



EPÄYHTÄLÖT

Riikka Aakula

Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2009

MATEMATIIKAN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

AAKULA, RIIKKA: Epäyhtälöt
Pro gradu -tutkielma, 68 s., 2 liites.
Matematiikka
Huhtikuu 2009

Tutkielman aiheena on epäyhtälöt. Tarkoituksena on tarkastella erilaisia epäyhtälöitä havainnollistavien kuvien ja esimerkkien avulla. Teorian avulla yritetään löytää sopivia menetelmiä niiden ratkaisemiseen ja todistamiseen.

Aluksi perehdytään funktion analyttisiin ominaisuuksiin, joita voidaan usein hyödyntää tutkittaessa epäyhtälöitä. Tämän jälkeen keskitytään erityyppisten epäyhtälöiden tarkasteluun.

Polynomiepäyhtälöiden ratkaiseminen perustuu tavallisesti nollakohtien etsintään ja merkkitarkasteluun löydettyjen nollakohtien välillä. Muiden alkeellisten epäyhtälöiden, kuten rationaali-, itseisarvo-, juuri-, eksponentti- ja logaritmi-epäyhtälöt, tarkastelussa käytetään tilanteesta riippuen niille ominaisia ratkaisumenetelmiä. Äärellisten summien ja tulojen kohdalla voidaan todistus perustaa usein induktion varaan, tai summausjärjestyksen tai tulon tekijöiden järjestyksen vaihtamiseen. Näihin tarkasteluihin liittyvät läheisesti myös Bernoullin epäyhtälön avulla saadut tulokset.

Trigonometriset epäyhtälöt ovat laaja kokonaisuus, jossa on huomioitava erityisesti funktion ominaisuudet ja merkin muuttuminen. Integraaliepäyhtälöitä voidaan soveltaa monissa matemaattisissa ongelmissa ja myös niiden kohdalla funktion analyttisten ominaisuuksien huomioiminen on tärkeää. Klassisiin epäyhtälöihin liittyvät erilaiset keskiarvoepäyhtälöt, sekä useita eri henkilöiden mukaan nimettyjä epäyhtälöitä, joista tässä yhteydessä tarkastellaan Jensenin ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöitä.

Näitä tutkielman aiheita voisi sopivasti käyttää esimerkiksi lukion kurssimateriaalina, sillä mukana on runsaasti aiheisiin liittyviä harjoitustehtäviä sekä vanhoja ylioppilaskoetehtäviä malliratkaisuineen.

Asiasanat: epäyhtälöt, jatkuvuus.

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia	3
2.1	Raja-arvo	3
2.2	Jatkuvuus, nollakohdat ja merkkitarkastelu	5
2.3	Differentiaalilaskennan väliarvolause	8
2.4	Monotonisuus	10
2.5	L'Hospitalin monotoniasääntö	12
2.6	Harjoitustehtävät 1	13
3	Polynomiepäyhtälöt	15
3.1	Ensimmäisen asteen tapaus	15
3.2	Toisen asteen tapaus	15
3.3	Korkeamman asteen tapaus	16
3.4	Harjoitustehtävät 2	18
4	Muita alkeellisia epäyhtälöitä	19
4.1	Rationaaliepäyhtälöt	19
4.2	Itseisarvoepäyhtälöt	20
4.3	Juuri-, eksponentti- ja logaritmi-epäyhtälöt	22
4.4	Äärelliset summat ja tulot epäyhtälöissä	24
4.5	Bernoullin epäyhtälö	25
4.6	Harjoitustehtävät 3	27
5	Trigonometriset epäyhtälöt	29
5.1	Trigonometrinen epäyhtälöiden ominaisuuksia	29
5.2	Jordanin epäyhtälö	33
5.3	Muita trigonometrisiä epäyhtälöitä	36
5.4	Harjoitustehtävät 4	38
6	Integraaliepäyhtälöt	39
6.1	Integraaliepäyhtälöiden analyyttisiä ominaisuuksia	39
6.2	Youngin epäyhtälö	42

6.3	Harjoitustehtävät 5	44
7	Klassiset epäyhtälöt	45
7.1	Keskiarvoepäyhtälöt	45
7.2	Jensenin epäyhtälö	49
7.3	Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö	52
7.4	Harjoitustehtävät 6	53
8	Ylioppilaskoetehtäviä liittyen epäyhtälöihin	55
8.1	Tehtävät	55
8.2	Ratkaisut	56
9	Ratkaisut harjoitustehtäviin	59
	Kirjallisuutta	67
	Liitteet	
	1 Kuvien Mathematica-tiedostot	

1 Johdanto

Tutkielman tarkoituksena on perehtyä erilaisiin epäyhtälöihin tutustumalla niiden ratkaisemiseen ja todistamiseen liittyviin menetelmiin. Epäyhtälöllä tarkoitetaan tavallisesti kahden lausekkeen suuruusjärjestyksen vertailua. Niitä voidaan käyttää esimerkiksi matemaattiseen analyysiin ja optimointiin liittyvissä ongelmissa.

Tutkielma jakautuu yhdeksään lukuun. Näistä luvuissa 2-7 on käsitelty ensin kyseisiin epäyhtälöihin liittyvää teoriaa. Monet tutkielmassa käsiteltävistä aiheista pohjautuvat aiempaan kurssimonisteeseen [10]. Tässä teoksessa teoriaa on kuitenkin pyritty havainnollistamaan erilaisin kuvin ja esimerkein. Jokaisen teorialuvun loppuun on lisäksi laadittu muutamia harjoitustehtäviä käsiteltyyn aiheeseen liittyen ja sen teoriaan sekä esimerkkeihin pohjautuen. Näihin tehtäviin on kirjoitettu esimerkkivastaukset teoksen loppuun lukuun yhdeksän.

Luvussa kaksi tarkastellaan jatkuvien funktioiden eri ominaisuuksia, joita voidaan usein hyödyntää tutkittaessa epäyhtälöitä. Tässä yhteydessä käsitellään myös muutamia teoksissa [1], [2] ja [8] esiteltyjä analyysin perustuloksia, joita voidaan monesti käyttää apuna myöhemmissä epäyhtälöiden tarkasteluissa.

Luvussa kolme käsitellään polynomiepäyhtälöitä. Tässä lähdetään liikkeelle ensimmäisen ja toisen asteen tapauksista, jotka molemmat on käsitelty omana osanaan. Näiden lisäksi tarkastellaan myös korkeamman asteen polynomiepäyhtälöiden ratkaisemista.

Luvussa neljä tarkastellaan kootusti erilaisia alkeellisia epäyhtälöitä. Tähän liittyen mukana on esimerkiksi joitakin epäyhtälöissä esiintyviä äärellisiä summia ja tuloja. Lisäksi tässä yhteydessä keskitytään tarkemmin myös Bernoullin epäyhtälöön, joka on eräs klassista epäyhtälöistä.

Luvussa viisi käsitellään laajasti erilaisia trigonometrisia epäyhtälöitä. Perusteet näille löytyvät pääosin teoksesta [14]. Toisaalta tässä luvussa on keskitytty erityisesti Jordanin epäyhtälöön ja sen avulla on tarkasteltu joitakin hyperbolisia epäyhtälöitä. Näihin liittyen on paljon lisätietoa teoksissa [5] ja [9].

Luvussa kuusi tarkastellaan aluksi integraaliepäyhtälöiden ominaisuuksia ja esitetään näiden tueksi joitakin analyysin perustuloksia integraaleihin liittyen. Tämän lisäksi syvennytään tarkastelemaan erityisesti Youngin epäyhtälöä ja siihen liittyviä esimerkkejä.

Luku seitsemän käsittelee muutamia klassisia epäyhtälöitä, kuten keskiarvoepäyhtälöt sekä Jensenin ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöt. Näiden osalta tarkastelua voisi laajentaa vielä useisiin muihin tunnettuihin epäyhtälöihin.

Lukuun kahdeksan on koottu muutamia vuosien 2001-2007 ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan kokeen kysymyksiä, jotka liittyvät läheisesti jatkuvuuteen ja epäyhtälöihin. Näihin on myös esitetty samassa yhteydessä esimerkkivastaukset.

Tutkielman lopussa on vielä liite, johon on koottu Mathematica-ohjelmistolla laadittujen kuvien syötelistaukset.

Tutkielma käsittelee epäyhtälöihin liittyvää teoriaa varsin eri tasoilla lähtien liikkeelle melko perusteista. Mukana on myös haastavampiakin osioita. Tarkoituksena olisi, että tutkielmaa voisi käyttää materiaalina esimerkiksi lukion pitkän matematiikan syventävillä kursseilla.

2 Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia

Epäyhtälöiden todistaminen voi perustua moniin funktion eri ominaisuuksiin, kuten jatkuvuuteen, derivoituvuuteen, nollakohtiin, ääriarvoihin, kasvavuuteen tai vähenevyyteen ja niin edelleen. Tarkastellaan aluksi joitakin näihin liittyviä tuloksia, joita voidaan myöhemmin hyödyntää tutkittaessa erilaisia epäyhtälöitä.

Työssä tarkastellaan funktioita $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, missä $A \subset \mathbf{R}$. Jos määrittelyjoukkoa A ei ole annettu oletetaan, että A on mahdollisimman suuri joukko. Tällöin esimerkiksi poikkeuspisteet, kuten rationaalifunktioiden nimittäjän nollakohdat, eivät kuulu määrittelyalueeseen ja niitä ei tarkastella. Tavallisessa tapauksessa määrittelyjoukko on väli tai välien yhdiste.

2.1 Raja-arvo

Raja-arvoa käytetään tavallisesti määrittämään jatkuvuutta, derivoituvuutta ja integroituvuutta. Tässä tarkasteltavat funktiot ovat yhden muuttujan reaalfunktioita. Raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä, kun sen muuttuja lähestyy tiettyä pistettä tai ääretöntä. Kun x lähestyy lukua x_0 , sanotaan lukua L funktion f raja-arvoksi, jos funktion arvo $f(x)$ voidaan saada kuinka lähelle lukua L tahansa valitsemalla muuttujan arvo x riittävän läheltä lukua x_0 , mutta tästä kuitenkin eroavaksi. Tämä asia on esitetty alla täsmällisesti.

Määritelmä 2.1. Olkoon funktio f määritelty pisteen x_0 ympäristössä, pistettä x_0 mahdollisesti lukuun ottamatta. Funktiolla f on *raja-arvo* L pisteessä x_0 , jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{aina, kun} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ tai $f(x) \rightarrow L$, kun $x \rightarrow x_0$.

Geometrisesti raja-arvoehto merkitsee, että x :n saadessa arvoja väliltä $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pistettä x_0 lukuun ottamatta, funktion f kuvaaja kulkee suorien $y = L - \epsilon$ ja $y = L + \epsilon$ välissä. Funktion mahdollinen määrittely pisteessä x_0 ei vaikuta raja-arvoon. Siinä tapauksessa, jos raja-arvo on olemassa, se on yksikäsitteinen, joten funktiolla f on pisteessä x_0 korkeintaan yksi raja-arvo.

Esimerkki 2.1. Osoitetaan, että $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Ratk. Olkoon $\epsilon > 0$. Funktiolla x^2 on raja-arvo 4 pisteessä 2, sillä

$$|x^2 - 4| = |x + 2||x - 2| < 5 \cdot |x - 2| < \epsilon, \quad \text{kun} \quad 0 < |x - 2| < \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{5} \right\}.$$

Tässä ensimmäinen epäyhtälö seuraa siitä, että $3 < x + 2 < 5$, kun $|x - 2| < 1$, mikä on voimassa valitsemalla $\delta \leq 1$. Nyt deltaksi voidaan valita $\min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$.

Raja-arvon käsite voidaan laajentaa koskemaan seuraavia tapauksia.

Määritelmä 2.2. Funktiolla $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on pisteessä $x_0 \in (a, b)$ *vasemmanpuoleinen raja-arvo* L , jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{aina, kun} \quad x_0 - \delta < x < x_0,$$

ja *oikeanpuoleinen raja-arvo* L , jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{aina, kun} \quad x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Tällöin merkitään vastaavasti $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ tai $f(x) \rightarrow L$, kun $x \rightarrow x_0^-$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ tai $f(x) \rightarrow L$, kun $x \rightarrow x_0^+$.

Edellisen määritelmän mukaisia raja-arvoja sanotaan *toispuoleisiksi* raja-arvoiksi. Tässä tapauksessa on selvää, että

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Raja-arvon käsite voidaan laajentaa myös tapauksiin $x_0 = \pm\infty$ ja/tai $L = \pm\infty$. Lisäksi toispuoleinen raja-arvo voitaisiin laajentaa tapauksiin $L = \pm\infty$.

On syytä huomata, että yleensä raja-arvon ei tarvitse olla olemassa. Esimerkiksi funktiolla $g : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = 0$, kun $x \leq 0$ ja $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, kun $x > 0$, on vasemmanpuoleinen raja-arvo origossa, mutta ei oikeanpuoleista raja-arvoa.

2.2 Jatkuvuus, nollakohdat ja merkkitarkastelu

Avoimella välillä määritellyn funktion voidaan ajatella olevan jatkuva, jos sen arvot eivät muutu äkillisesti missään sen määrittelyjoukon pisteiden ympäristössä. Pitää kuitenkin huomata tilanne, jossa määrittelyjoukkona on välien yhdiste, kuten kuvassa 1. Geometrisesti ajateltuna reaalfunktio on jatkuva, jos sen kuvaaja on yhtenäinen, katkeamaton käyrä määrittelyalueessaan. Jatkuvuudelle voidaan esittää seuraava täsmällinen määritelmä.

Määritelmä 2.3. Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukon pisteessään. Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in (a, b)$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{aina, kun} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Jatkuvuus tarkoittaa siis sitä, että olipa $\epsilon > 0$ miten pieni hyvänsä, niin funktion f kuvaaja kulkee suorien $y = f(x_0) - \epsilon$ ja $y = f(x_0) + \epsilon$ välissä pisteen x_0 läheisyydessä. Luku δ riippuu paitsi funktiosta f , myös pisteestä x_0 ja erityisesti luvusta ϵ .

Esimerkki 2.2. Näytetään, että itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ on jatkuva koko \mathbf{R} :ssa.

Ratk. Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

Valitaan $\delta = \epsilon$, jolloin pätee $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, mikäli $|x - x_0| < \delta$.

Jos funktio ei ole jatkuva jossain määrittelyjoukkonsa pisteessä, niin funktion sanotaan olevan *epäjatkuva* kyseisessä pisteessä. Tällöin funktion kuvaaja katkeaa jossakin määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Jatkuvuudelle saadaan myös vaihtoehtoinen määritelmä raja-arvoa käyttämällä.

Määritelmä 2.4. Funktiota $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sanotaan jatkuvaksi pisteessä $x_0 \in (a, b)$, jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tämän mukaan jatkuvuuteen sisältyy siis kolme vaatimusta. Ensinnäkin funktion f on oltava määritelty pisteessä x_0 , eli $f(x_0)$ on olemassa. Toiseksi $f(x)$:llä on äärellinen raja-arvo, kun $x \rightarrow x_0$. Kolmanneksi varsinaisesti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Jos funktio f on määritelty pisteessä x_0 , mutta ainakin toinen jälkimmäisistä ehdoista ei ole voimassa, funktio f on epäjatkuva pisteessä x_0 . Epäjatkuvuuskohtaa x_0 , jossa $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ on äärellisenä olemassa, sanotaan *poistuvaksi*. Tällaisessa kohdassa funktio muuttuu jatkuvaksi, jos sen määrittelyä muutetaan asettamalla $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Määritelmä 2.5. Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on *vasemmalta jatkuva* pisteessä $x_0 \in (a, b)$, jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

ja vastaavasti *oikealta jatkuva* pisteessä $x_0 \in (a, b)$, jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Määritelmistä 2.4 ja 2.5 sekä toispuoleisten raja-arvojen ominaisuuksista saadaan seuraava tulos.

Lemma 2.1. *Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva pisteessä $x_0 \in (a, b)$ silloin ja vain silloin kun se on tässä pisteessä sekä vasemmalta että oikealta jatkuva, eli vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat samat.*

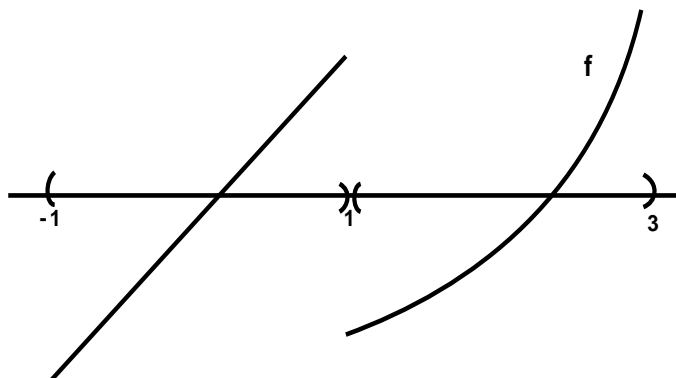
Jatkuvuus jollakin välillä tarkoittaa, että funktio on jatkuva jokaisessa välin pisteessä sekä suljetun välin ollessa kyseessä, toispuoleisesti jatkuva välin päätepisteissä. Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan.

