Murtolukujen peruslaskutoimitusten sujuminen 7. luokan aikana

ANU, TUOMINEN

anu.tuominen@utu.fi
Turun yliopisto, opettajankoulutuslaitos, Turun yksikkö

Tiivistelmä

Tutkimuksessa tarkastellaan 7.-luokkalaisten (N = 74) murtolukujen peruslaskutoimitusten sujumista yhden lukuvuoden aikana. Oppilaiden murtolukujen hallintaa mitattiin kolmesti kirjallisella testillä. Testit analysoitiin sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti. Kolmella eri mittauskerralla saatujen pistemäärien mukaan oppilaat jaettiin hierarkkista klusterianalyysimenetelmää käyttäen kuuteen erilaiseen oppimisprofiiliin: Heikot, Taantujat, Hieman oppivat, Oppiva, Hyvät ja Ulkoa oppineet. Profiilien avulla pyrittiin tunnistamaan niitä tietoja ja taitoja, jotka tukevat murtolukujen oppimista.

Alkumittauksessa hyvin pärjänneet oppilaat tunnistivat murtoluvun desimaalilukuesityksen, hallitsivat laskujärjestyssäännön, murtolukujen suuruusjärjestyksen ja samannimisten murtolukujen erotuksen. Heikosti menestyneet oppilaat eivät hallinneet alkumittauksessa edes luonnollisten lukujen laskujärjestyssääntöä, ja murtolukujen peruslaskutoimituksissa näkyi vahva tukeutuminen virheellisiin laskuproseduureihin

Luonnollisten lukujen laskujärjestyksen hallinta, desimaalilukuesitysmuodon tunnistaminen ja murtolukujen suuruuden ymmärtäminen näyttäisivät olevan avainasemassa murtolukujen peruslaskutoimituksia opeteltaessa.

Avainsanat

Murtoluku, 7.-luokkalainen, oppimisprofiili

Johdanto

Tutkimuksessa tullaan tarkastelemaan 7.-luokkalaisten varsinaissuomalaisten oppilaiden murtolukujen hallinnan kehittymistä kouluvuoden aikana. Oppilaiden taidoissa tapahtuneiden muutosten perusteella pyritään tunnistamaan erilaisia oppimisprofiileja. Oppilaiden taitoa laskea murtoluvuilla on tutkittu maailmalla jo vuosikymmenien aikana mutta vähemmän on tutkittu sitä miten taito kehittyy ja minkälaisia oppimisprofiileja voidaan nostaa esille.

Murtolukuja pidetään oppilaille vaikeana aihealueena matematiikassa (DeWolf, Bassok & Holyoak, 2015; Meert, Grégoire & Noël, 2010; Van Hoof, Lijnen, Vercshaffel & Van Dooren, 2015). Ja oppilaiden murtolukujen osaamisen kehitys voi olla olematonta. Tutkittaessa oppilaiden murtoluvuilla laskemisen peruslaskutaitoja 6. ja 8. luokalla havaittiin, että hyvien ja heikkojen oppilaiden suoriutumisessa oli jo selvä ero 6. luokalla. Heikkojen oppilaiden osaamisessa ei näyttänyt tapahtuvan mitään kehittymistä seuraavan kahden vuoden aikana kun taas hyvillä oppilailla tapahtui selvää kehitystä. (Siegler & Pyke, 2013.)

Murtolukujen oleellisia ominaisuuksia ovat *suuruus* ja *tiheys*. Murtolukuja voidaan vertailla keskenään ja äärellinen määrä murtolukuja voidaan asettaa suuruusjärjestykseen. Oppilaat eivät välttämättä miellä että murtoluvulla olisi suuruus, ja että se voidaan sijoittaa lukusuoralle vaan he saattavat ajatella murtolukua osana kokonaisesta (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Erityisesti murtolukujen tiheyden ymmärtäminen vaatii oppilaalta käsitteellistä muutosta. Toisin kuin kokonaislukujen kanssa, oppilas ei voi enää tukeutua luettelemiseen saadakseen selville seuraavan murtoluvun: Murtoluvun $\frac{1}{3}$ jälkeen ei heti tulekaan $\frac{2}{3}$, sillä väliin mahtuu esimerkiksi luku $\frac{1}{2}$. Murtoluvuilla ei siis ole yksikäsitteistä seuraajaa kuten kokonaisluvuilla.

Oppilaiden tyypillinen virhe on käsitellä murtolukuja luonnollisina lukuina ja soveltaa murtolukuihin luonnollisten lukujen ominaisuuksia kuten kertominen suurentaa, jakaminen pienentää ja luvulla on yksikäsitteinen seuraaja ja symboli. Oppilaiden tukeutuminen näihin luonnollisten lukujen ominaisuuksiin (*natural number bias)*, on erittäin kestävää ja siksi käsitteellisen muutoksen aikaansaaminen on hankalaa. (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi, 2015; Van Hoof, et al., 2015.) Tämä luonnollisten lukujen ominaisuuksiin tukeutuminen näkyy esimerkiksi murtolukujen suuruusvertailutehtävissä, jolloin oppilas saattaa päätellä luvun $\frac{1}{2}$ olevan pienempi kuin luku $\frac{3}{7}$, koska ensimmäisessä murtoluvussa sekä osoittaja että nimittäjä ovat pienempiä kuin jälkimmäisen murtoluvun osoittaja ja nimittäjä (Ni & Zhou, 2005).

Murtoluvun suuruuden ymmärtäminen tukee murtolukujen laskuproseduurien oppimista (Cramer, Post & delMas, 1999). Esimerkiksi tehtävään $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ tyypillinen oppilaiden antama virheellinen vastaus on $\frac{2}{5}$ (Siegler, 2003). Tämä osoittaa sen, ettei tehtävän ratkaisija ole pysähtynyt miettimään, minkä kokoisia lukuja hän on laskemassa yhteen. Oppilas, joka ymmärtää murtoluvun suuruuden, pystyy päättelemään oikean proseduurin, vaikka ei sitä ensin muistaisikaan. Oppilas pystyy hylkäämään väärän proseduurin, jos sen tuottama vastaus ei ole järkevän kokoinen ja löytämään sellaisen proseduurin, joka tuottaa oikean kokoisen vastauksen. (Siegler, Thompson & Schneider, 2011.)

