeintaan 999 klaavaa, on oltava yhtä suuret. Näin ollen voidaan päätellä, että

$$P(\text{2000 heitolla saadaan ainakin 1000 klaavaa}) \approx 0{,}5\,.$$

Siispä heittojen määrää kasvattamalla myös todennäköisyys pienenee ja lähestyy puolikasta.

Newton joutui laskemaan todennäköisyydet kuudelle ja 12 nopalle käsin vakuuttaakseen Pepysin tulosten oikeellisuudesta. Kuuden nopan tapauksessa hän sai tulokseksi 31031/46656 ja 12 nopan tapauksessa 1346704211/2176782336. Tämän jälkeen hän lopetti ja kertoi, että 18 nopan tapaus ratkeaisi vastaavasti. Mutta käyttämällä esimerkiksi kolikkoja vastaavanlaisena esimerkkinä Newton olisi voinut vakuttaa Pepysin laskematta tarkkoja todennäköisyyksiä.

5 Loton todennäköisyyksiä

Hyvin yleinen esimerkkitehtävä kombinatorisesta todennäköisyydestä on lotto. Eräässä lukion pitkän matematiikan oppikirjassa [5] käsitellään muun muassa normaalin suomalaisen Loton ja Viking Loton päävoiton sekä kaikkien muiden voittoluokkien todennäköisyydet. Ratkaistaan nykyisen suomalaisen Loton voittoluokkien todennäköisyydet. Lotossa arvotaan siis seitsemän numeroa 39 numerosta ja lisäksi arvotaan kaksi lisänumeroa. Seuraavassa taulukossa on Loton voitonjako vuoden 2013 viikolta 3, jolloin Loton päävoitto oli epätavallisen suuri - 12,5 miljoonaa euroa.

Taulukko 3: Loton voitonjako

Voittoluokka	**Voittosumma (euroa)**
7 oikein	12500000,00
6+1 oikein	20811,10
6 oikein	1761,00
5+2 oikein	3310,80
5+1 oikein	123,40
5 oikein	50,00
4+2 oikein	87,80
4+1 oikein	17,50
4 oikein	9,30
3+2 oikein	5,00
3+1 oikein	1,00

Lemman 2.39 mukaan eri lottorivejä on kaikkiaan $\binom{39}{7}$. Kaikista lottoriveistä vain yhdessä ovat kaikki luvut samat kuin arvotussa lottorivissä. Näin ollen todennäköisyys saada seitsemän oikein on

$$P(7 \text{ oikein}) = \frac{1}{\binom{39}{7}} = \frac{1}{15380937}\,.$$

Kun 39 luvun joukosta poistetaan oikean lottorivin 7 lukua, jäljelle jää 32 luvun joukko. Poistetaan tästä joukosta vielä 2 lisänumeroa ja jäljelle jää 30 lukua. Voittoluokassa 6+1 tulee olla 6 lukua oikein lottorivin seitsemän numeron joukosta. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä näille tapauksille on $\binom{7}{6}$. Lisäksi tulee yksi kahdesta lisänumerosta olla oikein. Vaihtoehtoja näille tapauksille on $\binom{2}{1}$ kappaletta. Tuloperiaatteen mukaan saadaan

$$P(6+1 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{6}\binom{2}{1}}{\binom{39}{7}} = \frac{14}{15380937}\,.$$

Voittoluokassa 6 oikein puolestaan tulee olla 6 lukua oikein lottorivin seitsemän numeron joukosta. Jäljelle jäävä yksi luku ei saa olla seitsemän oikean lottorivin tai kahden lisänumeron joukossa, joten se on siis oltava jäljelle jäävän 30 luvun joukossa. Näin ollen saadaan

$$P(6 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{6}\binom{30}{1}}{\binom{39}{7}} = \frac{210}{15380937}\,.$$

Muiden voittoluokkien todennäköisyydet lasketaan vastaavasti:

$$P(5+2 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{5}\binom{2}{2}}{\binom{39}{7}} = \frac{21}{15380937}\,,$$

$$P(5+1 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{5}\binom{2}{1}\binom{30}{1}}{\binom{39}{7}} = \frac{1260}{15380937}\,,$$

$$P(5 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{5}\binom{30}{2}}{\binom{39}{7}} = \frac{9135}{15380937}\,,$$

$$P(4+2 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{4}\binom{2}{2}\binom{30}{1}}{\binom{39}{7}} = \frac{1050}{15380937}\,,$$

$$P(4+1 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{4}\binom{2}{1}\binom{30}{2}}{\binom{39}{7}} = \frac{30450}{15380937}\,,$$

$$P(4 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{4}\binom{30}{3}}{\binom{39}{7}} = \frac{142100}{15380937}\,,$$

$$P(3+2 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{3}\binom{2}{2}\binom{30}{2}}{\binom{39}{7}} = \frac{15225}{15380937}\,,$$

$$P(3+1 \text{ oikein}) = \frac{\binom{7}{3}\binom{2}{1}\binom{30}{3}}{\binom{39}{7}} = \frac{284200}{15380937}\,.$$

Lasketaan seuraavaksi todennäköisyys, että yksittäisellä lottorivillä voittaisi edes jotain. Koska eri voittoluokkien kaikki mahdolliset rivit ovat toistensa poissulkevia, voidaan kyseiset todennäköisyydet laskea yhteen määritelmän 2.3 mukaisesti, joten saadaan

$$P(\text{vähintään } 3{+}1 \text{ oikein}) =$$
$$\frac{284200 + 15225 + 142100 + 30450 + 1050 + 9135 + 1260 + 21 + 210 + 14 + 1}{15380937}$$
$$= \frac{483666}{15380937} \approx 3{,}145\% \,.$$

Usein kuulee sanottavan, että lottoaminen kannattaa, kun päävoittoon on kertynyt suuri summa. Lasketaan mikä oli vuoden 2013 viikon 3 yksittäisen rivin odotusarvo, kun päävoittoon oli kertynyt huikea 12,5 miljoonan euron potti. Yksittäisen rivin odotusarvo voidaan lemman 2.14 mukaisesti laskea summaamalla kunkin voittoluokkien todennäköisyyden ja voittosummien tulot. Käytetään tässä laskussa taulukon 3 voittosummia. Siispä odotusarvoksi saadaan

$$E(\text{lottorivi, kun päävoitto 12,5 miljoonaa}) =$$
$$\frac{284200}{15380937}\cdot 1{,}00 + \frac{15225}{15380937}\cdot 5{,}00 + \ldots + \frac{210}{15380937}\cdot 20811{,}10 + \frac{1}{15380937}\cdot 12500000$$
$$\approx 1{,}05 \text{ euroa} \,.$$

Kun yhden lottorivin hinta on 1 euro, niin keskimäärin yhdellä rivillä tienaisi 5 senttiä jos päävoiton osuessa ansaitsisi aina 12,5 miljoonaa euroa. Täytyy kuitenkin ottaa huomioon, että päävoitto menee yleensä moneen osaan. Jos esimerkiksi 12,5 miljoonan päävoitolle olisi löytynyt kaksi voittajaa, odotusarvo putoaisi jo huomattavasti:

$$E(\text{lottorivi, kun päävoitto 12,5 miljoonaa}/2) \approx 0{,}64 \text{ euroa} \,.$$

Päävoiton osuessa kahdelle henkilölle, yhdellä rivillä häviäisi jo keskimäärin 36 senttiä. On täysin mahdotonta sanoa, kuinka moneen osaan päävoitto menee, joten myös tarkan odotusarvon määrittäminen on mahdotonta. Vaikuttaisi kuitenkin siltä, että lottoaminen ei keskimäärin kannata edes silloin, kun päävoitto on 12,5 miljoonaa euroa, koska päävoitto menee usein useampaan osaan.

Päävoiton osumista pidetään lähes mahdottomana vaikka pelaisi Lottoa aktiivisestikin. Lasketaan seuraavaksi tästä esimerkki. Oletetaan, että Pekka pelaa Lottoa joka viikko kymmenen riviä 30 vuoden ajan. Mikä olisi tällöin todennäköisyys, että Pekka voittaa päävoiton ainakin kerran? Koska yhden rivin voittotodennäköisyys on $1/15380937$ ja vain yksi rivi voi voittaa päävoiton samalla viikolla, on kymmenen rivin voittotodennäköisyys $10/15380937$. Tapauksen "Pekka voittaa päävoiton ainakin kerran" komplementti on "Pekka ei voita päävoittoa kertaakaan", joten lemman 2.4 mukaan saadaan

$$P(\text{Pekka voittaa päävoiton ainakin kerran})$$

$$= 1 - P(\text{Pekka ei voita päävoittoa kertaakaan})\,.$$

Yksittäisellä viikolla Pekan päävoiton todennäköisyys on siis $10/15380937$, joten todennäköisyys, että Pekka ei voita päävoittoa on $1 - 10/15380937 = 15380927/15380937$. Pekka ehtii lottoamaan 30 vuoden aikana yhteensä $52 \cdot 30 = 1560$ kertaa. Päävoiton osuminen jollekin viikolle ei riipu muiden viikkojen tuloksista, niin tuloperiaatteen mukaan saadaan

$$P(\text{Pekka voittaa päävoiton ainakin kerran})$$

$$\begin{aligned} &= 1 - P(\text{Pekka ei voita päävoittoa kertaakaan}) \\ &= 1 - \left(\frac{15380927}{15380937}\right)^{1560} = 0{,}00101... \approx 1‰\,. \end{aligned}$$

Lottoamalla aktiivisesti Pekan päävoiton todennäköisyys on noin yksi tuhannesosa. Entä paranisiko Pekan päävoiton todennäköisyys jos hän lottoaisi kerralla niin monta riviä kuin 30 vuoden aikana yhteensä on ehtinyt? 30 vuoden aikana Pekka ehtii lottoamaan yhteensä $30 \cdot 52 \cdot 10 = 15600$ riviä. Jos hän laittaisi kaikki rahansa kiinni samaan viikkoon, olisi päävoiton todennäköisyys siis

$$\frac{15600}{15380937} = 0{,}00101... \approx 1‰\,.$$

Tässä tapauksessa siis Pekan päävoiton todennäköisyys ei ainakaan merkittävästi suurene, vaikka hän lottoaisi kaikki rivit yhdellä viikolla.

6 Blackjack

Blackjack on peli, jota on pelattu ainakin jo 1600-luvulta lähtien. Pelaajat ja matemaatikot ovat aina yrittäneet ratkaista, miten peliä kannattaisi pelata, jotta kasinon etu olisi mahdollisimman pieni. 1900-luvun lopussa Massachusetts Institute of Technologyn opiskelijat onnistuivat jopa kehittämään peliin strategian, jonka avulla pelaajalla on etu kasinoa vastaan.