Esimerkki 2.3. Tarkastellaan funktioita

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ja} \quad f_2(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Kumpikaan näistä ei ole määritelty, kun $x = 0$. Molemmat funktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funktion $f_1(x)$ määrittelyjoukkoa ei voida laajentaa siten, että tuloksena oleva uusi funktio olisi jatkuva koko reaalityönteiden joukossa, sillä millään funktion arvolla pisteessä $x = 0$ funktio ei ole jatkuva. Funktio $f_2(x)$ voidaan puolestaan laajentaa jatkuvaksi koko reaalityönteiden alueella määrittelemällä raja-arvon perusteella $f_2(0) = 1$.

Kuva 1: Funktio on jatkuva määrittelyjoukossaan: $(-1, 1)$ ja $(1, 3)$.



Määrittelyjoukon laajentamista on tarkasteltava aina tapauskohtaisesti. Esimerkiksi kuvan 1 funktiota ei voida määritellä pisteessä 1 siten, että tuloksena oleva uusi funktio tulisi jatkuvaksi koko välillä $(-1, 3)$.

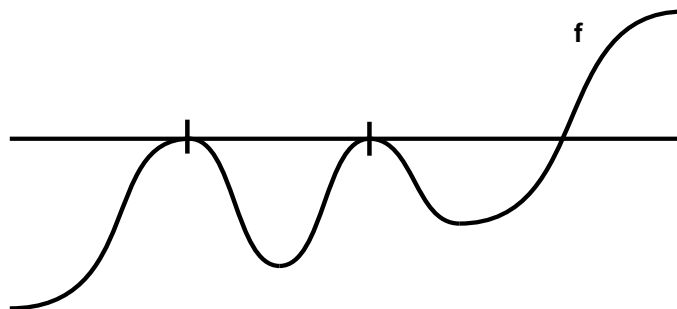
Jatkovaa funktiota sanotaan +-merkkiseksi, kun se saa positiivisia arvoja ja vastaavasti --merkkiseksi, kun se saa negatiivisia arvoja. Saadessaan arvon nolla, sillä ei ole merkkiä. Jatkuvan funktion merkkiä tarkasteltaessa on ensinnäkin huomioitava nollakohtiin liittyvät perustulokset.

Lemma 2.2 (Bolzanon lause). *Jos funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja $f(a)f(b) < 0$, niin on olemassa sellainen luku $c \in (a, b)$, että $f(c) = 0$.*

Tämän mukaan suljetulla välillä jatkuva funktio ei voi vaihtaa merkkiään käymättä välillä nollassa. Geometrisesti tulkittuna tämä tarkoittaa sitä, että jatkuvan funktion kuvaaja ei voi kulkea x -akselin puolelta toiselle leikkaamatta välillä tätä akselia ainakin yhdessä pisteessä. Jatkuva funktio voi vaihtaa merkkinsä ainoastaan nollakohtaa ohitettaessa. Näin ei välttämättä kuitenkaan aina käy, jos nollakohta on funktion lokaalinen (tai globaalinen) maksimi tai minimi.

Funktion merkin tarkastelussa kannattaa usein käyttää merkkikaaviota. Merkkikaaviossa on taulukko, jossa lukualue on jaettu funktion nollakohtien kohdilta osiin. Tähän taulukkoon merkitään riveittäin kunkin termin kerroin

Kuva 2: Funktion merkki ei muutu kahta ensimmäistä nollakohtaa ohitettaessa.



kussakin alueessa. Funktion koostuessa tulotermeistä koko funktion merkki muodostuu tulo tekijöiden merkkisäännön avulla: jos negatiivisia merkkejä on parillinen määrä, tulo on positiivinen ja jos merkkejä on pariton määrä, tulo on negatiivinen. Samaan tapaan merkkikaaviota voidaan soveltaa myös osamäärän kohdalla. Osoittajan ja nimittäjän kohdalla pätee tällöin osamäärän merkkisääntö.

Esimerkki 2.4. Tarkastellaan funktion $f(x) = (x + 3)(x^2 - 6)$ merkkiä eri nollakohtien välillä merkkikaavion avulla. Funktio saa arvon nolla kohdissa $x = -3$, $-\sqrt{6}$ ja $\sqrt{6}$.

	-3	- $\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$				
$x + 3$	-		+		+		+
$x^2 - 6$	+		-		-		+
$f(x)$	-		-		-		+

Funktio f saa negatiivisia arvoja, kun $x < -3$ ja $-3 < x < \sqrt{6}$, sekä positiivisia arvoja, kun $x > \sqrt{6}$.

2.3 Differentiaalilaskennan väliarvolause

Jos jatkuva funktio on lisäksi derivoituva, niin voidaan käyttää seuraavia analyysin perustuloksia. Todistukset näihin aputuloksiin löytyvät teoksesta [8].

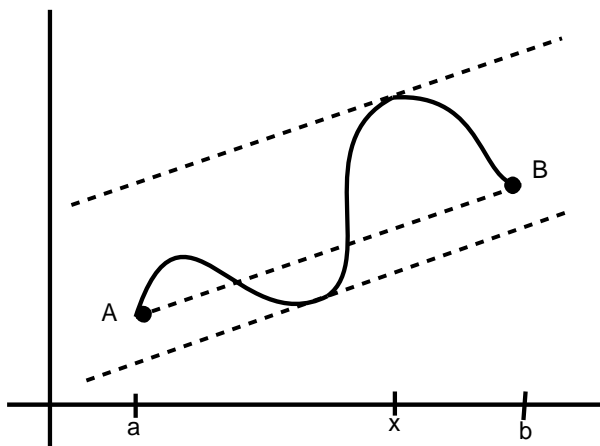
Lemma 2.3 (Rollen lause). *Olkoon funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a, b) . Jos $f(a) = f(b) = 0$, niin on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in (a, b)$, että $f'(\xi) = 0$.*

Rollen lause ilmaisee, että jatkuvan funktion kahden nollakohdan välissä sen derivaatalla on ainakin yksi nollakohta. Tämän avulla saadaan tarpeellinen väliarvolause.

Lemma 2.4 (Differensiaalilaskennan väliarvolause). *Jos funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a, b) , niin välillä (a, b) on ainakin yksi piste ξ , jolla*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Kuva 3: Differensiaalilaskennan väliarvolauseen geometrinen tulkinta.



Kuvassa 3 on esitetty geometrinen tulkinta väliarvolauseelle. Geometrisesti väliarvolause merkitsee, että käyrän $f(x) = y$ tangentti on jossakin välin $[a, b]$ pisteessä janan AB suuntainen.

Väliarvolause on käyttökelpoinen arvioitaessa funktion arvoa pisteessä $x = b$, kun arvo pisteessä $x = a$ tunnetaan. Väliarvolauseen mukainen kaava kirjoitetaan tällöin muotoon $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$, missä $\xi \in (a, b)$. Nyt tässä arvioidaan derivaattaa $f'(\xi)$.

Esimerkki 2.5. Osoitetaan, että a :n positiivisilla arvoilla

$$1 - \frac{1}{a} \leq \ln a \leq a - 1.$$

Ratk. Jos $a > 1$, lemmän 2.4 soveltaminen logaritmifunktioon antaa

$$\ln a - \ln 1 = \frac{1}{\xi}(a - 1),$$

jollain $\xi \in (1, a)$. Siis

$$1 - \frac{1}{a} < \ln a < a - 1, \quad a > 1.$$

Tapaus $0 < a < 1$ saadaan edellisestä sijoittamalla a :n paikalle $\frac{1}{a}$. Yhtäsuuruus epäyhtälössä on voimassa jos ja vain jos $a = 1$.

2.4 Monotonisuus

Funktion *monotonisuus*, eli kasvavuus tai vähenevyys, on tärkeä matemaattinen käsite, joka ilmaisee miten funktion arvot muuttuvat, kun muuttujan arvot kasvavat.

Määritelmä 2.6. Funktio $f(x)$ on *kasvava* välillä I , jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ kaikilla } x_1, x_2 \in I,$$

ja *aidosti kasvava* välillä I , jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ kaikilla } x_1, x_2 \in I.$$

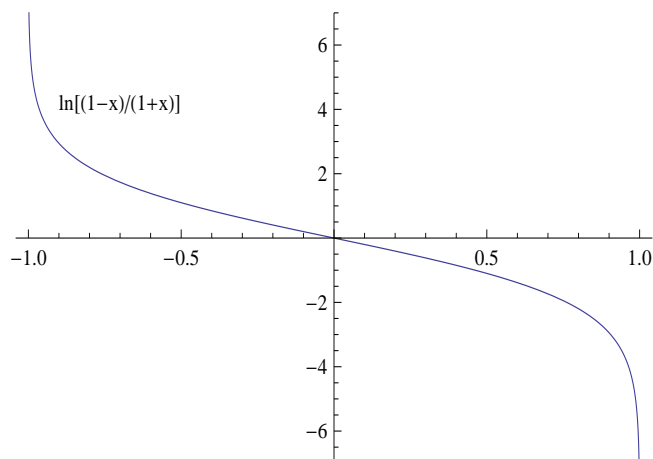
Vastaavasti määritellään *vähenevä* ja *aidosti vähenevä* funktio.

Esimerkki 2.6. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

on vähenevä välillä $-1 < x < 1$.

Kuva 4: Funktion $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ kuvaaja.



Ratk. Tarkastellaan funktiota osissa. Selvästi $f_1(x) = 1 - x$ on vähenevä ja $f_2(x) = 1 + x$ on kasvava funktio, joten näiden osamäärä on vähenevä. Luonnollinen logaritmi on puolestaan kasvava funktio, joten kokonaisuudessaan funktio $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ on vähenevä.

Derivoituvalle funktiolle pätee seuraava käyttökelpoinen ehto monotonisuuden tarkastelussa.

Lemma 2.5 (Monotonisuusehto). *Jos funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b) ja funktio toteuttaa ehdon $f'(x) \geq 0$, niin $f(x)$ on kasvava välillä $[a, b]$. Jos $f'(x) > 0$, niin $f(x)$ on aidosti kasvava. Vastaava tulos on voimassa funktion vähenevyyden ja derivaatan negatiivisuuden $f'(x) \leq 0$ välillä.*

Näin ollen voidaan tarkastella epäyhtälöitä, jotka ovat esimerkiksi muotoa

$$g(x) < h(x), \quad x > x_0,$$

missä $g(x_0) = h(x_0)$ ja funktioiden $g(x)$ ja $h(x)$ derivaatat on tunnettu. Epäyhtälön todistamiseksi riittää näyttää, että funktiolle

$$f(x) = h(x) - g(x),$$

missä $f(x_0) = 0$, pätee $f'(x) > 0$, kun $x > x_0$.

Esimerkki 2.7. Kun $x > 1$ ja $0 < r < 1$, niin

$$x^r \leq rx + (1 - r).$$

Ratk. Merkitään

$$f(x) = rx + (1 - r) - x^r,$$

jolloin

$$f'(x) = r - rx^{r-1} = r \left(1 - \frac{1}{x^{1-r}} \right).$$

Nyt $f'(x) > 0$, kun $x > 1$ ja siis $f(x)$ on tällöin kasvava. Koska $f(1) = 0$, niin $f(x) > 0$. Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $f(x) = 1$. Vastaavasti saadaan

$$x^r \geq rx + (1 - r),$$

kun $x > 1$ ja $r > 1$.

2.5 L'Hospitalin monotoniasääntö

Seuraava lause on käyttökelpoinen tarkasteltaessa kahden funktion suhdetta ja sen monotonisuutta. Todistus tähän tulokseen löytyy teoksesta [2].

Lause 2.6 (L'Hospitalin monotoniasääntö). *Olkoot reaaliarvoiset funktiot $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ja $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$ sekä derivoituvia avoimella välillä (a, b) , missä $f(a) = g(a) = 0$ tai $f(b) = g(b) = 0$. Oletetaan, että $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. Jos $f'(x)/g'(x)$ on kasvava (vähenevä) välillä (a, b) , niin myös funktio $f(x)/g(x)$ on kasvava (vähenevä) välillä (a, b) . Samalla tavalla $f(x)/g(x)$ on aidosti kasvava (vähenevä), jos $f'(x)/g'(x)$ on aidosti kasvava (vähenevä).*

Tämän mukaan osoitettaessa funktioiden suhteen monotonisuutta tietyllä välillä täytyy ensin näyttää, että yhdessä päätepisteessä saadaan muoto $0/0$. Tämän jälkeen derivoidaan osoittaja ja nimittäjä ja tarkastellaan niiden suhdetta uudelleen. Tässäkin on huomattava, että kyseisellä avoimella välillä nimittäjä $g'(x) \neq 0$.

Esimerkki 2.8. Osoitetaan, että funktio

$$h(x) = \frac{(1+x)^a - 1}{x}$$

on kasvava, kun $a > 1$ ja $x > -1$, $x \neq 0$.

Ratk. Merkitään $h(x) = f(x)/g(x)$, missä $f(x) = (1+x)^a - 1$ ja $g(x) = x$. Koska $f(0) = g(0) = 0$, voidaan soveltaa L'Hospitalin monotoniasääntöä. Nyt

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = a(1+x)^{a-1},$$

joka on kasvava, sillä sen derivaatta $a(a-1)(1+x)^{a-2} > 0$. Koska $f'(x)/g'(x)$ on kasvava, lauseen 2.6 mukaan funktio $h(x)$ on myös kasvava.

2.6 Harjoitustehtävät 1

1.1 Millä luvun x arvoilla funktio

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|+2x}$$

on määritelty? Entä missä joukossa se on jatkuva? Voidaanko määrittelyä täydentämällä funktio saada jatkuvaksi koko \mathbf{R} :ssä?

1.2 Käytä differentiaalilaskennan väliarvolausetta 2.4 ja osoita, että

$$(1+x)^a \leq 1 + ax(1+x)^{a-1},$$

kun $a > 1$ ja $x > -1$. Milloin yhtäsuuruus on voimassa epäyhtälössä?

1.3 Hyödynnä esimerkkiä 2.5 ja osoita, että

$$e^a \geq \left(\frac{ea}{x}\right)^x,$$

kun $a \geq x$ ja $x > 0$. Milloin yhtäsuuruus on voimassa epäyhtälössä?

1.4 Tarkastele funktiota

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

ja osoita, että $\pi^e < e^\pi$.

1.5 Osoita, että

$$\ln \frac{1+x}{1-x} > 2x,$$

kun $0 < x < 1$. Onko tulos voimassa myös, kun $-1 < x < 0$?

1.6 Osoita, että

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q},$$

kun $x > 0$, $x \neq 1$ ja $p > q > 0$.

3 Polynomiepäyhtälöt

Polynomiepäyhtälöiden ratkaiseminen perustuu tavallisesti nollakohtien etsimiseen ja merkkitarkasteluun näiden nollakohtien välillä.

3.1 Ensimmäisen asteen tapaus

Ensimmäisen asteen polynomiepäyhtälö on muotoa $ax + b > 0$, $a \neq 0$, missä merkin $>$ tilalla voi olla mikä tahansa muu epäyhtälömerkki. Ensimmäisen asteen epäyhtälö voidaan aina ratkaista yleisellä sieventämisperiaatteella.

Esimerkki 3.1. Ratkaistaan epäyhtälö

$$\frac{x - 3}{2} > \frac{5x + 4}{7}.$$

Kertomalla ensin nimittäjät pois päästään ekvivalenttiin muotoon

$$7x - 21 > 10x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad -3x > 29,$$

joten epäyhtälö toteutuu, kun $x < -3\frac{2}{3}$.

3.2 Toisen asteen tapaus

Toisen asteen epäyhtälö eli neliöepäyhtälö on muotoa $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$, missä merkin $>$ tilalla voi olla mikä tahansa muu epäyhtälömerkki. Toisen asteen epäyhtälön ratkaisu perustuu sen geometriseen tulkintaan. Yhtälön vasemmalla puolella olevan toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on tunnetusti paraabeli. Ratkaistaessa epäyhtälöä selvitetään ensin vastaavan paraabelin aukeamissuunta sekä paraabelin ja x -akselin leikkauskohdat ratkaisemalla vastaava toisen asteen yhtälö. Näiden tietojen perusteella päätellään lopullinen ratkaisu seuraavan lauseen mukaisesti.

Lause 3.1. *Funktio $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a > 0$ ($a < 0$), on positiivinen (negatiivinen) kaikilla x :n arvoilla, paitsi jos funktion nollakohdat x_1 ja x_2 , $x_1 \leq x_2$, ovat reaaliset. Tällöin funktio on positiivinen (negatiivinen), kun $x < x_1$ tai $x > x_2$, ja negatiivinen (positiivinen), kun $x_1 < x < x_2$.*

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan epäyhtälöä $2x^2 - 7x + 7 > 0$. Koska vasemman puolen nollakohdat ovat imaginaariset, niin se on lauseen 3.1 mukaan aina positiivinen ja toteutuu näin ollen kaikilla x :n arvoilla.

Esimerkki 3.3. Ratkaistaan yhtälö $4x^2 - 5x + 1 < 0$. Vasemman puolen nollakohdat ovat $x_1 = \frac{1}{4}$ ja $x_2 = 1$. Lauseen 3.1 mukaan epäyhtälö toteutuu, kun $\frac{1}{4} < x < 1$.