Suomalaisten yläkoulun oppilaiden matemaattista osaamista on tutkittu peruskoulun päättövaiheessa. Kahdessa vuosikymmenessä, 1980-luvulta 2000-luvulle, esimerkiksi murtolukujen kerto- ja jakolaskutehtävissä oikein laskeneiden osuus on laskenut lähes kolmekymmentä prosenttiyksikköä (Näveri, 2009, 101). Niemi (2004) tutki väitöskirjassaan perusopetuksen 6. luokan oppilaiden matematiikan osaamista. Kaikkein heikoimmin ovat oppilaat osanneet muuntaa murtoluvun desimaalilukumuotoon ja pyöristää annetun desimaaliluvun sadasosien tarkkuuteen. Muita heikosti menneitä osa-alueita ovat desimaalilukujen jakolasku, desimaali-, murto- ja prosenttiluvun yhteys, avaruusgeometria, ja taulukon tulkitseminen. (Niemi, 2004, 131.) Hihnala (2005, 89) huomasi pitkittäistutkimuksessaan kuudennen luokan syksystä yhdeksännen luokan kevääseen saman osaamattomuuden murtolukua muunnettaessa desimaalilukumuotoon. Etenkin kuudes- ja seitsemäsluokkalaisilla oppilailla murtoluku 6/5 muuntui yleensä desimaaliluvuksi muotoon 6,5. Oppilaiden murtolukuosion ratkaisuprosenttien keskiarvo nousi 7. luokan syksystä 8. luokan syksyyn 8 prosenttiyksikön verran ja 8. luokalta 9. luokan syksyyn vain vajaan 2 prosenttiyksikköä. (Hihnala, 2005, 86.) Heikkoa edistymistä vuosiluokalta toiselle ei voi täysin laittaa murrosiän syyksi. Kolmevuotisessa eurooppalaisessa tutkimuksessa Kassel-projektissa verrattiin kuuden Euroopan maan yläkoulun oppilaiden oppimistuloksia keskenään. Suomalaiset kahdeksasluokkalaiset hallitsivat murtolukujen välisen kertolaskun heikommin kuin muiden maiden 14-vuotiaat, englantilaisia lukuun ottamatta (Soro & Pehkonen, 1998, 29). Algebran ja geometrian osa-alueilla muilla mailla oli tilastollisesti merkittävästi paremmat yhteispistemäärät kuin Suomella ja Norjalla. Näveri pitää huolestuttavana sitä, että suomalaisten oppilaiden edistyminen toisena tutkimusvuotena oli hitaampaa kuin esimerkiksi englantilaisilla, saksalaisilla ja unkarilaisilla oppilailla. Tutkimuksen perusteella suomalaiset oppilaat olivat algebran ja funktioiden osaamisessa noin yhden lukuvuoden jäljessä tutkimukseen osallistuneiden maiden oppilaiden keskiarvosta. TIMMS 1999-tutkimuksessa Suomi pärjäsi jo paremmin mutta algebran hallinnassa oli edelleen parannettavaa, sillä Suomi sijoittui OECD-maiden keskiarvon alapuolelle. (Näveri, 2009, 11.)

Kuinka hyvin yläkoulunsa aloittavat nuoret hallitsevat ne murtolukujen peruslaskutoimitukset, jotka on opiskeltu alakoulussa? Ja miten heidän taitonsa murtolukulaskuissa kehittyvät 7. luokan aikana? Tutkimuksen aineisto on kerätty edellisen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004) ollessa voimassa, joten on tarkoituksenmukaista esitellä siinä esitetty murtolukuteeman järjestys. Opetussuunnitelman mukaan murtolukuihin tutustutaan aluksi alakoulun toisella luokalla ja laskuproseduurien harjoittelu alkaa yleensä kolmannella luokalla samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskulla. Neljännellä luokalla tutustutaan sekalukukäsitteeseen, viidennellä luokalla supistamiseen ja murtoluvun kertomiseen ja jakamiseen luonnollisella luvulla ja kuudennella luokalla tutustutaan laventamiseen ja erinimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskuun. Suurin osa murtolukuihin liittyvistä peruslaskutoimituksista opiskellaan siis jo alakoulussa, ainoastaan murtolukujen välinen kerto- ja jakolasku esitellään yleensä uutena asiana yläkoulussa seitsemännellä luokalla. (Opetushallitus, 2004.)

TUTKIMUSKYSYMYKSET

1) Miten hyvin oppilaat hallitsevat murtolukujen peruslaskutoimitukset 7. luokan syksyllä, 7. luokan jouluna ja 8. luokan syksyllä?

2) Tapahtuuko oppilaiden murtolukutaidoissa kehittymistä 7. luokan syksystä 8. luokan syksyyn?

3) Minkälaisia oppimisprofiileita aineistosta löydetään? Ja mitä yhteisiä tietoja ja taitoja näistä on löydettävissä profiileittain?

MENETELMÄ

Osallistujat

Tutkimukseen osallistui aluksi 74 oppilasta turkulaisesta yläkoulusta. Osa oppilaista oli mukana vain osassa mittauskerroista, joten kaikissa kolmessa mittauksessa oli mukana yhteensä 62 oppilasta, neljältä luokalta. Jokaista luokkaa opetti sama matematiikan opettaja.

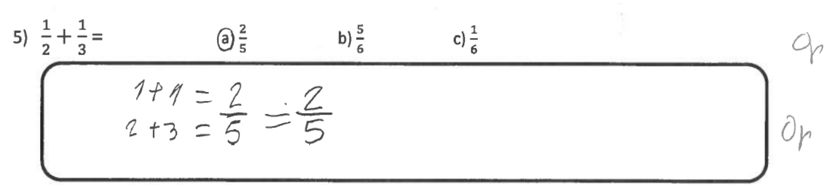
Tehtävät

Tutkimuksessa testattiin oppilaita kolme kertaa kirjallisella testillä. Testi oli yhtä tehtävää lukuun ottamatta koko ajan sama, ja suurin osa tehtävistä oli monivalintatehtäviä (Taulukko 1). Tehtävät 1 ja 2 eivät liittyneet varsinaisesti murtolukuihin. Tehtävä 1 mittasi laskujärjestyssääntöä ja näin antoi hieman kuvaa siitä, miten oppilas hallitsee luonnollisten lukujen välisiä laskutoimituksia. Tehtävässä 2 oppilaan tuli löytää annetuista desimaaliluvuista suurin, joten tehtävä antoi informaatiota kymmenjärjestelmän hallinnasta. Tehtävän 7, murtoluvun desimaalilukuesitys, tilalle vaihdettiin kolmanteen mittaukseen murtolukujen välinen kertolaskutehtävä, sillä asia oli opiskeltu uutena seitsemännen luokan aikana ja oli mielenkiintoista nähdä kuinka hyvin se oli hallinnassa. Tehtävät 9 ja 10 eivät liittyneet niinkään murtolukujen peruslaskutoimituksiin vaan murtolukujen tiheyskäsitteeseen.

Taulukko 1. Kirjallisten testien tehtävät

Selite	*Tehtävä*
t1: laskujärjestyssääntö	5 + 2 · 3
t2: suurin desimaaliluku	1,03 0,256 2,3 0,17
t3: murtoluvut suuruusjärjestykseen	1/7, 1/12, 1, 5/6, 4/3
t4: samannimisten erotus	3/7 – 1/7
t5: erinimisten summa	½ + 1/3
t6: murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla	3 · 1/5
t7: murtoluvun desimaalilukuesitys	1/3 → 3. mittaus 1/3 · 6/8
t8: murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla	4/6 : 2
t9: murtoluvun tiheys, samannimiset	3/7 ja 5/7
t10: murtoluvun tiheys, erinimiset	2/4 ja 2/3

Oppilaiden tuotokset arvioitiin sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti. Oppilaan tuli perustella vastauksensa kunkin tehtävän alle laskulla, piirroksella tai sanallisesti. Näin pelkkä arvaaminen ei tuonut täysiä pisteitä. Vastauksesta ja perustelusta sai kummastakin yhden pisteen (Kuvio 1). Perustelusta sai pisteen, jos se oli tulkittavissa oikeaksi ratkaisuksi.



