Tyypillisiä virheitä yhtälöiden ratkaisussa ylioppilaskokeissa

Anni Nuutila

Pro gradu -tutkielma
Joulukuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastaja:
Prof. Vesa Halava
FM Mikko Jaskari

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma
Pääaine: Matematiikka
Tekijä: Anni Nuutila
Otsikko: Tyypillisiä virheitä yhtälöiden ratkaisussa ylioppilaskokeissa
Ohjaaja: Prof. Vesa Halava
Sivumäärä: 31 sivua
Aika: Joulukuu 2025

Tässä pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan, millaisia virhekäsityksiä ja virhetyyppejä opiskelijoilla esiintyy yhtälöiden ratkaisemisessa lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa. Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaisia ajattelun puutteita tai vääristymiä opiskelijoiden ratkaisuissa esiintyy, ja miten virheet eroavat eri tehtävätyypeissä. Aihe on ajankohtainen, sillä virhekäsitykset ovat keskeinen osa matematiikan oppimisen tutkimusta. Virhekäsityksillä on merkittävä vaikutus siihen miten opiskelijat ymmärtävät matemaattisia käsitteitä ja toimintatapoja.

Tutkimusaineistona käytettiin neljää ylioppilaskokeen tehtävää, jotka sisälsivät yhtälönratkaisua eri tehtävätyypeissä. Aineistona oli yhteensä 40 opiskelijan vastaus, jotka analysoitiin virhetyyppien ja virhekäsitysten esiintymisen perusteella. Analyysi toteutettiin laadullisen sisällönanalyysin keinoin ja vastauksista tunnistettiin toistuvia virheitä, esimerkiksi yhtäsuuruusmerkin väärin tulkintaa ja virheellisten laskusääntöjen soveltamista.

Tulokset osoittivat, että suurin osa opiskelijoista osasi soveltaa yhtälönratkaisun perusmenetelmiä, mutta virheitä esiintyi erityisesti, kun tehtävä edellytti käsitteellistä ymmärrystä tai mallintamista. Yleisimpiä virheitä olivat sulkeiden avaamiseen ja negatiivisten lukujen käsittelyyn liittyvät ongelmat. Sanallisissa tehtävissä korostuivat mallintamisen ja muuttujien nimeämisen vaikeudet.

Tutkimuksen perusteella virhekäsitykset näyttäytyvät pinttyneenä ilmiöinä, jotka voivat säilyä läpi opiskelupolun. Tulokset korostavat tarvetta vahvistaa käsitteellistä ymmärrystä yhtälönratkaisussa ja tarjota opiskelijoille enemmän mahdollisuuksia pohtia omaa ajatteluaan. Opetuksessa tulisi hyödyntää havainnollistavia välineitä ja eriyttäviä tehtäviä.

Asiasanat: yhtälö, virhekäsitys, virhetyypit, ylioppilaskoe, matematiikan oppiminen

Sisällys

1 Johdanto

Yhtälöiden ratkaiseminen on yksi keskeisimmistä sisällöistä perusopetuksen ja lukion matematiikassa. Se toimii lähtökohtana algebralliselle ajattelulle, ongelmanratkaisulle ja mallintamiselle, joita tarvitaan sekä jatko-opinnoissa että arkipäivän sovelluksissa. Vaikka yhtälönratkaisun menettelytavat ovat usein mekaanisia ja säännönmukaisia, oppilaiden on havaittu tekevän toistuvia samankaltaisia virheitä niiden soveltamisessa. Nämä virheet kertovat usein syvemmistä käsitteellisistä väärinkäsityksistä eli virhekäsityksistä, jotka ohjaavat oppijan ajattelun kulkua.

Virhekäsitysten tutkiminen tarjoaa arvokasta tietoa oppimisprosessista ja siitä, miten oppilaat ymmärtävät matemaattisia käsitteitä. Aikaisemmissa tutkimuksissa on todettu, että monet virhekäsitykset syntyvät jo varhaisessa vaiheessa ja säilyvät pitkälle toisen asteen opintoihin, ellei niitä tietoisesti korjata (Booth ja Koedinger, 2008). Erityisesti yhtäsuurusmerkin, muuttujan ja laskusääntöjen merkityksen ymmärtämisessä on havaittu toistuvia vaikeuksia.

Ylioppilaskirjoitukset tarjoavat ainutlaatuisen näkökulman opiskelijoiden matemaattiseen ajatteluun, sillä ne kokoavat yhteen koko lukio-opintojen aikana kertyneen osaamisen. Yhtälöihin liittyvät tehtävät ovat olennainen osa lyhyen matematiikan ylioppilaskoetta, ja ne edellyttävät sekä laskennallista taitoa että käsitteellistä ymmärrystä. Ylioppilaskokeiden vastauksia tarkastelemalla voidaan tunnistaa, millaisia virheitä opiskelijoilla esiintyy ja missä määrin ne laajentuu virhekäsityksiksi yhtälönratkaisussa.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on tarkastella, millaisia virhekäsityksiä ja virhetyyppejä opiskelijoilla esiintyy yhtälöiden ratkaisemisessa ylioppilaskokeen tehtävissä. Lisäksi tutkitaan, eroavatko virheet tehtävätyypeittäin, esimerkiksi algebrallisissa tai sanallisissa tehtävissä. Tutkimus tarjoaa tietoa siitä, millaiset käsitteet ja menetelmät tuottavat opiskelijoille eniten haasteita. Toisaalta pohditaan myös, mitä opettajat voisivat tehdä, ettei virhekäsityksiä syntyisi.

2 Teoriaa

Yhtälö ilmaisee suhteen kahden lausekkeen välillä ja väittää, että lausekkeiden arvot ovat yhtäsuuret. Yhtälöiden ratkaiseminen vaatii, että niissä esiintyy tuntematon muuttuja, joka yritetään ratkaista niin että yhtälö toteutuu. Vaikka määritelmä on suhteellisen yksinkertainen, yhtälön käsitteen syvällinen ymmärtäminen edellyttää useita valmiuksia, kuten yhtäsuuruuden ymmärtämistä, erilaisia laskusääntöjä ja muuttujan käsitteen hallintaa (Marcus ja Watt, 2012).

Yhtälöihin tutustutaan jo alakoulun aikana, vaikka niistä ei vielä silloin puhuta nimellä "yhtälö". Esimerkiksi tehtävä, jossa kolme samanlaista kuviota muodostaa summan 15, ja jossa oppilaan tulee päätellä yksittäisen kuvion arvo, on yksinkertainen yhtälötilanne, vaikka sitä ei näin nimettäisikään. Tälläisissä tilanteissa meillä on muuttuja, jolle haluamme laskea arvon, jotta yhtälön molemmat puolet tulevat yhtäsuuriksi. Nämä tehtävät ovat lähtökohtia yhtälönratkaisun ymmärtämiselle.

Opetuksessa yhtälöt tarkastellaan opetussuunnitelman ohjaamien tavoitteiden ja sisältöjen kautta, vaikka niiden matemaattinen teoria rakentuu huomattavasti laajemmalle perustalle. Opetussuunnitelmissa tulee esille yhtälöiden ratkaisu ja sen tavoitteet. Alla on kerrottu yksityiskohtaisemmin, mitä opetussuunnitelmat tarkalleen sanovat yhtälöiden ratkaisemisesta ja soveltamisesta.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) yhtälöt tulevat esiin seitsemännen luokan sisällöissä. Opetussuunitelman tavoitteena on, että oppilas oppii ratkaisemaan ensimmäisen asteen yhtälöitä ja ymmärtämään yhtäsuuruusmerkin tasapainon symbolina. Lisäksi oppilaan tulee osata käyttää yhtälöitä yksinkertaisten ongelmien mallintamiseen ja niiden ratkaisuissa.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2019) vaatimukset syvenevät ja laajenevat. Opiskelijan odotetaan hallitsevan ensimmäisen asteen yhtälöiden lisäksi muun muassa toisen asteen yhtälöt, potenssi- ja logaritmiyhtälöt sekä yhtälöryhmät. Yhtälöiden merkitys laajenee myös soveltamisessa ja mallintamisessa. Opiskelijoita ohjataan hyödyntämään yhtälöitä erilaisten luonnontieteellisten ja yhteiskunnallisten ilmiöiden kuvaamisessa. Lukion opetussuunnitelma korostaa myös teknologian, kuten laskinohjelmien ja tietokoneohjelmien, käyttöä yhtälöiden ratkaisun apuna.

Opetussuunnitelmien perusteista huomaa selkeän oppimisen jatkumon. Yläkoulussa yhtälöiden ratkaiseminen aloitetaan yksinkertaisista ensimmäisen asteen yhtälöistä ja niiden soveltamisesta arjen tilanteisiin. Puolestaan lukiossa näitä taitoja syvennetään ja laajennetaan kohti monimutkaisempia yhtälöitä ja mallintamistilanteita. Koska yhtälöt ovat keskeinen osa matemaattista ajattelua ja niillä on runsaasti yhteyksiä arkielämään, niitä esiintyy usein myös usein ylioppilaskokeiden tehtävissä. Lukion lopussa olevien ylioppilaskokeiden avulla voidaan arvioida, miten hyvin opiskelijat ovat saavuttaneet lukion opetussuunitelman tavoitteet ja pystyvät soveltamaan opittua käytännössä.

2.1 Yhtälön ratkaisu Suomen opetussuunnitelmissa

Yhtälöiden ratkaiseminen on keskeinen osa suomalaisen matematiikan opetuksen tavoitteita sekä perusopetuksessa että lukiossa. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa yhtälöt kuuluvat sekä algebraan että matemaattiseen ajatteluun. Oppilaan odotetaan oppivan peruskäsitteet jo vuosiluokilla 7–9. Perusopetuksen opetussuunnitelmassa korostuu, että oppilaiden tulee osata tunnistaa ja muodostaa yhtälöitä sekä ratkaista yksinkertaisia yhtälöitä ja ymmärtää yhtälön ratkaisemiseen liittyvä ajatus tasapainosta. Keskeisenä sisältönä mainitaan myös yhtälön ratkaisemisen perusmenetelmiä, kuten vastaluvun ja käänteisluvun käyttö sekä jakolaskun ja kertolaskun yhteydet (Opetushallitus, 2014).

Perusopetuksen tavoitteena on, että oppilas oppii mallintamaan tilanteita yhtälöiden avulla ja ratkaisemaan arjen, matematiikan ja muiden oppiaineiden ongelmia symbolisen esityksen kautta. Tämä tukee ongelmanratkaisun ja loogisen päättelyn kehittymistä, jotka ovat laaja-alaisen osaamisen tavoitteita (Opetushallitus, 2014). Yhtälöiden käsittely valmistaa oppilaita myös myöhempiin algebraan liittyviin oppisisältöihin, kuten funktioihin ja yhtälöpareihin.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa yhtälöiden ratkaisu syvenee huomattavasti. Matematiikan tavoitteena on, että opiskelija "osaa ratkaista yhtälöitä ja yhtälöryhmiä sekä tutkia ratkaisujen merkitystä erilaisissa tilanteissa"(Opetushallitus, 2019). Lukiossa yhtälöitä tarkastellaan sekä suoraan laskennallisina tehtävinä että laajemmin matemaattisen mallintamisen välineenä. Keskeisiä sisältöjä ovat ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt, potenssi- ja eksponenttiyhtälöt, logaritmiyhtälöt sekä trigonometriset yhtälöt (Opetushallitus, 2019). Yhtälönratkaisussa algebra kehittyy kohti järjestelmällistä menetelmien hallintaa, ja opiskelija oppii valitsemaan tarkoituksenmukaiset ratkaisutavat.