3.3 Korkeamman asteen tapaus

Korkeamman asteen epäyhtälö on muotoa $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 > 0$, missä merkin $>$ tilalla voi olla mikä tahansa epäyhtälömerkki ja $n \geq 3$, $a_n \neq 0$. Ratkaistaessa epäyhtälö saatetaan ensin muotoon, jossa vasemmalla puolella on polynomilauseke tekijöihin jaettuna ja oikealla puolella nolla. Toiseksi on tutkittava eri tekijöiden merkit reaalityöalueella. Näiden perusteella laaditaan merkkikaavio, jossa tulon tekijöiden merkkisääntöä soveltamalla voidaan päätellä missä alueissa epäyhtälö toteutuu.

Esimerkki 3.4. Ratkaistaan kolmannen asteen epäyhtälö $3x^3 - 4x^2 - x + 2 < 0$. Polynomi voidaan jakaa tekijöihin $3x^3 - 4x^2 - x + 2 = (x - 1)^2(3x + 2)$. Tilannetta vastaa alla oleva merkkikaavio.

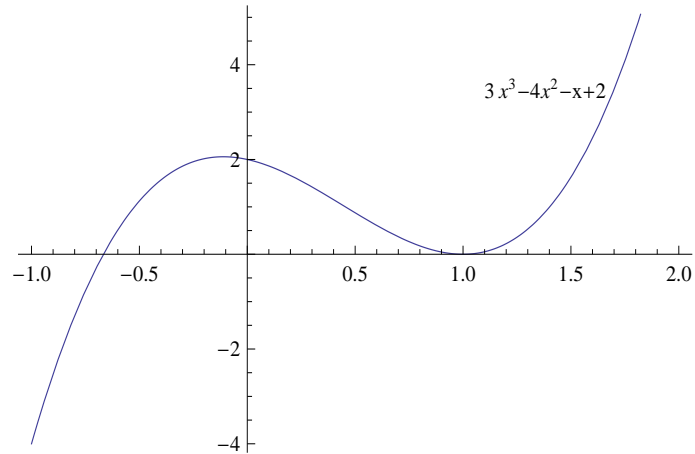
$$\begin{array}{cccc} & & -\frac{2}{3} & 1 \\ & & | & | \\ (x-1)^2 & + & | & + \\ \hline 3x+2 & - & | & + \\ \hline & & - & | & + \end{array}$$

Sen avulla päätellään, että epäyhtälö toteutuu, kun $x < -\frac{2}{3}$.

Viereisen sivun ylemmässä kuvassa 5 on esitetty esimerkkiin 3.4 liittyvä kuvaaja.

Esimerkki 3.5. Tarkastellaan neljännen asteen epäyhtälöä $x^4 - 5x^2 > 0$. Merkitään funktiolla $f(x) = x^4 - 5x^2$ yhtälön vasenta puolta, joka voidaan jakaa toisen asteen tekijöihinsä $f(x) = x^4 - 5x^2 = x^2(x^2 - 5)$. Funktion nollakohdat ovat $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = \sqrt{5}$. Termi x^2 on kaikkialla

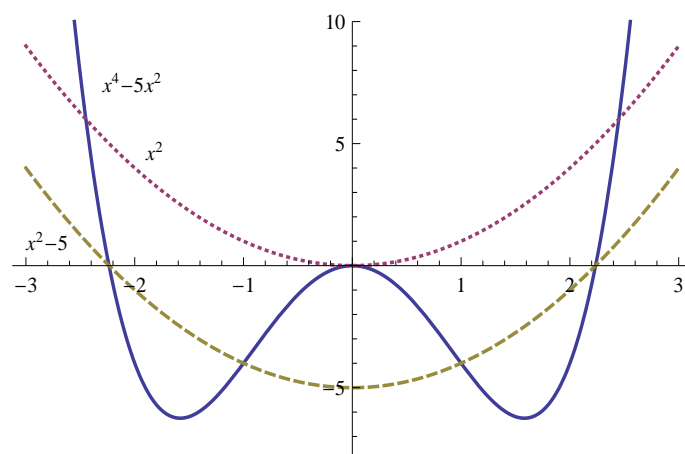
Kuva 5: Esimerkin 3.4 kuvaaja.



ei-negatiivinen ja funktion arvo sivuaa nollaa ohitettaessa nollakohtaa x_2 , mutta sen merkki ei kuitenkaan muutu siinä. Siis epäyhtälö toteutuu, kun $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$.

Alla kuvassa 6 ylempi pisteiviiva vastaa käyrää x^2 ja alempi katkoviiva käyrää $x^2 - 5$. Yhtenäinen viiva puolestaan esittää näiden tuloa eli $x^4 - 5x^2$.

Kuva 6: Esimerkin 3.5 kuvaajat.



3.4 Harjoitustehtävät 2

2.1 Ratkaise epäyhtälö $2x^2 + 13x - 7 > 0$.

2.2 Ratkaise epäyhtälö $5x^3 + 17x^2 + 8x - 12 > 0$.

2.3 Ratkaise epäyhtälö $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x < 0$.

4 Muita alkeellisia epäyhtälöitä

4.1 Rationaaliepäyhtälöt

Rationaalifunktioiden epäyhtälöitä ratkaistaessa on syytä ensin selvittää määrittelyjoukko. Toiseksi on huomattava, ettei nimittäjiä saa kertoa puollittain epäyhtälöstä pois ottamatta niiden merkkiä huomioon. Tämä siksi, että epäyhtälön suuntahan muuttuu negatiivisella luvulla kerrottaessa. Nimittäjän poistaminen vaatisi aina lisätarkasteluja nimittäjän käyttäytymisestä. Tästä syystä usein on yksinkertaisinta siirtää kaikki epäyhtälön termit samalle puolelle ja tutkia erikseen osoittajan ja nimittäjän merkkiä. Tässä yhteydessä merkkikaavio on taas tavallisesti varsin toimiva apukeino. Ratkaisu päätellään näiden tietojen perusteella osamäärän merkkisääntöä käyttämällä. Erityistä huolellisuutta tarkastelussa vaativat nimittäjän nollakohdat, joissa rationaalifunktion ei tarvitse olla määritelty ja joita sivuutettaessa funktion merkki voi vaihtua.

Esimerkki 4.1. Ratkaistaan epäyhtälö

$$\frac{x+1}{x} < \frac{x}{x-3}.$$

Ratk. Tämä on ekvivalentti epäyhtälön

$$\frac{-2x-3}{x^2-3x} < 0$$

kanssa. Osoittajan nollakohta on $x = -3/2$ ja nimittäjän nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 3$. Osoittajan ja nimittäjän merkit eri nollakohtien välillä on esitetty alla olevassa merkkikaaviossa.

	-3/2	0	3	
-2x - 3	+	-	-	-
x ² - 3x	+	+	-	+
	+	-	+	-

Tämän perusteella voidaan helposti päätellä, että epäyhtälö toteutuu, kun $-3/2 < x < 0$ tai $x > 3$.

4.2 Itseisarvoepäyhtälöt

Käsiteltäessä itseisarvoepäyhtälöitä perinteinen ratkaisumenetelmä on poistaa itseisarvomerkki itseisarvon määritelmään perustuen. Reaaliluvun x itseisarvo on

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Nyt päästään tarkastelemaan eri osavälejä, joiden perusteella yhdistetään koko ratkaisu. Toisaalta ratkaisuun voidaan soveltaa myös tietoa $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ tai sen negaatiota $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ tai $x \geq a$. Lisäksi usein käyttökelpoinen tapa on neliöön korottaminen: $|x| \leq |y|$ jos ja vain jos $x^2 \leq y^2$. Näitä ratkaisutapoja on sovellettu alla olevissa kahdessa esimerkissä.

Esimerkki 4.2. Millä x :n arvoilla on voimassa epäyhtälö

$$|x^2 - 3| - |4 - 2x| < 3x - 1?$$

Ratk. Tässä $x^2 - 3 < 0$, kun $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ ja $4 - 2x < 0$, kun $x > 2$. Väleillä $x \leq -\sqrt{3}$ ja $\sqrt{3} \leq x \leq 2$ epäyhtälöstä voidaan poistaa itseisarvomerkki suoraan ja päästään toisen asteen epäyhtälöön $x^2 - x - 6 < 0$. Tästä saadaan osaratkaisut $-2 < x \leq -\sqrt{3}$ ja $\sqrt{3} \leq x \leq 2$. Välillä $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ päädytään epäyhtälöön

$$-x^2 + 3 - 4 + 2x < 3x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - x < 0,$$

josta saadaan osaratkaisut $-\sqrt{3} < x < -1$ ja $0 < x < \sqrt{3}$. Välillä $x > 2$ epäyhtälöstä päästään muotoon

$$x^2 - 3 + 4 - 2x < 3x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 2 < 0,$$

josta saadaan vastaavasti osaratkaisu $2 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. Yhdistämällä kaikki viisi osaratkaisua saadaan vastaus kysymykseen, eli epäyhtälö on voimassa, kun $-2 < x < -1$ tai $0 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

Esimerkki 4.3. Millä x :n arvoilla on voimassa epäyhtälö

$$\left| \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 - 9x + 8} \right| < 1?$$

Ratk. Korotetaan epäyhtälö puolittain neliöön, jolloin saadaan

$$\frac{(3x^2 + 2x - 5)^2}{(x^2 - 9x + 8)^2} < 1.$$

Tästä päästään ekvivalenttiin muotoon

$$\frac{(3x^2 + 2x - 5)^2 - (x^2 - 9x + 8)^2}{(x^2 - 9x + 8)^2} < 0.$$

Nimittäjä on nyt kaikkialla positiivinen, joten se ei vaikuta epäyhtälön tarkasteluun. Epäyhtälö toteutuu siis vain, kun osoittaja on negatiivinen. Jakamalla osoittaja tekijöihin tarkasteltavaksi jää

$$(x - 1)^2(2x + 13)(4x - 3) < 0.$$

Käyttämällä lausetta 3.1 sekä tulon merkkisääntöä saadaan ratkaisuksi, että epäyhtälö toteutuu, kun $-\frac{13}{2} < x < \frac{3}{4}$.

Itseisarvoihin liittyvä perustulos on kolmioepäyhtälö, jonka todistus löytyy teoksesta [8].

Lause 4.1 (Kolmioepäyhtälö). *Jos $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, niin*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Soveltamalla induktiota jälkimmäiseen epäyhtälöön tästä saadaan

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

Tarkastellaan paria kolmioepäyhtälöön liittyvää esimerkkiä.

Esimerkki 4.4. Osoitetaan, että kaikille $a, b \in \mathbf{R}$ on voimassa

$$|a + b|^{1/2} \leq |a|^{1/2} + |b|^{1/2}.$$

Ratk. Koska molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, voidaan ne korottaa neliöön ja päästään ekvivalenttiin muotoon

$$|a + b| \leq |a| + |b| + 2|a|^{1/2}|b|^{1/2},$$

josta kolmioepäyhtälön avulla nähdään suoraan alkuperäisen epäyhtälön voimassaolo.

Esimerkki 4.5. Osoitetaan, että jos $|x - y| \leq 1$ ja $|u - v| \leq 1$, niin

$$|xv - yu| \leq |x| + |u|.$$

Ratk. Epäyhtälön vasenta puolta voidaan ensin muokata sopivasti. Käytämällä sitten kolmioepäyhtälöä sekä tietoa, että $|x - y| \leq 1$ ja $|u - v| \leq 1$ saadaan väite seuraavan päättelyketjun mukaisesti

$$\begin{aligned} |xv - yu| &= |xv - yu + xu - xu| = |x(v - u) + u(x - y)| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} |x(v - u)| + |u(x - y)| = |x| \underbrace{|v - u|}_{\leq 1} + |u| \underbrace{|x - y|}_{\leq 1} \\ &\leq |x| \cdot 1 + |u| \cdot 1 = |x| + |u|. \end{aligned}$$

4.3 Juuri-, eksponentti- ja logaritmiepäyhtälöt

Juuri-, eksponentti- ja logaritmiepäyhtälöitä ratkaistaan lähes samaan tapaan kuin vastaavia yhtälöitäkin ja näitä vastaavat laskusäännöt ovat monilta osin voimassa. Kuitenkin muutama yksityiskohta on otettava huomioon tässä yhteydessä.

Juuriepäyhtälöitä ratkaistaessa sovelletaan tavallisesti puolittaista potenssiin korottamista. Ero vastaavan epäyhtälön ratkaisemisessa on siinä, että epäyhtälön määrittelyjoukon ja potenssiinkorotusehdon tutkiminen on välttämätöntä. Pariton juuri on kuitenkin aina määritelty, joten se voidaan heti korottaa vastaavaan potenssiin. Parillisilla juurilla ratkaisu jakaantuu yleensä määrittelyjoukossa kahteen tapaukseen. Ensinnäkin jos epäyhtälön vasen ja oikeapuoli ovat erimerkkiset, epäyhtälön suunnasta riippuu, onko se kyseisillä muuttujan arvoilla tosi vai epätosi. Toinen vaihtoehto on, että molemmat puolet ovat positiivisia ja epäyhtälö voidaan näin ollen korottaa vastaavaan potenssiin. Osaratkaisu saadaan yhdistämällä ne muuttujan arvot, jotka samalla toteuttavat potenssiin korottamalla saadun epäyhtälön ja positiivisuusehdon. Kokonaisratkaisussa on aina otettava myös määrittelyjoukko huomioon.

Esimerkki 4.6. Ratkaistaan epäyhtälö

$$x > \sqrt[4]{(4x^2 + 1)}.$$

Ratk. Epäyhtälössä on parillinen juuri, jossa juurettava on kuitenkin aina positiivinen, joten se ei vaikuta tarkasteluun. Vasen puoli on positiivinen, kun $x > 0$. Tämän tarkastelun jälkeen voidaan yhtälö korottaa puolittain neljänteen potenssiin ja päästään muotoon

$$x^4 > 4x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4x^2 - 1 > 0.$$

Tälle neljännen asteen yhtälölle löydetään reaaliset nollakohdat pisteissä $x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ ja se on positiivinen, kun $x < -\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ tai $x > \sqrt{2 + \sqrt{5}}$. Yhdistämällä tämä ratkaisu esimerkin alussa tehdyn tarkastelun kanssa saadaan, että epäyhtälö pätee, kun $x > \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

Eksponenttiepäyhtälöitä ratkaistessa voidaan apuna käyttää seuraavia yhtäpitävyyksiä. Jos epäyhtälön molemmin puolin on sama kantaluku a , niin

$$a^x > a^y \quad \Leftrightarrow \quad x > y, \quad \text{kun } a > 1 \text{ ja}$$

$$a^x > a^y \quad \Leftrightarrow \quad x < y, \quad \text{kun } 0 < a < 1.$$

Jos kantaluvut ovat erit $a \neq b$, niin vaihtoehtona on ottaa puolittain logaritmi:

$$a^x > b^y \quad | \log() \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \log a > y \cdot \log b.$$

Esimerkki 4.7. Ratkaistaan epäyhtälö

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}.$$

Ratk. Tämä epäyhtälö on ekvivalentti muodon $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}$ kanssa. Nyt kantaluku on $\frac{1}{2}$, joten epäyhtälön merkin suunta kääntyy eksponentteja tarkasteltaessa, ja päästään toisen asteen epäyhtälöön $2x^2 - 3x + 1 < 0$. Tästä saadaan lauseen 3.1 mukaan ratkaisuksi $\frac{1}{2} < x < 1$.

Koska logaritmfunktio on kasvava, niin epäyhtälöitä ratkaistaessa voidaan aina käyttää tietoa

$$\log x > \log y \quad \Leftrightarrow \quad x > y.$$

4.4 Äärelliset summat ja tulot epäyhtälöissä

Tässä luvussa n kuuluu aina luonnollisten lukujen $\mathbf{N} = 1, 2, 3, \dots$ joukkoon. Perusmenetelmä luvusta n riippuvien väittämien todistamiseen on induktio. Näin on usein myös epäyhtälöiden kohdalla. Toinen huomattava apukeino on termien järjestyksen vaihtaminen. Äärellisessä summassa voidaan summausjärjestystä vaihtaa ja äärellisessä tulossa tulon tekijöitä voidaan järjestellä uudelleen. Kolmanneksi, jos summissa tai tuloissa esiintyy murtolausekkeita, voidaan osoittajaa ja/tai nimittäjää sopivasti arvioimalla saada erilaisia epäyhtälöitä.

Seuraavassa esimerkissä käytetään induktiota Weierstrassin erään epäyhtälön todistamiseen.

Esimerkki 4.8. Positiivisille reaali-luvuille a_1, \dots, a_n on voimassa epäyhtälö

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

Todistetaan väite induktiolla. Kun $n = 1$, yhtäsuuruus on voimassa. tehdään induktio-oletus, että väite pätee luvulla k eli

$$\prod_{i=1}^k (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i.$$

Yleisesti väitteen todistaa laskelma

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a_i) &= (1 + a_{k+1}) \prod_{i=1}^k (1 + a_i) = \prod_{i=1}^k (1 + a_i) + a_{k+1} \prod_{i=1}^k (1 + a_i) \\ &\geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} \underbrace{\prod_{i=1}^k (1 + a_i)}_{\geq 1} \geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i. \end{aligned}$$

Näytetään, miten tulon tekijöiden järjestyksen muuttaminen auttaa epäyhtälön todistuksessa.