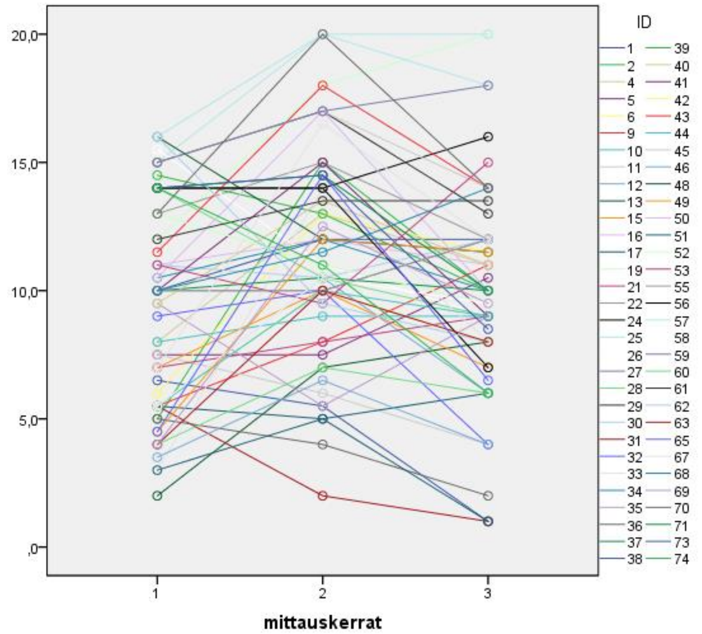
Kuvio 1. Oppilaan vastaus, perustelu ja annettu pisteytys erinimisten murtolukujen summa –tehtävään. Oppilas käsittelee osoittajia ja nimittäjiä erikseen, ja kirjoittaa sitten vastauksen murtolukumuotoon.

TULOKSET

Oppilaiden kokonaispistemäärien minimi-, maksimi- ja keskiarvo sekä hajonta kaikilta kolmelta mittauskerralta on esitetty taulukossa 2. Samaan taulukkoon on merkitty myös osaamisprosentti, kun kunkin testin maksimipistemäärä oli 20 pistettä (Taulukko 2). Yksittäisen oppilaan kehitys seitsemännen luokan syksystä kahdeksannen luokan syksyyn on kuvattu viivadiagrammilla (Kuvio 2). Osaaminen näyttää hajaantuvan, osa oppilaista osaa kahdeksannen luokan alussa enemmän kuin vuotta aikaisemmin, osa oppilaista taantuu ja osaa saa pisteitä vähemmän kuin seitsemännen luokan alussa. Osaamisprosentti näyttää kasvavan keskimäärin noin 3 %-yksikön verran yhden lukuvuoden aikana.

Taulukko 2. Oppilaiden kolmen eri mittauskerran tunnusluvut ja osaamisprosentti

Mittauskerta	*N*	*minimi*	*maksimi*	*keskiarvo*	*hajonta*	*osaamis-%*
1. 7. luokan syksy	74	2,00	16,00	9,264	4,016	46,3
2. 7. luokan joulu	74	2,00	20,00	11,324	1,170	56,6
3. 8. luokan syksy	66	1,00	20,00	9,818	4,199	49,1



Kuvio 2. Oppilaiden pisteet kullakin mittauskerralle ja niistä piirretty kehitysviiva. Oppilaiden osaamisessa tapahtuu hajaantumista verrattaessa ensimmäisen ja kolmannen mittauskerran pisteitä toisiinsa

Lisäksi tutkittiin tehtäväkohtaiset osaamisprosentit kullakin mittauskerralla (Taulukko 3).

Taulukko 3. Oppilaiden kolmen eri mittauskerran osaamisprosentti tehtävittäin

Mittaus	*N*	*t1*	*t2*	*t3*	*t4*	*t5*	*t6*	*t7*	*t8*	*t9*	*t10*
1.	74	63,5 %	67,6 %	75,0 %	75,4 %	37,2 %	50,0 %	24,3 %	37,9 %	12,2 %	21,6 %
2.	74	79,8 %	77,7 %	71,0 %	83,1 %	72,3 %	59,1 %	18,9 %	50,0 %	25,7 %	33,1 %
3.	66	77,3 %	79,5 %	62,9 %	86,4 %	53,1 %	39,4 %	**34,9 %**	19,0 %	12,1 %	26,5 %

Kun verrataan ensimmäisen ja kolmannen mittauksen välisiä osaamisprosentteja tehtävittäin, huomataan, että suurin kehitys on tehtävässä t5 (erinimisten murtolukujen summa), jossa osaamisprosentti kasvaa lähes 16 %-yksikköä. Tehtävissä t3, t6, t8 ja t9 kehitys on ollut negatiivista, muissa kehitys on ollut noin 4 – 14 %-yksikköä. Murtoluvun muuntaminen desimaalilukumuotoon (t7) hallittiin heikosti ensimmäisessä mittauksessa ja vielä heikommin toisessa mittauksessa, kolmannessa mittauksessa tehtävä oli vaihdettu murtolukujen väliseksi kertolaskutehtäväksi.

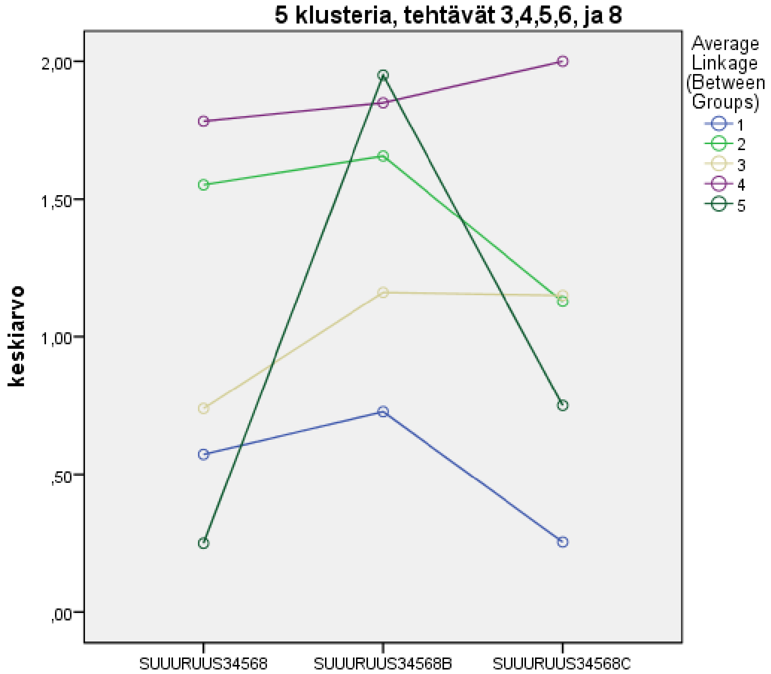
Eri oppimisprofiilit

Kuten edellä havaittiin (Kuvio 2) osa oppilaista parantaa suoritustaan alkumittauksesta toiseen mittaukseen mutta osaamisen taso laskee kolmannessa mittauksessa. Toiset oppilaat tuntuvat hallitsevan asian hyvin jo alkumittauksessa, joten parannettavaa on vähän kolmanteen mittauskertaan, ja osa oppilaista parantaa suoritustaan mittaus mittaukselta. Ikävä kyllä tutkimusjoukossa on myös oppilaita, joiden suoritus heikkenee mittauskerrasta toiseen. Minkälaisia oppimisprofiileita on löydettävissä oppilaiden joukosta?