Yhtälöiden ratkaisemisella on lukiossa myös tiivis yhteys funktion käsitteeseen ja ymmärtämiseen. Esimerkiksi kurssissa MAA2 (Analyysi I) opiskelija oppii tulkitsemaan yhtälön ratkaisun funktion nollakohtana, ja myöhemmissä kursseissa (kuten MAA5 ja MAA6) tarkastellaan yhtälöiden ratkaisemista graafisesti, numeerisesti ja analyyttisesti. Tämä suunnitelmallinen laajentuminen tukee matematiikan pitkäjänteistä oppimista ja johdonmukaista etenemistä.

Kokonaisuudessaan yhtälöiden ratkaisu rakentaa perustaa matemaattiselle ajattelulle koko suomalaisessa koulutusjärjestelmässä. Perusopetuksessa luodaan käsitteellinen ymmärrys ja symbolisen ajattelun perusta, kun taas lukiossa taitoa syvennetään ja monipuolistetaan sekä abstraktion että soveltamisen tasolla. Opetussuunnitelmien linjausten mukaisesti yhtälöiden ratkaisu toimii keskeisenä matematiikan sisältönä ja välineenä laajempien ongelmanratkaisu- ja mallintamistaitojen kehittämiselle.

2.2 Virhekäsityksiä matematiikan oppimisessa

Matematiikan oppimisen tutkimuksessa on pitkään kiinnitetty huomiota erilaisiin virhekäsityksiin. Virhekäsityksellä tarkoitetaan oppilaan ajattelumallia, joka on puutteelinen tai virheellinen. Toisin sanoen opiskelija luulee ratkaisevan oikeaoppisesti, mutta hänen tapansa ei ole matemaattisesti oikein (Michael, 2002). Virhekäsitykset ovat eri asia kuin satunnaiset virheet. Virhekäsitykset eroavat satunnaisista virheistä, kuten laskuvirheistä, koska ne heijastavat syvemmällä olevaa ajattelun vääristymää. Virhekäsitykset eivät ole yksittäisiä laskuvirheitä, vaan pysyvämpiä vääristymiä oppijan tietorakenteissa. Ne tulevat ilmi usein silloin, kun oppilaan vastaukset toistuvasti ovat virheellisiä tai sisältävät vääriä tulkintoja. Virhekäsitysten syntyyn vaikuttaa oppilaiden aikaisemmat kokemukset ja arkipäivän ajattelumallit (Booth ja Koedinger, 2008).

Virhekäsityksiä voidaan jakaa eri tavalla, esimerkiksi käsitteellisen ja menettelyllisen tiedon ja ymmärryksen eroihin (Rittle-Johnson ym. 2001). Käsitteelliset virhekäsitykset liittyvät käsitteiden ymmärtämiseen, esimerkiksi oppilas ajattelee yhtäsuuruusmerkin tarkoittavan vastauksen paikkaa eikä tasapainoa. Menettelylliset virhekäsitykset näkyvät virheellisinä laskutapoina, esimerkiksi oppilas voi soveltaa laskusääntöä mekaanisesti myös tilanteessa, jossa se ei ole matemaattisesti mahdollista. Nämä kaksi kietoutuvat toisiinsa, sillä puutteellinen käsitys käsitteistä johtaa usein virheellisiin toimenpiteisiin ja nämä puolestaan johtavat vääriin vastauksiin (Rittle-Johnson ym. 2001).

2.3 Miksi yhtälöt tuottavat vaikeuksia?

Yhtälöiden ratkaiseminen on oppimisen kannalta erityisen haastava alue, ja siihen liittyy runsaasti erilaisia virhekäsityksiä. Yksi yleisimmistä ongelmista on yhtäsuuruusmerkin väärinkäyttö. Monet opiskelijat pitävät sitä merkkinä laskun tuloksesta, eivätkä kahden lausekkeen välisenä tasapainon symbolina (Stephens ym. 2006). Tämä virheellinen käsitys voi johtaa esimerkiksi siihen, että opiskelija pyrkii siirtämään kaikki termit yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle, ikään kuin vastausta etsien.

Toinen keskeinen virhekäsitys liittyy negatiivisiin lukuihin ja laskusääntöihin. Boothin ja Koedingerin (2008) tutkimuksessa havaittiin, että oppilaat usein poistavat negatiivisen merkin huomaamatta tai soveltavat laskusääntöjä väärissä tilanteissa, jossa ne eivät ole matemaattisesti oikein. Esimerkiksi yhtälössä $x - 4 = 13$ jotkut opiskelijat vähentävät 4 molemmilta puolilta, vaikka oikea toimenpide olisi lisätä 4 molemmille puolille. Tämä paljastaa puutteellisen käsityksen siitä, mitä opiskelijoiden mielestä negatiivinen merkki tarkoittaa, miten se vaikuttaa laskutoimitukseen ja miten siitä pääsee eroon oikeaoppisesti.

Lisäksi muuttujan käsite tuottaa oppilaille haasteita. Juprin, Drijversin ja Zawojewskin (Jupri ym. 2014) seitsemäsluokkalaisille teetetyssä tutkimuksessa todettiin, että osa oppilaista tulkitsee muuttujan vain tuntemattomaksi luvuksi, joka tulee mekaanisesti ratkaista, sen sijaan, että he ymmärtäisivät sen suurempaa merkitystä. Tämä puolestaan rajoittaa heidän kykyään soveltaa yhtälöitä, esimerkiksi ongelmaratkaisutilanteissa.

Oppimisen kannalta on keskeistä huomata, että pelkkä tehtävien tekeminen ei yleensä riitä korjaamaan virhekäsityksiä. Tutkimusten mukaan oppilaat saattavat oppia toistamaan virhellisiä laskusääntöjä ja ratkaisemaan tehtäviä mekaanisesti ilman, että he ymmärtävät, miksi ratkaisut toimivat. Tämä johtaa usein siihen, että virheelliset ajattelumallit säilyvät, vaikka vastaus olisi näennäisesti oikea. Virhekäsitysten korjaaminen edellyttääkin myös konkreettisia apuvälineitä. Esimerkiksi yhtäsuuruuden merkitystä voidaan havainnollistaa tasapainovaa'an avulla, jolloin opiskelija hahmottaa, että yhtälön molempien puolien on pysyttävä tasapainossa. Samoin negatiivisten lukujen käsitettä voidaan avata konkreettisten esimerkkien kautta, kuten lämpötilan muutoksen tai velan ja varallisuuden vertailua hyödyntäen. Boothin ja Koedingerin (2008) tutkimuksen mukaan oppilaiden käsitteellisen ymmärryksen vahvistaminen tukee huomattavasti heidän kykyään soveltaa oikeita menetelmiä yhtälöiden ratkaisemisessa. Myös Rittle-Johnsonin, Sieglerin ja Alibalin (Rittle-Johnson ym. 2001) kehittämän mallin mukaan käsitteellisen ja menettelyllisen tiedon kehitys on vuorovaikutteinen prosessi. Syvällinen ymmärrys käsitteistä auttaa omaksumaan oikeita laskutapoja ja -menetelmiä, ja vastaavasti oikein opitut menetelmät tukevat käsitteellisen ymmärryksen rakentumista.

2.4 Sanalliset tehtävät ja mallintamisen haasteet

Tehtävänannolla on merkitystä siinä, millaisia virhekäsityksiä oppilailta paljastuu. Suljetut tehtävät, joissa on yksi selkeä ratkaisu tuovat usein esiin mekaanisia laskuvirheitä tai tiettyyn sääntöön liittyviä virheitä tai virhekäsityksiä. Avoimet ja sanalliset tehtävät puolestaan paljastavat syvempiä ajattelun ja mallintamisen ongelmia. Tutkimusten mukaan molempien tehtävätyyppien tarkastelu on tarpeellista, jotta oppilaiden ajattelusta saataisiin kokonaiskuva (Booth ja Koedinger, 2008). Esimerkiksi ylioppilaskokeessa esiintyy sekä laskennallisia rutiinitehtäviä että avoimempia soveltavia tehtäviä, mikä tekee ylioppilaskokeiden ratkaisuista aineistona erityisen antoisan virhekäsitysten tutkimiselle.

Työssä tutkitaan myös, miten lukiolaiset opiskelijat lähtevät ratkaisemaan sanallisia tehtäviä, joissa tarvitsee hyödyntää yhtälöitä. Sanalliset tehtävät ovat keskeinen osa matematiikan opetuksen sisältöä, sillä ne yhdistävät matemaattisen ajattelun arkipäivän tilanteisiin. Tutkimukset kuitenkin osoittavat, että juuri sanalliset tehtävät aiheuttavat paljon vaikeuksia. Oppilaat eivät aina kykene muodostamaan tilanteesta oikeaa matemaattista mallia, vaan virhe syntyy jo mallintamisvaiheessa (Hegarty ym. 1995). Esimerkiksi "Kaksi kertaa luku vähennettynä kolmella on yhtä suuri kuin seitsemän" voi helposti vääristyä yhtälöksi $2x - 3 = 7$, tai jopa osalle oppilaista ilmaisu johtaa virheelliseen muotoon $x - 3 = 7$. Yhtälön oikea tulkinta olisi $2(x - 3) = 7$.

Suomalaisessa tutkimuksessa (Holmlund, 2025) on havaittu, että sanallisten tehtävien vaikeus liittyy usein kielen ja matematiikan vuorovaikutukseen ja sen puutteeseen. Oppilaat pyrkivät tulkitsemaan tekstiä kirjaimellisesti, jolloin matemaattinen rakenne jää kokonaan hahmottamatta. Tämä voi johtaa siihen, että he soveltavat laskusääntöjä mekaanisesti ilman, että he ymmärtävät, että miksi näin tehdään.

Useat tutkimukset ovat osoittaneet, että oppilaat soveltavat sanallisia tehtäviä ratkaistessaan niin sanottua koulumatematiikan sääntöä eli he eivät tarkastele tehtävän todellista sisältöä vaan pyrkivät päättelemään, millaista ratkaisua opettaja tai oppikirja todennäköisesti odottaa. Tällöin oppilaat turvautuvat usein opittuihin laskusääntöihin ilman, että he pysähtyvät pohtimaan, onko ratkaisu mielekäs tai todenmukainen. Mellone, Verschaffel ja Van Dooren (2014) kuvaavat, kuinka tällainen odotuksiin perustuva toimintatapa estää oppilaita rakentamasta arkipäivän tilanteisiin yhteyttä matematiikan kanssa. Kun tehtävä on monitulkintainen tai vaatii arkisen toimintalogiikan huomioimista, oppilaat päätyvät helposti epärealistisiin ratkaisuihin. Oppilaat unohtavat arkielämän rajoitteet, koska heidän on vain pakko saada tehtävä jotenkin tehtyä.

2.5 Tehtävätyypit ja virheiden ilmentyminen

Tehtävätyypillä on vaikutus siihen, millaisia virheitä ja virhekäsityksiä oppilaiden ratkaisuista paljastuu. Matematiikan tehtäviä voidaan tarkastella esimerkiksi jatkuvana jatkumona rutiininomaisista, algebrallisista tehtävistä avoimiin, soveltaviin ja mallintamista vaativiin tehtäviin. Rutiinitehtävissä korostuvat usein menettelylliset virheet, kuten laskuvirheet tai yksittäisten laskusääntöjen väärä soveltaminen, kun taas avoimemmat tehtävät tuovat esiin käsitteellisiä puutteita ja mallintamisen vaikeuksia.