Esimerkki 4.9. Kun $n > 2$, niin on voimassa

$$(n!)^2 > n^n.$$

Tarkastellaan vasemman puolen termiä, jossa

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= 1^2 \cdot 2^2 \cdots n^2 \\ &= (1 \cdot n)(2(n-1))(3(n-2)) \cdots (a(n-a+1)) \cdots (n \cdot 1).\end{aligned}$$

Jälkimmäinen muoto on saatu kirjoittamalla sulkulausekkeissa ensimmäinen tulon tekijä kasvavaan ja toinen tekijä vähenevään järjestykseen, jolloin kukin tekijä tulee edelleen kahteen kertaan koko lausekkeessa. Koska $-a(n-a+1) + n = (a-1)(a-n) \leq 0$, kun $1 \leq a \leq n$, niin jokainen tulon termi $a(n-a+1) > n$, kun $1 < a < n$. Termejä kerrotaan keskenään n kappaletta, joten väite on voimassa.

Seuraavassa esimerkissä on käytetty murtolausekkeisiin liittyvää yksinkertaista tietoa $1/(n+1) < 1/n$ ja $1/2n < 1/(n+k)$, kun $1 < k < n$.

Esimerkki 4.10. Kun $n \in \mathbf{N}$ ja $n > 1$, niin

$$\frac{1}{4n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n}.$$

Selvästi arvoltaan pienin termi on $1/(n+n)^2$ ja suurin termi $1/(n+1)^2$, joten laskemalla

$$\frac{1}{4n} = n \cdot \frac{1}{(n+n)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} < n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

nähdään esimerkin alussa esitetyn väitteen toteutuvan.

4.5 Bernoullin epäyhtälö

Tässä yhteydessä tarkasteltava Bernoullin epäyhtälö on eräs klassisista epäyhtälöistä. Yksinkertaisuudestaan huolimatta se on käyttökelpoinen tulos, jota voidaan hyödyntää esimerkiksi muiden epäyhtälöiden todistamisessa.

Lause 4.2 (Bernoullin epäyhtälö). *Jos $n \in \mathbf{N}$ ja $x \in \mathbf{R}$, $x \geq -1$, niin*

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \tag{1}$$

Yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $n = 1$ tai $x = 0$.

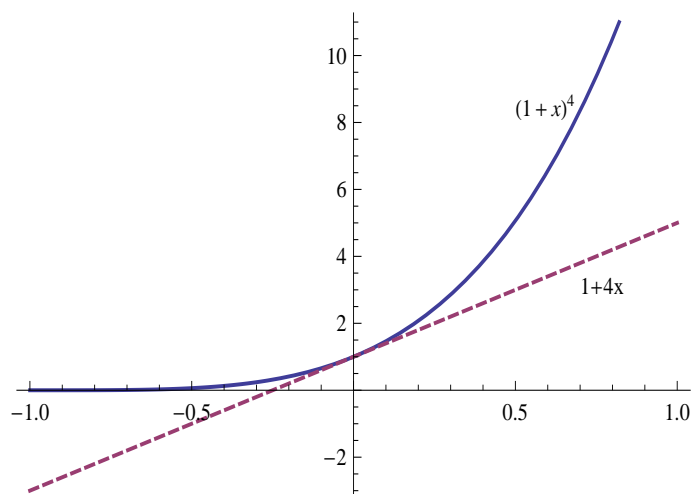
Todistus. Suoritetaan todistus induktiolla. Jos $n = 1$, niin yhtäsuuruus on voimassa. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee arvolla k eli $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, missä $k \geq 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)(1 + x)^k \stackrel{i.o.}{\geq} (1 + x)(1 + kx) \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x. \end{aligned}$$

Yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $kx^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ □

Alla olevassa kuvassa 7 on esitetty Bernoullin epäyhtälö tapauksessa $n = 4$. Yhtenäinen viiva vastaa käyrää $(1 + x)^4$ ja katkoviiva puolestaan kuvaa tilannetta $1 + 4x$.

Kuva 7: Bernoullin epäyhtälö tapauksessa $n = 4$.



Bernoullin epäyhtälön voidaan todistaa olevan voimassa myös yleisemmissä tapauksissa, esimerkiksi

$$(1 + x)^p \geq 1 + px, \quad \text{kaikilla } x \geq -1 \text{ ja } p \leq 0 \text{ tai } p \geq 1$$

ja

$$(1 + x)^p \leq 1 + px, \quad \text{kaikilla } x \geq -1 \text{ ja } 0 \leq p \leq 1.$$

Esimerkki 4.11. Sijoittamalla Bernoullin epäyhtälöön x :n paikalle $\frac{x}{n}$ ja antamalla n :n lähestyä ääretöntä saadaan, että $e^x \geq 1 + x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Tarkastellaan vielä Bernoullin epäyhtälön erästä yleistystä. Muita tämän-
tyyppisiä tuloksia on käsitelty teoksessa [6].

Lause 4.3. *Olkkoon $0 < a \leq 1 \leq b$ ja $c > 1$. Tällöin funktiolle $\varphi(t) = \max\{t^a, t^b\}$ on voimassa*

$$\log(1 + c\varphi(t)) \leq \begin{cases} c \log^a(1 + t), & \text{kun } 0 < t < 1 \\ bc \log(1 + t), & \text{kun } t \geq 1. \end{cases}$$

Todistus. Tarkastellaan ensin väitettä välillä $0 < t < 1$, jolloin

$$\begin{aligned} \log(1 + c\varphi(t)) &\leq \log(1 + ct^a) \leq \log(1 + t^a)^c \\ &= c \log(1 + t^a) \leq c \log^a(1 + t). \end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen epäyhtälö pätee, koska välillä $0 < t < 1$ on voimassa $t^a \geq t^b$. Toinen epäyhtälö seuraa suoraan Bernoullin epäyhtälöstä 4.2. Viimeinen epäyhtälö saadaan siitä, että kyseisellä välillä on voimassa $\log(1 + t^a) \leq \log^a(1 + t)$. Tarkastellaan sitten väitettä välillä $t \geq 1$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \log(1 + c\varphi(t)) &\leq \log(1 + ct^b) \leq \log(1 + t^b)^c = \\ &c \log(1 + t^b) \leq c \log(1 + t)^b = bc \log(1 + t). \end{aligned}$$

Tässä sekä ensimmäinen että viimeinen epäyhtälö ovat voimassa, koska $t \geq 1$ ja $b \geq 1$. Toinen epäyhtälö seuraa taas Bernoullin epäyhtälöstä 4.2. Kun $a = b = 1$, lauseen väitteen voimassaolo nähdään suoraan Bernoullin epäyhtälöstä 4.2. □

4.6 Harjoitustehtävät 3

3.1 Ratkaise epäyhtälö

$$\frac{2x - 3}{x} > \frac{2x}{x - 5}.$$

3.2 Ratkaise epäyhtälö $|x^2 - x| + 5x > 3$.

3.3 Ratkaise epäyhtälö

$$\left| \frac{4x^2 + 1}{x^2 - 8x + 7} \right| > 1.$$

3.4 Osoita, että $|a + b| \leq |a + c| + |b - c|$.

3.5 Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{3 + 2x - x^2} > 3x - 1$.

3.6 Oletetaan, että $n \in \mathbf{N}$ ja $n \geq 1$. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

3.7 Osoita, että

$$(n!)^2 < k!(2n - k!),$$

kun $n, k \in \mathbf{N}$ ja $k < n$.

5 Trigonometriset epäyhtälöt

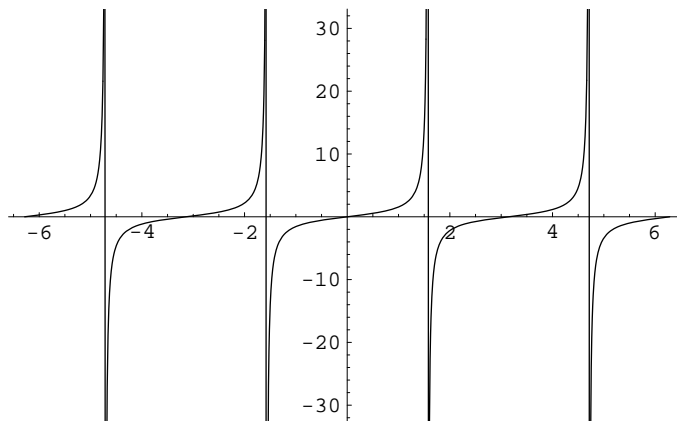
5.1 Trigonometrinen epäyhtälöiden ominaisuuksia

Käsiteltäessä trigonometrisia epäyhtälöitä on tietyt funktion ominaisuuteen liittyvät tosiasiat otettava huomioon, kuten funktion merkin muuttuminen. Jos $f(x)$ on jatkuva funktio, niin sen merkki voi muuttua vain x :n ohittaessa nollakohdan eli yhtälön $f(x) = 0$ juuren. Kahden peräkkäisen nollakohdan välillä funktion merkki pysyy samana, ja se saadaan selville laskemalla funktion arvo kyseisellä välillä olevalla x :n arvolla. Toisaalta funktion merkki voi muuttua ohitettaessa epäjatkuvuuskohta tai piste, jossa funktiota ei ole määritelty.

Tässä luvussa n kuuluu aina kokonaislukujen \mathbf{Z} joukkoon.

Esimerkki 5.1. Tutkitaan funktiota $f(x) = \tan x$. Sen nollakohdat ovat pisteissä $x = n \cdot \pi$. Lisäksi funktiota ei ole määritelty pisteissä $x = \pi/2 + n \cdot \pi$, jolloin funktion arvo lähestyy ääretöntä. Ohittaessaan nämä edellä mainitut pisteet funktion merkki muuttuu joka kerta.

Kuva 8: $\tan x$.



Edellä esitettyjä tietoja voidaan hyödyntää tutkittaessa ja ratkaistessa trigonometrisia epäyhtälöitä. Näiden lisäksi usein on käyttöä trigonometrinen yhtälöiden kaavoille, kuten summa- ja tuloaivoille sekä kaksin- ja

kolminkertaisia kulmia koskeville kaavoille. Näiden lisäksi yhtälöitä voidaan muokata myös muilla tavoin.

Koska

$$\sin \alpha = \frac{\sin(2 \cdot \frac{\alpha}{2})}{1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

ja

$$\cos \alpha = \frac{\cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2})}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}},$$

niin merkitsemällä $\tan \frac{\alpha}{2} = t$ saadaan α :n trigonometriset funktiot rationaalisina t :n funktioina:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad (2)$$

$$\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cot \alpha = \frac{1-t^2}{2t}. \quad (3)$$

Edellä esitettyjä merkintöjä käyttäen voidaan yhtälö sopivassa tilanteessa muuttaa algebralliseksi, jolloin puolestaan voidaan hyödyntää perinteisiä algebrallisia ratkaisumenetelmiä.

Esimerkki 5.2. Ratkaistaan epäyhtälö

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} < 1.$$

Tapa 1. Oletetaan, että $\sin x > -1$ ja kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\cos x - \sin x}{1 + \sin x} < 0.$$

Koska nyt nimittäjä on aina positiivinen, keskitytään osoittajan merkkitarkasteluun ja epäyhtälöön $\sin x + \cos x > 0$. Muunnetaan tätä epäyhtälöä palautus- sekä summien tulokaavojen avulla:

$$\begin{aligned} 0 < \sin x + \cos x &= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Tarkastellaan funktiota $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ja ratkaistaan nollakohdat yhtälöstä

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Tällöin saadaan

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi,$$

josta

$$x = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi + n \cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi. \end{cases}$$

Tarkastellaan funktion f arvoja eri väleillä. Koska funktio $\cos x$ on positiivinen välillä $-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, niin vastaavasti funktion f on positiivinen välillä $-\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$.

Tapa 2. Käyttämällä kaavan (2) merkintätapaa kirjoitetaan yhtälö algebralliseen muotoon

$$\frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} < 1.$$

Yhtälöä sieventämällä saadaan

$$\frac{t^2 - 2t - 1}{(t-1)^2} < 0.$$

Osoittajan nollakohdat ovat $t_1 = 1 - \sqrt{2}$ ja $t_2 = 1 + \sqrt{2}$, sekä nimittäjän nollakohta $t_3 = -1$. Osoittaja on negatiivinen välillä $1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2}$, nimittäjä puolestaan on kaikkialla positiivinen. Näin ollen alkuperäinen yhtälö saa negatiivisia arvoja välillä $1 - \sqrt{2} < \tan \frac{x}{2} < 1 + \sqrt{2}$, josta päästään samaan ratkaisuun $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ monikertoineen.

Esimerkki 5.3. Ratkaistaan epäyhtälö

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \cot 2x.$$

Tapa 1. Palautuskaavoja käyttämällä yhtälö saadaan muotoon

$$f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

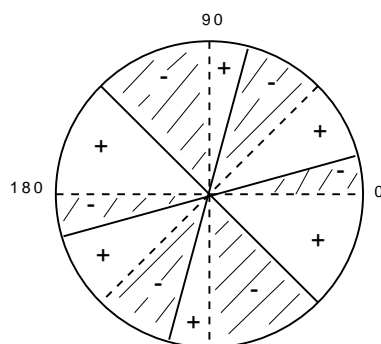
Funktion $f(x)$ nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 2x + n \cdot \pi,$$

joten $x_1 = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$. Lisäksi on otettava huomioon kohdat, joissa funktiota ei ole määritelty. Pisteissä $x_2 = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$ ja $x_3 = n \cdot \pi$ jompikumpi funktion f

yhteenlaskettavista tulee äärettömäksi ja $f(x)$:n merkki voi myös muuttua. Tangenttifunktio on aidosti kasvava kahden peräkkäisen äärettömyyskohtansa välillä. Täten x :n kasvaessa myös funktion f kumpikin yhteenlaskettava kasvaa ja itse funktio on aidosti kasvava peräkkäisten äärettömyyskohtien välillä. Tästä seuraa, että x :n ohittaessa nollakohtan funktion f merkki muuttuu $-$:sta $+$:ksi. Pisteissä, joissa funktiota f ei ole määritelty, toinen yhteenlaskettavista pysyy äärellisenä ja toinen muuttuu $+\infty$:stä $-\infty$:ään, joten itse funktion merkki muuttuu tällöin $+$:sta $-$:ksi. Näiden tulosten perus-

Kuva 9: Funktion merkin vaihtelu nolla- ja epäjatkuvuuskohtien välillä.



teella voidaan funktion merkin vaihtelua havainnollistaa kuvassa 9 esitetyllä tavalla, jossa nollakohtia vastaavien kulmien loppukyljet on merkitty yhtenäisellä viivalla ja äärettömyyskohtia vastaavien katkoviivalla. Tästä päästään epäyhtälön ratkaisuun, jossa

$$0 + n \cdot \pi < x < \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi, \quad \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi < x < \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$$

$$\text{tai} \quad \pi + n \cdot \pi < x < \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi.$$

Tapa 2. Käyttämällä kaksinkertaisten kulmien kaavaa alkuperäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} - \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x} < 0,$$

$$\frac{2 \tan x(1 + \tan x) - (1 - \tan x)(1 - \tan^2 x)}{(1 - \tan x) \tan x} < 0,$$

$$\frac{(\tan x + 1)(-\tan^2 x + 4 \tan x - 1)}{-\tan^2 x + \tan x} < 0.$$

Merkitsemällä $t = \tan x$, niin epäyhtälö saadaan algebralliseen muotoon

$$\frac{(t + 1)(t^2 - 4t + 1)}{t^2 - t} < 0.$$

Osoittajan nollakohdat ovat $t_1 = -1$, $t_2 = 2 - \sqrt{3}$ ja $t_3 = 2 + \sqrt{3}$, sekä nimittäjän nollakohdat $t_4 = 0$ ja $t_5 = 1$. Osoittajan ja nimittäjän merkki t :n eri arvoilla on esitetty merkkikaaviossa:

	t_1	t_4	t_2	t_5	t_3
$t + 1$	-		+		+
$t^2 - 4t + 1$	+		+		+
$t^2 - t$	+		+		+
	-		+		+

Epäyhtälö toteutuu, kun --merkkien lukumäärä on pariton, joten sen ratkaisu on

$$t < -1, \quad 0 < t < 2 - \sqrt{3}, \quad 1 < t < 2 + \sqrt{3}.$$

Lasketaan vielä näiden välien päätepisteitä vastaavat x :n arvot yhtälöstä $t = \tan x$ ja huomioidaan, että $\tan x$ on aidosti kasvava kyseisillä väleillä. Näin ollen päästään samaan ratkaisuun kuin edellä.