Cramer ym. (1999) tutkimuksen mukaan murtoluvun suuruuden ymmärtäminen tukee laskuproseduurien oppimista. Seuraavaksi keskityn tutkimaan miten oppilaat suoriutuivat tehtävissä, joissa murtolukujen suuruuden ymmärtämisestä on apua. Tällaisia tehtäviä ovat: t3: murtolukujen suuruusjärjestys ($\frac{1}{7}, \frac{1}{12}, 1, \ \frac{5}{6}\ ja\ \frac{4}{3}$), t4: samannimisten murtolukujen erotus ($\frac{3}{7} - \frac{1}{7}$), t5: erinimisten murtolukujen summa ($\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$), t6: murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla ($3 \cdot \frac{1}{5}$) ja t8: murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla ($\frac{4}{6} : 2$). Tehtävä 7 jätettiin tässä tarkastelun ulkopuolelle koska harva oppilas sai siitä pisteitä ensimmäisessä ja toisessa mittauksessa, ja koska kolmannessa mittauksessa tehtävän tilalla oli murtolukujen välinen kertolaskutehtävä.

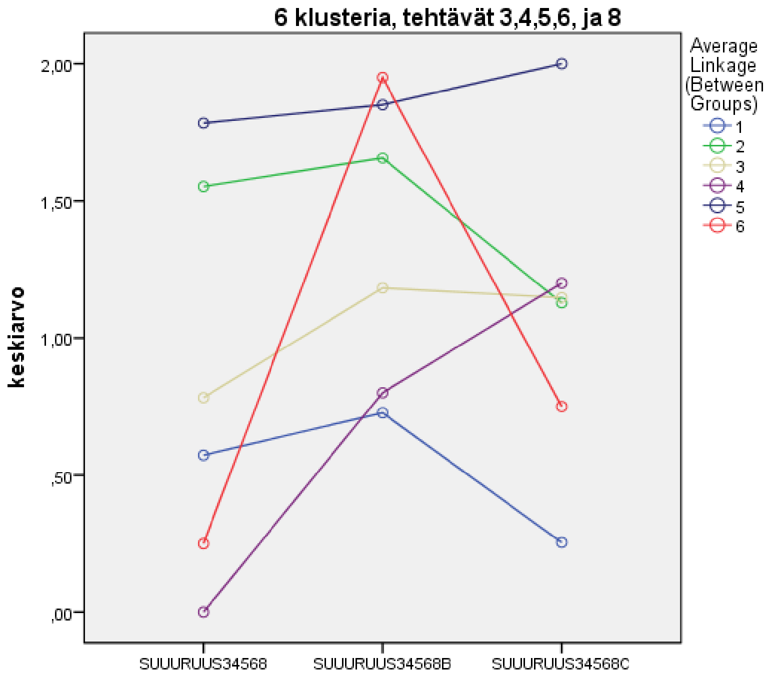
Murtolukujen peruslaskutoimituksiin ja murtolukujen suuruusjärjestykseen liittyvästä viidestä tehtävästä (t3,…t6, ja t8) muodostettiin summamuuttuja, jonka reliabiliteettiarvot eri mittauskerroilla olivat alkumittauksessa Cronbachin alpha:

0,704, toisessa mittauksessa Cronbachin alpha: 0,660 ja kolmannessa mittauksessa Cronbachin alpha: 0,582. Oppilaat luokiteltiin hierarkkista klusterianalyysiä käyttäen eri klusteriluokkiin, osaamisprofiileihin, sen mukaan miten heidän summamuuttujansa oli saanut pisteitä eri mittauksissa. Kun klusteriluokkia oli kolme tai neljä, osaamisprofiilit olivat samansuuntaisia. Vasta jaettaessa aineisto viiteen klusteriluokkaan, joukosta nousivat esiin ne oppilaat, jotka hallitsivat murtolukujen suuruusjärjestyksen ja murtolukujen peruslaskutoimituksiin liittyvät tehtävät hyvin jo alkumittauksessa, seitsemännen luokan syksyllä (Kuvio 3).



Kuvio 3. Aineisto jaettuna viiteen osaamisprofiiliin.

Kuudes klusteriluokka kuitenkin nosti esiin oppilaan, jonka osaamistaso oli alussa heikoin mahdollinen, mutta joka paransi tulostaan kummallakin myöhemmällä mittauskerralla (Kuvio 4). Jaettaessa aineisto näin moneen luokkaan, oppimisprofiiliryhmien koko pienenee ja ryhmä saattaa käsittää enää yhden tai muutamia oppilaita. Koska tuo yksittäinen oppilas tuo positiivisella kehityksellään mahdollisesti uutta informaatiota oppimisesta, keskityn tarkemmin tarkastelemaan kuutta oppimisprofiilia.



Kuvio 4. Summamuuttujan kolmella eri mittauskerralla saatujen arvojen perusteella muodostetut kuusi klusteria.

Taulukko 4. Klusteriluokat, frekvenssit ja nimitykset

Klusteriluokka	*Frekvenssi*	*Nimi*
1	11	Heikot
2	25	Taantujat
3	17	Hieman oppivat
4	1	Oppii
5	6	Hyvät
6	2	Ulkoa oppivat

Seuraavaksi tarkastelen tarkemmin kuuden klusterin joukkoa ja kunkin klusterin tehtäväkohtaisia osaamisprosentteja ensimmäisessä mittauksessa (Taulukko 5), toisessa mittauksessa (Taulukko 6) ja kolmannessa mittauksessa (Taulukko 7). Tarkastelun kohteena ovat kaikki tehtävät 1 – 10 mahdollisen lisäinformaation saamiseksi oppilaiden valmiuksista ja taidoista eri mittauskerroilla.

Taulukko 5. Ensimmäisessä mittauksessa oikein vastanneiden osuudet oppimisprofiileittain

Tehtävä	*Heikot (11),*	*Taantujat (25)*	*Ulkoa-oppivat (2)*	*Hieman oppivat (17)*	*Oppii (1)*	*Hyvät (5)*
t1: laskujärjestyssääntö	36 %	80 %	50 %	76 %	0 %	80 %
t2: suurin desimaaliluku	91 %	100 %	100 %	94 %	0 %	100 %
t3: murtoluvut suuruusjärjestykseen	9 %	72 %	0 %	41 %	0 %	80 %
t4: samannimisten erotus	82 %	100 %	50 %	100 %	0 %	100 %
t5: erinimisten summa	0 %	64 %	0 %	24 %	0 %	100 %
t6: murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla	18 %	80 %	0 %	41 %	0 %	80 %
t7: murtoluvun desimaalilukuesitys	0 %	56 %	0 %	0 %	0 %	60 %
t8: murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla	27 %	60 %	0 %	24 %	0 %	80 %
t9: murtoluvun tiheys, samannimiset	45 %	16 %	0 %	29 %	100 %	0 %
t10: murtoluvun tiheys, erinimiset	36 %	36 %	50 %	53 %	100 %	20 %

Lähes kaikki oppilaista tunnistivat suurimman desimaaliluvun (t2) mutta laskujärjestyssääntö (t1) on monelle tutkimuksen oppilaista vielä epäselvä yläkouluun tultaessa (Taulukko 5). Murtolukujen suuruusjärjestystä ei hallita mutta suurin osa osaa laskea samannimisten murtolukujen erotuksen. Ainoastaan Hyvät hallitsevat erinimisten murtolukujen summan ja luonnollisella luvulla murtoluvun kertomisen ja jakamisen.