Pelin säännöt pähkinänkuoressa ovat seuraavat: pelaaja asettaa panoksensa pelipöytään, jossa hän pelaa kasinon jakajaa vastaan ja yrittää saada pelikorttiensa yhteenlasketun arvon lähemmäs 21:tä kuin jakaja. Jos pelaaja menee yli 21:n, hän häviää panoksensa ja puolestaan jos jakaja menee yli 21:n (ja pelaaja ei) pelaaja voittaa panoksensa kaksinkertaisena. Myös päästessään lähemmäs 21:tä kuin jakaja (mutta ei sen yli), voittaa pelaaja panoksensa kaksinkertaisena. Jos sekä jakaja että pelaaja pääsevät yhtä lähelle 21:tä, saa pelaaja panoksensa takaisin. Jos pelaaja onnistuu saamaan blackjackin, eli ässän ja 10 arvoisen kortin, voittaa hän 2,5-kertaisesti panoksensa. Pelaajalle jaetaan ensin kaksi korttia ja jakajalle yksi kortti kaikki kuvapuoli ylöspäin. Mikäli pelaajan kaksi ensimmäistä korttia eivät muodosta blackjackia, on hänellä mahdollisuus ottaa lisää kortteja. Pelaaja voi vetää niin monta lisäkorttia kuin haluaa, kunnes pistemäärä on 21 tai sen yli. Tämän jälkeen jakaja ottaa itselleen lisäkortteja niin kauan kunnes hänen kätensä on vähintään 17 tai menee yli 21:n. Pelaajalla on myös mahdollisuus tuplata pelipanoksensa välittömästi kahden saamansa kortin jälkeen, mutta tällöin hänelle annetaan vain yksi lisäkortti.

Blackjackiä pelataan nykyään yleensä kahdeksalla korttipakalla. Korttien arvot ovat seuraavat: kortit 2-10 ovat arvoltaan osoittamansa pistemäärän verran, kuvakortit (J, Q ja K) ovat arvoltaan 10 ja ässät ovat joko 1 tai 11 pelaajan valinnan mukaan.

Tarkastellaan seuraavanlaista tilannetta: pelaaja asettaa 100 $:n panoksen ja hänelle jaetaan kaksi korttia joiden yhteenlaskettu arvo on 9 ja jakaja saa 9. Pelaajalla on tässä tilanteessa kolme vaihtoehtoa, joko jäädä yhdeksään, ottaa lisää kortteja tai tuplata panoksensa. Lisäkortin ottaminen voi ainoastaan parantaa pelaajan kättä, koska pelaaja pääsee varmasti lähemmäs 21:tä, mutta ei voi mennä sen yli. Niinpä pelaajan kannattaa, joko ottaa kortteja yksitellen lisää tai tuplata panoksensa, jolloin hänelle jaetaan enää yksi kortti. Miten pelaajan siis tulisi tilanteessa pelata? Taulukossa 4 on näkyvissä todennäköisyydet, joilla jakaja saa tietyn loppukäden lähtökäden ollessa 9 [11].

Taulukko 4: Jakajan loppukäden todennäköisyydet lähtökädellä 9.

Loppukäsi	***17***	***18***	***19***	***20***	***21***	***Blackjack***	***yli***
P(Loppukäsi)	0,1219	0,1039	0,3574	0,1223	0,0611	0	0,2334

Käytetään seuraavia merkintöjä: P_i = "Pelaaja saa loppukäden arvoltaan i" ja J_i = "Jakaja saa loppukäden arvoltaan i", missä $i = \{17,18,19,20,21,\text{yli}\}$.

Tarkastellaan ensin, kuinka pitkään pelaajan tulisi ottaa lisää kortteja tilanteessa, jossa hänellä ja jakajalla on yhdeksän. Oletetaan, että pelaaja on vetänyt kortteja lisää ja hänen kätensä on nyt 16. Lasketaan tilanteiden odotusarvo, joissa hän päättää joko ottaa 16:een lisää tai puolestaan jäädä 16:een, niin nähdään, kumpi on kannattavampaa. Määritelmän 2.14 mukaan odotusarvo tilanteessa, jossa pelaaja päättää jäädä 16:een, on

$$E(\text{Jää 16:een})$$

$$= 0\$\cdot P(\text{Häviö})+100\$\cdot P(\text{Tasapeli})+2\cdot 100\$\cdot P(\text{Voitto})+\frac{5}{2}\cdot 100\$\cdot P(\text{Blackjack})$$

Tasapeliä ei ole mahdollista tulla, koska jakaja ottaa aina lisää 16:een. Toisaalta myös blackjack on mahdoton, koska pelaajalla ei sitä heti kahden kortin jälkeen ollut. Näin ollen edellinen lauseke sievenee muotoon:

$$= 200\,\$ \cdot P(\text{Voitto})$$

Pelaaja voittaa 16:lla ainoastaan silloin, kun jakaja menee yli. Katsotaan taulukosta 4 jakajan yli menon todennäköisyys niin saadaan

$$= 200\,\$ \cdot 0{,}2334 = 46{,}68\,\$$$

Toisaalta, jos pelaaja päättäisi ottaa lisää 16:een, olisi hänen odotusarvonsa

$$E(\text{Lisää 16:een})$$

$$= 0\$\cdot P(\text{Häviö})+100\$\cdot P(\text{Tasapeli})+2\cdot 100\$\cdot P(\text{Voitto})+\frac{5}{2}\cdot 100\$\cdot P(\text{Blackjack})$$

$$= 100\,\$ \cdot P(\text{Tasapeli}) + 200\,\$ \cdot P(\text{Voitto})$$

Merkitään $S = x$, jos seuraava kortti pakassa on x. Lemman 2.34 mukaan $P(\text{Tasapeli})$, kun otetaan 16:een lisää, on

$$P(\text{Tasapeli}) = P(\text{Tasapeli}|S = \text{A})P(S = \text{A})$$

$$+P(\text{Tasapeli}|S = 2)P(S = 2) + P(\text{Tasapeli}|S = 3)P(S = 3)$$

$$+P(\text{Tasapeli}|S = 4)P(S = 4) + P(\text{Tasapeli}|S = 5)P(S = 5)$$

Oletetaan, että kortit A,2,3,4,5 tulevat todennäköisyydellä $\frac{1}{13}$. Jos seuraava kortti on esimerkiksi A, niin tasapeli tulee, kun jakaja saa 17. Eli $P(\text{Tasapeli}|S = \text{A}) = P(J_{17}) = 0{,}1219$ ja vastaavasti saadaan muut arvot. Näin ollen

$$P(\text{Tasapeli}) = \frac{1}{13} \cdot 0{,}1219 + \frac{1}{13} \cdot 0{,}1039 + \frac{1}{13} \cdot 0{,}3574 + \frac{1}{13} \cdot 0{,}1223 + \frac{1}{13} \cdot 0{,}0611$$

$$\approx 0{,}05897$$

Vastaavasti kuin edellä, voiton todennäköisyys, kun pelaaja ottaa 16:een lisää, on

$$P(\text{Voitto}) = P(\text{Voitto}|S = \text{A})P(S = \text{A}) + \cdots + P(\text{Voitto}|S = 5)P(S = 5)$$

Jos seuraava kortti on esimerkiksi 2, niin pelaajalla olisi tällöin 18. Nyt hän voittaa jos jakaja menee yli tai mikäli jakaja saa 17 eli $P(\text{Voitto}|S = 2) = P(J_{yli}) + P(J_{17}) = 0{,}2334 + 0{,}1219$ ja muut vastaavasti. Siispä saadaan

$$P(\text{Voitto}) = \frac{1}{13}(0{,}2334) + \frac{1}{13}(0{,}2334 + 0{,}1219)$$

$$+\frac{1}{13}(0{,}2334 + 0{,}1219 + 0{,}1039) + \frac{1}{13}(0{,}2334 + 0{,}1219 + 0{,}1039 + 0{,}3574)$$

$$+\frac{1}{13}(0{,}2334 + 0{,}1219 + 0{,}1039 + 0{,}3574 + 0{,}1223) \approx 0{,}21565$$

Sijoitetaan seuraavaksi saadut tulokset $P(\text{Voitto}) = 0{,}21565$ ja $P(\text{Tasapeli}) = 0{,}05897$ alkuperäiseen odotusarvon yhtälöön, niin saadaan

$$E(\text{Lisää 16:een}) = 100\,\$ \cdot P(\text{Tasapeli}) + 200\,\$ \cdot P(\text{Voitto})$$

$$= 100\,\$ \cdot 0{,}05897 + 200\,\$ \cdot 0{,}21565 \approx 49{,}03\,\$$$

Koska $E(\text{Lisää 16:een}) > E(\text{Jää 16:een})$, niin tulisi pelaajan ottaa lisää vielä 16:een. Siispä varmasti myös jos kädessä on vähemmän kuin 16, kannattaa ottaa lisää, koska ylimenon todennäköisyys on vielä pienempi kuin otettaessa lisää 16:een. Vastaavanlainen tarkastelu mikäli pelaajalla olisi 17 tuottaisi tulokset $E(\text{Jää 17:ään}) = 58{,}87\,\$$ ja $E(\text{Lisää 17:ään}) = 44{,}50\,\$$, joten 17:ään ei enää kannata ottaa lisää. Toisaalta, koska 17:ään ei kannata ottaa lisää niin ei varmasti sitä suurempaankaan käteen kannata enää ottaa lisää. Tällöin ylimenon mahdollisuus olisi nimittäin entistä suurempi. Lisää ottaessaan pelaajan kannattaa siis pelata vastaavasti kuten jakaja, joten tässä tapauksessa voidaan käyttää jakajan loppukäden todennäköisyyksiä (taulukko 4) myös pelaajalle.