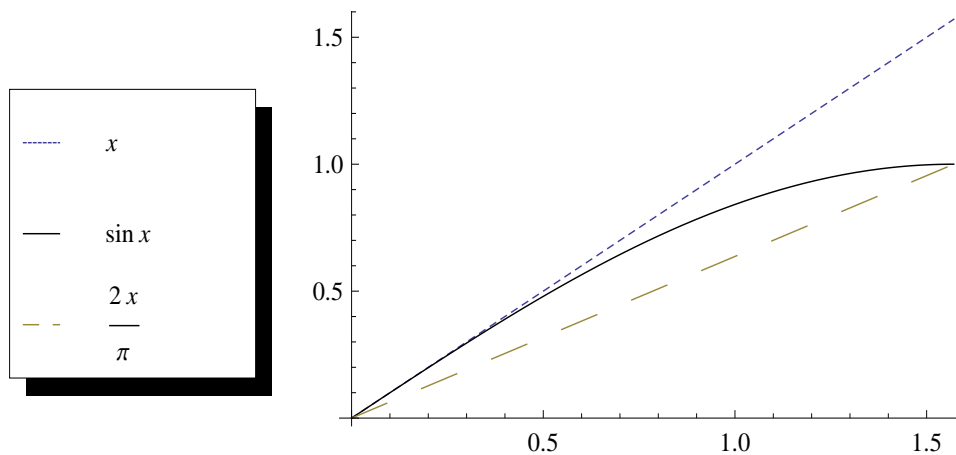
5.2 Jordanin epäyhtälö

Lause 5.1 (Jordanin epäyhtälö). *Välillä $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ on voimassa*

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x. \tag{4}$$

Todistus. Tarkastellaan funktiota $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ välillä $(0, \frac{\pi}{2}]$. Se laajenee välille $[0, \frac{\pi}{2}]$ määrittelemällä l'Hospitalin säännön perusteella $h(0) = 1$. Lisäksi $h(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$. Nyt $\frac{\sin x}{x}$ on muotoa $0/0$, kun $x = 0$. Soveltamalla nyt funktion $h(x)$ l'Hospitalin monotoniasääntöä 2.6 päästään muotoon $\frac{\cos x}{1}$. Tämä on aidosti vähenevä, josta päästään suoraan lauseen väitteeseen. \square

Kuva 10: Jordanin epäyhtälö.



Kuvassa 10 näkyy yhtenäisellä viivalla funktion $\sin x$ rajoittuminen Jordanin epäyhtälön mukaisesti. Tässä kuvassa ylempi katkoviiva merkitsee suoraa x ja alempi katkoviiva suoraa $\frac{2}{\pi}x$.

Esimerkki 5.4. Kosinille on välillä $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$ voimassa epäyhtälö

$$1 - \frac{2}{\pi}y \leq \cos y \leq \frac{\pi}{2} - y.$$

Sijoittamalla Jordanin epäyhtälössä kulmaksi $x = \frac{\pi}{2} - y$ tämä seuraa suoraan, sillä

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = 1 - \frac{2}{\pi}y \leq \underbrace{\sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right)}_{=\cos y} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Tarkastellaan vielä muutamaa hieman toisenlaista epäyhtälöä, joissa esiintyy hyperbolisia funktioita. Tässä esitetyt epäyhtälöt liittyvät läheisesti Jordanin epäyhtälöön. Sen mukaan $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, kun $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Tälle funktiolle voidaan löytää ylä- ja alarajat myös käyttämällä hyperbolisia trigonometrisia funktioita. Laajemmin näitä tuloksia on tarkasteltu teoksissa [5] ja [9].

Lause 5.2. Välillä $0 < x < \frac{\pi}{2}$ on voimassa

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}. \quad (5)$$

Todistus. Ensimmäinen epäyhtälö toteutuu, jos funktio $f(x) = \sin x \cosh x - x$ on positiivinen välillä $(0, \frac{\pi}{2})$. Derivoimalla funktio kertaalleen saadaan

$$f'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x - 1$$

ja edelleen

$$f''(x) = 2 \cos x \sinh x.$$

Koska $\cos x > 0$ ja $\sinh x > 0$, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, niin $f''(x) > 0$. Näin ollen funktio $f'(x)$ on kasvava kyseisellä välillä ja edelleen $f'(x) > f'(0) = 0$. Täten funktio $f(x)$ on kasvava ja $f(x) > f(0) = 0$. Siis ensimmäinen epäyhtälö on voimassa.

Vastaavasti jälkimmäinen epäyhtälö toteutuu, jos funktio $g(x) = x^2 - \sin x \sinh x$ on positiivinen välillä $(0, \frac{\pi}{2})$. Merkitään $h(x) = \tan x - \tanh x$. Koska kyseessä olevalla välillä $\cos x < 1 < \cosh x$, niin $h'(x) = \cosh^{-2} x - \cos^{-2} x < 0$ ja $h(x) > h(0) = 0$, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Nyt

$$g'''(x) = 2(\cos x \cosh x)h(x),$$

joka on positiivinen välillä $(0, \frac{\pi}{2})$, sillä tällä välillä $\cos x \cosh x > 0$ ja $h(x) > 0$. Näin ollen välillä $(0, \frac{\pi}{2})$

$$g''(x) = 2(1 - \cos x \cosh x) > g''(0) = 0$$

ja

$$g'(x) = 2x - \cos x \sinh x - \sin x \cosh x > g'(0) = 0.$$

Täten funktio $g(x)$ on kasvava ja $g(x) > g(0) = 0$. Siis jälkimmäinen epäyhtälö on myös voimassa. \square

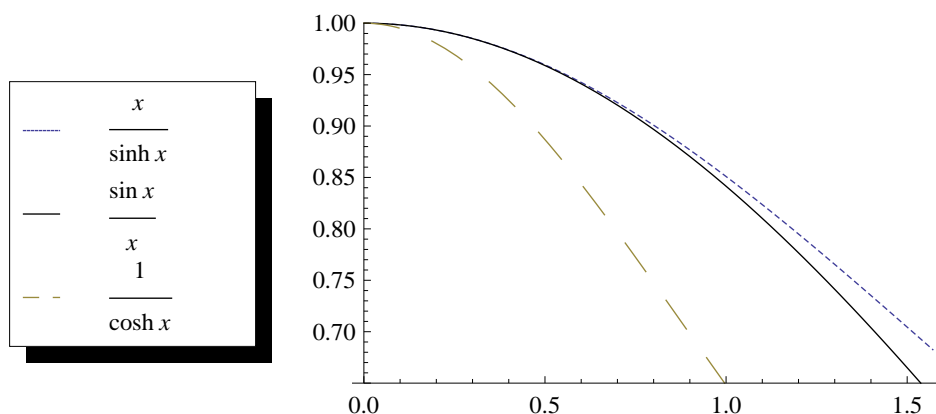
Seuraavan sivun kuvassa 11 näkyy yhtenäisellä viivalla funktion $\frac{\sin x}{x}$ rajoittuminen lauseen 5.2 mukaisesti. Alempi katkoviiva merkitsee funktiota $\frac{1}{\cosh x}$ ja ylempi katkoviiva funktiota $\frac{x}{\sinh x}$.

Seuraavan lauseen tarkastelussa käytetään teoksessa [5] esitettyä epäyhtälöä

$$\frac{1 + \cos x}{2} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2 + \cos x}{3}, \quad (6)$$

missä $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Kuva 11: Lauseen 5.2 epäyhtälöketjun funktioiden kuvaajat, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.



Lause 5.3. Välillä $0 < x < \frac{\pi}{2}$ on voimassa

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \frac{2x^2}{3\pi^2}. \quad (7)$$

Todistus. Käyttämällä tietoa $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ epäyhtälöön (6) päästään ekvivalenttiin muotoon

$$1 - \sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{3}.$$

Käyttämällä nyt Jordanin epäyhtälön tuloksia $\frac{x}{\pi} \leq \sin \frac{x}{2}$ ja $\sin \frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}$ päästään esitettyyn väitteeseen. \square

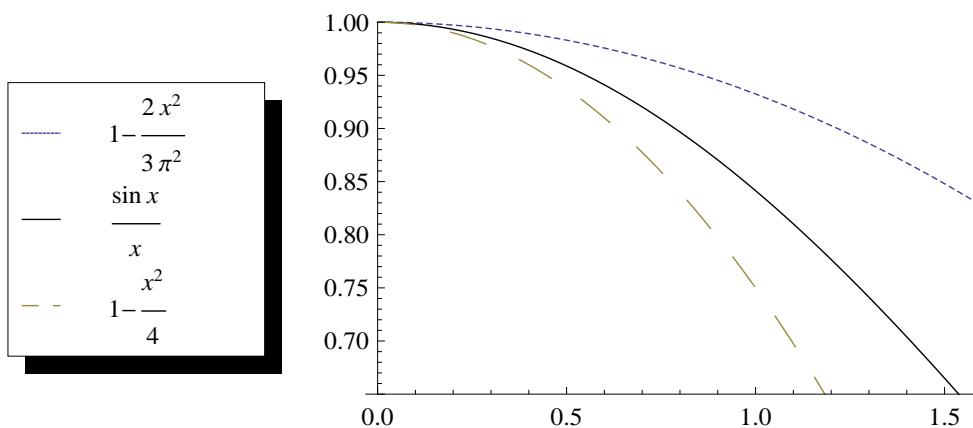
Yllä esitetyn lauseen epäyhtälölle saadaan vielä tarkempi tulos esimerkiksi sarjakehitelmiä käyttämällä.

Viereisen sivun kuvassa 12 näkyy yhtenäisellä viivalla funktion $\frac{\sin x}{x}$ rajoittuminen lauseen 5.3 mukaisesti. Alempi katkoviiva merkitsee funktiota $1 - \frac{x^2}{4}$ ja ylempi katkoviiva funktiota $1 - \frac{2x^2}{3\pi^2}$.

5.3 Muita trigonometrisia epäyhtälöitä

Trigonometriin funktioihin liittyen on olemassa runsaasti erilaisia epäyhtälöitä. Tässä luvussa tarkastellaan esimerkkien kautta muutamaa tulosta, jotka liittyvät lähinnä trigonometriin summiin.

Kuva 12: Lauseen 5.3 epäyhtälöketjun funktioiden kuvaajat, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.



Esimerkki 5.5 (Fejér-Jacksonin epäyhtälö). Oletetaan, että $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n > 0$ ja $x_{2k} \leq \frac{2k-1}{2k}x_{2k-1}$, missä $1 \leq k \leq \frac{1}{2}n$. Tällöin epäyhtälöt

$$\sum_{k=1}^n x_k \sin k\alpha > 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^n \cos k\alpha > 0$$

ovat voimassa, kun $0 < \alpha < \pi$. Jos $x_0 = 1$ ja $x_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, niin oletukset ovat voimassa. Tällöin sinin kohdalla epäyhtälö on muotoa

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin k\alpha}{k} > 0, \quad 0 < \alpha < \pi$$

ja vastaavasti kosinille muotoa

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos k\alpha}{k}, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Esimerkki 5.6. Osoita, että reaalityyppisille x_1, \dots, x_n on voimassa

$$\sum_{i < j}^n \cos(x_i - x_j) \geq -\frac{1}{2}n.$$

Ratk. Laskemalla

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \cos x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \sin x_i\right)^2 &= n + 2 \sum_{i < j}^n (\cos x_i \cos x_j + \sin x_i \sin x_j) \\ &= n + 2 \sum_{i < j}^n \cos(x_i - x_j),\end{aligned}$$

josta epäyhtälö seuraa suoraan.

5.4 Harjoitustehtävät 4

- 4.1 Osoita, että epäyhtälö $|\sin \alpha + \cos \alpha| \leq \sqrt{2}$ on voimassa yleisesti. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?
- 4.2 Ratkaise epäyhtälö $\cos 2x > \cos x \cos 3x$.
- 4.3 Ratkaise epäyhtälö $\sin x > 2 \cos^2 x - 1$.
- 4.4 Oletetaan, että $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Osoita, että tällöin on voimassa epäyhtälö

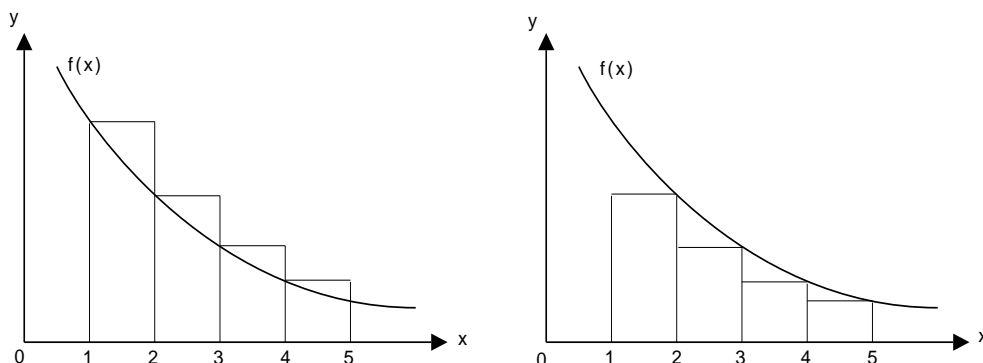
$$\tan \alpha_1 < \frac{\sum_{k=1}^n \sin \alpha_k}{\sum_{k=1}^n \cos \alpha_k} < \tan \alpha_n.$$

6 Integraaliepäyhtälöt

6.1 Integraaliepäyhtälöiden analyttisiä ominaisuuksia

Erilaisia integraaliepäyhtälöitä on tutkittu laajasti monilla matemaattisen analyysin alueilla. Ne ovat varsin hyödyllisiä approksimointitehtävissä ja numeerisissa analyysissä, jossa arvioidaan esimerkiksi virheen suuruutta. Tässä tarkastellaan lähinnä Riemannin integraaleihin liittyviä epäyhtälöitä. Käsiteltäessä integraaleja on muistettava, että funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on integroituva välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva tai monotoninen välillä $[a, b]$. Integraaleihin liittyvien epäyhtälöiden käsittely tapahtuu helpoimmin arvioimalla integrandia ylös- tai alaspäin toisella funktiolla, vakiolla tai itseisarvolla.

Kuva 13: Integraalin arvioiminen ylös- tai alaspäin.



Lemma 6.1. Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ja $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f(x) \leq g(x)$, niin

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Tästä saadaan seurauksena alla olevat kaksi lemmaa.

Lemma 6.2. Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on integroituva välillä $[a, b]$ ja $m \leq f(x) \leq$

M , niin

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Lemma 6.3. Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on integroituva välillä $[a, b]$, niin

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Näistä viimeinen lemma on integraalien kolmioepäyhtälö ja se seuraa epäyhtälöstä $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

Edellä mainitut integraalien perusominaisuudet ovat usein käyttökelpoisia, kun halutaan arvioida integraalin arvoa. Toisin sanoen näin integraalille saadaan ylä- tai alaraja tai mahdollisesti molemmat.

Esimerkki 6.1. Olkoon kokonaisluku $n \geq 1$. Osoita, että

$$0,50 < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx < 0,53.$$

Ratk. Alarajan saadaan lemmän 6.2 mukaan

$$\frac{1}{\sqrt{1-0}}(1/2 - 0) = 1 \cdot 1/2 = 0,50.$$

Ylärajan arvioimiseksi voidaan käyttää lemmaa 6.1, josta saadaan

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \leq \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{1/2} \arcsin x = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 0,53.$$

Näin ollen on saatu todistettua esimerkin alussa esitetty väite.

Funktion monotonisuutta voidaan myös käyttää apuna etsittäessä integraalin arvolle ylä- ja alarajoja.

Esimerkki 6.2. Osoita, että kaikilla $0 < x < 1$ on voimassa

$$\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt < (2 \ln 2) \frac{1-x}{1+x}.$$

Ratk. Derivointi riittää osoittamaan, että funktio $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ on vähenävä ja funktio $g(t) = (1 + \frac{1}{t}) \ln(1 + t)$ on kasvava välillä $0 < t < 1$. Näin ollen saadaan

$$\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt < \frac{\ln(1+x)}{x} \int_x^1 dt = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) \frac{1-x}{1+x}.$$

Koska $g(t) \leq g(1) = 2 \ln 2$, niin väite seuraa tästä.

Integraaleille on myös voimassa lemmaa 2.4 vastaava tulos.

Lemma 6.4 (Integraalilaskennan väliarvolause). *Jos funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva välillä $[a, b]$, ja funktio $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on integroitava eikä vaihda merkkiään välillä $[a, b]$, niin jollain luvulla $\xi \in [a, b]$ on voimassa*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Erikoistapauksessa $g(x) = 1$ yhtälö kirjoitetaan muodossa

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Geometrisesti integraalilaskennan väliarvolausetta voidaan havainnollistaa kuvassa 14 esitetyllä tavalla, jossa musta piste merkitsee lukua ξ . Oikealle yläviistoon kohdistuvilla suorilla on esitetty alaa $f(\xi)(b - a)$ ja vasemmalle yläviistoon kohdistuvilla suorilla integraalista saatavaa pinta-alaa.

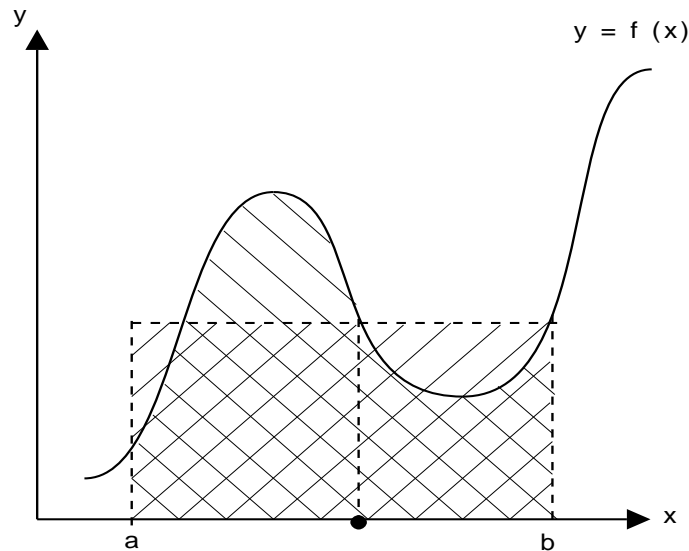
Esimerkki 6.3. Lemman 6.4 mukaan löytyy sellainen $\xi \in [0, 1]$, että

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Siis

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \frac{1}{4}.$$

Kuva 14: Integraalilaskennan väliarvolause.