Taulukko 6. Toisessa mittauksessa oikein vastanneiden osuudet oppimisprofiileittain

Tehtävä	*Heikot (11)*	*Taantujat (25)*	*Ulkoa-oppivat (2)*	*Hieman oppivat (17)*	*Oppii (1)*	*Hyvät (5)*
t1: laskujärjestyssääntö	36 %	96 %	100 %	94 %	100 %	100 %
t2: suurin desimaaliluku	100 %	100 %	50 %	94 %	100 %	100 %
t3: murtoluvut suuruusjärjestykseen	9 %	68 %	50 %	35 %	0 %	100 %
t4: samannimisten erotus	82 %	100 %	100 %	94 %	100 %	100 %
t5: erinimisten summa	45 %	84 %	100 %	82 %	100 %	100 %
t6: murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla	36 %	76 %	100 %	59 %	0 %	80 %
t7: murtoluvun desimaalilukuesitys	0 %	36 %	50 %	6 %	0 %	80 %
t8: murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla	27 %	64 %	100 %	41 %	0 %	100 %
t9: murtoluvun tiheys, samannimiset	55 %	24 %	50 %	29 %	0 %	60 %
t10: murtoluvun tiheys, erinimiset	55 %	48 %	50 %	65 %	0 %	80 %

Toisessa mittauksessa oppilaat ovat oppineet erinimisten murtolukujen summan ja suurempi joukko osaa myös kertoa luonnollisella luvulla (Taulukko 6). Murtolukujen suuruusjärjestyksen hallinnassa ei ole tapahtunut juurikaan kehittymistä ensimmäiseen mittauskertaan verrattuna.

Kolmannessa mittauksessa (Taulukko 7) erinimisten murtolukujen summa –tehtävässä, sekä murtoluvun kertolasku- että jakolaskutehtävässä tapahtuu suorituksen heikkenemistä etenkin ryhmässä Taantujat.

Taulukko 7. Kolmannessa mittauksessa oikein vastanneiden osuudet ryhmittäin

Tehtävä	*Heikot (11)*	*Taantujat (25)*	*Ulkoa-oppi-vat (2)*	*Hieman oppi-vat (17)*	*Oppii (1)*	*Hyvät (5)*
t1: laskujärjestyssääntö	45 %	16 %	100 %	94 %	100 %	100 %
t2: suurin desimaaliluku	100 %	100 %	100 %	94 %	0 %	100 %
t3: murtoluvut suuruusjärjestykseen	18 %	68 %	0 %	29 %	100 %	100 %
t4: samannimisten erotus	45 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %
t5: erinimisten summa	9 %	64 %	50 %	71 %	0 %	100 %
t6: murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla	0 %	32 %	0 %	65 %	100 %	100 %
t7: murtolukujen kertolasku	18 %	40 %	0 %	47 %	0 %	80 %
t8: murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla	9 %	16 %	0 %	12 %	0 %	100 %
t9: murtoluvun tiheys, samannimiset	9 %	12 %	0 %	12 %	0 %	40 %
t10: murtoluvun tiheys, erinimiset	18 %	52 %	0 %	65 %	0 %	60 %

Tiheyteen liittyvät tehtävät (t9 ja t10) osattiin yleisesti heikosti ja siitäkin huolimatta ne antavat liian positiivisen kuvan oppilaiden osaamisen tasosta. Tehtävät olivat monivalintatehtäviä, joiden oikea vastausvaihtoehto oli ”monta” ja muut vaihtoehdot olivat ”0” ja ”1”. Oppilas saattoi virheellisellä päättelyllään päätyä siihen, että annettujen murtolukujen välissä olisi vain kaksi murtolukua ja siten rengastaa oikean vastausvaihtoehdon ”monta”, ja näin saada pisteen. Siksi tarkastelen seuraavaksi tarkemmin, *miten* oppilaat perustelivat vastauksensa.

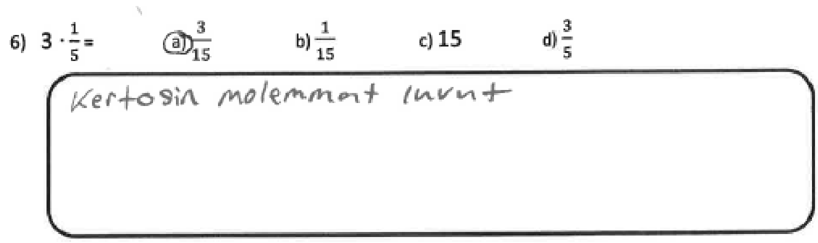
Perusteluiden tarkempi tarkastelu

Oppilaiden antamat perustelut luokiteltiin luokitteluavaimella viiteen luokkaan (Taulukko 8). Luotettavuuden varmistamiseksi lisäkseni toinen henkilö luokitteli ensimmäisen ja toisen mittauskerran vastaukset. Verrattaessa luokitteluja vastaavuus luokittelujen välillä oli noin 95 % ja keskustelun jälkeen päästiin 100 % yksimielisyyteen. Oppilaiden perustelut arvioitiin pistein siten, että luokan 4 tai 5 perustelusta sai yhden pisteen, muista ei tullut pisteitä.

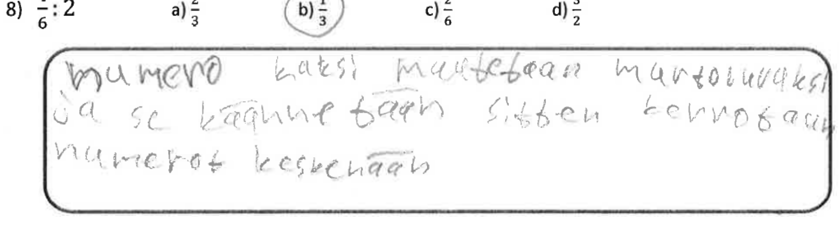
Taulukko 8. Oppilaiden perustelujen luokittelu ja esimerkki kustakin tyypistä.

Perustelu	*Luokka*	*Esimerkki*
on tyhjä	1	
ei lisäinformaatiota	2	”Arvasin”, tai antaa vastauksen uudestaan: $\frac{3}{5}$
on väärä	3	Väärä proseduuri: $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{3}{15}$
on oikea	4	Oikea proseduuri, selitys tai kuva
osoittaa ymmärrystä	5	Käyttää oikeita käsitteitä oikeassa kohdassa: ”*2,3 on suurin koska siinä on eniten kokonaisia*.”

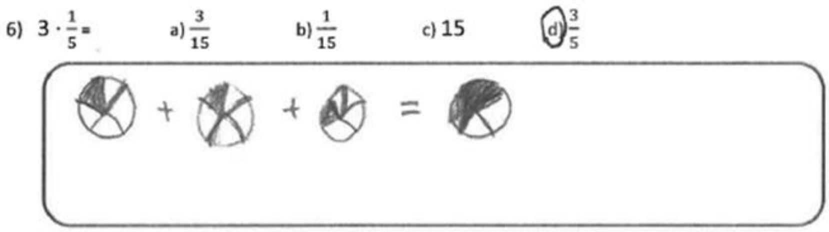
Seuraavaksi esittelen esimerkit vastausluokista 3 - 5 (Kuviot 5 - 7).