Yhtälöihin liittyviä tehtäviä voidaan karkeasti jaotella esimerkiksi kolmeen luokkaan:

- puhtaasti algebralliset tehtävät;

- soveltavat algebralliset tehtävät, joissa on annettu jokin yksinkertainen mallikuva tai sovelletumpi yhtälö; ja
- sanalliset tehtävät, joissa opiskelijan odotetaan itse muodostavan mallin ja yhtälön.

Puhtaasti algebrallisissa tehtävissä, kuten

$$\text{Ratkaise yhtälö } 2x - 5 = 11$$

opiskelijan huomio kohdistuu pääasiassa symboliseen laskentaan ja yhtälön ratkaisemisen perusteisiin. Tällöin virheet liittyvät usein yhtäsuuruuden tasapainon säilymättömuuteen, negatiivisten lukujen väärinkäsittelyyn tai kertolaskun ja jakolaskun väärään suhteeseen (Booth ja Koedinger, 2008). Soveltavissa algebrallisissa tehtävissä puolestaan tarkastellaan usein jonkin yksinkertaisen tilanteen, kuten alennusmyynnin mallintamista valmiiksi annetuilla kaavoilla tai melko suoraviivaisella päättelyllä. Näissä tehtävissä virheet voivat syntyä sekä mallintamisessa että loogisessa ratkaisussa.

Sanalliset ja laajemmat mallintamistehtävät ovat monivaiheisia. Opiskelijan on ymmärrettävä kielellinen tehtävänanto, poimittava olennainen tieto, päätettävä, mitä suureita tehtävässä esiintyy, muodostettava yhtälö tai yhtälöryhmä, ratkaistava se ja lopuksi analysoitava vastaus ja pohdittava sen luotettavuutta. Jokainen näistä vaiheista sisältää potentiaalisia virheen paikkoja. Tutkimuksessaan Hegarty ym. (1995) erottavat ratkaisustrategioissa karkeasti kahdenlaisia lähestymistapoja. Menettelyllisen, jossa oppilas etsii nopeasti tuttuja avainsanoja ja soveltaa valmista reseptiä, sekä käsitteellisemmän, jossa hän rakentaa tilanteesta mentaalisen mallin. Ensimmäinen strategia tuottaa usein virheitä monitulkintaisissa tai arkirealismia sisältävissä tehtävissä.

Ylioppilaskokeissa esiintyy tyypillisesti kaikkia edellä mainittuja tehtävätyyppejä. Tämä tekee kokeen vastauksista erityisen mielekkään aineiston virheanalyysille, sillä saman opiskelijan ratkaisut voivat paljastaa erilaisia virhekäsityksiä riippuen siitä, millaista ajattelua tehtävä milloinkin vaatii. Esimerkiksi opiskelija saattaa suoriutua virheettömästi rutiininomaisista algebrallisista yhtälöistä, mutta soveltavimmissa tehtävissä saattaa tulla systemaattisia virheitä, joissa esimerkiksi opiskelijan pitäisi muodostaa yhtälö itse.

2.6 Digitaalinen ympäristö ja teknologian rooli yhtälöiden ratkaisussa

Lukion opetussuunnitelmassa korostetaan teknologian, kuten CAS-laskimien ja tietokoneohjelmien, käyttöä yhtälöiden ratkaisun tukena (Opetushallitus, 2019). Digitaalisen ylioppilaskokeen takia oppimisympäristöt ovat muuttuneet. Opiskelijat ratkovat nykyään tehtävät sähköisessä oppimisympäristössä, eikä tavallisessa kynäpaperiympäristössä. Tämän takia opiskelijoilla on käytössään erilaisia työkaluja, kuten taulukkolaskenta, symbolisen laskennan ohjelmistot ja piirtosovellukset, jotka mahdollistavat yhtälöiden ratkaisun graafisesti, numeerisesti tai symbolisesti.

Tutkimusten mukaan teknologian hyödyntäminen ei kuitenkaan automaattisesti poista käsitteellisiä virhekäsityksiä (Jupri ym. 2014). Päinvastoin se voi joskus peittää niitä. Opiskelija saattaa saada oikean numeerisen lopputuloksen valitsemalla oikean työkalun ja syöttämällä siihen oikeat luvut, vaikka hänen käsitteellinen ymmärryksensä yhtälön rakenteesta ja ratkaisuprosessista olisi puutteellinen. Toisaalta teknologia voi myös paljastaa uusia virhetyyppejä, esimerkiksi silloin, kun opiskelija ei osaa tulkita graafisen ratkaisun merkitystä tai tekee virheitä ohjelmaa käyttäessä.

Digitaalisessa koeympäristössä opiskelijan on kyettävä liikkumaan joustavasti eri esitystapojen välillä:

$$\begin{aligned}\text{sanallinen tehtävä} &\rightarrow \text{algebrallinen malli}\\ &\rightarrow \text{graafinen esitys}\\ &\rightarrow \text{numeerinen ratkaisu.}\end{aligned}$$

Jos jokin näistä vaiheista on heikko tai kokonaan puutteelinen, virheitä syntyy ja vastaus menee yleensä pieleen. Esimerkiksi funktion kuvaajasta luettu nollakohta voidaan ymmärtää kohdaksi, jossa kuvaaja kohtaa x-akselin, mutta yhteys sitä vastaavaan yhtälöön $f(x) = 0$ jää puutteelliseksi. Tällöin opiskelijan voi olla vaikea nähdä, miksi yhtälön ratkaiseminen ja funktion nollakohdan etsiminen ovat sama asia.

Lisäksi digitaalinen ympäristö vaikuttaa opiskelijoiden ratkaisuajatteluun. Osa opiskelijoista saattaa lähestyä tehtävää kokeile ja katso -periaatteella syöttämällä erilaisia lukuja laskimeen sen sijaan, että muodostaisi loogisen algebrallisen ratkaisun. Tämä voi johtaa pintapuoliseen ajatteluun, jossa oikea vastaus löytyy, mutta taustalla oleva rakenne jää ymmärtämättä. Toisaalta teknologia antaa myös uusia mahdollisuuksia tutkia virheitä. Esimerkiksi välivaiheiden tallentuminen ja eri sovellusten työkalujen käyttö voivat tarjota tutkimukselle aineistoa siitä, miten opiskelijat todella ajattelevat ratkaisuprosessin aikana.

2.7 Virheanalyysin pedagoginen merkitys

Virhekäsitysten tutkiminen ei ole kiinnostavaa vain teoreettisesta näkökulmasta, vaan sillä on suora yhteys opetuksen kehittämiseen parempaan suuntaan. Virheanalyysin avulla voidaan tunnistaa tyypillisiä virheellisiä ajattelumalleja, jotka toistuvat monilla oppilailla. Näin voidaan suunnitella opetusta niin, että nämä mallit huomataan ja tehdään näkyviksi. Täytyy muistaa, että virheet eivät ole merkki epäonnistumisesta vaan osa oppimista ja sen kehitystä.

Opetuksen näkökulmasta on olennaista erottaa toisistaan satunnaiset virheet ja systemaattiset virhekäsitykset. Satunnaiset laskuvirheet voivat vähentyä harjoittelun ja tarkkuuden myötä, mutta virhekäsitykset vaativat usein erilaista ja pitkäkestoista käsittelyä. Esimerkiksi yhtäsuuruusmerkin merkitystä voidaan tutkia yhdessä oppilaiden kanssa vertailemalla tilanteita, joissa yhtäsuuruus esiintyy eri rooleissa (esim. $3 + 4 = 7$, $7 = 3 + 4$, $3 + 4 = 2 + 5$). Vastaavasti muuttujan käsitettä voidaan avata tehtävillä, joissa sama kirjain saa eri arvoja tai joissa muuttuja kuvaa kokonaisuutta, ei vain tuntematonta lukua.

Formatiivisen arvioinnin näkökulmasta virheiden tarkastelu on keskeinen osa oppimisprosessia. Monipuolinen arviointi auttaa oppilasta ymmärtämään, millä tasolla hänen osaamisensa on ja mihin suuntaan sitä pitäisi muuttaa. Yhtälöihin liittyvissä tehtävissä tämä tarkoittaa esimerkiksi keskusteluja siitä, miksi tietty ratkaisutapa ei toimi, tai vertaisarviointia, jossa oppilaat analysoivat toistensa ratkaisupolkuja ja etsivät niistä mahdollisia virhekohtia.

Ylioppilaskokeen kontekstissa virheanalyysi voi tarjota arvokasta palautetta paitsi yksittäisille opiskelijoille myös opetuksen ja arvioinnin suunnittelijoille. Jos tietyntyyppiset virheet toistuvat vuodesta toiseen monilla opiskelijoilla, voi olla syytä tarkastella, miten kyseinen sisältö on esitetty opetussuunnitelmassa, oppikirjoissa ja opetustilanteissa. Esimerkiksi jos suurin osa opiskelijoista tekee systemaattisesti virheitä sanallisissa yhtälötehtävissä, voidaan pohtia, tulisiko mallintamiseen ja kielen ja matematiikan vuoropuheluun panostaa enemmän ja monipuolisemmin.

Lopulta virheanalyysin tavoitteena ei ole ainoastaan listata vääriä ratkaisuja, vaan ymmärtää oppilaiden ajattelua ja tukea oppimisen jatkumoa. Yhtälöiden kohdalla tämä tarkoittaa sitä, että opetuksessa pyritään rakentamaan siltoja aritmetiikasta algebraan, rinnastamaan käsitteitä arkipäivään, harjoittelemaan eri esitystapojen välistä yhteyttä ja tarjoamaan tilaisuuksia arvioida omia oikeita ja vääriä ratkaisutapoja. Näin virheistä tulee osa oppimista, ei pelkästään arvioinnin väline.

3 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaisia virheitä ja virhekäsityksiä opiskelijat tekevät ylioppilaskirjoituksissa lyhyen matematiikan kokeessa, erityisesti yhtälöitä sisältävissä tehtävissä. Tutkimuksen lähtökohtana on ajatus, että vastauksista löytyy virhekäsityksiä ja niiden tunnistaminen voi auttaa kehittämään opetusta ja arviointia parempaan suuntaan. Yhtälöiden ratkaiseminen ei ole pelkästään tekninen taito, vaan siihen liittyy olennainen osa matemaattisen ajattelun ja käsitteellisen ymmärryksen kehittymistä. Siksi virheiden systemaattinen analyysi tarjoaa mahdollisuuden tarkastella laajemmin opiskelijoiden ajattelun kulkua.

Aiemmat tutkimukset ovat osoittaneet, että yhtälöiden ratkaiseminen aiheuttaa vaikeuksia eri koulutusasteilla. Esimerkiksi Marcus ja Watt (Marcus ja Watt, 2012) ovat tuoneet esiin, että yhtälön käsite voi olla opiskelijoille monimerkityksinen ja abstrakti, mikä johtaa virheellisiin lopputuloksiin, erityisesti yhtäsuuruusmerkin merkityksen ymmärtämisessä. Holmlundin (2025) mukaan myös lukujen ja symbolien tyypillä voi olla vaikutusta siihen, miten opiskelijat lähestyvät yhtälöitä ja niiden mallintamista ja ratkaisemista. Lisäksi Juprin, Drijversin ja van den Heuvel-Panhuizenin (Jupri ym. 2014) tutkimukset osoittavat, että digitaalinen työskentely ei itsessään poista käsitteellisiä väärinymmärryksiä. Oppilaat tarvitsevat silti apua tehtävien ymmärtämisessä, vaikka digitaalisia apuvälineitä olisi käytössä.