6.2 Youngin epäyhtälö

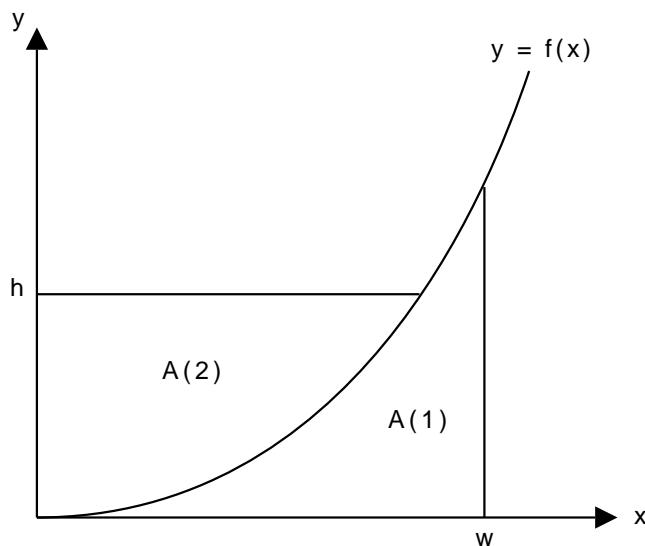
Tarkastellaan aidosti kasvavaa funktiota f ja sen käänteisfunktioita. Tilannetta voidaan havainnollistaa kuvan 15 mukaisesti. Integraaleista saatava ala $A(1) + A(2)$ on nähtävästi suurempi verrattaessa w levyisen ja h korkuisen suorakulmion alaan. Tämän perusteella seuraava tulos on varsin ilmeinen. Teoksessa [12] on esitetty tälle lauseelle täsmällinen todistus perustuen differentiaalilaskennan väliarvolauseeseen. Vaihtoehtoisesti todistus voidaan esittää esimerkiksi Riemann-summien avulla.

Lause 6.5 (Youngin epäyhtälö). *Olkoon funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva ja aidosti kasvava funktio, jolle $f(0) = 0$. Tällöin*

$$wh \leq \int_0^w f(x) dx + \int_0^h f^{-1}(x) dx \leq wf(w) - f^{-1}(h)[f(w) - h], \quad (8)$$

missä f^{-1} on f :n käänteisfunktio. Yhtäsuuruudet epäyhtälössä ovat voimassa jos ja vain jos $h = f(w)$.

Kuva 15: Youngin epäyhtälö.



Valitsemalla funktio $f(x) = x^{p-1}$ saadaan erityistapauksena

$$wh \leq \frac{w^p}{p} + \frac{p-1}{p} h^{p/p-1} \leq w^p - w^{p-1} h^{\frac{1}{p-1}} + h^{\frac{p}{p-1}}.$$

Käyttämällä merkintää $f^{-1}(x) = x^{q-1}$ epäyhtälö esitetään tavallisesti muodossa

$$wh \leq \frac{w^p}{p} + \frac{h^q}{q} \leq w^p - w^{p-1} h^{q-1} + h^q, \quad (9)$$

missä $w, h \geq 0$, $p > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Yhtäsuuruudet epäyhtälössä (9) ovat voimassa jos ja vain jos $h = w^{p-1}$.

Esimerkki 6.4. Funktiolla $f(x) = x$ on käänteisfunktio $f^{-1}(x) = x$. Kaavan (8) perusteella saadaan

$$0 \leq wh \leq \frac{w^2}{2} + \frac{h^2}{2} \leq w^2 - wh + h^2,$$

missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $w = h$.

Esimerkki 6.5. Funktio $f(x) = \ln(x+1)$ toteuttaa myös Youngin epäyhtälön ehdot ja sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = e^x - 1$. Tässä tapauksessa

kaavasta (8) saadaan

$$wh \leq \int_0^w \ln(x+1) dx + \int_0^h (e^x - 1) dx,$$

josta päästään edelleen epäyhtälöön

$$\begin{aligned} wh &\leq w \ln(w+1) - (e^h - 1)[\ln(w+1) - h] \\ &= (w+1 - e^h) \ln(w+1) + h(e^h - 1). \end{aligned}$$

6.3 Harjoitustehtävät 5

5.1 Osoita, että

$$0,166 < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{9+x^2-2x^3}} < 0,167.$$

5.2 Tarkastele tehtävän 1.6 epäyhtälöä $q(x^p - 1) \geq p(x^q - 1)$, missä $x > 0$ ja $p > q > 0$. Osoita tämän perusteella epäyhtälö

$$\frac{1}{p} \left(\frac{x^p}{(p+1)^n} - 1 \right) \geq \frac{1}{q} \left(\frac{x^q}{(q+1)^n} - 1 \right).$$

5.3 Osoita, että

$$\int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{\sin t} \right) dt < \infty.$$

5.4 Sovella integraalilaskennan väliarvolausetta 6.4 integraaliin

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^2+15}} dx.$$

7 Klassiset epäyhtälöt

Tässä luvussa tarkastellaan joitakin klassisia epäyhtälöitä, jotka ovat tunnettuja laajalti sekä puhtaassa että sovelletussa matematiikassa. Alussa keskitytään painotettuihin keskiarvoihin sekä niihin liittyviin epäyhtälöihin. Tästä jatketaan käsittelemällä eri matemaatikkojen mukaan nimettyjä epäyhtälöitä. Monet tuloksista ovat hyvin vaikuttavia ja käyttökelpoisia. Lisäksi yhtäläisyydet, eroavuudet ja riippuvuudet näiden tulosten välillä ovat huomionarvoisia.

7.1 Keskiarvoepäyhtälöt

Tässä yhteydessä käsitellään positiivisia lukuja x_1, \dots, x_n , missä $n \in \mathbf{N}$. Näille luvuille on määritelty *aritmeettinen keskiarvo*

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

geometrinen keskiarvo

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

sekä *harmoninen keskiarvo*

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}.$$

Näiden lukujen eri keskiarvojen välisiä yhteyksiä voidaan tarkastella esimerkiksi epäyhtälöiden muodossa. Yleisessä tuloksessa käsiteltäviin lukuihin on liitetty paino α_i .

Määritelmä 7.1. Olkoon reaaliluku $t \neq 0$ ja olkoon $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sellaisia positiivisia lukuja, joille $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Positiivisiin lukuihin x_1, \dots, x_n liittyvä *painotettu keskiarvo* voidaan määritellä eksponentin t funktiona

$$g(t) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t \right)^{1/t}. \quad (10)$$

Valitsemalla $t = 1$ kaavassa (10) saadaan *painotettu aritmeettinen keskiarvo*

$$g(1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Vastaavasti, kun valitaan $t = -1$, saadaan *painotettu harmoninen keskiarvo*

$$g(-1) = \left(\sum \frac{\alpha_i}{x_i} \right)^{-1}.$$

Tapaus $t = 0$ vaatii hieman lisätarkasteluja. Funktio $g(t) \rightarrow \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, kun $t \rightarrow 0$, sillä l'Hospitalin säännön ja oletuksen $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ perustella saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \ln g(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum \alpha_i x_i^t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum (\alpha_i x_i^t \ln x_i)}{\sum \alpha_i x_i^t} = \sum (\alpha_i \ln x_i). \end{aligned}$$

Tällöin määritellään *painotettu geometrinen keskiarvo*

$$g(0) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

Funktio $g(t)$ on eksponentin t suhteen kasvava. Ottamalla ensin funktiosta puolittain luonnollinen logaritmi saadaan

$$\ln g(t) = \frac{\ln(\sum \alpha_i x_i^t)}{t}.$$

Tämä on muotoa $0/0$, kun $t = 0$. Tähän voidaan soveltaa l'Hospitalin monotoniasääntöä 2.6, jolloin

$$\frac{\sum (\alpha_i x_i^t \ln x_i)}{\sum \alpha_i x_i^t}.$$

Tämä lauseke on derivaattansa perusteella kasvava. Käyttämällä sääntöä

$$g'(x) = \frac{h_1'(x)h_2(x) - h_1(x)h_2'(x)}{[h_2(x)]^2}$$

voidaan osoittaja kirjoittaa muotoon

$$\left(\sum \alpha_i x_i^t \right) \left(\sum \alpha_i x_i^t \ln^2 x_i \right) - \left(\sum \alpha_i x_i^t \ln x_i \right)^2.$$

Nimittäjä on tässä tapauksessa aina positiivinen. Myöhemmin luvussa 7.3 todistettavasta Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä seuraa

$$\begin{aligned} \left(\sum \alpha_i x_i^t \ln x_i \right)^2 &= \left(\sum \alpha_i^{1/2} x_i^{t/2} \alpha_i^{1/2} x_i^{t/2} \ln x_i \right)^2 \\ &\leq \left(\sum \alpha_i x_i^t \right) \left(\sum \alpha_i x_i^t \ln^2 x_i \right), \end{aligned}$$

joten myös osoittaja on positiivinen. Kasvavuus on voimassa funktiolle g välillä $(-\infty, 0)$ tai $(0, \infty)$.

Funktion g kasvavuus voidaan tiivistää seuraavaksi lauseeksi liittyen painotettuihin keskiarvoihin.

Lause 7.1 (Painotettu keskiarvoepäyhtälö). *Olkoon x_1, \dots, x_n positiivisia lukuja ja olkoon $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sellaisia positiivisia lukuja, joille $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Tällöin kaikille luvuille $r < s$ on voimassa*

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^s \right)^{1/s}. \quad (11)$$

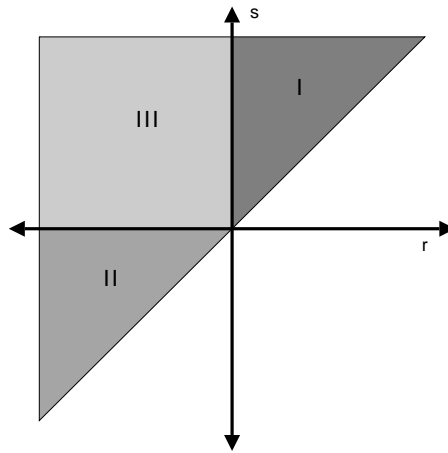
Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Todistus. Väite seuraa suoraan termien kasvavuudesta. Yhtäsuuruus puolestaan seuraa siitä, että epäyhtälössä

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^r \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^s$$

yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. □

Kuva 16: Painotettu keskiarvoepäyhtälö.



Painotettu keskiarvoepäyhtälö on voimassa kaikkialla välillä $-\infty < r < s < \infty$. Tapaus $0 < r < s$ käsittää kuvan 16 alueen I, tapaus $r < s < 0$ alueen II ja tapaus $r < 0 < s$ alueen III.

Edeltävän lauseen 7.1 perusteella saadaan eksponenttien kautta johdettua *painotettu harmonis-aritmeettis-geometrinen keskiarvoepäyhtälö*

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i} \right)^{-1} \leq \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i. \quad (12)$$

Tämän perusteella voidaan nähdä, että kaavan (9) mukainen Youngin epäyhtälö on itse asiassa painotetun aritmeettis-geometrisen epäyhtälön erikoistapaus.

Esimerkki 7.1. Kun $n = 2$ ja $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, kaavasta (12) saadaan suoraan epäyhtälö kahden luvun aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välille

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Esimerkki 7.2. Kun luvut $x, y, z > 0$ ja $x_1 = \frac{1}{x+y}$, $x_2 = \frac{1}{x+z}$ ja $x_3 = \frac{1}{y+z}$ sekä painot yhtäsuuret, niin painotetusta harmonis-aritmeettisestä epäyhtälöstä seuraa

$$\frac{9}{2(x+y+z)} \leq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z}.$$

Tarkastellaan vielä toista melko samanlaista funktiota kuin määritelmän 7.1. Olkoon x_1, \dots, x_n positiivisia lukuja. Määritellään tällöin välillä $(0, \infty)$ funktio

$$h(t) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^t \right)^{1/t}. \quad (13)$$

Funktio h on puolestaan vähenevä. Tämän osoittamiseksi ja merkintöjen yksinkertaistamiseksi kirjoitetaan $y_i = x_i^t$ ja $s = \sum y_i$. Nyt

$$\frac{d}{dt} \ln h(t) = \frac{t/s \sum (y_i \ln x_i) - \ln s}{t^2}$$

on ei-negatiivinen, sillä $\ln s \geq (t/s) \sum (y_i \ln x_i)$. Tässä edeltävä lauseke puolestaan on voimassa siksi, että $\ln s^s \geq \sum (t \ln x_i^{y_i}) = \ln \prod y_i^{y_i}$. Viimeinen epäyhtälö on voimassa, koska $s^s = s^{\sum y_i} \geq \prod y_i^{y_i}$.

Esimerkki 7.3. Kun $n = 2$, niin kaavan (13) funktio on pisteessä $t = 1$ muotoa $h(1) = x_1 + x_2$ ja pisteessä $t = 2$ muotoa $h(2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Funktion h vähenevyyden perusteella saadaan epäyhtälö

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_1 + x_2.$$

7.2 Jensenin epäyhtälö

Konvekseille funktioille määritelty Jensenin epäyhtälö on hyödyllinen tulos, jota voidaan käyttää esimerkiksi perustana monien muiden epäyhtälöiden todistuksissa. Funktion yleistettyä konveksisuutta on käsitelty erityisesti teoksessa [9].

Määritelmä 7.2. Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on *konvekksi* avoimella välillä (a, b) , jos kaikilla $x_1, x_2 \in (a, b)$ ja jokaisella $0 < p < 1$ on voimassa epäyhtälö

$$f(px_1 + (1-p)x_2) \leq pf(x_1) + (1-p)f(x_2).$$

Funktio $f(x)$ on *aidosti konvekksi*, jos

$$f(px_1 + (1-p)x_2) < pf(x_1) + (1-p)f(x_2),$$

kun $x_1 \neq x_2$. Funktio $f(x)$ on *(aidosti) konkaavi*, jos $-f(x)$ on (aidosti) konvekksi.

On huomattava, että mikä tahansa luku $x_p \in (x_1, x_2)$ voidaan esittää muodossa $x_p = x_1 + (1-p)(x_2 - x_1) = px_1 + (1-p)x_2$, jollakin $p \in (0, 1)$. Pisteiden $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ välinen suora on

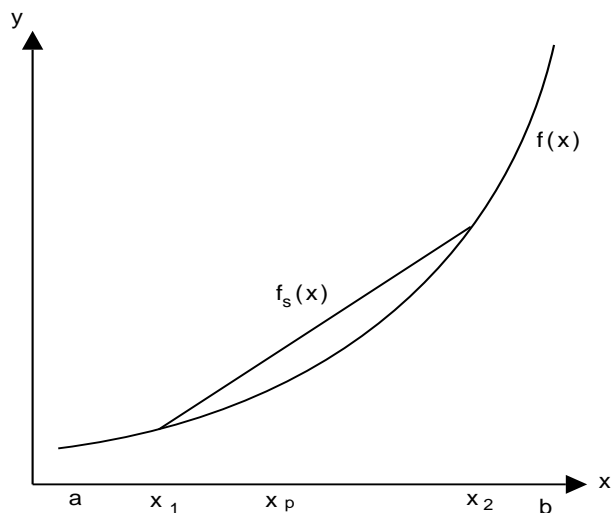
$$f_s(x) = f(x_1) + \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right] (x - x_1),$$

joten $f_s(x_p) = pf(x_1) + (1-p)f(x_2)$. Geometrisesti konveksisuus merkitsee, että funktion $f(x)$ kuvaaja ei ylitä kahden pisteensä välille piirrettyä sekanttia. Käytännössä funktion konveksisuus (konkaavisuus) selviää tarkastelemalla funktion toista derivaatta välillä (a, b) . Jos funktiolle kyseisellä välillä pätee $f''(x) \geq 0$, kaikilla $x \in (a, b)$, niin funktio on konvekksi välillä (a, b) . Vastaavasti konkaavin funktion tapauksessa $f''(x) \leq 0$. Tätä asiaa ja konveksisuutta yleensä on käsitelty tarkemmin esimerkiksi teoksessa [13].

Seuraavan lauseen perusteella nähdään yhteys epäyhtälöiden ja funktion konveksisuuden välillä.

Lause 7.2 (Jensenin epäyhtälö). *Olkoon funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ konvekksi välillä (a, b) ja olkoon p_1, \dots, p_n sellaisia ei-negatiivisia reaalinumeroita, joille*

Kuva 17: Funktion konveksisuus.



$p_1 + \dots + p_n = 1$. Tällöin kaikille $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ on voimassa

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i).$$

Jos funktio on aidosti konvekssi ja luvut p_i ovat positiivisia, niin yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $x_1 = \dots = x_n$.