Lasketaan seuraavaksi odotusarvo pelaajalle, kun hän päättää vetää kortteja lisää kunnes saa vähintään 17 tai menee yli. Lähtötilanteessa siis jakajalla ja pelaajalla on 9. Määritelmän 2.14 mukaan pelaajan odotusarvo on

$$E(\text{Pelaaja})$$

$$= 0\$ \cdot P(\text{Häviö}) + 100\$ \cdot P(\text{Tasapeli}) + 2 \cdot 100\$ \cdot P(\text{Voitto}) + \frac{5}{2} \cdot 100\$ \cdot P(\text{Blackjack})$$

$$= 100\,\$ \cdot P(\text{Tasapeli}) + 200\,\$ \cdot P(\text{Voitto})$$

Sillä $P(\text{Blackjack}) = 0$, kun pelaaja on jo saanut kaksi ensimmäistä korttia, joiden summa on 9. Tasapeliin päädytään silloin, kun jakaja ja pelaaja saavat molemmat saman loppukäden, joten

$$P(\text{Tasapeli})$$

$$= P\left((P_{17} \cap J_{17}) \cup (P_{18} \cap J_{18}) \cup (P_{19} \cap J_{19}) \cup (P_{20} \cap J_{20}) \cup (P_{21} \cap J_{21})\right)$$

Tapahtumat $(P_{17} \cap J_{17}), \ldots, (P_{21} \cap J_{21})$ ovat selvästi toistensa poissulkevat, joten määritelmän 2.3 mukaan saadaan

$$P\left((P_{17} \cap J_{17}) \cup (P_{18} \cap J_{18}) \cup (P_{19} \cap J_{19}) \cup (P_{20} \cap J_{20}) \cup (P_{21} \cap J_{21})\right)$$

$$= P(P_{17} \cap J_{17}) + P(P_{18} \cap J_{18}) + P(P_{19} \cap J_{19}) + P(P_{20} \cap J_{20}) + P(P_{21} \cap J_{21})$$

Oletetaan, että tapahtumat P_i ja J_j ovat toisistaan riippumattomat kaikilla i ja j. Tällöin lemman 2.8 mukaan saadaan

$$P(P_{17} \cap J_{17}) + P(P_{18} \cap J_{18}) + P(P_{19} \cap J_{19}) + P(P_{20} \cap J_{20}) + P(P_{21} \cap J_{21})$$

$$= P(P_{17})P(J_{17})+P(P_{18})P(J_{18})+P(P_{19})P(J_{19})+P(P_{20})P(J_{20})+P(P_{21})P(J_{21})$$

Koska pelaaja ja jakaja pelasivat tilanteessa aivan samoin ja molemmilla oli 9 lähtökätenä, on $P(P_i) = P(J_i)$ kaikilla i. Edellinen lauseke saadaan siis sievennettyä muotoon

$$= P(J_{17})^2 + P(J_{18})^2 + P(J_{19})^2 + P(J_{20})^2 + P(J_{21})^2$$

Katsotaan taulukosta 4 kyseiset arvot niin saadaan

$$= 0{,}1219^2 + 0{,}1039^2 + 0{,}3574^2 + 0{,}1223^2 + 0{,}0611^2 = 0{,}17208008$$

Ollaan siis saatu, että $P(\text{Tasapeli}) = 0{,}17208008$. Lasketaan seuraavaksi $P(\text{Voitto})$. Vastaavia määritelmiä käyttämällä kuten edellä saadaan

$$P(\text{Voitto}) = P(J_{yli}\cap(P_{21}\cup P_{20}\cup P_{19}\cup P_{18}\cup P_{17}))+P(J_{17}\cap(P_{21}\cup P_{20}\cup P_{19}\cup P_{18}))$$

$$+P(J_{18} \cap (P_{21} \cup P_{20} \cup P_{19})) + P(J_{19} \cap (P_{21} \cup P_{20})) + P(J_{20} \cap P_{21})$$

$$= P(J_{yli})P((P_{21} \cup P_{20} \cup P_{19} \cup P_{18} \cup P_{17})) + P(J_{17})P((P_{21} \cup P_{20} \cup P_{19} \cup P_{18}))$$

$$+P(J_{18})P((P_{21} \cup P_{20} \cup P_{19})) + P(J_{19})P((P_{21} \cup P_{20})) + P(J_{20} \cap P_{21})$$

Katsotaan jälleen taulukosta 4 kyseiset arvot niin saadaan

$$= 0{,}2334 \cdot (0{,}1219 + 0{,}1039 + 0{,}3574 + 0{,}1223 + 0{,}0611)$$

$$+0{,}1219\cdot(0{,}1039 + 0{,}3574 + 0{,}1223 + 0{,}0611)+0{,}1039\cdot(0{,}3574 + 0{,}1223 + 0{,}0611)$$

$$+0{,}3574 \cdot (0{,}1223 + 0{,}0611) + 0{,}1223 \cdot 0{,}0611 = 0{,}38672218$$

Nyt voidaan sijoittaa lasketut arvot alkuperäiseen odotusarvon yhtälöön, niin saadaan

$$E(\text{Pelaaja}) = 100\,\$ \cdot P(\text{Tasapeli}) + 200\,\$ \cdot P(\text{Voitto})$$

$$= 100\,\$ \cdot 0{,}17208008 + 200\,\$ \cdot 0{,}38672218 \approx 94{,}55\,\$$$

Pelaaja saa siis kyseisessä tilanteessa 100 $:n panoksestaan keskimäärin takaisin 94,55 $, joten keskimäärin pelaaja häviää 5,45 $. Koska pelaaja keskimäärin häviää tilanteessa, ei panoksen tuplaaminen vaikuta hyvältä idealta, sillä se on kannattavaa vain silloin, kun pelistä jää keskimäärin voitolle. Jos pelaajalla ja jakajalla on alussa 9, niin pelaajan on siis kannattavinta tilanteessa vetää kortteja niin kauan kunnes saa vähintään 17 tai menee yli. Toisaalta tällöinkin pelaaja keskimäärin jää tappiolle, mutta vähemmän kuin muilla tavoilla pelaamalla.

7 Kolmenkeskinen pistoolitaistelu

Seuraava ongelma on peräisin Frederick Mostellerin kirjasta [6]. Henkilöt A, B ja C ovat aloittamassa pistoolitaistelua keskenään. He asettuvat kolmiomaisesti seisomaan ja ampuvat toisiaan vuorotellen. Ampuminen tapahtuu järjestyksessä A, B, C syklisesti, niin kauan kunnes yksi mies on enää pystyssä (ammuttu henkilö menettää vuoronsa ja häntä ei enää ammuta). On yleisesti tiedossa, että A osuu kohteeseen 30% todennäköisyydellä, C puolestaan 50% todennäköisyydellä ja B ei koskaan ammu ohi. Mikä on tällöin paras strategia A:lle?

A:lla ei totisesti ole kovin hyvät mahdollisuudet pistoolitaistelussa kahta parempaa ampujaa vastaan. Tarkastellaan kuitenkin, miten hän voisi maksimoida todennäköisyyden selviytymiseen. Koska A:lla on ensimmäinen laukausvuoro, niin osuessaan C:hen, seuraavaksi B varmasti ampuu ja osuu häneen. Hänen ei ole siis järkevää yrittää ampua C:tä. Toisaalta jos A ampuu B:tä eikä osu, niin B ampuu seuraavaksi vaarallisimman ampujan C ja A saa yrittää uudelleen B:n ampumista. Jos hän ampuu edelleen ohi, niin tarina on lopussa. Kuvitellaan kuitenkin, että A ampuu B:tä ja osuu. Tällöin A voittaa taistelun, jos hän voittaa C:n taistelussa jossa C:llä on ensimmäinen laukausvuoro. Yksi tapa voittaa kyseinen taistelu on, että C ampuu ensin ohi ja sitten A osuu C:hen. Tämän tapahtuman todennäköisyys on tuloperiaatteen mukaan $0{,}5 \cdot 0{,}3$. Toisaalta A voi myös voittaa, jos ensin C ampuu ohi, sitten A ampuu ohi, C ampuu uudelleen ohi ja A lopulta osuu C:hen. Tämän tapahtuman todennäköisyys on puolestaan $0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = (0{,}5)^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3$. Vastaavasti jatkaen A voi voittaa taistelun myös jos C ampuu kolmesti ohi ja A osuu kahden ohilaukauksen jälkeen. Tämän tapahtuman todennäköisyys on taas $0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = (0{,}5)^3 \cdot (0{,}7)^2 \cdot 0{,}3$. Siispä A voittaa tällöin taistelun todennäköisyydellä

$$0{,}5 \cdot 0{,}3 + (0{,}5)^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + (0{,}5)^3 \cdot (0{,}7)^2 \cdot 0{,}3 + \cdots$$

Ottamalla lausekkeesta yhteiseksi tekijäksi $0{,}5 \cdot 0{,}3$ saadaan aikaan geometrinen sarja eli sarja, joka on muotoa $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$. Yleisesti tiedetään, että geometrinen sarja suppenee, kun -1 $<$ q $<$ 1 ja tällöin sen summaksi saadaan

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}\,.$$

Niinpä aiempi lauseke saadaan sievennettyä muotoon

$$
\begin{aligned}
&0{,}5 \cdot 0{,}3 + (0{,}5)^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + (0{,}5)^3 \cdot (0{,}7)^2 \cdot 0{,}3 + \cdots \\
&= (0{,}5)(0{,}3) \cdot \left\{1 + (0{,}5)(0{,}7) + [(0{,}5)(0{,}7)]^2 + \cdots\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (0{,}5)(0{,}3)\,[(0{,}5)(0{,}7)]^k \\
&= \frac{(0{,}5)(0{,}3)}{1-(0{,}5)(0{,}7)} = \frac{0{,}15}{0{,}65} = \frac{3}{13} \approx 23\% < 30\%\,.
\end{aligned}
$$

A:n ei siis kannattanut yrittää ampua C:tä, koska osuessaan B ampuisi hänet varmasti. Toisaalta ampumalla B:tä, niin osuessaan hänellä on 23% mahdollisuus voittaa taistelu. Puolestaan jos A ampuu ensimmäisen laukauksen ohi, niin B varmasti ampuu vaarallisemman C:n ensin. Tämän jälkeen A:lla on 30% mahdollisuus osua B:han ja voittaa taistelu. Siispä A:n paras mahdollisuus voittaa taistelu, on ampua ensimmäinen laukaus maahan, jolloin C:llä ei tässä taistelussa ole enää mahdollisuutta voittoon, ja yrittää kerralla osua B:hen.

8 Huygensin toinen ongelma

Hollantilainen merkittävä luonnontieteilijä Christiaan Huygens (1629-1695) harjoitti muun muassa matematiikkaa, fysiikkaa, astronomiaa ja hortologiaa. Huegensin toisena ongelmana tunnettu pulma on esitetty hänen teoksessaan *De Ratiociniis in Ludo Aleae*. Käsitellään kuitenkin Huegensin ongelman yleistä muotoa. Tämä ongelma on esitetty kirjassa *Problems and Snapshots from the World of Probability* [1].

Huygensin toisen ongelman yleinen muoto on seuraava. Kulhossa on v kappaletta valkoisia palloja ja m kappaletta mustia palloja. Pelaajat A, B ja C nostavat kulhosta satunnaisesti yhden pallon vuorotellen palauttaen aina nostamansa pallon takaisin kulhoon. Kulhosta nostetaan palloja järjestyksessä A, B, C syklisesti niin kauan kunnes joku pelaajista nostaa valkoisen pallon. Pelaaja, joka onnistuu nostamaan valkoisen pallon kulhosta, on myös pelin voittaja. Mitkä ovat pelaajien todennäköisyydet voittaa peli?

Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät:

$$P(\text{A voittaa pelin}) = a\,,$$

$$P(\text{B voittaa pelin}) = b\,,$$

$$P(\text{C voittaa pelin}) = c\,,$$

$$\alpha = \frac{v}{v+m}\,,$$

$$\beta = \frac{m}{v+m}\,.$$

Pelaajan A nostaessa ensimmäisen pallon kulhosta, hän joko nostaa valkoisen pallon ja voittaa pelin tai nostaa mustan pallon ja vuoro siirtyy pelaajalle B. Koska kulhossa on v valkoista palloa ja b mustaa palloa, niin pelaaja A voittaa pelin heti ensimmäisellä nosto kerralla todennäköisyydellä α. Toisaalta hän nostaa mustan pallon todennäköisyydellä β, jolloin hän siirtyy viimeiseksi nostovuoroon. Pelaajan A nostaessa mustan pallon nostojärjestys on siis syklisesti BCA, jolloin pelaaja A voittaa siis todennäköisyydellä c. On siis oltava, että $a = \alpha + \beta c$. Toisaalta pelaajan A nostaessa mustan pallon, pelaaja B siirtyy nostovuorossa ensimmäiseksi, jolloin siis $b = \beta a$. Tällöin myös pelaaja C siirtyy nostovuorossa toiseksi eli $c = \beta b$. Saadaan siis seuraava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a = & \alpha + \beta c \\ b = & \beta a \\ c = & \beta b\,. \end{cases}$$

Tämän yhtälöryhmän ratkaisu on seuraava

$$\begin{cases} a = & \dfrac{\alpha}{1-\beta^3} \\ b = & \dfrac{\alpha\beta}{1-\beta^3} \\ c = & \dfrac{\alpha\beta^2}{1-\beta^3}\,. \end{cases}$$

Jos siis esimerkiksi kulhossa olisi 1 valkoinen pallo ja 9 mustaa palloa, niin tällöin $\alpha = 1/10$ ja $\beta = 9/10$. Ja edelleen saataisiin

$$\begin{cases} a = & \dfrac{(1/10)}{1-(9/10)^3} = \dfrac{100}{271} & \approx 36{,}9\% \\ b = & \dfrac{(1/10)(9/10)}{1-(9/10)^3} = \dfrac{90}{271} & \approx 33{,}2\% \\ c = & \dfrac{(1/10)(9/10)^2}{1-(9/10)^3} = \dfrac{81}{271} & \approx 29{,}9\%\,. \end{cases}$$

Puolestaan jos kulhossa olisi 2 valkoista palloa ja 3 mustaa palloa, niin $\alpha = 2/5$ ja $\beta = 3/5$, jolloin saataisiin

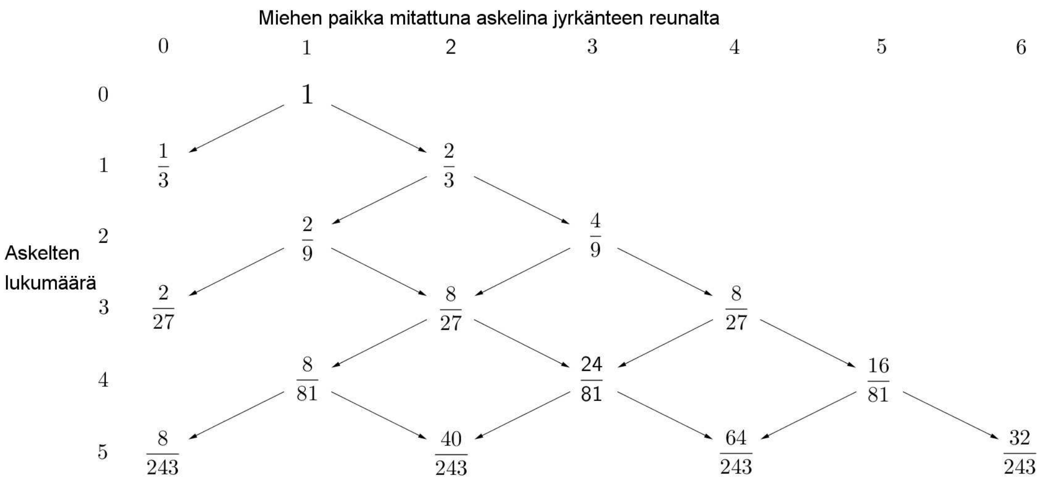
$$\begin{cases} a = & \dfrac{(2/5)}{1-(3/5)^3} = \dfrac{25}{49} & \approx 51{,}0\% \\ b = & \dfrac{(2/5)(3/5)}{1-(3/5)^3} = \dfrac{15}{49} & \approx 30{,}6\% \\ c = & \dfrac{(2/5)(3/5)^2}{1-(3/5)^3} = \dfrac{9}{49} & \approx 18{,}4\%\,. \end{cases}$$

9 Reunalla kävelijä

Seuraava esimerkki on esitetty Frederick Mostellerin kirjassa [6].

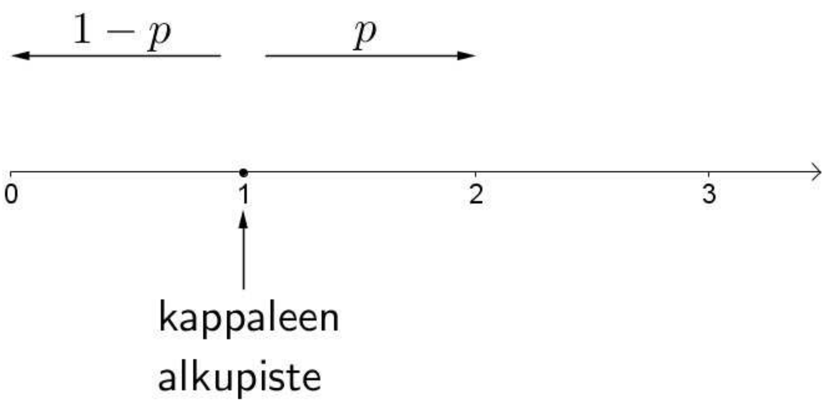
Ongelma on seuraavanlainen: juopunut mies on yhden askeleen päässä putoamisesta jyrkänteen reunalta. Hän ottaa satunnaisia askelia joko reunaa kohti tai reunasta poispäin. Todennäköisyys, että hän ottaa askelman kohti reunaa on $1/3$ ja reunasta poispäin $2/3$. Millä todennäköisyydellä hän pelastuu putoamasta jyrkänteeltä?

Diagrammi ongelmasta havainnollistaa sen, että mies voi pudota jyrkänteeltä vain parittoman askeleen jälkeen (ks. kuva 6). Suoraan ensimmäisellä askeleella mies putoaa rotkoon todennäköisyydellä $1/3$. Mies voi pudota rotkoon myös kolmella askeleella kulkemalla reittiä 1-2-1-0 (askelia jyrkänteen reunalta), jonka todennäköisyys on $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$. Korkeintaan kolmella askeleella mies siis putoaa rotkoon todennäköisyydellä $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{11}{27}$. Toisaalta mies voi pudota rotkoon viiden askeleen jälkeen kulkemalla reittiä 1-2-3-2-1-0 tai reittiä 1-2-1-2-1-0, joiden yhteenlaskettu todennäköisyys on $8/243$. Eli korkeintaan viidellä askeleella mies putoaa rotkoon todennäköisyydellä $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{8}{243} = \frac{107}{243}$. Diagrammia voitaisiin jatkaa loputtomiin ja saada yhä tarkempi arvio miehen todennäköisyydelle pudota rotkoon. Tarkastellaan tilannetta kuitenkin analyyttisemmin.



Kuva 6: Diagrammi reunalla kävelijän todennäköisyyksistä olla tietyllä etäisyydellä jyrkänteestä.

Kuvitellaan kävelijän sijasta kappaletta, joka on x-akselilla kohdassa $x = 1$. Oletetaan, että kappale siirtyy kohdasta $x = 1$ kohtaan $x = 2$ todennäköisyydellä p ja kohtaan $x = 0$ todennäköisyydellä $1 - p$ (ks. kuva 7). Yleisesti kappale siirtyy kohdasta $x = n$ ($n \in \mathbb{N}$) kohtaan $x = n + 1$ todennäköisyydellä p ja kohtaan $x = n - 1$ todennäköisyydellä $1 - p$. Jos kappale päätyy jonkun siirtymän jälkeen kohtaan $x = 0$ se jää sinne, eikä enää siirry uudelleen. Olkoon P_1 todennäköisyys, että kappale jää kohtaan $x = 0$, kun se lähtee liikkeelle kohdasta $x = 1$. Luonnollisesti todennäköisyys P_1 riippuu arvosta p. Jos p on lähellä ykköstä, niin P_1 on lähellä nollaa ja jos p on lähellä nollaa, niin P_1 on lähellä ykköstä.



Kuva 7: Kappaleen siirtymien todennäköisyydet.

Olkoot P_2 todennäköisyys sille, että kappale jää kohtaan $x = 0$, kun se lähtee liikkeelle kohdasta $x = 2$. Otetaan käyttöön lyhennykset: kappale lähtee liikkeelle kohdasta $x = k$, merkitään $L = k$ ja $O =$ "kappale jää kohtaan $x = 0$". Koska kappale siirtyy kohdasta $x = 1$ kohtaan $x = 2$ todennäköisyydellä p ja kohtaan $x = 0$ todennäköisyydellä $1 - p$, niin lemman 2.34 mukaan saadaan

$$P_1 = P(O, \text{ kun } L = 1) =$$

$$P(O, \text{ kun } L = 1 | \text{kappale siirtyy "vasemmalle"}) \cdot P(\text{kappale siirtyy "vasemmalle"})$$

$$+ P(O, \text{ kun } L = 1 | \text{kappale siirtyy "oikealle"}) \cdot P(\text{kappale siirtyy "oikealle"}) .$$