Näiden havaintojen perusteella on perusteltua tarkastella, millaisia virheitä opiskelijat tekevät nimenomaan ylioppilaskokeissa, joissa tehtävien vaikeustaso ja muoto vaihtelevat. Ylioppilaskokeet tarjoavat autenttisen kontekstin, jossa opiskelijoiden matemaattinen ajattelu, käsitteellinen ymmärrys ja ongelmanratkaisutaidot tulevat esiin. Lisäksi ylioppilaskoe on arvioinnillisesti korkeapanoksinen tilanne, mikä tekee siitä erityisen kiinnostavan kohteen virheanalyyseille. Tietynlainen paine, jännitys digitaaliset työkalut ja tehtävien vaihtelevat ratkaisutavat voivat tuottaa erilaisia virheitä kuin luokkahuonetilanteissa.

Tämän tutkimuksen tavoitteena onkin ymmärtää, miten opiskelijat lähestyvät yhtälöitä ylioppilaskokeessa ja millaisia virhepolkuja he kulkevat ratkaistessaan algebrallisia, soveltavia ja sanallisia tehtäviä. Tarkastelemalla virheitä erilaisissa tehtävätyypeissä voidaan saada tietoa siitä, mitkä taidot ovat hyvin hallinnassa tai mitkä osa-alueet vaativat opetuksessa enemmän aikaa ja vahvempaa painotusta.

Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Millaisia virhekäsityksiä ja virhetyyppejä opiskelijoilla esiintyy yhtälöiden ratkaisemisessa ylioppilaskokeen tehtävissä?

2. Miten virheet eroavat eri tehtävätyypeissä (algebrallinen, soveltava algebrallinen ja sanallinen tehtävä)?

Näiden kysymysten avulla pyritään muodostamaan kokonaiskuva opiskelijoiden tavallisimmista virheistä ja virhekäsityksistä sekä siitä, miten tehtävätyyppi vaikuttaa virheiden laatuun ja yleisyyteen. Tutkimus tuottaa tietoa, jota voidaan hyödyntää sekä opetuksen suunnittelussa, että arvioinnin kehittämisessä, erityisesti yhtälöiden opettamisen ja virheiden ennaltaehkäisyn näkökulmasta.

4 Aineisto ja menetelmät

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan lukion lyhyen matematiikan opiskelijoiden osaamista yhtälöihin ja niiden ratkaisemiseen liittyvissä tehtävissä ylioppilaskokeissa.

Aineistossa on kunkin tehtävän osalta sadan opiskelijan vastaukset. Näistä opiskelijoiden vastauksista valittiin satunnaisesti 40 vastausta tarkempaan analyysiin kustakin tehtävästä. Näin kokonaisaineistoksi muodostui 160 eri vastausta (4 tehtävää $\times$ 40 vastausta). Otoskooksi valittiin 40 vastausta tehtävää kohden, koska tällöin voidaan arvioida niiden tarjoavan riittävän monipuolisen kuvan opiskelijoiden erilaisista ratkaisutavoista ja virhetyypeistä, mutta säilyvän samalla laadullisesti ja määrällisesti hallittavissa.

Satunnaisotanta toteutettiin valitsemalla sadan vastauksen joukosta 40 ensimmäistä vastausta. Vastaukset oli listattu satunnaisessa järjestyksessä. Satunnaisotannan avulla pyrittiin varmistamaan, että aineistoon sisältyy sekä heikosti että hyvin suoriutuneita opiskelijoita. Valinta ei perustunut esimerkiksi pistemääriin. Tarkoituksena oli kuvata mahdollisimman todenmukaisesti ja monipuolisesti sitä vaihtelua, jota ylioppilaskokeen yhtälötehtävien ratkaisuissa esiintyy.

Virheanalyysi kohdistettiin satunnaisesti valittuun 40 vastauksen otokseen. Näin analyysi voitiin tehdä riittävän yksityiskohtaisesti eli jokainen vastaus analysoitiin yksittäin. Siihen liittyvät virheet ja ajatteluprosessi kirjattiin ylös, jotta pystytään teettämään taulukkoja.

4.1 Analyysimenetelmä

Vastausten analysointi toteutettiin virheanalyysin menetelmällä, jossa opiskelijoiden ratkaisuja tarkastellaan sekä onnistumisten että virheiden kautta. Menetelmässä ei keskitytä pelkästään lopputuloksen oikeellisuuteen, vaan myös siihen, millaisia ajatteluprosesseja ja virhekäsityksiä ratkaisun taustalla mahdollisesti on. Tässä tutkimuksessa virheanalyysi yhdistettiin laadulliseen sisällönanalyysiin eli virheitä luokiteltiin sekä ennalta muodostettujen teoreettisten luokkien että aineistosta esiin nousevien uusien piirteiden perusteella.

Analyysi eteni vaiheittain. Ensimmäisessä vaiheessa kaikki valitut vastaukset katsottiin läpi kokonaisuutena. Tämän alustavan tarkastelun perusteella muodostettiin alustava luokittelurunko, jossa kiinnitin huomiota seuraaviin asioihin:

- **Termien siirtämisen virheet**
- **Laskusääntöjen virheellinen käyttö** (esimerkiksi sulkeiden avaamisessa tai negatiivisten lukujen käsittelyssä)
- **Eksponentti- ja juurilaskujen virhekäsitykset**

- **Muuttujan ja symbolien merkitykseen liittyvät virheet**
- **Mallintamisvirheet sanallisissa tehtävissä**
- **Tehtävän kesken jättäminen tai kokonaan väärin**
- **Täysin oikein**

Toisessa vaiheessa vastaukset käytiin läpi luokittelurungon avulla ja jokainen virhe kirjattiin sopiviin kohtiin. Virheet olivat tyypillisesti monitasoisia eli samassa vastauksessa saattoi ilmetä sekä käsitteellisiä ja menettelyllisiä virheitä. Analyysin kuluessa luokkia tarkennettiin ja yhdisteltiin, ja osasta muodostettiin alaluokkia. Esimerkiksi laskusääntöjen virheellinen käyttö jaettiin negatiivisiin lukuihin liittyviin virheisiin ja potenssi- ja juurilaskuihin liittyviin virheisiin.

Kolmannessa vaiheessa virheiden yleisyyttä tarkasteltiin määrällisesti. Keskeisten virhetyyppien esiintymistä laskettiin prosentteina analysoiduista vastauksista. Näin eri tehtävätyyppejä voitiin vertailla myös määrällisesti, esimerkiksi kuinka monella opiskelijalla ilmeni tietyn tyyppinen virhe pelkässä algebrallisessa tehtävässä verrattuna sanalliseen tehtävään. Nämä prosenttiosuudet eivät ole tilastollisesti yleistettäviä, mutta ne auttavat hahmottamaan virheiden suhteellista yleisyyttä ja painottumista eri tehtävätyypeissä.

4.2 Tutkimuksen luonne ja tavoitteet

Tutkimuksen tavoitteena on havaita ja vertailla opiskelijoiden tyypillisiä virhekäsityksiä yhtälöiden ratkaisemisessa sekä tarkastella, millaisia eroja esiintyy eri tehtävätyyppien välillä. Lisäksi tutkimuksessa pyritään tulkitsemaan, mitä havaitut virheet kertovat opiskelijoiden käsitteellisestä ja menettelyllisestä ymmärryksestä. Tutkimus on luonteeltaan kuvaileva ja eksploratiivinen. Sen tarkoituksena ei ole tilastollinen yleistys, vaan yhtälönratkaisun ja siihen liittyvien ajatteluprosessien tunnistaminen ja ymmärtäminen. Toisaalta tarkoitus on tunnistaa ja löytää virhekäsityksiä, jotta opetuksessa ja sen suunnittelussa niihin voitaisiin puuttua.

Tutkimuksen lähtökohtana on konstruktivistinen oppimiskäsitys, jonka mukaan opiskelijat rakentavat matemaattista ymmärrystään aiempien tietojen pohjalta. Virhekäsitykset nähdään tämän näkemyksen valossa osana oppimista eli ne kertovat siitä, millaisia virheellisiä käsityksiä opiskelijat ovat muodostaneet matemaattisille käsitteille ja säännöille. Virheanalyysi tarjoaa mahdollisuuden tarkastella näitä merkityksiä ja niiden kehittymistä.

Tuloksia voidaan hyödyntää matematiikan opetuksen kehittämisessä. Erityisesti käsitteellisen ymmärryksen tukemisessa ja opetuksen eriyttämisen suunnittelussa.

Kun opettajat tietävät millaiset virhekäsitykset ovat yleisiä ja missä tehtävätyypeissä ne tyypillisesti ilmenevät, he voivat suunnata opetustaan ja arviointiaan niin, että virhekäsitykset tulevat näkyviksi ja niitä yritetään korjata oikeaksi.

4.3 Luotettavuus ja menetelmälliset rajoitteet

Laadullisen virheanalyysin luotettavuuteen vaikuttaa erityisesti se, miten johdonmukaisesti virheitä luokitellaan. Tässä tutkimuksessa analyysi toteutettin yksin, mikä tuo mukanaan subjektiivisuuden riskin. Sama virhe olisi voitu luokitella hieman eri tavoin, jos analyysin olisi tehnyt toinen henkilö. Tämän riskin vähentämiseksi käytiin vastauksia läpi useaan kertaan ja luokittelua muutettiin ja tarkennettiin analyysin edetessä.

Tutkimuksen aineisto on myös rajallinen. Tässä tutkimuksessa oli neljä tehtävää ja 40 vastausta per tehtävä eivät anna kattavaa kuvaa kaikkien lukion lyhyen matematiikan opiskelijoiden osaamisesta. Kyseessä on harkinnanvarainen ja rajattu otos, jonka perusteella voidaan tehdä suuntaa-antavia, mutta ei tilastollisesti yleistettäviä johtopäätöksiä. Tarkoituksena onkin syventää ymmärrystä yhtälökäsitykseen liittyvistä tyypillisistä virheistä, ei tuottaa tilastollisia vertailuja esimerkiksi eri lukioiden tai vuosikurssien välillä.

Lisäksi on huomioitava, että aineisto koostuu valmiista koevastauksista. Tutkimuksessa ei ole käytettävissä tietoa opiskelijoiden taustatekijöistä, kuten kurssivalinnoista, aiemmasta koulumenestyksestä tai suhtautumisesta matematiikkaan. Näin ollen virheitä tarkastellaan ainoastaan näkyvien ratkaisujen perusteella, eikä niiden taustalla olevia oppimishistorioita voida yksityiskohtaisesti jäljittää. Tästä huolimatta koevastaukset tarjoavat autenttisen ja opetussuunnitelmaan kytkeytyvän kontekstin, jossa opiskelijoiden matemaattinen ajattelu tulee esiin.

4.4 Ylioppilaskokeet Suomessa

Suomalainen matematiikan ylioppilaskoe on osa valtakunnallista ylioppilastutkintoa, ja se mittaa opiskelijan matemaattista ajattelua, ongelmanratkaisutaitoa ja kykyä soveltaa oppimaansa eri tilanteissa. Lyhyen matematiikan koe on suunnattu niille opiskelijoille, jotka eivät ole valinneet pitkää matematiikkaa, mutta joiden odotetaan hallitsevan perusmatemaattiset taidot ja pystyvän soveltamaan niitä arkielämän ja jatko-opintojen kannalta keskeisissä tilanteissa.

Kokeen rakenne uudistui vuonna 2016, jolloin se jaettiin kahteen osaan, A-osaan ja B-osaan. A-osa sisältää kaikille pakollisia, lyhyempiä tehtäviä, jotka mittaavat perusosaamista, käsitteiden hallintaa ja laskurutiineja. Vuonna 2019 ylioppilaskokeet siirtyivät sähköiseksi. Siinä a-osa saa hyödyntää peruslaskinta. B-osa puolestaan koostuu laajemmista ja syvällisempää soveltamista edellyttävistä tehtävistä, joissa opiskelija saa käyttää sähköisiä apuvälineitä (Ylioppilastutkintolautakunta, 2025).