Todistus. Tapaus $p_n = 1$ on triviaali, joten rajoituksetta voidaan olettaa, että $p_n < 1$. Todistetaan väite induktiolla. Kun $n = 2$, niin epäyhtälö on voimassa funktion f konveksisuuden määritelmän nojalla. Tällöin myös yhtäsuuruus pätee aidosti konveksille funktiolle f ainoastaan, kun $x_1 = x_2$, sillä muutoin $f(p_1 x_1 + p_2 x_2) < p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)$. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee tapauksessa $n = k$ ja oletetaan, että $p_1 + \dots + p_{k+1} = 1$. Tämän ja funktion

konveksisuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{i=1}^k p_i x_i\right) &= f\left((1-p_{k+1})\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{1-p_{k+1}} x_i + p_{k+1} x_{k+1}\right) \\
 &\leq (1-p_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{1-p_{k+1}} x_i\right) + p_{k+1}f(x_{k+1}) \\
 &\leq (1-p_{k+1}) \cdot \frac{1}{1-p_{k+1}} \sum_{i=1}^k p_i f(x_i) + p_{k+1}f(x_{k+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i).
 \end{aligned}$$

Näistä viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että lukujen $\frac{p_i}{1-p_{k+1}}$ summa on yksi, kun $1 \leq i \leq k$. Yhtäsuuruuden todistamiseksi täytyy tehdä hieman lisätarkasteluja. Jos $x_1 = \dots = x_{k+1}$, niin yhtäsuuruus on voimassa lauseen epäyhtälössä. Oletetaan kääntäen, että yhtäsuuruus on voimassa, kun $n = k+1$, f on aidosti konvekksi ja $p_i > 0$ kaikilla i . Nyt yhtäsuuruus on voimassa epäyhtälössä

$$f\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{1-p_{k+1}} x_i\right) \leq \frac{1}{1-p_{k+1}} \sum_{i=1}^k p_i f(x_i).$$

Jos näin ei olisi, vastoin oletusta ei yhtäsuuruus lauseen epäyhtälössä olisi voimassa. Oletuksen mukaan lause pätee luvuille $1, \dots, k$, $x_1 = \dots = x_k$, ja

$$f\left[\left(\sum_{i=1}^k p_i\right)x_1 + p_{k+1}x_{k+1}\right] = \left(\sum_{i=1}^k p_i\right)f(x_1) + p_{k+1}f(x_{k+1}),$$

joten tapauksen $n = 2$ nojalla $x_{k+1} = x_1$ ja induktio on valmis. \square

Konkaaville funktiolle Jensenin epäyhtälö on määritelty vastaavasti, jolloin vain epäyhtälömerkki on toisinpäin.

Esimerkki 7.4. Funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on konvekksi, kun $x > 1$. Kun $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ sekä $x_1 = x - 1$, $x_2 = x$ ja $x_3 = x + 1$, niin Jensenin epäyhtälöstä seuraa suoraan tulos

$$\frac{3}{x} < \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

Esimerkki 7.5. Funktio $f(x) = \cos x$ on konkaavi, kun $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Kun $x_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, saadaan Jensenin epäyhtälön perusteella

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos x_i \leq \cos \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Esimerkki 7.6. Funktio $f(x) = \ln x$ on konkaavi, kun $x > 0$, koska $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Kun $x_i > 0$ Jensenin epäyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) &\geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i = \alpha_1 \ln x_1 + \dots + \alpha_n \ln x_n \\ &= \ln x_1^{\alpha_1} + \dots + \ln x_n^{\alpha_n} = \ln (x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) = \ln \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Logaritmifunktio on kasvava, joten saatiin siis vaihtoehtoinen todistus kaavan (12) mukaiselle painotetulle aritmeettis-geometriselle keskiarvoepäyhtälölle.

7.3 Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Yksi matematiikan tunnetuimpia ja tärkeimpiä epäyhtälöitä on Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö, jota käytetään laajalti eri matematiikan osa-alueilla. Se voidaan todistaa monella eri tavalla, tässä esitetty todistus perustuu neliöepäyhtälöihin.

Lause 7.3 (Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö). *Olkoot reaalityöt $a_i, b_i \geq 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tällöin*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos kaikki a_i :t ovat nollia tai kaikki b_i :t ovat nollia tai kaikilla indekseillä j pätee

$$a_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}} b_j.$$

Todistus. Ensinnäkin, jos $a_i = 0$ kaikilla indekseillä i , epäyhtälö on triviaalisti voimassa. Jos $a_i \neq 0$ ainakin yhdellä indeksillä i , niin kaikilla $x \in \mathbf{R}$ on voimassa

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Lauseen 3.1 mukaan

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

□

Esimerkki 7.7. Kun $a_i \geq 0$ ja $b_i = 1$, niin Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä seuraa

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right).$$

Esimerkki 7.8. Kun $a_i, b_i, c_i \geq 0$, on voimassa

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \right)^4 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n b_i^4 \right) \left(\sum_{i=1}^n c_i^4 \right).$$

Tämän osoittamiseksi ryhmitellään tulontekijöitä uudelleen ja käytetään kahdesti Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \right)^4 &= \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i (b_i c_i) \right)^2 \right)^2 \\ &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n (b_i c_i)^2 \right) \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 c_i^2 \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n (b_i^2)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n (c_i^2)^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n b_i^4 \right) \left(\sum_{i=1}^n c_i^4 \right). \end{aligned}$$

7.4 Harjoitustehtävät 6

6.1 Osoita, että

$$u^a + v^b \leq \frac{a}{a+b} u^{a+b} + \frac{b}{a+b} v^{a+b},$$

ja tästä edelleen, että

$$u^{2004}v + uv^{2004} \leq u^{2005} + v^{2005}.$$

6.2 Käytä Jensenin epäyhtälöä funktioon $f(x) = \sin x$, kun $0 \leq x \leq \pi$.

6.3 Olkoon $x, y \geq 0$ ja $n \in \mathbf{N}$. Osoita, että

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}.$$

6.4 Osoita, että

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}\right).$$

6.5 Osoita, että

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i^{2/3}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i^{4/3}\right)^2.$$

8 Ylioppilaskoetehtäviä liittyen epäyhtälöihin

Tässä luvussa esitetään joitakin viime vuosien ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan tehtäviä ratkaisuihin. Tehtävissä käsiteltävät ongelmat liittyvät läheisesti jatkuvuuteen ja epäyhtälöihin.

8.1 Tehtävät

1. Jonon (a_n) termit ovat muotoa $a_n = \frac{2n-2}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Osoita, että kaikille termeille pätee $a_n < 2$ ja $a_{n+1} > a_n$. Määritä raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (Kevät 2007, teht. 10.)

2. a) Olkoon $a > 0$, $b > 0$ ja $0 < p < 2$. Näytä, että $pab < a^2 + b^2$.
b) Osoita, että jos suorakulmaisella kolmiolla ja neliöllä on sama pinta-ala, niin kolmion piiri on pidempi kuin neliön piiri. (Kevät 2007, teht. *15.)

3. Olkoon

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Kumpi on suurempi, $f(a)$ vai $f(b)$, kun $a = 1 + 10^{-1500}$ ja $b = 1 + 2 \cdot 10^{-1500}$? (Syksy 2005, teht. 7.)

4. Anna esimerkki sellaisesta jatkuvasta funktiosta $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, että f saa arvon 6 jossakin pisteessä ja $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Saako nämä ehdot täyttävä funktio aina arvon 0 jossakin pisteessä? (Kevät 2005, teht. 8.)

5. Ratkaise epäyhtälöt

$$\text{a) } 2x - 3 < 3 - 2x, \quad \text{b) } (x + 1)^2 \leq 1, \quad \text{c) } x^3 < x^2.$$

(Syksy 2004, teht.1.)

6. Olkoon $x \geq 1$. Osoita, että $x^x - e^{x-1} \geq 0$. Millä x :n arvoilla pätee yhtäsuuruus? (Kevät 2004, teht. 11.)
7. Suorakulmion pinta-ala on 30 m^2 ja piiri enintään 24 m . Mitä arvoja suorakulmion pituudet voivat saada? (Kevät 2002, teht. 7.)

8. Säiliö sisältää 2,3 kg ilmaa, ja pumppu poistaa jokaisella vedolla 5 % säiliössä olevasta ilmasta. Kuinka monen vedon jälkeen säiliössä on vähemmän kuin 0,2 kg ilmaa? (Kevät 2001, teht. 4.)

8.2 Ratkaisut

1. Jonon yleinen termi $a_n = \frac{2n-2}{n+1} = 2 \cdot \frac{n-1}{n+1} < 2$, koska kaikkialla pätee $\frac{n-1}{n+1} < 1$. Laskemalla esimerkiksi

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2 \left(\frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} \right) = \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0. \end{aligned}$$

Näin ollen epäyhtälö $a_{n+1} > a_n$ on aina voimassa. Raja-arvoksi saadaan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1-1/n}{1+1/n} = 2$, sillä $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. a) Koska $a, b > 0$, niin $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, joten $2ab \leq a^2 + b^2$. Lisäksi koska $p < 2$, niin $pab < 2ab$. Näin ollen voidaan todeta, että $pab < a^2 + b^2$.

b) Olkoon suorakulmaisen kolmion kateetit a ja b , sekä neliön sivu s . Näin ollen kolmion hypotenuusan pituus on $\sqrt{a^2 + b^2}$. Kuvioiden pinta-alat ovat samat, joten pätee $\frac{1}{2}ab = s^2$, josta saadaan $s = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$. Täytyy siis osoittaa että $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 4s$ eli $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{2ab} > 0$. Koska kateetti $b > 0$, niin $\sqrt{a^2 + b^2} > a$. Merkitsemällä $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{2ab} > 2a + b - 2\sqrt{2ab} = (\sqrt{2a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, joten väite on todistettu.

3. Funktion f derivaatta $f'(x) = \frac{2x(1-x^4)}{(x^4+x^2+1)^2}$. Derivaatan nollakohdat ovat $x = 1$ tai $x = -1$. Nimittäjä on aina positiivinen, joten derivaatta voi muuttaa merkkiään vain nollakohdissaan. Koska $f'(2) \approx -0,14 < 0$, derivaatta on negatiivinen, kun $x > 1$. Näin ollen funktio on aidosti vähenevä, kun $x > 1$. Koska $1 < a < b$, niin on oltava $f(a) > f(b)$, joten $f(a)$ on suurempi.

4. Funktioksi voidaan valita esimerkiksi $f(x) = 12x - 6$. Tällöin f on

polynomifunktiona jatkuva, $f(1) = 6$ ja $\int_0^1 f(x) dx = 0$, joten funktio täyttää annetut vaatimukset. Jokainen nämä ehdot täyttävä funktio on positiivinen jossain pisteessä ja sen ympäristössä. Sen määrätty integraali menee nolllaksi vain jos funktio saa myös negatiivisia arvoja. Jatkuva funktio, joka saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, saa aina myös arvon nolla. Siispä nämä edellä mainitut ehdot täyttävä funktio saa jatkuvuuden perusteella aina arvon nolla jossakin pisteessä.

5. a) $2x - 3 < 3 - 2x \Leftrightarrow 4x < 6 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$,
 b) $(x + 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$,
 c) $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot x < x^2 \cdot 1 \Leftrightarrow x < 1, x \neq 0$.

6. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^x - e^{x-1} = e^{x \ln x} - e^{x-1}$. Koska funktio e^x on kasvava, niin $f(x) \geq 0$, kun $x \ln x \geq x - 1$. Merkitään sitten tästä saatavaa funktiota $g(x) = x \ln x - x + 1$. Tämän derivaatta $g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x \geq 0$, kun $x \geq 1$. Täten funktio g on kasvava ja koska $g(1) = 0$, niin $g(x) \geq 0$, kun $x \geq 1$. Tämän perusteella saadaan myös, että $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 1$. Edellisen mukaan $f(x) = 0$, kun $g(x) = 0$. Koska $g(1) = 0$ ja $g'(x) > 0$, kun $x > 1$, niin piste $x = 1$ on funktion g ainoa nollakohta ja siten myös funktion f ainoa nollakohta.

7. Olkoon suorakulmion sivut x m ja y m. Tällöin $x + y \leq 12$ ja $xy = 30$, josta $y = \frac{30}{x}$. Sijoittamalla tämä ensimmäiseen epäyhtälöön saadaan $x + \frac{30}{x} \leq 12$ eli $x^2 - 12x + 30 \leq 0$. Nyt nimittäjän x voidaan kertoa pois, koska x on sivun pituutena aina positiivinen. Epäyhtälön vasemman puolen nollakohdat ovat $x = 6 \pm \sqrt{6}$ ja ne ovat molemmat positiivisia. Tästä päästään epäyhtälön ratkaisuun $6 - \sqrt{6} \leq x \leq 6 + \sqrt{6}$, joka antaa x :n vaihteluvälin. Koska $y = \frac{30}{x}$, merkitään $\frac{30}{6+\sqrt{6}} \leq y \leq \frac{30}{6-\sqrt{6}}$ eli $6 - \sqrt{6} \leq y \leq 6 + \sqrt{6}$. Siispä pituudet voivat saada arvoja väliltä 3,6 m - 8,4 m ($[6 - \sqrt{6}, 6 + \sqrt{6}]$ (m)).

8. Yhden vedon jälkeen säiliössä ilmaa $0,95 \cdot 2,3$ kg. Vastaavasti kahden vedon jälkeen ilmaa on $0,95^2 \cdot 2,3$ kg. Samalla tavalla n :n vedon jälkeen ilmaa on $0,95^n \cdot 2,3$ kg. Tästä päästään epäyhtälöön $0,95^n \cdot 2,3 < 0,2$,

jonka ratkaisuksi saadaan $n > \frac{\ln(0,2/2,3)}{\ln 0,95} \approx 47,62$. Joten 48 vedon jälkeen ilmaa on alle 0,2 kg.

9 Ratkaisut harjoitustehtäviin

Harjoitustehtävät 1, s. 13.

1.1 Funktio $f(x)$ on alkeisfunktiona jatkuva määrittelyjoukossaan. Funktiota ei ole määritelty, kun $|x-1|+2x=0$. Tästä saadaan, että funktio ei ole määritelty pisteessä $x=-1$. Funktio on siis jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Koska raja-arvo on eri x :n lähestyessä pistettä -1 vasemmalta tai oikealta, funktion määrittelyä ei voida täydentää niin, että funktio tulisi jatkuvaksi koko \mathbf{R} :ssä.

1.2 Soveltamalla lemmaa 2.4 funktioon $f(x) = (1+x)^a$, $x > 0$, saadaan

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = a(1+\xi)^{a-1} < a(1+x)^{a-1},$$

jollain $\xi \in (0, x)$. Koska $x > 0$, niin

$$(1+x)^a - 1 < ax(1+x)^{a-1}.$$

Jos $x \in (-1, 0)$, on olemassa sellainen $\xi \in (x, 0)$, että

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = a(1+\xi)^{a-1} > a(1+x)^{a-1}.$$

Koska $x > 0$, niin

$$(1+x)^a - 1 < ax(1+x)^{a-1}.$$

1.3 Sijoittamalla $a = \frac{a}{x}$ epäyhtälöön $\ln a \leq a - 1$ saadaan

$$a \geq x \left(1 + \ln \frac{a}{x}\right) = x \left(\ln e + \ln \frac{a}{x}\right) = \ln \left(\frac{ea}{x}\right)^x.$$

Tästä päästään kirjoittamalla

$$e^a \geq e^{\ln\left(\frac{ea}{x}\right)^x} = \left(\frac{ea}{x}\right)^x$$

haluttuun tulokseen. Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $a = x$.

- 1.4 Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ derivaatta on $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Derivaatta on negatiivinen, kun $x > e$, joten funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä ja $f(\pi) < f(e)$. Tämä voidaan kirjoittaa

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \pi^e < e^\pi.$$

- 1.5 Tarkastellaan funktiota $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x$. Funktio on jatkuva, kun $-1 < x < 1$. Funktion derivaatta $f'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$ on positiivinen, kun $x \in (0, 1)$, joten funktio $f(x)$ on aidosti kasvava välillä $0 < x < 1$. Näin ollen $f(x) > f(0) = 0$ kaikilla $x \in (0, 1)$ ja tehtävän epäyhtälö seuraa tästä. Välillä $-1 < x < 0$ funktio on myös aidosti kasvava ja $f(x) < f(0) = 0$, joten epäyhtälö kääntyy tällä välillä muotoon $\ln \frac{1+x}{1-x} < 2x$.

- 1.6 Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x^q - 1},$$

kun $x \neq 1$. Funktio on määrittelemätöntä muotoa $0/0$ pisteessä $x = 1$. Raja-arvon ja l'Hospitalin säännön perusteella voidaan määrittellä $f(1) = \frac{p}{q}$. Derivoimalla funktiossa osoittaja ja nimittäjä erikseen päästään muotoon $\frac{p}{q} x^{p-q}$, joka on kasvava funktio, kun $x > 0$. L'Hospitalin monotoniasäännön 2.6 perusteella funktio $f(x)$ on kasvava, kun $x > 0$. Täten $f(x) < f(1)$ välillä $(0, 1)$ ja $f(x) > f(1)$ välillä $(0, \infty)$. Tämä osoittaa tehtävän väitteen.

Harjoitustehtävät 2, s. 18.

- 2.1 Polynomin nollakohdat ovat $x_1 = -7$ ja $x_2 = \frac{1}{2}$. Lauseen 3.1 mukaan epäyhtälö toteutuu, kun $x < -7$ tai $x > \frac{1}{2}$.
- 2.2 Polynomi voidaan jakaa tekijöihin $5x^3 + 17x^2 + 8x - 12 = (x+2)^2(5x-3)$. Lauseen 3.1 ja merkkikaavion perusteella ratkaisuksi saadaan $x > \frac{3}{5}$.
- 2.3 Polynomi voidaan jakaa tekijöihin $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x = x^3(x-2) - 3x(x-2) = x(x^2-3)(x-2)$. Tästä saadaan nollakohdat $x_1 = -\sqrt{3}$,

$x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ ja $x_4 = 2$. Merkkikaavion ja tulon merkkisäännön perusteella ratkaisuksi saadaan $-\sqrt{3} < x < 2$ tai $\sqrt{3} < x < 2$.