Triviaalisti voidaan päätellä, että

$$P(O, \text{ kun } L = 1|\text{kappale siirtyy "vasemmalle"}) = 1\,,$$

$$P(\text{kappale siirtyy "vasemmalle"}) = 1 - p\,,$$

$$P(O, \text{ kun } L = 1|\text{kappale siirtyy "oikealle"}) = P_2\,,$$

$$P(\text{kappale siirtyy "oikealle"}) = p\,.$$

Siispä lopulta saadaan

$$P_1 = 1 - p + pP_2\,. \tag{1}$$

Tarkastellaan seuraavaksi miten P_2 voidaan ilmaista P_1:sen avulla. Todennäköisyys, että kappale siirtyy aikanaan (ei välttämättä yhdellä siirrolla) kohdasta $x = 2$ kohtaan $x = 1$ on oltava P_1, koska tilanne on käytännössä sama kuin siirtymä kohdasta $x = 1$ kohtaan $x = 0$, origo on ainoastaan siirtynyt yksikön verran oikealle. Toisaalta jotta kappale siirtyisi kohdasta $x = 2$ kohtaan $x = 0$, on sen siirryttävä ensin aikanaan kohtaan $x = 1$ ja siitä lopulta aikanaan kohtaan $x = 0$. Kappaleen todennäköisyys siirtyä aikanaan kohdasta $x = 1$ kohtaan $x = 0$ on P_1. Koska kappaleen siirtyminen aikanaan kohdasta $x = 2$ kohtaan $x = 1$ on riippumaton kappaleen siirtymisestä aikanaan kohdasta $x = 1$ kohtaan $x = 0$, niin lemman 2.8 mukaan saadaan $P_2 = P_1 \cdot P_1 = P_1^2$. Nyt voidaan kirjoittaa yhtälö 1 muotoon:

$$P_1 = 1 - p + pP_1^2\,.$$

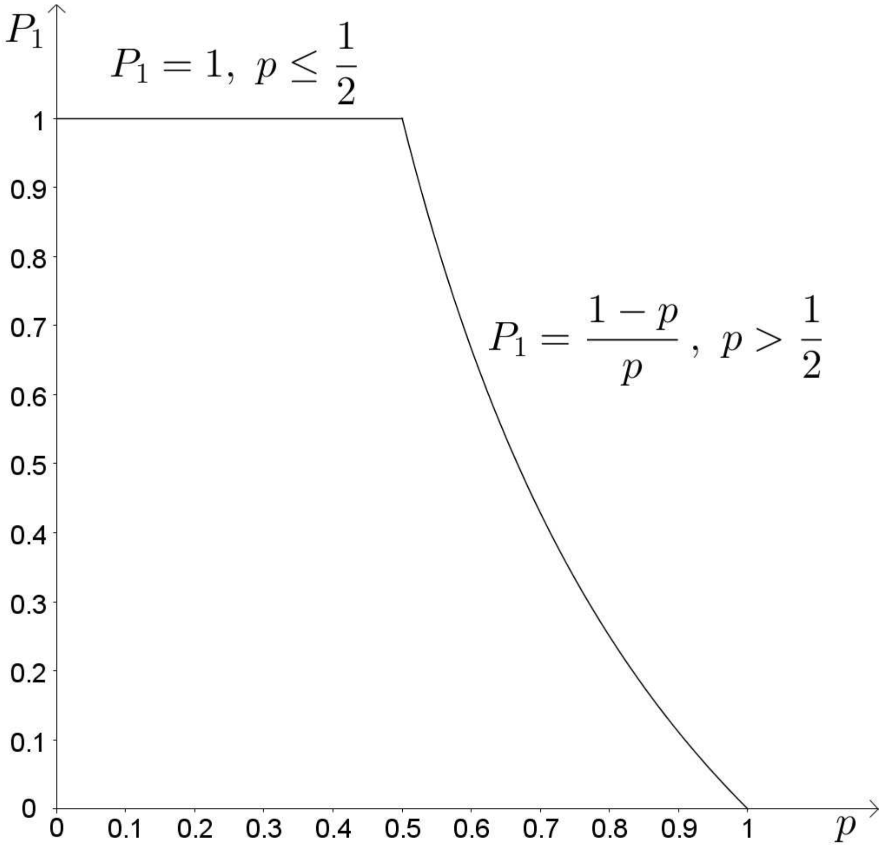
Toisen asteen yhtälön ratkaisuina saadaan

$$P_1 = 1 \text{ tai } P_1 = \frac{1-p}{p}\,.$$

Seuraavaksi on tarkasteltava ovatko molemmat vai toinen ratkaisuista oikein. Kun $p = \frac{1}{2}$, niin molemmat ratkaisut ovat samat ja $P_1 = 1$. Kun $p = 0$ niin selvästi on oltava $P_1 = 1$. Toisaalta, kun $p = 1$ niin on oltava $P_1 = 0$, koska kappale liikkuu vain oikealle. Kun $p < \frac{1}{2}$, niin toinen ratkaisu on mahdoton, sillä $\frac{1-p}{p} > 1$ ja P_1:sen on oltava $P_1 \leq 1$. Siispä arvoille $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ on $P_1 = 1$. Siispä voidaan päätellä, että

$$\begin{cases} P_1 = 1 & ,\text{kun } 0 \leq p \leq \dfrac{1}{2} \\ P_1 = \dfrac{1-p}{p} & ,\text{kun } \dfrac{1}{2} < p \leq 1\,. \end{cases}$$

Jotta toinen ratkaisu $P_1 = \frac{1-p}{p}$ pitäisi paikkansa, kun $p > \frac{1}{2}$, niin P_1:n on oltava jatkuva muuttujan p funktio. Tämä voidaan päätellä kuvasta 8.



Kuva 8: Todennäköisyysfunktion P_1 kuvaaja.

Ollaan siis saatu, että $P_1 = \frac{1-p}{p}$, kun $\frac{1}{2} < p \leq 1$. Tämän avulla saadaan alkuperäiseen ongelmaan ratkaisu, kun $p = \frac{2}{3}$, sillä mies otti askeleen poispäin rotkosta todennäköisyydellä $2/3$. Siispä mies putoaa rotkoon todennäköisyydellä $\frac{1-2/3}{2/3} = \frac{1}{2}$.

9.1 Reilu peli kasinoa vastaan

Tarkastellaan edellisen tuloksen valossa peliä, jossa pelaaja pelaa kasinoa vastaan. Kasinolla on oletettavasti käytössä loputtomat varat ja pelaajalla on käytössä ainoastaan yksi euro. Pelaaja laittaa euron peliin, jossa hän voittaa euron todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja häviää euron todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Peli vaikuttaa täysin reilulta, koska pelaajalla on sama todennäköisyys voittaa ja hävitä euro. Pelin odotusarvo on lemman 2.14 mukaan $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$, joten pelaajalle ei ole odotettavissa voittoa tai häviötä. Kuitenkin jatkamalla peliä loputtomiin on edellisen luvun perusteella pelaajan todennäköisyys hävitä alkuperäinen euronsa 1. Jatkamalla peliä siis tarpeeksi pitkään pelaaja häviää rahansa varmuudella. Tämä ei vaikutakaan enää kovin reilulta peliltä vaikka odotusarvollisesti pelissä kummallekaan ei ole odotettavissa voittoa.

Entä miten vaikuttaisi jos pelaajalla olisikin ennemmän kuin yksi euro pelin alussa? Edellisessä luvussa johdettiin, että $P_2 = P_1^2$. Vastaavasti voidaan myös johtaa, että $P_3 = P_1^3$, $P_4 = P_1^4$, jne. Siispä yleisesti voidaan sanoa, että $P_n = P_1^n$, kun $n \in \mathbb{N}$. Koska $P_1 = 1$, kun $p = 1/2$, niin vaikka pelaajalla olisi alussa m ($m \in \mathbb{N}$) euroa on todennäköisyyys sille, että hän lopulta häviää kaikki rahansa $1^m = 1$.

10 Ylioppilaskoetehtäviä

Tässä luvussa käsitellään lukion pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtäviä. Ratkaisut perustellaan alussa esitettyjen lemmojen ja määritelmien avulla. Luvun lähteenä on WSOY:n kirja [4].

10.1 Kevät 2001 tehtävä 7

Tehtävä

Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g - 210 g?

Ratkaisu

Merkitään X:llä keksipakkauksen massaa kuvaavaa satunnaismuuttujaa ja olkoon $Y \sim N(0{,}1)$. Koska X on normaalisti jakautunut, niin määritelmän 2.27 mukaan tiedetään, että $X = \sigma Y + \mu$ ja siis $X \sim N(\mu{,}\sigma^2)$. Tehtävänannon mukaan keskiarvo $\mu = 204$ (g) ja keskihajonta $\sigma = 6$ (g), joten $X \sim N(204{,}6^2)$.

Nyt määritelmän 2.18 ja lemman 2.29 mukaan saadaan

$$P(X < x) = F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \, .$$

Siis edelleen

$$P(X < 200) = \Phi(\frac{200-204}{6}) \approx \Phi(-0{,}67) \, .$$

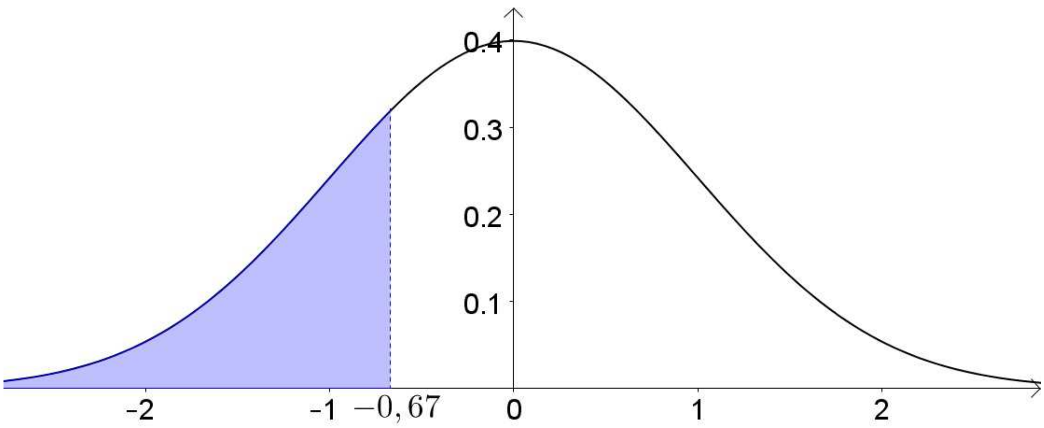
On siis ratkaistava standardoidun normaalijakauman kertymäfunktion arvo kohdassa $-0{,}67$ (ks. kuva 9).

Lemman 2.28 mukaan

$$\Phi(-0{,}67) = 1 - \Phi(0{,}67)$$

Katsomalla taulukkokirjasta [3] vastaava kertymäfunktion arvo saadaan

$$1 - \Phi(0{,}67) = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514 \approx 25\% \, .$$



Kuva 9: Standardoidun normaalijakauman tiheysfunktio.