Tämä rakenne mahdollistaa sekä menettelyllisen osaamisen että käsitteellisen ymmärryksen arvioinnin. A-osa tarjoaa näkökulman siihen, miten opiskelijat hallitsevat keskeiset asiat yhtälöihin liittyen ilman teknistä tukea, kun taas B-osa paljastaa heidän kykynsä soveltaa yhtälöitä avoimemmissa ongelmanratkaisutilanteissa ja digitaalista ympäristöä hyödyntäen. Yhtälöitä ja yhtälönratkaisua voi esiintyä molemmissa osissa. A-osassa ne liittyvät usein peruslaskentaan ja yksinkertaisiin mallintamistehtäviin, kun taas B-osassa yhtälöt voivat esiintyä esimerkiksi tilasto-, talous- tai ongelmaratkaisutehtävissä ja kytkeytyä teknologian käyttöön.

Ylioppilaskokeen arvioinnissa kiinnitetään huomiota sekä lopulliseen vastaukseen että ratkaisun esittämiseen. Arvosteluperusteissa korostetaan matemaattisesti perusteltua etenemistä, oikeiden menetelmien käyttöä ja selkeää merkintätapaa. Tästä näkökulmasta koevastaukset ovat otollista aineistoa virheanalyysille, koska ne paljastavat mitä opiskelijat ovat valmiita vastaamaan korkean panoksen kokeessa ja millaisia ratkaisutapoja he suosivat.

Tässä tutkimuksessa käytetyt tehtävät valittiin nimenomaan lyhyen matematiikan ylioppilaskokeista, koska niiden tehtävätyypit vastaavat suoraan lukion opetussuunnitelman tavoitteita yhtälöiden osalta. Näin tuloksia voidaan peilata sekä opetussuunnitelmien linjauksiin että siihen, miten hyvin opiskelijat näyttävät hallitsevan opetussuunnitelmassa tavoiteltuja taitoja. Ylioppilaskoe toimii ikään kuin peilinä, jonka avulla voidaan tarkastella millaisiksi yhtälökäsitys ja yhtälönratkaisun taidot ovat kehittyneet lukion päätyttyä.

5 Analysointi ja tulokset

5.1 Lyhyt matematiikka syksy 2022 2a

Analysoitiin lyhyen matematiikan vuoden 2022 syksyn kokeen tehtävän 2a-kohtaa. Tarkasteltiin yhteensä 40 opiskelijan vastausta. Tarkastelussa kiinnitettiin erityisesti huomiota, että millaisia virheitä opiskelijat tekevät ja milloin ratkaisu oli kokonaan oikein.

Tehtävä 2. Yhtälönratkaisu (12 p.)

1. Ratkaise yhtälö

$$(x+1)(x+4) = 4.$$

   (4 p.)

2. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 2y = 1 - 4x. \end{cases}$$

   (8 p.)

(Yle, 2022)

Analysoitiin pelkästään tehtävän a-kohtaa, koska siinä oli perinteistä yhtälönratkaisua, kun taas b-kohdassa oli yhtälöparin ratkaiseminen.

Alla malliratkaisu a-kohtaan:

$$\begin{aligned} (x+1)(x+4) &= 4 \\ x^2 + 5x + 4 &= 4 \\ x^2 + 5x &= 0 \\ x(x+5) &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = -5 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = -5$.

Taulukosta 1 voidaan huomata, että 85% opiskelijoista hallitsi perusasiat, kuten termien siirtämisen oikeille puolille. Sen sijaan virheitä esiintyi erityisesti sulkeiden avaamisessa ja ratkaisun tulkinnassa.

Sulkeiden avaaminen tuotti suurimmat ongelmat tehtävässä. 25% opiskelijoista ei osannut avata sulkeita oikein. Tehtävän ensimmäinen vaihe oli sulkeiden avaaminen eli jos se meni jo pieleen niin yleensä koko tehtävä meni väärin. Toinen yleisesti esiintynyt virhe oli lisääminen tai vähentäminen vain yhtälön toiselta puolelta. Tämä tukee Boothin ja Koedingerin (2008) havaintoa, että virhekäsitykset liittyvät usein

Taulukko 1: Yhtälötehtävän syksy 2022 2a-kohdan virhetyypit ja niiden yleisyys

Virhetyyppi	**Määrä (n=40)**	**Prosenttiosuus (%)**
Yhtäsuuruusmerkin virhetulkinta	4	10
Ratkaisun tulkintavirhe	8	20
Avasi sulkeet väärin	10	25
Siirsi termit oikein	34	85
Ei virheitä	15	37.5

sääntöjen mekaaniseen soveltamiseen ilman ymmärrystä, että miksi näin kuuluu tehdä.

Ratkaisun tulkintavirheitä ilmeni 20%:llä opiskelijoista. Opiskelijat eivät huomanneet, että toisen asteen yhtälöllä voi olla kaksi eri ratkaisua, vaikka lasku muuten eteni oikeaoppisesti. Tämä kertoo puutteista käsitteiden ymmärryksessä. Joissain vastauksissa opiskelijat esittivät vain toisen ratkaisun tai jättivät tehtävän ratkaisun kesken. Jotkut opiskelijat saivat avattua sulkeet oikein ja siirrettyä termit oikeille paikoille, eli he saivat yhtälön muotoon $x^2 + 5x = 0$, mutta totesivat silti, ettei yhtälöllä ole ratkaisua.

Yhtäsuuruusmerkin virhetulkinta näkyi 10%:ssa vastauksista. Tämä tuli ilmi muun muassa tilanteissa, joissa opiskelija siirsi termejä väärin puolelta toiselle tai jätti yhtäsuuruuden kokonaan merkkaamatta. Tämä osoittaa, että osa opiskelijoista tulkitsee yhä yhtäsuuruusmerkin "tulosmerkkiksi" eikä tasapainon symboliksi, mikä on (Stephens ym. 2006) kuvaama tyypillinen virhekäsitys. Toisaalta osa opiskelijoita lisäili ylimääräisiä yhtäsuuruksia kaikkien laskurivien alkuun tai puolestaan ratkaisi koko tehtävän yhtenä pötkönä, joilloin yhtäsuuruusmerkin ymmärtämisessä on puutteita.

Toisaalta 15 opiskelijaa eli 37,5% ratkaisi tehtävän täysin oikein. Nämä ratkaisut pitivät sisällään sekä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan käyttöä, että tulon nollasäännön hyödyntämistä. Ratkaisukaavan käyttö oli huomattavasti yleisempää kuin tulon nollasäännön käyttö.

5.2 Lyhyt matematiikka syksy 2020 tehtävä 2 kohta 2

Analysoitiin lyhyen matematiikan vuoden 2020 syksyn tehtävää 2 ja tarkemmin kohtaa 2. Tarkasteltiin 40 opiskelijan vastauksia tutkimuksessa. Tarkastelussa kiinnitettiin erityisesti huomiota, että millaisia virheitä opiskelijat tekevät ja milloin ratkaisu oli kokonaan oikein. Tehtävä oli ratkaista polynomiyhtälö.

Tehtävä 2 Yhtälöitä **12 p.**

Ratkaise seuraavat yhtälöt. Anna vastausten likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

1. $x^2 = 7 \quad (3 \text{ p.})$
2. $7x^5 + 2 = -3x^5 + 4 \quad (3 \text{ p.})$
3. $(3^x)^3 \cdot 3^4 = 3^{11} \quad (3 \text{ p.})$
4. $13^x = 147 \quad (3 \text{ p.})$

(Yle, 2020)

Tässä tehtävässä tarkasteltiin ainoastaan kohtaa kaksi, joten kohdan kaksi mallivastaus on esitetty alla.

$$7x^5 + 2 = -3x^5 + 4$$

$$10x^5 = 2$$

$$x^5 = 0.2$$

$$x = 0.2^{1/5} \approx 0.72$$

Vastaus: $x \approx 0.72$

Taulukko 2: Virhetyypit polynomiyhtälön tehtävässä

Virhetyyppi	**Määrä (n=40)**	**Prosenttiosuus (%)**
Käytti väärää laskusääntöä	15	37,5%
Potenssi- ja juurilaskuvirhe	14	35%
Vastaus ilmoitettu väärin	10	25%
Täysin väärin / ei edes ratkaissut	4	10%
Täysin oikein	3	7,5%

Tehtävän 2 kohta 2 mittasi opiskelijoiden kykyä ratkaista viidennen asteen yhtälö, jossa esiintyi saman muuttujan potenssitermejä molemmilla puolilla yhtälöä. Tällainen tehtävä edellyttää opiskelijalta paitsi laskusääntöjen hallintaa myös ymmärrystä potenssilausekkeista ja muuttujan erottamisesta. Lisäksi tehtävässä korostuu algebrallisen ajattelun sujuvuus. Opiskelijan tulee tunnistaa oikea ratkaisutapa ja soveltaa sitä johdonmukaisesti useiden laskuvaiheiden läpi, jotta päästäisiin haluttuun lopputulokseen.

Taulukon 2 perusteella tehtävä osoittautui monille opiskelijoille haastavaksi. Yleisimmäksi virhetyypiksi tarkastelussa nousi väärän laskusäännön käyttö, joka ilmeni

37,5% opiskelijoilla. Tämä viittaa siihen, että merkittävä osa opiskelijoista ei hallinnut potenssien käsittelyä tai termien siirtämistä. Tämä voi ilmetä esimerkiksi tilanteissa, joissa potenssien eksponentteja on käsitelty virheellisesti. Toisaalta voi olla, että opiskelijoille ei ole tarpeeksi usein tuotu esille potenssin erilaisia laskusääntöjä.

Toiseksi yleisin virhetyyppi oli potenssi- ja juurilaskuihin liittyvät virheet 35%. Opiskelijat esimerkiksi unohtivat eksponentin, poistivat potenssin väärin tai käyttivät juurilaskua tilanteissa, joissa sitä ei olisi ollut sallittua. Tämä viittaa siihen, että eksponenttifunktion ja juurifunktion välinen yhteys ei ole kaikille selkeä.

Väärin ilmoitetut vastaukset muodostivat 25% virheistä. Näissä tapauksissa opiskelija oli saattanut ratkaista tehtävän lähes oikein, mutta lopputulos kirjoitettiin puutteellisena, väärin pyöristettynä tai ilman vaadittua tarkkuutta. Tämä osoittaa, että osa opiskelijoista tarvitsee vielä harjoitusta vastauksen esittämiseen ja ratkaisun viimeistelyyn. Osa opiskelijoitsa ei välttämättä ole huomannut, että tehtävässä on pyydetty antamaan vastaus tietyllä tarkkuudella.

Lisäksi 10 25% opiskelijoista ei saanut tehtävää ratkaistua lainkaan tai ratkaisu oli kauttaaltaan virheellinen. Tässä on iso osa oppilaita, jotka eivät päässeet tehtävässä ollenkaan alkuun. Vain 7,5 25% opiskelijoista ratkaisivat polynomiyhtälön täysin oikein. Alhainen osuus kertoo tehtävän vaativuudesta sekä siitä, että polynomiyhtälöt vaativat sekä teknistä laskutaitoa että käsitteellistä ymmärrystä, jotka eivät toteutuneet samanaikaisesti suurimmalla osalla opiskelijoista.