Kuvio 5. Vastausluokka 3: Perustelu kuvaa virheellistä proseduuria. (Oppilas 69A)

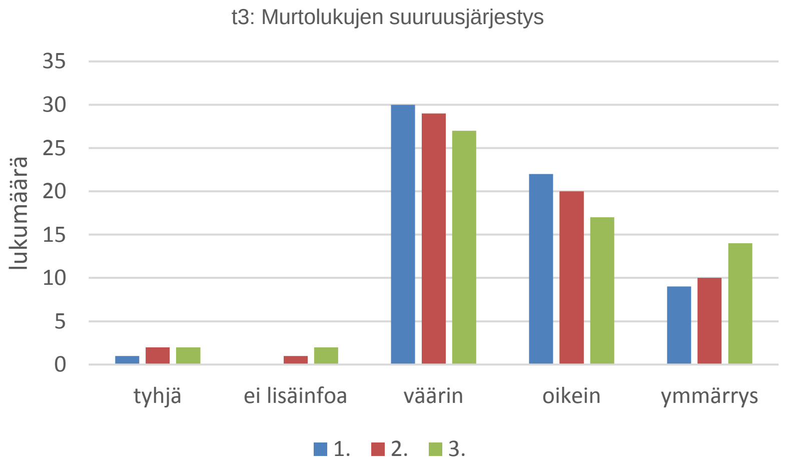


Kuvio 6. Vastausluokka 4: Sanallinen perustelu kuvaa oikeaa proseduuria. (Oppilas 40B)



Kuvio 7. Vastausluokka 5: Oppilas perustelee vastauksensa piirroksella, joka ilmentää ymmärrystä yhteenlaskun ja kertolaskun välillä. (Oppilas 29B)

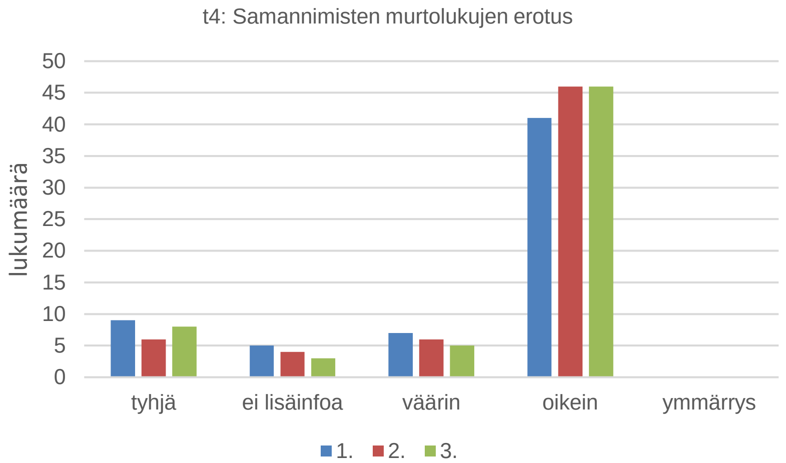
Seuraavaksi esittelen tehtävien t3 – t6 ja t8 perustelujen jakautumisen luokittain kaikissa kolmessa mittauksessa.



Kuvio 8. Oppilaiden perusteluissa moni tukeutuu laskuproseduuriin

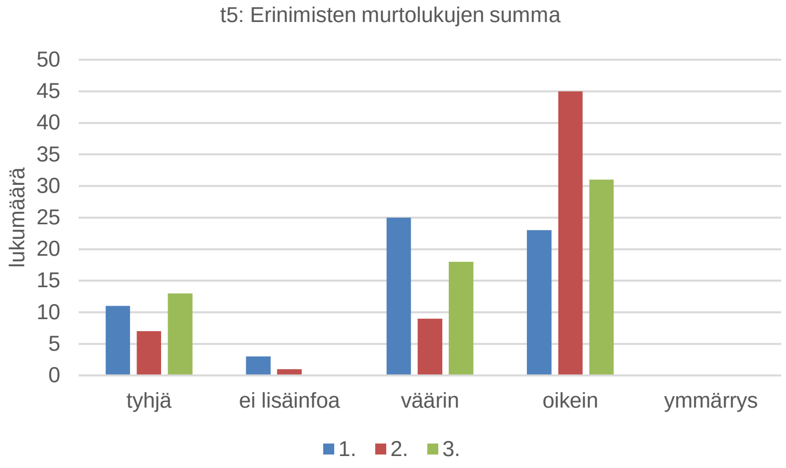
Tehtävässä kolme (Kuvio 8) ymmärryksen osoittamiseksi tulkittiin se, että vastaaja käytti oikein pienempi kuin - tai suurempi kuin –merkkiä tai että hän muutti murtoluvun $\frac{4}{3}$ sekalukumuotoon ja näin osoitti ymmärtävänsä, että kyseinen luku on suurempi kuin yksi kokonainen. Tyypilliset virheet johtuivat juuri murtoluvun $\frac{4}{3}$ sijoittamisesta muihin lukuihin nähden väärään kohtaan tai luvun yksi puuttumisesta. Vain harva jätti tehtävän perustelun kokonaan tyhjäksi.

Samannimisten murtolukujen erotus –tehtävän perusteluissa korostui laskuproseduurin nojaaminen (Kuvio 9). Vääriä perusteluja oli todella vähän ja ne vähenivät mittaus mittaukselta.



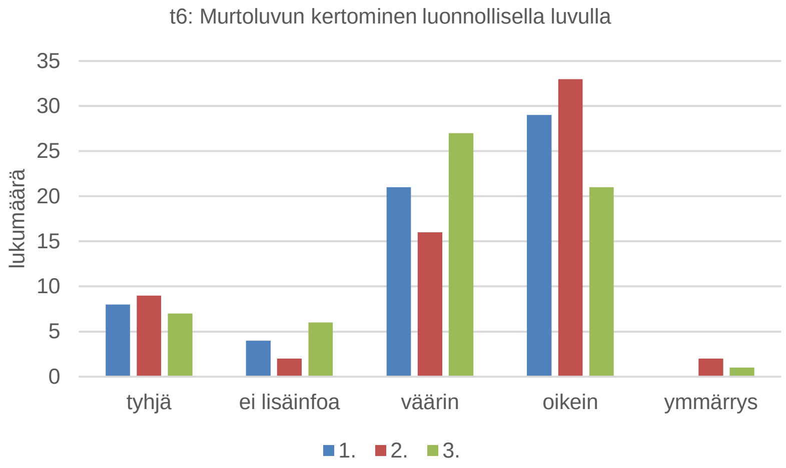
Kuvio 9. Oppilaiden perusteluissa oikea laskuproseduuri hallitsee alusta asti

Erinimisten murtolukujen summa –tehtävässä (Kuvio 10) toisella mittauskerralla oikeiden vastausten määrä nousee huimasti ensimmäiseen mittaukseen verrattuna mutta kolmannella kerralla oikeiden vastausten määrä laskee. Yhä suurempi osa oppilaista jätti perustelun tyhjäksi



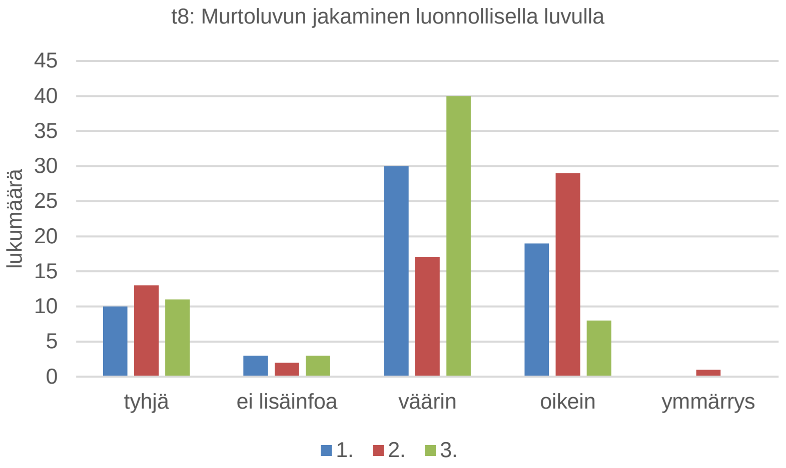
Kuvio 10. Alkumittauksessa väärään laskuproseduuriin nojaavia oli enemmän kuin oikeaan laskutapaan nojaavia, mutta oikeaa laskutapaa käyttävien määrä kasvaa huimasti 2. mittauksella

Tehtävän kuusi perusteluissa (Kuvio 11) toisella mittauskerralla laskua perusteltiin oikealla prosessilla ja löytyipä jopa ymmärrystä osoittavia ratkaisuja (Kuvio 6). Kolmannella mittauskerralla virheellisten laskuproseduurien käyttö kuitenkin lisääntyi ja oikeiden proseduurien käyttö väheni.