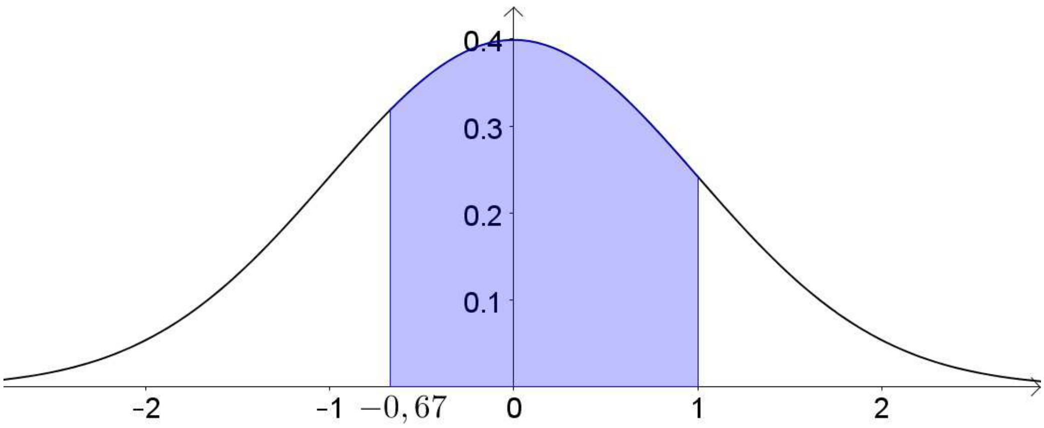
Määritelmän 2.18 mukaan on myös

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a)\,.$$

Niinpä lemman 2.29 mukaan saadaan

$$\begin{aligned} P(200 \leq X \leq 210) &= \Phi(\frac{210-204}{6}) - \Phi(\frac{200-204}{6}) \\ &\approx \Phi(1) - \Phi(-0{,}67)\,. \end{aligned}$$

Tulee siis määrittää normaalijakauman kertymä välillä (-0,67; 1) (ks. kuva 10).



Kuva 10: Standardoidun normaalijakauman kertymä välillä (-0,67; 1).

Edellä saatiin, että $\Phi(-0{,}67) = 0{,}2514$. Katsotaan taulukkokirjasta [3] arvo $\Phi(1)$:lle niin saadaan

$$\Phi(1) - \Phi(-0{,}67) = 0{,}8413 - 0{,}2514 = 0{,}5899 \approx 59\%\,.$$

Vastaus
Keksipaketeista 25 % on alle 200 g ja 59 % on välillä 200 g - 210 g.

10.2 Syksy 2001 tehtävä 5

Tehtävä
Eräällä paikkakunnalla sataa 60 prosentin todennäköisyydellä, jos edellisenä päivänä on satanut; poutasään todennäköisyys on tällöin 40 prosenttia. Jos taas edellisenä päivänä on ollut pouta, sateen todennäköisyys on vain 20 prosenttia ja poudan todennäköisyys vastaavasti 80 prosenttia. Millä todennäköisyydellä ylihuomenna sataa, kun tänään on pouta?

Ratkaisu
Oletetaan, että tänään on pouta. Kokonaistodennäköisyyslauseen (lemma 2.34) mukaan saadaan

$$\begin{gathered} P(\text{Ylihuomenna sataa}) = \\ P(\text{Ylihuomenna sataa}|\text{huomenna on pouta}) \cdot P(\text{Huomenna on pouta}) \\ +P(\text{Ylihuomenna sataa}|\text{huomenna sataa}) \cdot P(\text{Huomenna sataa}) \\ = 0{,}20 \cdot 0{,}80 + 0{,}60 \cdot 0{,}20 = 0{,}28 = 28\%\,. \end{gathered}$$

Sillä tehtävänannon mukaan, kun tänään on pouta, niin

$$P(\text{Huomenna on pouta}) = 0{,}80\,,$$

$$P(\text{Huomenna sataa}) = 0{,}20\,.$$

Toisaalta tehtävänannosta voidaan päätellä myös, että

$$P(\text{Ylihuomenna sataa}|\text{huomenna on pouta}) = 0{,}80\,,$$

$$P(\text{Ylihuomenna sataa}|\text{huomenna sataa}) = 0{,}60\,.$$

Vastaus
Ylihuomenna sataa 28 % todennäköisyydellä, kun tänään on pouta.

10.3 Kevät 2002 tehtävä 9

Tehtävä

Reaaliluvut a ja b arvotaan väliltä [0,3]. Millä todennäköisyydellä on $\log_{10}(2a+3b) > 1$?

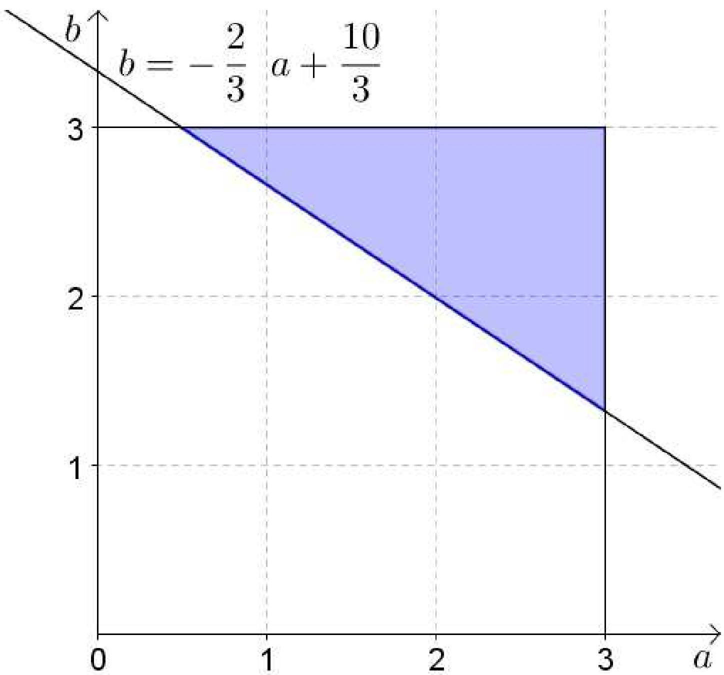
Ratkaisu

Otetaan epäyhtälön $\log_{10}(2a+3b) > 1$ kummastakin puolesta 10-kantainen eksponenttifunktio, jolloin saadaan

$$10^{\log_{10}(2a+3b)} > 10^1$$

$$2a + 3b > 10$$
$$b > -\frac{2}{3}\,a + \frac{10}{3}\,.$$

Kaikkia mahdollisia tapauksia vastaa neliö, jossa $0 \le a \le 3$ ja $0 \le b \le 3$. Suotuisia tapauksia vastaa kolmio, joka on suoran $b = -\frac{2}{3}\,a + \frac{10}{3}$ yläpuolella (ks. kuva 11).



Kuva 11: Suotuisten tapausten kolmio.

Ratkaistaan kolmion kärkipisteet. Toisessa kärkipisteessä $a = 3$, joten $b = -\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$. Puolestaan toisessa kärkipisteessä $b = 3$, jolloin $3 = -\frac{2}{3}\,a + \frac{10}{3}$, josta saadaan ratkaistua $a = \frac{1}{2}$. Kolmion kateetit ovat siis $3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ja $3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$. Lemman 2.26 mukaan todennäköisyys voidaan nyt laskea pinta-alojen suhteilla:

$$
\begin{aligned}
&P(\log_{10}(2a + 3b) > 1) \\
&= \frac{\text{Ala(kolmio)}}{\text{Ala(neliö)}} \\
&= \frac{(\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3})/2}{3 \cdot 3} = \frac{25}{108} \approx 0{,}23\,.
\end{aligned}
$$

Vastaus
0,23.

10.4 Syksy 2002 tehtävä 9

Tehtävä
Leena ja Sari ratkaisevat rahaa heittämällä, kumpi pääsee ensiksi ratsastamaan. Leena heittää ensiksi, ja jos tulee kruuna, hän pääsee ensiksi ratsastamaan. Jos tulee klaava, Sari heittää rahaa, ja kruunalla hän pääsee ensiksi ratsastamaan. Jos Sarikin heittää klaavan, heittovuoro siirtyy Leenalle. Näin jatketaan vuorotellen, kunnes jompikumpi saa kruunan. Millä todennäköisyydellä Leena pääsee ensiksi ratsastamaan? Entä Sari?

Ratkaisu
Merkitään L ="Leena heittää kruunan", $\bar{L}$ ="Leena heittää klaavan" S ="Sari heittää kruunan" ja $\bar{S}$ ="Sari heittää klaavan". Tapahtumat L ja S ovat riippumattomia ja $P(L) = P(S) = P(\bar{L}) = P(\bar{S}) = \frac{1}{2}$.

Leena pääsee ensiksi ratsastamaan jos hän heittää ensimmäisellä heitolla kruunan. Leena pääsee ensiksi ratsastamaan myös, jos hän heittää ensin klaavan, Sari heittää klaavan ja sitten hän heittää kruunan. Edelleen Leena pääsee ensiksi ratsastamaan, jos hän heittää ensin klaavan, Sari heittää klaavan, Leena heittää klaavan, Sari heittää klaavan ja sitten Leena heittää kruunan ja niin edelleen. Todennäköisyys, että Leena pääsee ensiksi ratsastamaan, on siis

$$P(\text{Leena pääsee ensiksi ratsastamaan})$$

$$= P\big(L \;\cup\; (\bar{L}\cap\bar{S}\cap L) \;\cup\; (\bar{L}\cap\bar{S}\cap\bar{L}\cap\bar{S}\cap L) \;\cup\ldots\big)\;.$$

Koska tapaukset L, $(\bar{L}\cap\bar{S}\cap L)$, $(\bar{L}\cap\bar{S}\cap\bar{L}\cap\bar{S}\cap L),\ldots$ ovat toistensa poissulkevat, niin määritelmän 2.3 mukaan saadaan:

$$P\big(L \;\cup\; (\bar{L}\cap\bar{S}\cap L) \;\cup\; (\bar{L}\cap\bar{S}\cap\bar{L}\cap\bar{S}\cap L) \;\cup\ldots\big)$$

$$= P(L) + P(\bar{L}\cap\bar{S}\cap L) + P(\bar{L}\cap\bar{S}\cap\bar{L}\cap\bar{S}\cap L)\,.$$

Toisaalta tapaukset L ja S ovat riippumattomia, joten lemman 2.8 mukaan avulla saadaan:

$$P(L) + P(\bar{L}\cap\bar{S}\cap L) + P(\bar{L}\cap\bar{S}\cap\bar{L}\cap\bar{S}\cap L)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\,.$$

Nimittäin $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k$ on suppeneva geometrinen sarja ja sen summa on $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ (ks. luku 6).