Polynomiyhtälön ratkaisemiseen liittyvät virheet keskittyivät erityisesti laskusääntöjen käyttöön ja eksponenttien käsittelyyn. Tämä viittaa siihen, että opiskelijoilla on edelleen epävarmuutta algebran perusrutiineissa ja eksponenttia koskevassa käsitteellisessä ymmärryksessä. Tehtävä osoittautui selvästi haastavaksi, mikä näkyi myös täysin oikeiden vastausten vähäisenä määränä.

5.3 Lyhyt matematiikka kevät 2021 3 kohtia 1 ja 2

Analysoitiin lyhyen matematiikan vuoden 2021 kevään tehtävän 3 kohtia 1 ja 2. Tarkasteltiin 40 opiskelijan vastauksia tutkimuksessa. Tarkastelussa kiinnitettiin erityisesti huomiota, että millaisia virheitä opiskelijat tekevät ja milloin ratkaisu oli kokonaan oikein. Tehtävä oli ratkaise yhtälö eri muuttujien suhteen.

Tehtävä 3. Kaavoja **12 p.**

Matematiikan sovelluksissa käytetään erilaisia kaavoja. Tässä tehtävänä on joko ratkaista kysytty suure kaavasta (kohdat 1–4) tai laskea sen lukuarvo (kohdat 5 ja 6). Jokaisesta osatehtävästä voi saada 2 pistettä.

1. Ratkaise aika t : $\quad v = v_0 + at.$

2. Ratkaise moolimassa M : $\quad n = \frac{m}{M}.$

3. Ratkaise nopeus v : $\quad E = \frac{1}{2}mv^2.$

4. Ratkaise kateetin pituus a : $\quad a^2 + b^2 = c^2.$

5. Laske säde r : $\quad V = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad$ kun $V = 2.$

6. Laske aika t : $\quad K = k(1 + \frac{p}{100})^t, \quad$ kun $K = 1000$, $k = 500$ ja $p = 2.$

(Yle, 2021)

Tästä tehtävästä analysoitiin kohtia 1 ja 2. Alla on esitetty niiden oikeat ratkaisut:

$$
\begin{aligned}
1.\ v &= v_0 + at \\
v - v_0 &= at \\
t &= \frac{v - v_0}{a}, \quad (a \neq 0) \\
2.\ n &= \frac{m}{M} \\
nM &= m \\
M &= \frac{m}{n}, \quad (n \neq 0)
\end{aligned}
$$

Taulukko 3: Virhetyypit tehtävässä 3 kohdat 1 ja 2

Virhetyyppi	**Määrä (n=40)**	**Prosenttiosuus (%)**
Käytti väärää laskusääntöä	18	45%
Ratkaisi väärän muuttujan suhteen	2	5%
Laskuvirhe	12	30%
Täysin väärin / ei edes ratkaissut	14	35%
Täysin oikein	6	15%

Tehtävä 3 mittasi opiskelijoiden kykyä ratkaista suureita fysiikan tai kemian kaavoja muistuttavista yhtälöistä. Tällaiset tehtävät edellyttävät sekä algebrallista osaamista ja ymmärrystä suureiden välisistä suhteista. Toisin kuin puhtaasti numeeriset yhtälöt, suureyhtälöt korostavat käsitteellistä ajattelua. Opiskelijan tulee hallita symbolinen laskenta ja osata ratkaista haluttu suure muiden avulla ilman lukuarvoja.

Taulukossa 3 esitetyistä tuloksista huomataan, että tehtävä oli monille opiskelijoille haastava. Yleisin virhetyyppi oli väärän laskusäännön käyttö, jota esiintyi 45% vastauksista. Tämä viittaa siihen, että lähes puolet opiskelijoista ei hallinnut muuttujien ja suureiden välisten laskusääntöjen soveltamista oikein. Tyypillisiä virheitä olivat tilanteet, joissa opiskelija yritti jakaa väärällä termillä tai sovelsi väärää käänteisoperaatiota. Osa yritti myös sijoitaa suureiden paikalle jotain lukuja, jotta yhtälö olisi helpompi ratkaista. Nämä virheet kertovat menettelyllisen osaamisen puutteista, jotka saattavat johtua myös heikosta käsitteellisestä ymmärryksestä.

Laskuvirheitä esiintyi 30%:ssa vastauksista. Tämä on merkittävä osuus, sillä se viittaa siihen, että monella opiskelijalla on vaikeuksia pitää välivaiheet järjestyksessä. Tällaiset virheet voivat syntyä erityisesti silloin, kun kaavaan sisältyy useita muuttujia ja erilaisia laskutoimituksia, jolloin laskujärjestyksen hallinta on ratkaisevaa. Toisaalta näissä laskuissa ei vähentynyt mikään termi vaan kaikkien kanssa piti operoida loppuun asti.

Lisäksi 35% opiskelijoista teki tehtävän täysin väärin tai ei ratkaissut sitä ollenkaan. Tämä kertoo siitä, että osalle tehtävän rakenne tai sen vaatimustaso oli liian vaikea. Mahdollisesti opiskelijat eivät hahmottaneet, mikä suure tulisi ratkaista, tai eivät tunnistaneet tarvittavaa algebrallista laskutapaa. Myös tehtävän konteksti fysiikan tai kemian kaavaa muistuttava muoto saattoi lisätä kognitiivista kuormitusta, jos opiskelijat eivät olleet varmoja suureiden merkityksistä.

Vain 15% opiskelijoista ratkaisi tehtävän täysin oikein, mikä on suhteellisen pieni osuus. Tehtävän onnistunut ratkaiseminen vaati sekä menettelyllistä tarkkuutta että ymmärrystä siitä, miten muuttujat ja suureet riippuvat toisistaan ja milloin termejä pystyy yhdistämään ja milloin ei.

Tulokset osoittavat, että opiskelijoilla esiintyy sekä menettelyllisiä virheitä eli väärien laskusääntöjen valitsemista ja laskuvirheitä. Toisaalta löytyi myös käsitteellisiä virheitä, kuten väärän muuttujan suhteen ratkaiseminen ja tehtävän jäsentämisen vaikeus. Näiden virheiden samanaikainen esiintyminen viittaa siihen, että opiskelijoiden käsitys suureyhtälöistä on usein pinnallinen ja perustuu enemmän kaavojen mekaaniseen käsittelyyn kuin niiden merkityksen ymmärtämiseen.

5.4 Lyhyt matematiikka kevät 2021 5

Analysoitiin lyhyen matematiikan vuoden 2021 kevään kokeen tehtävää 5. Tarkasteltiin 40 opiskelijan vastauksia tutkimuksessa. Tarkastelussa kiinnitettiin erityisesti huomiota, että millaisia virheitä opiskelijat tekevät ja milloin ratkaisu oli kokonaan oikein tai puolestaan kokonana väärin. Kyseinen tehtävä oli sanallinen tehtävä, joten tarkasteltiin myös miten oppilaat muunsivat sanallisen tehtävän matemaattisin symdolein.

Tehtävä 5. Lipputulot (12 p.)
Maaotteluun on ostettu yhteensä 4 802 lippua. Pääkatsomon lippu maksaa 35 euroa ja ylä- sekä sivukatsomoiden liput 25 euroa. Ottelun lipputuloja kertyi yhteensä 136 900 euroa. Kuinka moni katsojista istui pääkatsomossa? (Yle, 2021)

Malliratkaisu kyseiseen tehtävään:

Merkitään pääkatsomon lippujen määrää x.

Tällöin muiden katsomoiden lippuja on $4802 - x$.

Muodostetaan lipputulojen yhtälö: $35x + 25(4802 - x) = 136900$.

$$\begin{aligned} 35x + 120050 - 25x &= 136900 \\ 10x &= 136900 - 120050 \\ 10x &= 16850 \\ x &= 1685. \end{aligned}$$

Vastaus: Pääkatsomossa istui 1 685 katsojaa.

Taulukko 4: Virhetyypit tehtävässä 4

Virhetyyppi	**Määrä (n=40)**	**Prosenttiosuus (%)**
Ei osannut muodostaa yhtälöitä	23	57,5%
Merkkasi muuttujia samalla symbolilla	2	5%
Laskuvirhe	2	5%
Kokeili ratkaisun ilman yhtälöitä	6	15%
Täysin väärin	12	30%
Täysin oikein	15	37,5%

Analysoinnin tulokset ovat listattuna taulukossa 4. Sanallisen yhtälötehtävän tulokset osoittivat, että oppilaille suurimmat vaikeudet liittyivät yhtälöiden muodostamiseen ja mallintamiseen. Yli puolet opiskelijoista eli 57,5% ei onnistunut muodostamaan tehtävään sopivia yhtälöitä. Tämä viittaa siihen, että ongelmana ei ollut välttämättä laskutoimituksessa, vaan sanallisen tilanteen kääntäminen matemaattiseksi malliksi. Osa opiskelijoista noin 15% ratkaisi tehtävän kokeilemalla eri lukuja ilman yhtälöä, mikä kertoo mallintamisprosessin ohittamisesta ja puutteita yhtälöiden hyödyntämisestä arkipäivän tilanteissa.

Vain pieni osa opiskelijoista teki laskuvirheen (5%) tai käytti muuttujia virheellisesti (5%). Näitä voidaan pitää enemmänkin satunnaisena virheenä kuin virhekäsityksenä. Täysin väärin ratkaisseiden osuus oli 30%, mikä osoittaa, että vaikka yritystä oli, virhe tapahtui joko mallintamisvaiheessa tai laskutoimituksissa.

Täysin oikein ratkaisseiden osuus oli 37,5%, mikä on merkittävä. Tehtävässä kuitenkin piti muodostaa kaksi yhtälöä ja yhdistää ne ratkaisun löytämiseksi. Huomaa, että sanalliset tehtävät kuormittavat oppijoiden kognitiivisia resursseja enemmän kuin suorat laskennalliset tehtävät, koska ne edellyttävät sekä kielellistä että matemaattista osaamista.

Tulosten perusteella voidaan päätellä, että mallintamisen vaihe on kriittisin kohta sanallisten tehtävien ratkaisemisessa. Oppilaat, jotka osasivat muodostaa oikeat yhtälöt, onnistuivat lähes aina myös ratkaisussa ja vastauksen tulkinnassa. Tämä korostaa käsitteellisen ymmärryksen ja kielellisen ajattelun välistä yhteyttä matematiikan oppimisessa.

5.5 Yhteenveto analysoiduista tehtävistä

Tässä tutkimuksessa analysoitiin neljä erilaista ylioppilaskokeen tehtävää, jotka mittasivat opiskelijoiden osaamista yhtälöiden ratkaisemisessa. Tehtävät erosivat toisistaan. Ensimmäinen oli puhtaasti algebrallinen yhtälö (5.1), toinen tehtävä oli polynomiyhtälö (5.2), kolmas oli kaavanmuunnostehtävä(5.3) sekä neljäs tehtävä oli soveltava sanallinen tehtävä (5.4). Näiden tarkastelu yhdessä tarjoaa laajan kuvan siitä, millaisia virhekäsityksiä ja vaikeuksia opiskelijoilla esiintyy yhtälöiden ratkaisemisessa. Tarkastetut tehtävät hankaloituvat hieman koko ajan, jotta saatiin mahdollisimman monipuolista tietoa.

Tulosten perusteella havaittiin, että opiskelijoiden virheet olivat luonteeltaan pitkälti samankaltaisia kaikissa tehtävissä, vaikka niiden konteksti vaihteli. Termien ja merkkien siirtoon liittyvät virheet sekä epävarmuus laskusääntöjen soveltamisessa toistuivat kaikissa tehtävätyypeissä. Jokaisessa tehtävässä oli jonkinlaista haparointia yhtäsuuruusmerkin kanssa, mutta lukiolaisille se oli aika vähäistä. Näin ollen voidaan päätellä, että kyse ei ole yksittäisistä virheistä yhtälöiden ratkaisuissa, vaan syvemmistä käsitteellisistä haasteista, jotka liittyvät yhtälön rakenteen ja ratkaisuprosessin ymmärtämiseen ja soveltamiseen.