Kuvio 11. Oppilaat perustelivat 1. ja 2. mittauksessa vastaustaan enemmän oikealla proseduurilla kuin 3. mittauksessa

Tehtävän kahdeksan perusteluissa (Kuvio 12) korostuu väärän laskuproseduurin käyttö sekä ensimmäisessä että kolmannessa mittauksessa. Toisessa mittauksessa oikeaa laskuproseduuria käyttää useampi kuin väärää mutta perusteluja jätetään myös tyhjäksi eniten juuri toisessa mittauksessa.



Kuvio 12. Toisella mittauskerralla suurin osa oppilaista perusteli vastaustaan oikealla proseduurilla mutta palasi virheelliseen proseduuriin kolmannella mittauskerralla

Oppimisprofiiliryhmien tarkempi tarkastelu

Aineiston pieni koko mahdollisti oppilaiden vastausten uudelleen läpikäymisen käsin. Oppilaat jaettiin oppimisprofiilinsa mukaan ryhmiin ja sitten ryhmä kerrallaan käytiin oppilaiden vastaukset läpi paperi paperilta etsien vastauksista yhteisiä piirteitä.

Klusteri 1: Heikot, n = 11

Oppilaat pärjäsivät alkutestissä heikosti, paransivat toisessa mittauksessa hieman mutta taantuivat lähtötasonsa alapuolelle kolmannessa mittauksessa. Tähän luokkaan kuuluvia oppilaita yhdisti se, että he eivät muista ryhmistä poiketen hallinneet laskujärjestyssääntöä. He kuitenkin tunnistivat annetuista desimaaliluvuista suurimman. Murtolukujen järjestäminen suuruusjärjestykseen ei onnistunut ryhmältä oikein missään mittauksessa. Murtolukujen peruslaskutoimituksiin liittyvissä tehtävissä oppilaiden ratkaisuissa näkyi vahva nojaaminen luonnollisten lukujen ominaisuuksiin. Toisessa mittauksessa lähes puolet osasi jo ratkaista erinimisten murtolukujen summan mutta kolmannessa mittauksessa moni palasi aikaisempaan strategiaansa. Virheelliset ratkaisut ilman perusteluja lisääntyivät paljon kolmannessa mittauksessa.

Klusteri 2: Taantujat, n = 25

Tämä on ryhmistä suurin. Oppilaat hallitsivat asiat alussa hyvin. Samannimisten murtolukujen erotus hallittiin todella hyvin ja erinimisten summa kohtuullisesti. Noin 70 % ryhmän oppilaista hallitsi murtolukujen suuruusjärjestyksen. Tässä ryhmässä tunnistettiin murtoluvun desimaalilukuesitys alkumittauksessa mutta tieto tuntui osalta katoavan toisessa mittauksessa. Kolmannessa mittauksessa yllättäen laskujärjestyssääntö näytti oppilailta unohtuneen. Virheelliset proseduurit lisääntyivät toisessa ja kolmannessa mittauksessa etenkin kerrottaessa ja jaettaessa murtolukua luonnollisella luvulla.

Klusteri 3: Hieman oppivat, n = 17

Tämä ryhmä hallitsi alkumittauksessa laskujärjestyssäännön, desimaalilukujen suuruusvertailun ja samannimisten murtolukujen erotuksen. Hieman alta puolet ryhmästä osasi alussa järjestää murtoluvut suuruusjärjestykseen mutta oikeiden vastausten lukumäärä väheni mittaus mittaukselta. Toisessa mittauksessa erinimisten murtolukujen summan hallitsi jo yli 80 %, kun alkumittauksessa tehtävän osasi 24 %. Kerto- ja jakolaskussa näkyi aluksi virheellinen proseduuri, minkä käyttö väheni toisessa ja kolmannessa mittauksessa kertolaskun osalta, mutta virheellisen proseduuriin nojaaminen lisääntyi murtoluvun jakolaskussa kolmannella mittauskerralla.

Klusteri 4: Oppiva, n = 1

Tämän klusterin muodostaa yksi ainoa oppilas. Alussa hän ei hallinnut mitään testin tehtävistä. Ratkaisuissa näkyi vahva nojaaminen luonnollisten lukujen ominaisuuksiin. Toisessa mittauksessa hän sai jo laskujärjestyssäännön oikein, tunnisti suurimman desimaaliluvun, hallitsi niin samannimisten murtolukujen erotuksen kuin erinimisten murtolukujen summankin.

Kolmannessa mittauksessa hän osasi ratkaista tulon oikein sekä järjestää murtoluvut suuruusjärjestykseen. Murtoluvun jakamisen luonnollisella luvulla hän silti ratkaisi joka kerta jakamalla sekä osoittajan että nimittäjän annetulla jakajalla. Merkittävää on, että hänen suorituksensa paranee mittaus mittaukselta.

Klusteri 5: Hyvät, n = 5

Tässä ryhmässä saavutetaan kattoefekti, ryhmä osasi alkumittauksessa hyvin testin tehtävät. Murtoluvun desimaalilukuesitystä eivät silti kaikki tunnistaneet vielä toisessakaan mittauksessa. Tämä on ainut ryhmä, jossa uusi asia, murtolukujen välinen kertolasku, hallitaan hyvin. Tiheystehtävien kohdalla (t9 ja t10) kaikki nojaavat aluksi luonnollisten lukujen ominaisuuksiin mutta toisessa ja kolmannessa mittauksessa näin tekee enää yksi oppilas.

Klusteri 6: Ulkoa oppineet, n = 2

Ryhmän muodosti vain kaksi oppilasta. Alussa he tunnistivat vain suurimman desimaaliluvun. He eivät hallinneet murtolukujen suuruusvertailua vaan nojasivat luonnollisten lukujen ominaisuuksiin järjestäen murtoluvut suuruusjärjestykseen joko osoittajien tai nimittäjien mukaan. Toisessa mittauksessa he kuitenkin saavuttivat loistavan tuloksen, murtolukujen peruslaskutoimitukset sujuivat vaikka toinen heistä ei vieläkään saanut murtolukujen suuruusvertailua oikein. Kolmannessa mittauksessa molemmat olivat palanneet käsityksissään lähes samaan ensimmäisen mittauksen kanssa: samannimisten murtolukujen erotus hallittiin mutta erinimisten summan sai oikein vain toinen oppilaista. Kerto- ja jakolaskussa oppilaat tukeutuivat jälleen väärään laskuproseduuriin eli kertoivat sekä osoittajan että nimittäjän annetulla kertojalla ja jakoivat sekä osoittajan että nimittäjän annetulla jakajalla.