Vastaavasti voidaan laskea todennäköisyys, että Sari pääsee ensiksi ratsastamaan.

$$P(\text{Sari pääsee ensiksi ratsastamaan})$$

$$= P\big((\bar{L}\cap S)\cup(\bar{L}\cap\bar{S}\cap\bar{L}\cap S)\cup(\bar{L}\cap\bar{S}\cap\bar{L}\cap\bar{S}\cap\bar{L}\cap S)\cup\ldots\big)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \cdots = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k = \frac{1}{3}\,.$$

Vastaus

Leena pääsee ensiksi ratsastamaan todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$ ja Sari todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

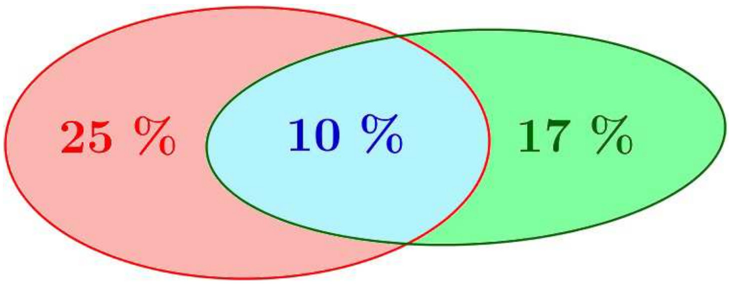
10.5 Kevät 2003 tehtävä 4

Tehtävä

Tilastojen mukaan eräässä pääsykuulustelussa 25 % pyrkijöistä epäonnistuu matematiikan ja 17 % fysiikan kokeessa. Pyrkijöistä 10 % epäonnistuu kummassakin kokeessa. Laske todennäköisyys, että fysiikan kokeessa epäonnistunut pyrkijä epäonnistuu myös matematiikan kokeessa. Millä todennäköisyydellä pyrkijä epäonnistuu ainakin toisessa kokeessa?

Ratkaisu

Pyrkijöistä siis 25 % epäonnistuu matematiikan, 17 % fysiikan ja 10 % molemmissa kokeissa. Havainnollistetaan tilannetta kuvalla (ks. kuva 12).



Kuva 12: Tehtävänannossa kuvattu tilanne.

Otetaan käyttöön merkinnät M =”pyrkijä epäonnistuu matematiikan kokeessa” ja F =”pyrkijä epäonnistuu fysiikan kokeessa”. Tällöin tehtävänannon mukaan on $P(M) = 0{,}25$, $P(F) = 0{,}17$ ja $P(M \cap F) = 0{,}10$. Nyt määritelmän 2.31 mukaan saadaan:

$$P(\text{Fysiikassa epäonnistunut epäonnistuu matematiikassa})$$

$$= P(M|F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}10}{0{,}17} \approx 0{,}59\,.$$

Lemman 2.4 avulla voidaan puolestaan kirjoittaa

$$P(\text{Pyrkijä epäonnistuu ainakin toisessa kokeessa})$$

$$= P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0{,}25 + 0{,}17 - 0{,}10 = 0{,}32\,.$$

Vastaus

Fysiikan kokeessa epäonnistunut pyrkijä epäonnistuu myös matematiikan kokeessa todennäköisyydellä 0,59 ja pyrkijä epäonnistuu ainakin toisessa kokeessa todennäköisyydellä 0,32.

10.6 Syksy 2003 tehtävä 8

Tehtävä

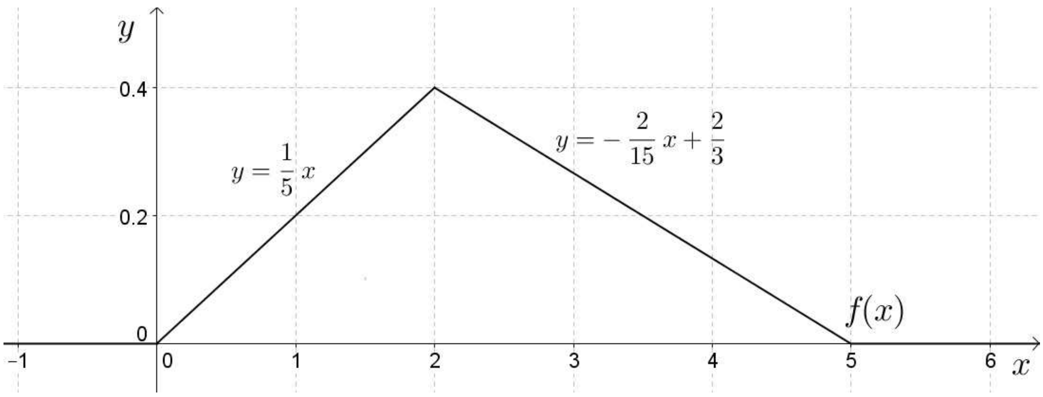
Erään satunnaismuuttujan x tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{,kun } x < 0 \\ \frac{1}{5}x & \text{,kun } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{2}{15}x + \frac{2}{3} & \text{,kun } 2 \leq x < 5 \\ 0 & \text{,kun } x \geq 5\,. \end{cases}$$

a) Piirrä tiheysfunktion kuvaaja. **b)** Laske todennäköisyydet $P(x \leq 1)$, $P(1 < x \leq 3)$ ja $P(x > 3)$.

Ratkaisu

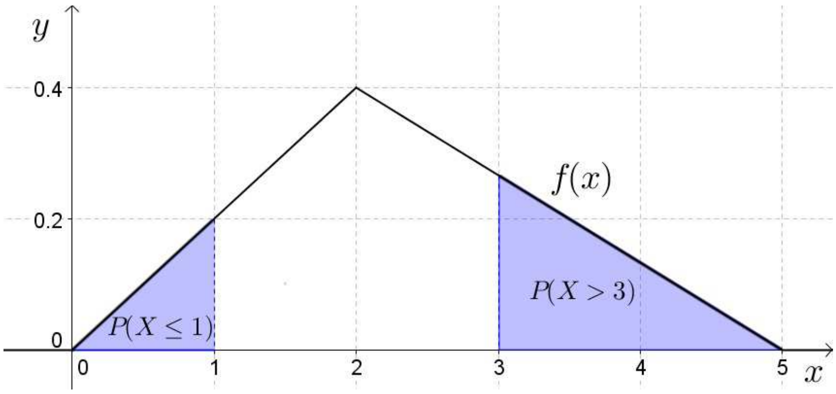
a) Tiheysfunktion kuvaaja on nouseva suora välillä $0 \leq x < 2$ ja laskeva suora välillä $2 \leq x < 5$, muutoin funktio on nolla (ks. kuva 13).



Kuva 13: Tiheysfunktion kuvaaja.

b) Lemman 2.20 mukaan todennäköisyys $P(x \leq 1)$ on kohdan $x = 1$ vasemmalle puolelle rajautuvan suorakulmaisen kolmion pinta-ala (ks. kuva 14). Kolmion kanta on 1 ja korkeus $f(1) = \frac{1}{5}$, joten

$$P(X \leq 1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0{,}10\,.$$



Kuva 14: Todennäköisyyksien pinta-alat.

Vastaavasti todennäköisyys $P(x > 3)$ on kohdan $x = 3$ oikealle puolelle jäävän suorakulmaisen kolmion pinta-ala. Kolmion kanta on 2 ja korkeus $f(3) = -\frac{2}{15}3 + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$, jolloin

$$P(x > 3) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{15} \approx 0{,}27\,.$$

Lemman 2.4 mukaan voidaan kirjoittaa $P(1 < x \leq 3) = 1 - P(x \leq 1 \cup x > 3)$, koska tapaus $(x \leq 1 \cup x > 3)$ on selvästi tapauksen $(1 < x \leq 3)$ komplementti. Edelleen lemman 2.4 avulla saadaan $P(x \leq 1 \cup x > 3) = P(x \leq 1) + P(x > 3) - P(x \leq 1 \cap x > 3)$, mutta triviaalisti $P(x \leq 1 \cap x > 3) = 0$. Niinpä lopulta saadaan

$$P(x \leq 1 \cup x > 3) = 1 - P(x \leq 1) - P(x > 3) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{4}{15} = \frac{19}{30} \approx 0{,}63\,.$$

Vastaus

$P(X \leq 1) = \frac{1}{10}$, $P(x > 3) = \frac{4}{15}$ ja $P(x \leq 1 \cup x > 3) = \frac{19}{30}$.

10.7 Kevät 2004 tehtävä 9

Tehtävä

Leirikoulun hyväksi järjestetyissä arpajaisissa ilmoitettiin, että joka 20:s arpa voittaa. Kuinka monta arpaa on ostettava, jotta todennäköisyys ainakin yhteen voittoon olisi yli 50 %?

Ratkaisu

Tapahtuma "Ainakin yksi arpa voittaa" on tapahtuman "Yksikään arpa ei voita" vastatapahtuma. Koska joka 20:s arpa voittaa, niin $P(\text{Arpa ei voita}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$. Tehtävänannossa ei ole ilmoitettu arpojen lukumäärää niin on oletettava, että jokaisen arvan todennäköisyys voittoon on $\frac{1}{20}$ ja voittotapahtumat ovat toisistaan riippumattomat. Tällöin ostettaessa n arpaa on lemman 2.38 mukaan

$$P(\text{Yksikään arpa ei voita}) = \left(\frac{19}{20}\right)^n .$$

Nyt siis edelleen lemman 2.4 mukaan

$$P(\text{Ainakin yksi arpa voittaa}) = 1 - P(\text{Yksikään arpa ei voita}) = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n .$$

Edellinen todennäköisyys tulisi siis olla yli 50 %, joten saadaan epäyhtälö:

$$1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n > 0{,}5$$

$$-\left(\frac{19}{20}\right)^n > -0{,}5$$

Jaetaan epäyhtälö puolittain -1:llä

$$\left(\frac{19}{20}\right)^n < 0{,}5$$

Nyt otetaan puolittain luonnollinen logaritmi

$$\ln\left(\frac{19}{20}\right)^n < \ln 0{,}5$$

Logaritmien laskusääntöjen mukaan $\ln x^r = r \ln x$, joten saadaan

$$n \cdot \ln\frac{19}{20} < \ln 0{,}5 .$$

Koska $\ln\frac{19}{20} \approx -0{,}05 < 0$, niin jaettaessa puolittain negatiivisella luvulla epäyhtälön merkki kääntyy:

$$n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln\frac{19}{20}} \approx 13{,}5\,.$$

Koska ostettujen arpojen lukumäärä n on oltava kokonaisluku, niin arpoja on ostettava vähintään 14.

Vastaus
Vähintään 14 arpaa.

10.8 Syksy 2004 tehtävä 5

Tehtävä
Laite koostuu kolmesta toiminnallisesti riippumattomasta komponentista A, B ja C, joiden vikaantumistodennäköisyydet takuuaikana ovat $p_A = 0{,}01$, $p_B = 0{,}007$ ja $p_c = 0{,}05$. Laite ei toimi, jos yksikin komponenteista on viallinen. Mikä on laitteen vikaantumistodennäköisyys takuuaikana? Luotettavuuden parantamiseksi komponentti C kahdennetaan, ts. laite varustetaan kahdella rinnakkaisella, toisistaan riippumattomalla komponentilla C, ja riittää, että ainakin toinen näistä toimii. Mikä on tällöin vikaantumistodennäköisyys takuuaikana?