Algebrallisessa tehtävässä (5.1) tyypillisimpiä virheitä olivat sulkeiden avaaminen väärin tai ymmärtää, että toiseen asteen yhtälöllä voi olla kaksi eri ratkaisua. Noin kolmasosa opiskelijoista ratkaisi tehtävän täysin oikein, mutta monilla ratkaisu jäi kesken tai he eivät tunnistaneet yhtälön ratkaisuja. Tämä osoittaa, että vaikka ratkaisumenettely sinänsä oli useille tuttu, käsitteellinen ymmärrys toisen asteen yhtälön rakenteesta oli osittain puutteellista. Yhtälön ratkaisu kyseisessä tehtävässä lähti liikkeelle sulkeiden avaamisesta. Opiskelijat eivät osanneet laskea, mitä on $x \cdot x$. Jos heti ensimmäisessä vaiheessa tekee virheen, harvoin pääsee oikeaan lopputulokseen.

Polynomiyhtälön (5.2) kohdalla laskuvaikeudet korostuivat edelleen. Monet opiskelijat osasivat yhdistää termejä, mutta eksponentin ja juuren välinen yhteys oli epäselvä. Osa opiskelijoista jakoi termit luvulla 5 sen sijaan, että olisi ottanut viidennen juuren. Tämä viittaa siihen, että eksponentin käsitteellinen merkitys ei ollut täysin hallussa.

Kaavojen käsittelytehtävässä (5.3) virheet liittyivät pääosin laskusääntöjen virheelliseen soveltamiseen ja väärän muuttujan ratkaisemiseen. Useat opiskelijat yrittivät ratkaista yhtälön suoraan ilman selkeitä välivaiheita, mikä johti yleensä merkki- ja jakovirheisiin. Tämä tehtävä toi esiin sen, että algoritminen lähestymistapa ilman ymmärrystä yhtälön rakenteesta aiheuttaa helposti virheitä erityisesti silloin, kun tehtävä ei noudata täysin tuttua mallia eli siinä ei ole annettu valmiina lukuja joilla pitäisi laskea.

Sanallisessa lipputulo-tehtävässä (5.4) vaikeudet painottuivat yhtälöiden muodostamiseen ja muuttujien nimeämiseen. Monet opiskelijat tiesivät, mitä heidän piti laskea, mutta he eivät onnistuneet mallintamaan tilannetta oikeana yhtälönä. Tämä tukee aiempia havaintoja (Stephens ym. 2006) tutkimuksissa, joiden mukaan symbolisen ja sanallisen esitystavan välinen yhteys ja sen mallintaminen on monille oppilaille haastava. Vaikka tehtävässä oli realistinen konteksti, ei silti mallintaminen onnistu eli menettelyllinen osaaminen ei siirry soveltavaan ympäristöön. Todella harvat opiskelijat otannasta tarkistivat vastauksen paikkaansa pitävyyden. Tässä tehtävässä oli pelkästään kokonaislukuja ja laskinohjelmat olivat opiskelijoiden käytössä, jotka helpottivat laskentaprosessia.

Kokonaisuutena neljän tehtävän tarkastelu osoitti, että oppilaiden virheet ovat systemaattisia ja toistuvat eri tehtävämuodoissa. Vaikka konteksti ja laskennallinen vaikeus vaihtelivat, virheiden perusluonne pysyi samana. Monilla opiskelijoilla on puutteita ymmärryksessä siitä, mitä yhtälö matemaattisesti tarkoittaa ja miten yhtäsuuruus tulee säilyttää ratkaisuprosessin aikana. Toisaalta yhtälön ratkaisemisessa tarvitaan paljon erilaisia laskusääntöjä.

Tulokset viittaavat siihen, että opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota erityisesti sanallisen tehtävien muodostamiseen sekä operaatioiden vastavuoroisuuden (potenssi–juuri, kertolasku–jako, plus-miinus) havainnollistamiseen. Virheet eivät näyttäydy yksittäisinä virhelaskuina, vaan oppilaiden ajattelun ja ymmärryksen rakenteellisina puutteina, joiden tunnistaminen voi tarjota opettajalle arvokasta tietoa opetuksen kohdentamiseen ja eriyttämiseen.

6 Pohdintaa

Tässä luvussa tarkastellaan tutkimuksen tuloksia asetettujen tutkimuskysymysten avulla. Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, millaisia virhekäsityksiä opiskelijoilla esiintyy yhtälöiden ratkaisemisessa ja miten nämä virheet eroavat eri tehtävätyypeissä. Lisäksi pohditaan tulosten merkitystä matematiikan opetuksen ja oppimisen kannalta sekä esitetään pedagogisia suosituksia opettajille virhekäsitysten tunnistamiseksi ja korjaamiseksi.

Tulosten perusteella voidaan todeta, että opiskelijoiden tekemät virheet eivät olleet satunnaisia laskuvirheitä, vaan toistuvia ja rakenteellisia ajattelun vääristymiä. Ne kertoivat opiskelijoiden keskeneräisestä yhtälökäsitteestä ja sen ratkaisemisen vaiheiden puutteellisesta hallinnasta. Havaittuja virheitä esiintyi kaikissa neljässä analysoidussa tehtävässä, mutta niiden taustalla oli usein samankaltaisia mekanismeja, kuten termien siirtäminen toiselle puolelle ilman ymmärrystä tasapainosta tai muuttujan käsitteen rajaaminen pelkäksi tuntemattomaksi luvuksi.

6.1 Virhekäsitysten luonne ja yhteys aiempaan tutkimukseen

Tutkimuksen ensimmäinen tutkimuskysymys käsitteli sitä, millaisia virhekäsityksiä ja virhetyyppejä opiskelijoilla esiintyy yhtälöiden ratkaisemisessa. Tulokset osoittivat, että virheet olivat luonteeltaan systemaattisia ja toistuivat samankaltaisina eri opiskelijoilla ja eri tehtävissä. Tämä tukee näkemystä, jonka mukaan virhekäsitykset ovat osa oppijan tietorakennetta, eivät yksittäisiä lipsahduksia (Michael, 2002).

Keskeinen virhetyyppi liittyi laskusääntöjen käsittelyyn. Boothin ja Koedingerin (2008) mukaan tällaiset virheet syntyvät usein silloin, kun opiskelija soveltaa tuttuja menetelmiä mekaanisesti ilman käsitteellistä ymmärrystä. Tässä tutkimuksessa havaittiin, että opiskelijat esimerkiksi vähensivät termejä väärin toiselta puolelta, poistivat negatiivisen merkin huomaamatta tai jakoivat väärällä kertoimella. Nämä virheet viittaavat heikkoon ymmärrykseen käänteisoperaatiosta ja yhtälön tasapainoperiaatteesta. Toisin sanoen menettelyllinen tieto on jossain määrin hallussa, mutta sen taustalla oleva käsitteellinen pohja on puutteellinen.

Toinen keskeinen virhekategoria koski muuttujan ja symbolien merkityksen ymmärtämistä. Juprin, Drijversin ja Zawojewskin (2014) tutkimuksen tavoin myös tässä tutkimuksessa havaittiin, että osa opiskelijoista käsitteli muuttujaa vain ratkaistavana tuntemattomana, ei yleisenä symbolina, joka voi edustaa useita arvoja tai suhdetta kahden suureen välillä. Tämä ajattelumalli rajoitti heidän kykyään hahmottaa tehtävän rakennetta ja johti virheellisiin ratkaisuihin erityisesti silloin, kun tehtävässä esiintyi useampi muuttuja tai kun sanallinen tehtävä oli muutettava algebralliseen muotoon.

Yleisesti ottaen tulokset tukevat kansainvälisiä tutkimuksia ja niiden havaintoja. Tutkimusten mukaan yhtälöihin liittyvät virhekäsitykset ovat samankaltaisia eri maissa ja koulutusjärjestelmissä (Jamaludin ja Maat, 2020). Virhekäsitykset eivät siis ole pelkästään yksittäisen opettajan tai opetustavan seurausta, vaan heijastavat laajempia kognitiivisia haasteita, jotka liittyvät matemaattisten rakenteiden ymmärtämiseen ja käsitteelliseen ajatteluun. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen Von Glasersfeldin (1995) mukaan opiskelijat rakentavat tietoa aikaisempien kokemusten pohjalta, ja siksi virhekäsitykset voivat olla varsin sitkeitä: ne muodostavat johdonmukaisen, mutta matemaattisesti virheellisen tai puutteellisen selityksen, jota uudet opetustilanteet eivät automaattisesti korjaa.

Tulokset ovat linjassa myös perusopetuksen ja lukion opetussuunnitelmien kanssa. Molemmat opetussuunnitelmat korostavat yhtälöiden ymmärtämistä sekä mallintamisen taitoja, mutta käytännössä monen opiskelijan osaaminen näyttäytyy enemmän laskusääntöjen käyttäminen ulkoa opittuna kuin käsitteellisenä hallintana. Ylioppilaskokeen vastaukset paljastavat, että osa opiskelijoista on saavuttanut opetussuunnitelmien tavoitteet lähinnä teknisellä tasolla.

6.2 Tehtävätyyppien väliset erot ja ratkaisuprosessin vaiheet

Toinen tutkimuskysymys tarkasteli, miten virheet eroavat eri tehtävätyypeissä. Tutkimuksen aineisto sisälsi neljä tehtävää, jotka erosivat toisistaan sekä rakenteeltaan että kontekstiltaan. Ensimmäinen tehtävä oli algebrallinen toisen asteen yhtälö, toinen eksponenttiyhtälö, kolmas kaavamuunnostehtävä ja viimeinen sanallinen soveltamistehtävä. Tehtävät valittiin tarkoituksella erilaisiksi, jotta voitiin tarkastella virheiden ilmenemistä sekä puhtaasti symbolisissa että soveltavimmissa tilanteissa.

Eroja tehtävätyyppien välillä havaittiin erityisesti siinä, missä vaiheessa ratkaisuprosessia virhe tapahtui ja millainen ajattelun vääristymä sen taustalla mahdollisesti oli. Algebrallisessa tehtävässä tyypillisimpiä virheitä olivat sulkeiden avaaminen väärin, neliöjuuren käsittelyn puutteellisuus, esimerkiksi vain toinen juuri huomioitiin vastauksessa sekä ratkaisun virheellinen tulkinta. Nämä virheet ovat osoitus siitä, että vaikka menettely on opiskelijalle tuttu, sen käsitteellinen peruste jää usein hämäräksi. Opiskelija osaa mekaanisesti tehdä oikeita ratkaisuaskeleita, mutta ei täysin ymmärrä, miksi ne toimivat ja milloin ne ovat sovellettavissa.

Eksponenttiyhtälöissä puolestaan suurimmat virheet liittyivät potenssien ja juurien välisen yhteyden ymmärtämiseen. Monet opiskelijat jakoivat luvulla viisi, vaikka olisi pitänyt ottaa viides juuri yhtälön molemmilta puolilta, tai he yrittivät soveltaa lineaarisen yhtälön ratkaisutapaa tilanteessa, joka edellyttäisi logaritmien käyttöä. Tämä osoittaa, ettei eksponenttioperaation merkitys tai sen ja logaritmin välinen yhteys ole täysin omaksuttu. Virheet heijastavat myös sitä, että opiskelijat eivät tunnista yhtälön rakennetta tai symbolien merkitystä, vaan he näkevät sen sekavana kokoelmana erilaisia merkkejä.