Harjoitustehtävät 3, s. 27.

3.1 Tehtävän epäyhtälö voidaan kirjoittaa ekvivalenttiin muotoon

$$\frac{-13x + 8}{x^2 - 5x} > 0.$$

Ratkaisemalla osoittajan ja nimittäjän nollakohdat ja tarkastelemalla merkkiä eri osaväleillä esimerkiksi merkkikaavion avulla päästään ratkaisuun $x < 0$ tai $\frac{8}{13} < x < 5$.

3.2 Epäyhtälössä $x^2 - x < 0$, kun $0 < x < 1$. Väleillä $x < 0$ ja $x > 1$ epäyhtälöstä voidaan poistaa itseisarvomerkit suoraan ja saadaan osaratkaisuna $x < -2 - \sqrt{7}$ tai $x > 1$. Välillä $0 < x < 1$ epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $-x^2 + 6x - 3 > 0$ ja saadaan osaratkaisu $3 - \sqrt{6} < x < 1$. Nämä osaratkaisut yhdistämällä päätellään, että epäyhtälö toteutuu, kun $x < -2 - \sqrt{7}$ tai $x > 3 - \sqrt{6}$.

3.3 Lauseke ei ole määritelty, kun $x = 1$ tai $x = 7$. Korotetaan epäyhtälö puolittain neliöön

$$\frac{(4x^2 + 1)^2}{(x^2 - 8x + 7)^2} > 1.$$

Tästä päästään ekvivalenttiin muotoon

$$\frac{(4x^2 + 1)^2 - (x^2 - 8x + 7)^2}{(x^2 - 8x + 7)^2} > 0.$$

Nimittäjä on nyt kaikkialla positiivinen, joten se ei vaikuta epäyhtälön tarkasteluun. Osoittaja puolestaan voidaan jakaa tekijöihin

$$(3x^2 + 8x - 6)(5x^2 - 8x + 8) > 0.$$

Tässä jälkimmäinen sulkulauseke on aina positiivinen ja ensimmäinen, kun $x < \frac{-4-\sqrt{34}}{3}$ tai $x > \frac{-4+\sqrt{34}}{3}$. Tämä on myös epäyhtälön ratkaisu ja määrittelyn osalta on huomattava, että $x \neq 1$ ja $x \neq 7$.

3.4 Käyttäen kolmioepäyhtälöä 4.1 todistus voidaan suorittaa seuraavan laskelman mukaisesti

$$\begin{aligned} |a + b| &= |a + c - c + b| = |(a + c) + (-c + b)| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} |a + c| + |-c + b| = |a + c| + |b - c|. \end{aligned}$$

3.5 Epäyhtälön vasen puoli on ei-negatiivinen, kun $-1 \leq x \leq 3$ ja oikea puoli, kun $x \geq \frac{1}{3}$. Korottamalla nyt yhtälö puolittain toiseen saadaan, että epäyhtälö toteutuu, kun $-\frac{1}{5} < x < 1$. Tarkastelemalla epäyhtälön merkkiä eri osaväleillä päästään ratkaisuun $-1 \leq x < 1$.

3.6 Todistetaan väite induktiolla. Jos $n = 1$, niin yhtäsuuruus on voimassa. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee arvolla k eli $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$. Seuraava laskelma osoittaa, että väite pätee nyt myös arvolla $k + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \stackrel{i.o.}{\leq} 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= 2 - \frac{k(k+1)}{k(k+1)^2} - \frac{1}{k(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{(k+1)}. \end{aligned}$$

3.7 Jakamalla epäyhtälö puolittain luvulla $n!k!$ saadaan muotoa

$$n(n-1) \cdots (k+1) < (n+1)(n+2) \cdots (2n-k)$$

oleva epäyhtälö. Tämä on selvästi aina voimassa, sillä molemmiin puolin epäyhtälöä on yhtä monta tulotermiä ja kukin tulon tekijä vasemalla puolella on vähemmän kuin järjestystä vastaavaa tekijä oikealla puolella.

Harjoitustehtävät 4, s. 38.

4.1 Epäyhtälön voimassaolo voidaan näyttää laskemalla

$$\begin{aligned} \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \alpha \right| &= \left| 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi/2 - 2\alpha}{2}\right) \right| = \\ \left| 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right| &= \left| 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right| = \\ \sqrt{2} \underbrace{\left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right|}_{\in [0,1]} &\leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, kun $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1$ tai $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -1$ eli, kun $\alpha = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

4.2 Epäyhtälöä voidaan muokata esimerkiksi seuraavasti

$$\begin{aligned} \cos 2x > \cos x \cos 3x &\Leftrightarrow \cos 2x > \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \\ \Leftrightarrow \cos 4x - \cos 2x < 0 &\Leftrightarrow -2 \sin 3x \cdot \sin x < 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 3x \cdot \sin x > 0. \end{aligned}$$

Tässä $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n \cdot \frac{\pi}{3}$. Tulon merkkisäännön perusteella ratkaisuksi saadaan $-\frac{\pi}{3} + n \cdot \pi < x < \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbf{Z}$ ja $x \neq n \cdot \pi$.

4.3 Epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $2 \sin^2 x + \sin x - 1 > 0$ tai $2(\sin x + 1)(\sin x - \frac{1}{2}) > 0$. Koska $\sin x > -1$ kaikilla $x \neq \frac{3\pi}{2} + 2n \cdot \pi$, niin yllä oleva epäyhtälö toteutuu, kun $\sin x - \frac{1}{2} > 0$. Tästä päästään tehtävän ratkaisuun $\frac{\pi}{6} + 2n \cdot \pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2n \cdot \pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

4.4 Välillä $0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}$ sini on kasvava ja kosini vähenevä funktio. Ylärajan arvioimiseksi merkitään kulmaksi α_n , jolloin osoittaja saa suurimman arvonsa ja nimittäjä pienimmän. Täten

$$\frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n} < \frac{\sin \alpha_n + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_n + \dots + \cos \alpha_n} = \frac{n \cdot \sin \alpha_n}{n \cdot \cos \alpha_n} = \tan \alpha_n.$$

Alaraja voidaan arvioida vastaavasti merkitsemällä kulmaksi α_1 , jolloin

$$\frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n} > \frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_1} = \frac{n \cdot \sin \alpha_1}{n \cdot \cos \alpha_1} = \tan \alpha_1.$$

Harjoitustehtävät 5, s. 44.

5.1 Ratkaisussa voidaan käyttää apuna lemmaa 6.2. Yläraja saadaan arvioimalla

$$\frac{1}{\sqrt{9}} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0,1666\dots < 0,167.$$

Alarajan arvioimiseksi todetaan, että nimittäjä saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{1}{3}$. Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{9 + x^2 - 2x^3}} \left(\frac{1}{2} - 0\right) &\geq \frac{1}{\sqrt{9 + (1/3)^2 - 2 \cdot (1/3)^3}} \left(\frac{1}{2} - 0\right) \\ &= 0,166324786\dots > 0,166. \end{aligned}$$

5.2 Integroimalla tehtävän alussa annettua epäyhtälöä saadaan

$$\int_0^x q(y^p - 1) dy \geq \int_0^x p(y^q - 1) dy.$$

Tästä päästään laskemalla muotoon

$$\frac{1}{p} \left(\frac{x^p}{p+1} - 1 \right) \geq \frac{1}{q} \left(\frac{x^q}{(q+1)} - 1 \right).$$

Integroimalla vielä $n - 1$ kertaa päädytään haluttuun epäyhtälöön.

5.3 Käytetään apuna Jordanin epäyhtälöä, jonka mukaan välillä $0 < x < \frac{\pi}{2}$ pätee $\sin x \leq x$. Tästä saadaan

$$\int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{\sin x} \right) dt \leq \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{x} \right) dt = \frac{\pi}{2} \left(1 - \ln \frac{2}{\pi} \right) < \infty.$$

5.4 Lemma 6.4 mukaan löytyy sellainen $\xi \in [0, 1]$, että

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 15}} dx = \frac{1}{5\sqrt{\xi + 15}}$$

ja tästä päästään epäyhtälöön

$$\frac{1}{20} \leq \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 15}} dx \leq \frac{1}{5\sqrt{15}}.$$

Harjoitustehtävät 6, s. 53.

6.1 Käytetään painotetussa aritmeettis-geometrisessä epäyhtälössä 7.1 seuraavia merkintöjä $\alpha_1 = \frac{a}{a+b}$, $\alpha_2 = \frac{b}{a+b}$, $x_1 = u^{a+b}$ ja $x_2 = v^{a+b}$. Nyt epäyhtälön oikean puolen termit ovat $x_1^{\alpha_1} = (u^{a+b})^{\frac{a}{a+b}} = u^a$ ja $x_2^{\alpha_2} = (v^{a+b})^{\frac{b}{a+b}} = v^b$. Väite seuraa suoraan sijoittamalla nämä termit painotettuun aritmeettis-geometriseen epäyhtälöön. Jälkimmäinen väite puolestaan saadaan käyttämällä kahdesti edellistä kaavaa, ensin $a = 2004$, $b = 1$ ja toistamiseen $a = 1$ ja $b = 2004$.

6.2 Funktio $f(x) = \sin x$ on konkaavi, kun $x \in [0, \pi]$. Kun $x_i \in [0, \pi]$, saadaan Jensenin epäyhtälön perusteella

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin x_i \leq \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

6.3 Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^n$, joka on konvekssi, kun $x \geq 0$. Jensenin epäyhtälöstä 7.2 saadaan, että

$$f \left(\frac{1}{2}(x + y) \right) \leq \frac{1}{2} (f(x) + f(y)),$$

josta edelleen seuraa väite

$$\left(\frac{1}{2}(x + y) \right)^n \leq \frac{1}{2} (x^n + y^n).$$

6.4 Sijoittamalla Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöön 7.3 $a_i = \sqrt{c_i}$ ja $b_i = \frac{1}{\sqrt{c_i}}$ päästään muotoon

$$\left(\sqrt{c_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1}} + \cdots + \sqrt{c_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_n}} \right)^2 \leq \left(\sqrt{c_1^2} + \cdots + \sqrt{c_n^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{c_1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{c_n^2}} \right),$$

josta nähdään suoraan väite.

6.5 Sijoittamalla Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöön 7.3 $a_i = c_i^{1/3}$ ja $b_i = c_i^{2/3}$ päästään suoraan haluttuun väitteeseen.

Kirjallisuutta

- [1] Anderson G., Vamanamurthy M., Vuorinen M.: *Monotonicity Rules in Calculus*. The American Mathematical Monthly, 113:9, 805-816, 2006.
- [2] Cloud M.J., Drachman B.C.: *Inequalities: With Applications to Engineering*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G.: *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1934.
- [4] Kangasaho J., Piri P., Taavitsainen H.: *Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 1998-2008*. WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2008.
- [5] Klén R., Lehtonen M., Vuorinen M.: *On Jordan type inequalities for hyperbolic functions*. arXiv.math :0808.1493.
- [6] Klén R., Manojlović V., Vuorinen M.: *Distortion of two point normalized quasiconformal mappings*. arXiv.math:0808.1219.
- [7] Korovkin P.P.: *Inequalities*. Blaisdell Publishing Company, New York, 1961.
- [8] Laakso H.: *Analyysi I -kurssimateriaali*. 2004.
- [9] Lehtonen M.: *Yleistetty konveksisuus. Pro gradu -tutkielma*. Turun yliopisto, Matematiikan laitos, 2008.
- [10] Lukkarinen M.: *Epäyhtälöt-kurssimoniste*. 2006.
- [11] Mitrinović D.S.: *Elementary Inequalities*. P. Noordhoff LTD, Groningen, 1964.
- [12] Rüthing D.: *On Young's Inequality*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25:2, 161-164, 1994.
- [13] Steele J.M.: *The Cauchy-Schwarz Master Class*. Cambridge University, New York, 2004.

- [14] Väisälä K. *Trigonometria*. Werner Söderström Osakeyhtiö, Porvoo, 1967.

Liite 1. Kuvien Mathematica-tiedostot

Tutkielman kuvien laadinnassa on käytetty apuna Mathematica-ohjelmistoa. Seuraavat syötteet toimivat versiolla 7.0.

```
(*Sivun 11 Kuva 4 saadaan seuraavalla syötteellä: *)
Needs["PlotLegends"]
p1 = Plot[Log[(1-x)/(1+x)], {x,-1,1}, PlotRange -> {-7,7}]
Show[p1, Graphics[Text["ln[(1-x)/(1+x)]",{-0.9',4.2'},
{-1,0}]]]

(*Sivun 17 Kuva 5 saadaan seuraavalla syötteellä: *)
p2 = Plot[3 x^3-4 x^2-x+2, {x,-1,2}]
Show[p2, Graphics[Text["!\(\(*SuperscriptBox[\(3x\),\((3\))\]-4
!\(\(*SuperscriptBox[\(x\),\((2\))\])-x+2",{1.1',3.5'},{-1,0}]]]

(*Sivun 17 Kuva 6 saadaan seuraavalla syötteellä: *)
p3 = Plot[{x^2(x^2 -5), x^2, x^2-5}, {x,-3,3},
PlotRange -> {-8,10}, PlotStyle -> {{Dashing[{}],
Thickness[0.005']}, {Dashing[{0.001',0.01'}],
Thickness[0.005']}, {Dashing[{0.012',0.01'}],
Thickness[0.005']}]}}]
Show[p3, Graphics[Text["!\(\(*SuperscriptBox[\(x\),\((4\))\])-5
!\(\(*SuperscriptBox[\(x\),\((2\))\])\)",{-2.3',7.5'},{-1,0}]]],
Graphics[Text["!\(\(*SuperscriptBox[\(x\),\((2\))\])\)",{-1.9',4.7'},
{-1,0}]]], Graphics[Text["!\(\(*SuperscriptBox[\(x\),\((2\))\])-5",
{-3,1},{-1,0}]]]

(*Sivun 26 Kuva 7 saadaan seuraavalla syötteellä: *)
p4 = Plot[{(1+x)^4, 1+4 x}, {x,-1,1},
PlotStyle -> {{Dashing[{}], Thickness[0.005']},
{Dashing[{0.012',0.01'}], Thickness[0.005']}]}}]
```

```
Show[p4, Graphics[Text["!\(\(*SuperscriptBox[\((1+x)\),
\ (4)\)\)",{0.5',8.5'},{-1,0}]], Graphics[Text["1+4x",
{0.7',3.1'},{-1,0}]]]
```

(*Sivun 29 Kuva 8 saadaan seuraavalla syötteellä: *)

```
p5 = Plot[Tan[x], {x,-6,6}, PlotRange → {-30,30}]
```

(*Sivun 34 Kuva 10 saadaan seuraavalla syötteellä: *)

```
p6 = Plot[{x, Sin[x], 2/Pi x}, {x,0,Pi/2}, PlotStyle →
{Dashing[{0.01}], GrayLevel[0], Dashing[{.06}]}, PlotLegend
→ {"!\(\(*RowBox[{\ "x\ ", \ "\ "}] \)\)", "!\(\(*RowBox[{\ "sin x\ ",
\ "\ "}] \)\)", "!\(\(*FractionBox[\ "2x\ ", RowBox[{\ "\ [Pi]\ "}] \)\)",
LegendPosition → {-1.9,-0.4}]
```

(*Sivun 36 Kuva 11 saadaan seuraavalla syötteellä: *)

```
p7 = Plot[{x/Sinh[x], Sin[x]/x, 1/Cosh[x]}, {x,0,Pi/2},
AxesOrigin → {0,0.65'}, PlotRange → {0.65',1}, PlotStyle
→ {Dashing[{0.008'}], GrayLevel[0], Dashing[{0.06'}]},
PlotLegend → {"!\(\(*FractionBox[\ "x\ ", RowBox[{\ "sinh
x\ "}] \)\)", "!\(\(*FractionBox[\ "sin x\ ", RowBox[{\ "x\ "}] \)\)",
"!\(\(*FractionBox[\ "1\ ", RowBox[{\ "cosh x\ "}] \)\)",
LegendPosition → {-1.9,-0.4}]
```

(*Sivun 37 Kuva 12 saadaan seuraavalla syötteellä: *)

```
p8 = Plot[{1-x^2/4, Sin[x]/x, 1-(2 x^2)/(3 Pi^2)},
{x,0,Pi/2}, AxesOrigin → {0,0.65'}, PlotRange → {0.65',1},
PlotStyle → {Dashing[{0.008'}], GrayLevel[0], Dashing[
{0.06'}]}, PlotLegend → {"1-!\(\(*FractionBox[\ "!\(\(\
*SuperscriptBox[\ (2x\ ), \ (2\)] \)\)", RowBox[{\ "\ !\(\(\
*SuperscriptBox[\ (3\ [Pi]\ ), \ (2\)] \)\)"}} \)\)",
"!\(\(*FractionBox[\ "sin x\ ", RowBox[{\ "x\ "}] \)\)",
"1-!\(\(*FractionBox[\ "\ !\(\(*SuperscriptBox[\ (x\ ), \ (2\)] \)\)",
RowBox[{\ "\ 4\ "}] \)\)", LegendPosition → {-1.9,-0.4}]
```