Ratkaisu
Otetaan käyttöön merkinnät $\bar{p}_A = P(\text{"Komponentti } A \text{ toimii koko takuuajan"})$, ja vastaavasti $\bar{p}_B$ sekä $\bar{p}_C$. Edelliset todennäköisyydet ovat lemman 2.4 mukaan:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_A &= 1 - p_A = 1 - 0{,}01 = 0{,}99\,,\\
\bar{p}_B &= 1 - p_B = 1 - 0{,}007 = 0{,}993\,,\\
\bar{p}_C &= 1 - p_C = 1 - 0{,}05 = 0{,}95\,.
\end{aligned}$$

Otetaan vielä käyttöön lyhennykset $P(\text{Laite toimii takuuajan}) = \bar{p}$ ja $P(\text{Laite vikaantuu takuuaikana}) = p$. Laite toimii koko takuuajan, jos kaikki komponentit toimivat koko takuuajan. Koska komponentit toimivat toisistaan riippumattomasti, niin lemman 2.8 mukaan saadaan

$$\bar{p} = \bar{p}_A \cdot \bar{p}_B \cdot \bar{p}_C\,.$$

Koska tapahtuma ”Laite toimii takuuajan” on selvästi tapahtuman ”Laite vikaantuu takuuaikana” vastatapahtuma, niin lemman 2.4 mukaan saadaan

$$p = 1 - \bar{p} = 1 - \bar{p}_A \cdot \bar{p}_B \cdot \bar{p}_C$$

$$= 1 - 0{,}99 \cdot 0{,}993 \cdot 0{,}95 \approx 0{,}066 = 6{,}6\%\,.$$

Tarkastellaan seuraavaksi kahdennetun C komponentin tapausta. Merkitään P(”Kahdennettu komponentti C toimii koko takuuajan”) $= \bar{p}_{CC}$ sekä P(”Kahdennettu komponentti C vikaantuu takuuaikana”) $= p_{CC}$. Kahdennetut komponentit C toimivat toisistaan riippumatta, joten lemman 2.8 mukaan saadaan

$$p_{CC} = p_C \cdot p_C = 0{,}05^2 = 0{,}0025\,.$$

Vastaavasti kuten edellä saadaan taas

$$\bar{p}_{CC} = 1 - p_{CC} = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975\,.$$

Niinpä lopulta saadaan kahdennetun C komponentin tapauksessa

$$p = 1 - \bar{p}_A \cdot \bar{p}_B \cdot \bar{p}_{CC}$$

$$= 1 - 0{,}99 \cdot 0{,}993 \cdot 0{,}9975 \approx 0{,}019 = 1{,}9\%\,.$$

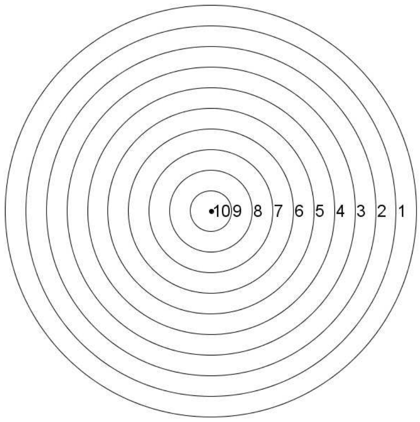
Vastaus

Laitteen vikaantumistodennäköisyys takuuaikana on 6,6 % ja kahdennetun C komponentin kanssa 1,9 %.

10.9 Kevät 2005 tehtävä 9

Tehtävä

Tikkataulun säde on 20 cm, ja taulu jakautuu kymmeneen samankeskiseen yhtä leveään renkaaseen, jotka on numeroitu ulkoa sisäänpäin 1:stä 10:een. Gabrielin heittämät tikat osuvat tauluun siten, että niiden etäisyys r taulun keskipisteestä noudattaa todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktio on



$$f(r) = \begin{cases} \frac{3}{16000}(400 - r^2) & ,\text{kun } 0 \le r < 20 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä r on ilmaistu senttimetreinä. **a)** Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämä tikka osuu 9:ään tai 10:een. **b)** Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämistä viidestä tikasta ainakin kolme osuu 9:ään tai 10:een.

Ratkaisu

a) Renkaiden leveys on 2 cm, joten Gabrielin heittämä tikka osuu yhdeksään tai kymmeneen, jos tikka osuu korkeintaan 4 cm päähän taulun keskipisteestä, ts. jos $0 \le r \le 4$. Nyt lemman 2.20 mukaan saadaan:

$$P(9 \text{ tai } 10) = P(0 \le r \le 4) = \int_{r=0}^{4} f(r)\,dr\,.$$

Sijoitetaan $f(r) = \frac{3}{16000}(400 - r^2)$ ja ratkaistaan integraali, niin saadaan

$$\int_{r=0}^{4} f(r)\,dr = \int_{r=0}^{4} \frac{3}{16000}(400 - r^2)\,dr = \Big/_{0}^{4} \frac{3}{16000}(400\,r - \frac{1}{3}\,r^3)$$

$$= \frac{3}{16000}\left(400 \cdot 4 - \frac{1}{3}\,4^3\right) - 0 = \frac{37}{125} \approx 0{,}30\,.$$

b) Useamman tikan heitto voidaan tulkita toistokokeeksi, joka onnistuu todennäköisyydellä $p = \frac{37}{125}$ ja epäonnistuu todennäköisyydellä $q = 1 - p = 1 - \frac{37}{125} = \frac{88}{125}$. Merkitään $O_k =$ "k tikkaa viidestä osuu yhdeksään tai kymmeneen". Tikan heitto on täysin riippumaton muista heitoista, joten voidaan käyttää binomitodennäköisyyden kaavaa (lemma 2.40), jolloin siis

$$P(O_k) = \binom{5}{k} p^k q^{5-k} \ , \ k = 0{,}1{,}2, \ldots ,5. \tag{2}$$

Tauluun tuli osua ainakin kolme tikkaa viidestä eli käytännössä 3, 4 tai 5 tikkaa. Niinpä lopulta saadaan

$$P(\text{Ainakin 3 osuu}) = P(O_3 \cup O_4 \cup O_5) \, .$$

Tapaukset O_3, O_4 ja O_5 ovat toisensa poissulkevat, joten määritelmän 2.3 mukaan saadaan

$$P(O_3 \cup O_4 \cup O_5) = P(O_3) + P(O_4) + P(O_5) \, .$$

Nyt sijoittamalla yhtälöön 2 $p = \frac{37}{125}$ ja $q = \frac{88}{125}$ saadaan

$$\begin{aligned}
&P(O_3) + P(O_4) + P(O_5) \\
&= \binom{5}{3}\left(\frac{37}{125}\right)^3\left(\frac{88}{125}\right)^{5-3} + \binom{5}{4}\left(\frac{37}{125}\right)^4\left(\frac{88}{125}\right)^{5-4} + \binom{5}{5}\left(\frac{37}{125}\right)^5\left(\frac{88}{125}\right)^{5-5} \\
&= 10 \cdot \left(\frac{37}{125}\right)^3\left(\frac{88}{125}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{37}{125}\right)^4\left(\frac{88}{125}\right) + \left(\frac{37}{125}\right)^5 \\
&= 0{,}1578... \approx 0{,}16 \, .
\end{aligned}$$

Vastaus
a) 0,30. **b)** 0,16.

10.10 Syksy 2005 tehtävä 8

Tehtävä

Laatikossa on 2 ruskeaa, 6 mustaa ja 8 sinistä matkapuhelimen kuorta. Laatikosta otetaan umpimähkään kaksi kuorta. Millä todennäköisyydellä kuoret ovat samanväriset?

Ratkaisu

Kuoria on yhteensä $2 + 6 + 8 = 16$ kappaletta. Lemman 2.39 mukaan 16 kuoren joukosta voidaan ottaa kaksi kuorta $\binom{16}{2} = 120$ eri tavalla. Kuorien nostojärjestyksellä ei siis ole väliä, vaan pelkästään sillä, mitkä kaksi kuorta on laatikosta nostettu. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on siis 120.

Vastaavasti lemman 2.39 mukaan laatikosta voidaan nostaa kaksi ruskeaa kuorta $\binom{2}{2} = 1$ tavalla, kaksi mustaa kuorta $\binom{6}{2} = 15$ tavalla ja kaksi sinistä kuorta $\binom{8}{2} = 28$ tavalla. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on siis $1 + 15 + 28 = 44$. Siispä

$$P(\text{kuoret samanväriset}) = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0{,}37\,.$$

Vastaus

Nostamalla kaksi kuorta umpimähkään saadaan samanväriset kuoret todennäköisyydellä 0,37.

Viitteet

[1] Gunnar Blom & Lars Holst & Dennis Sandell: *Problems and Snapshots from the World of Probability.* Springer-Verlag, New York (1994).

[2] Prakash Gorroochurn: *Classic Problems of Probability.* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2012).

[3] Anja Haavisto & Lea Karkela & Matti Kervinen & Raimo Seppänen & Juhani Smolander & Seppo Tiihonen & Kiuru Varho & Hilkka Wuolijoki: *MAOL taulukot.* Otavan kirjapaino, Keuruu (1999).

[4] Jukka Kangasaho & Pekka Piri & Hilkka Taavitsainen: *Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 2001-2011.* WSOYpro Oy, Helsinki (2011).

[5] Jukka Kangasaho & Jukka Mäkinen & Juha Oikkonen & Johannes Paasonen & Maija Salmela: *Todennäköisyyslaskenta ja tilastot.* WSOY, Porvoo (1998).

[6] Frederick Mosteller: *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1965).

[7] Heikki Ruskeepää: *Todennäköisyyslaskenta.* Luentomoniste, Turun yliopisto (1996).

[8] Heikki Ruskeepää: *Todennäköisyyslaskenta II.* Luentomoniste, Turun yliopisto (2008).

[9] Marilyn von Savant: *Ask Marilyn.* Parade Magazine (1990-1991). <http://marilynvossavant.com/game-show-problem/>. [Haettu 11.2.2013.]

[10] Afra Zomorodian: *The Monty Hall Problem.* 1998. <http://www.cs.dartmouth.edu/ afra/goodies/monty.pdf>. [Haettu 12.2.2013.]

[11] *Dealer Probabilities in Blackjack.* 2004. <http://wizardofodds.com/games/blackjack/appendix/2b/>. [Haettu 30.4.2013.]