Kaavojen käsittelytehtävissä virheet olivat usein laskusääntöihin ja symboliseen ajatteluun liittyviä. Opiskelijat saattoivat ratkaista tehtävän väärän muuttujan suhteen, jakaa virheellisesti väärällä symbolilla tai käsitellä vakioita ja muuttujia keskenään sekoittaen. Tämä kertoo vaikeuksista nähdä yhtälön osien välinen riippuvuus ja erottaa, mikä on muuttuja ja mikä parametri. Tällaiset virheet viittaavat siihen, että opiskelija ei hahmota kokonaisuutta, vaan etenee vaihe vaiheelta ilman yhteyttä tehtävän tavoitteeseen tai oikeaan lopputulokseen.

Sanallisessa lipputulo-tehtävässä ongelmat painottuivat mallintamiseen. Osa opiskelijoista osasi ratkaista itse muodostamansa yhtälöt oikein, mutta valitettavasti muodostetut yhtälöt olivat vääriä tai niillä ei päästy haluttuun lopputulokseen. Tämä osoittaa, että kielen ja matematiikan välinen yhteys on oppimisessa tärkeä, mutta usein puutteellinen taito. Oppilaat pyrkivät usein ratkaisemaan tehtävän mekaanisesti soveltamalla ulkoa opittuja sääntöjä, vaikka he eivät täysin ymmärtäneet ongelman matemaattista rakennetta tai ratkaisun mielekkyyttä.

Näiden havaintojen perusteella voidaan päätellä, että eri tehtävätyyppien välillä on eroja virheiden ilmenemismuodoissa ja ratkaisuprosessin kriittisissä kohdissa, mutta niiden taustalla olevat käsitteelliset vaikeudet ovat pitkälti samoja. Virhekäsitykset eivät siis liity pelkästään tehtävän pintarakenteeseen, vaan laajempiin ajattelun ja ymmärryksen malleihin, jotka ohjaavat opiskelijan toimintaa. Tämä tukee konstruktivistista näkemystä oppimisesta: opiskelijat eivät pelkästään opi sääntöjä, vaan rakentavat henkilökohtaisia merkityksiä, jotka voivat poiketa matemaattisesti oikeista käsitteistä ja menetelmistä (von Glasersfeld, 1995).

Tulokset osoittavat myös, että opiskelijoiden ulkoaoppiminen on rajallista. He osaavat soveltaa opittua menetelmää tutussa tilanteessa, mutta eivät tunnista sen yhteyttä uusiin tai erillaisiin ongelmatilanteisiin. Ilman käsitteellistä ymmärrystä menetelmien soveltaminen jää pinnalliseksi tai johtaa virheellisiin toimintatapoihin ja sitä myötä väärään lopputulokseen.

6.3 Mitä opettajat voivat tehdä?

Opettajalla on keskeinen rooli virhekäsitysten tunnistamisessa, ennaltaehkäisyssä ja korjaamisessa. Ensinnäkin opetuksessa tulisi korostaa, että yhtälöiden ratkaiseminen ei ole vain laskusääntöjen soveltamista tai niiden ulkoa opettelua, vaan ennen kaikkea käsitteellistä ymmärtämistä. Tasapainon konkretisointi esimerkiksi vaa'alla, geometrisilla havainnollistuksilla tai digitaalisten sovellusten, kuten GeoGebran, avulla auttaa opiskelijoita näkemään, että yhtälön molempia puolia tulee käsitellä samalla tavalla, jotta tasapaino säilyy. Tämä tukee yhtäsuuruusmerkin ymmärtämistä tasapainon merkkinä, ei pelkän vastauksen paikkana.

Toiseksi opettajan tulisi hyödyntää diagnostisia tehtäviä ja virheanalyysiä osana arjen opetusta. Kun oppilaita pyydetään selittämään ratkaisunsa ja perustelemaan valintansa, opettaja saa tietoa heidän ajattelustaan ja voi tunnistaa virhekäsityksiä jo varhaisessa vaiheessa. Tähän voivat kuulua, esimerkiksi tehtävät, joissa oppilaat arvioivat valmiita tai omia ratkaisuja ja etsivät niistä virheitä ja ehdottavat korjauksia. Tällaiset tehtävät siirtävät painopistettä pelkästä laskemisesta ajattelun prosessiin.

Kolmanneksi, opetuksessa tulisi vahvistaa symbolisten ja sanallisten tehtävien välistä yhteyttä. Sanallisten tehtävien ymmärtämistä voidaan harjoitella systemaattisesti eli esimerkiksi laatimalla yhdessä taulukko, jossa sama tilanne esitetään sanallisesti, taulukkomuodossa, kuvana ja yhtälönä. Näin opiskelijat oppivat tunnistamaan, mitä eri menetelmät ja termit tarkoittavat ja miten ne liittyvät toisiinsa. Tämä kehittää opiskelijoiden matemaattista kielitaitoa, joka on keskeinen osa yhtälöiden mallintamisessa varsinkin ongelma ratkaisu tehtävissä.

Neljänneksi, opettajien olisi tärkeää käsitellä virheitä luontevana osana oppimisprosessia. Kun virheet nähdään oppimisen välineenä eikä epäonnistumisena, oppilaat uskaltavat pohtia ja testata omaa ajatteluaan avoimemmin. Tämä edellyttää opetusta, jossa virheelliset ratkaisut otetaan keskustelun lähtökohdaksi ja niitä hyödynnetään koko ryhmän oppimisen tukena. Tällainen lähestymistapa tukee konstruktivistista oppimiskäsitystä ja auttaa oppilaita rakentamaan pysyvämpää käsitteellistä ymmärrystä matematiikan rakenteista.

Viidenneksi, opettaja voi tietoisesti suunnitella tehtäväkokonaisuuksia, jotka tuovat esiin samoja käsitteitä ja toimintatapoja eri tehtävätyypeissä. Esimerkiksi yhtälön ratkaisemista voidaan harjoitella peräkkäin rutiinitehtävillä, soveltavilla tehtävillä ja sanallisilla mallintamistehtävillä. Kun oppilaat huomaavat, että sama matemaattinen ajatus esiintyy eri muodoissa, heidän käsitteellinen ymmärryksensä vahvistuu ja virhekäsitysten todennäköisyys vähenee.

Lopuksi, formatiivinen arviointi ja jatkuva palaute ovat keskeisiä virhekäsitysten korjaamisessa. Sen sijaan, että virheet näkyvät ainoastaan summatiivisina pistemenetyksinä, niitä voidaan hyödyntää keskustelun, itsearvioinnin ja vertaisarvioinnin lähtökohtana. Näin matematiikan oppiminen muuttuu mekaanisesta laskemisesta ajattelun kehittämiseksi, jossa virheet eivät ole epäonnistumisia, vaan portaita kohti syvempää ymmärrystä.

6.4 Jatkotutkimusaiheita

Tämän tutkimuksen tulokset avaavat useita mahdollisia jatkotutkimuksen suuntia. Yksi kiinnostava jatkotutkimusaihe olisi laajentaa analyysi useampiin ylioppilaskoe-tehtäviin ja eri vuosikertoihin. Näin voitaisiin tarkastella, ovatko havaitut virhekäsitykset pysyviä vai muuttuuko niiden luonne ajan kuluessa esimerkiksi opetussuunnitelmien tai digitaalisten työkalujen kehittyessä.

Toinen mahdollinen suunta olisi vertailla lyhyen ja pitkän matematiikan opiskelijoiden virheitä samoissa tehtävätyypeissä. Tämä voisi tuoda uutta tietoa siitä, miten matematiikan kurssivalinnat, opintojen määrä ja sisältöpainotukset vaikuttavat yhtälökäsityksen kehittymiseen.

Kolmanneksi olisi tärkeää tutkia interventioita, joiden tavoitteena on virhekäsitysten tietoinen käsittely opetuksessa. Esimerkiksi opetuskokeilu, jossa virheanalyysi ja sanallisten tehtävien mallintaminen otetaan systemaattiseksi osaksi opetusta. Tälläinen voisi antaa tietoa siitä, miten opiskelijoiden ratkaisut muuttuvat ja vähenevätkö tietyntyyppiset virheet.

Lisäksi jatkotutkimuksessa voisi tarkastella tarkemmin digitaalisen ympäristön vaikutusta virheisiin, esimerkiksi analysoimalla opiskelijoiden tuottamia välivaiheita, luonnoksia ja teknologiankäytön jälkiä. Tällainen tutkimus syventäisi ymmärrystä siitä, miten teknologia muokkaa ratkaisustrategioita ja millaisia uusia virhetyyppejä se mahdollisesti tuottaa.

7 Lähteet

Booth, J, L, ja Koedinger, K, R. (2008). Key Misconceptions in Algebraic Problem Solving. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 30–36.

Hegarty, M, Mayer, R, E, ja Monk, C, A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*(1), 18–32. https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18

Holmlund, A. (2025). How numbers influence students when solving linear equations. *Mathematical Thinking and Learning*, *27*, 305–322. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2314067

Jamaludin, N, H, ja Maat, S, M. (2020). A Systematic Literature Review on Students' Misconceptions in Mathematics. *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences*, *10*(6), 127–145. https://doi.org/10.6007/IJARBSS/v10-i6/7273

Jupri, A, Drijvers, P, ja Heuvel-Panhuizen, M, V, D. (2014). *The impact of a technology-rich intervention on grade 7 students' skills in initial algebra* (tech. rep.). Utrecht University.

Marcus, S, ja Watt, S, M. (2012). What is an equation? *Proceedings - 14th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2012*, 23–29. https://doi.org/10.1109/SYNASC.2012.79

Mellone, M, Verschaffel, L, ja Dooren, W, V. (2014). Making sense of word problems: The effect of rewording and dyadic interaction. In P Liljedahl, C Nicol, S Oesterle, ja D Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 38)* (pp. 201–208). PME.

Michael, J. (2002). Misconceptions - What students think they know. https://doi.org/10.1152/advan.00047.2001

Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 – Matematiikka. Retrieved September 16, 2025, from https://eperusteet.opintopolku.fi/#/fi/perusopetus/419550/vuosiluokkakokonaisuus/428782/oppiaine/466344

Opetushallitus. (2019). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019 – Matematiikka. Retrieved September 16, 2025, from https://eperusteet.opintopolku.fi/#/fi/lukiokoulutus/6828810/14/oppiaine/6831746

Rittle-Johnson, B, Siegler, R, S, ja Alibali, M, W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Jour-*

nal of Educational Psychology, *93*, 346–362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Stephens, A, C, Mcneil, N, M, ja Alibali, M, W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Article in Journal for Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.2307/30034852

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. Falmer Press.

Yle. (2020). Matematiikan lyhyen oppimäärän yo-koe, syksy 2020. Retrieved October 6, 2025, from https://yle.fi/plus/abitreenit/2020/syksy/2020-09-22_N_fi/index.html

Yle. (2021). Matematiikan lyhyen oppimäärän yo-koe, kevät 2021. Retrieved October 6, 2025, from https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Kev%C3%A4t/2021-03-23_N_fi/index.html

Yle. (2022). Matematiikan lyhyen oppimäärän yo-koe, syksy 2022. Retrieved October 6, 2025, from https://yle.fi/plus/abitreenit/2022/Syksy/2022-09-20_N_fi/index.html

Ylioppilastutkintolautakunta. (2025). Matematiikka [Viitattu 10.11.2025]. https://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/tutkinnon-suorittaminen/tutkinnon-aineet/matematiikka