POHDINTAA

Tutkimuksessa selvitettiin miten oppilaat hallitsevat luonnollisten lukujen laskujärjestyssäännön, lukujen suuruusvertailun desimaaliluvuilla ja murtoluvuilla, murtolukujen peruslaskutoimitukset ja murtolukujen tiheyskäsitteen. Oppilaita testattiin kolme kertaa kynä ja paperi -testillä, alkumittaus oli seitsemännen luokan syksyllä, toisen kerran joulun tienoilla ja kolmannen kerran kahdeksannen luokan syksyllä.

Laskujärjestyssääntö osattiin melko hyvin (63,5 %) seitsemännen luokan alussa ja tilanne parani kolmannessa mittauksessa (77,3 %). Mutta noin neljännes oppilaista ei hallitse laskujärjestyssääntöä vielä kahdeksannen luokan alussakaan. Seitsemännen luokan syksyllä oppilaat hallitsivat mukavasti murtolukujen suuruusjärjestyksen mutta taito heikkeni kahdeksannelle tultaessa. Ongelmia osalla aiheutti sekaluvun sijoittaminen oikeaan paikkaan. Todella moni jätti luvun yksi joko kokonaan sijoittamatta tai sijoitti sen suurimmaksi luvuksi. Tästä välittyy sama ajatus kuin Stafylidoun ja Vosniadoun (2004) tutkimuksessa, että oppilaat ajattelevat murtolukuja osana jostain kokonaisesta ja että murtoluvun suuruus on luvun nolla ja yksi välissä. Ainoa tehtävä, jossa oppilaiden suorituksen keskiarvo näytti paranevan mittaus mittaukselta oli samannimisten murtolukujen erotus –tehtävä, kahdeksannen luokan alussa osaamisprosentti oli peräti 86,4 %. Vertailun vuoksi erinimisten murtolukujen summa tehtävässä osaamisprosentti kahdeksannella luokalla oli noin 53 % eli noin puolet ei osaa laskea erinimisiä murtolukuja yhteen kahdeksannen luokan alussa. Oppilaiden taito murtoluvun kertomiseen ja jakamiseen luonnollisella luvulla taantui seitsemänneltä luokalta kahdeksannelle luokalle tultaessa. Tiheystehtävissä (t9 ja t10) ei tapahtunut juurikaan muutosta.

Muutos oppilaiden testisuorituksissa oli vähäistä ensimmäisen ja kolmannen mittauksen välillä, keskimäärin vain noin 3 %-yksikköä. Tämä havainto on samansuuntainen Hihnalan (2005) tutkimuksen kanssa, jonka mukaan keskimääräinen kehitys murtolukujen ratkaisuprosentissa seitsemänneltä luokalta kahdeksannelle luokalle olisi noin 8 %-yksikköä. Murtoluvun muuntaminen desimaaliluvuksi osattiin heikosti, mikä oli yhdenmukainen Niemen (2004) ja Hihnalan (2005) havaintojen kanssa. Näverin (2009) huoli siitä, että oppilaat eivät edisty toivotulla tavalla yläkoulun ensimmäisen lukuvuoden aikana, näyttäisi pitävän edelleen paikkansa, vaikka suoritusten hetkittäistä paranemista onkin nähtävissä toisessa mittauksessa.

Aineisto jaettiin kuuteen oppimisprofiiliin (Heikot, Taantujat, Hieman oppivat, Oppiva, Hyvät ja Ulkoa oppineet) sen mukaan miten murtoluvun suuruuskäsitteeseen liittyvä, viiden tehtävän summamuuttuja, sai pisteitä kolmella eri mittauskerralla. Heikkojen ryhmässä murtolukujen suuruusjärjestystä ei hallittu missään vaiheessa mikä osittain näkyi virheellisinä laskuproseduureina ja tukeutumisena luonnollisten lukujen ominaisuuksiin. Heikkojen suoriutumisessa ei juurikaan tapahtunut kehittymistä. Hieman oppivien ryhmässä näkyi heidän kykynsä oppia uutta. Murtoluvun suuruusjärjestystehtävässä oikeiden ratkaisujen määrä väheni mutta esimerkiksi murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla osattiin paremmin myöhemmillä mittauskerroilla. Ehkäpä seitsemännen luokan opetus oli enemmänkin keskittynyt nimenomaan laskuproseduurien oppimiseen ja kertaamiseen kuin murtoluvun suuruuden ymmärtämiseen. Ryhmä Taantujat kattoi noin kolmasosan tutkimusjoukosta. Suurin osa tämän ryhmän oppilaista hallitsi murtolukujen suuruusvertailun seitsemännen luokan alussa, eikä siinä tapahtunut suurtakaan muutosta. Yllättäen kuitenkin laskujärjestyssääntö unohdettiin kahdeksannelle luokalle tultaessa. Oppiva oppilas ei hallinnut alussa mitään mutta toisessa mittauksessa hän hallitsi jo laskujärjestyssäännön, murtolukujen summan ja erotuksen. Ja kolmannessa mittauksessa hän hallitsi murtolukujen suuruusjärjestyksen ja tulon oikein. Ilmeisesti opetus oli nyt osunut maaliinsa, sillä oppilas paransi koko ajan suoritustaan. Hyvät hallitsivat alakoulun asiat hyvin yläkouluun tullessaan. Mutta muutama Hyvistäkään ei tunnistanut murtoluvun $\frac{1}{3}$ desimaalilukuesitystä. Tämä antaa viitteitä siitä, että käsitteet opetetaan toisistaan irrallaan, jolloin oppilaat eivät välttämättä näe yhteyttä murtolukujen ja desimaalilukujen välillä. Ryhmä Ulkoa oppineet oli onneksi pieni, sen muodosti vain kaksi oppilasta. Tämä ryhmä löysi alkumittauksessa suurimman desimaaliluvun mutta ei osannut juuri muuta. Toisessa mittauksessa he kuitenkin loistivat, murtolukujen peruslaskutoimitukset sujuivat vaikka vieläkään toinen heistä ei saanut murtolukujen suuruusjärjestystä oikein. Kolmas mittaus oli vain hieman ensimmäistä parempi, oppilaat palasivat käyttämään virheellisiä laskuproseduureja.

Tarkasteltaessa oppilaiden antamia perusteluja vastauksilleen, proseduurit korostuivat. Hyvin vähän perusteltiin vastausta sanallisesti ja vielä vähemmän piirroksin. Näyttää siltä, että traditio siitä, miten matematiikkaa kirjoitetaan ja minkälainen perustelumuoto on hyväksyttävää, suosii ylivoimaisesti symbolista esitystapaa. Tämä on toki matemaatikoille se oikea ja hyväksi havaittu työtapa mutta sopiiko se tavalliselle yläkoulun oppilaalle?

Koska aineisto on melko pieni, myös oppimisprofiiliryhmien koot jäivät pieniksi, ja yksi oppilas saattoi muodostaa oman ryhmänsä. Tilastollisia yleistyksiä aineiston pohjalta ei voida tehdä mutta opettajan työn kannalta on mielenkiintoista etsiä, mikä on se riittävä tieto- ja taitotaso, jolle oppilas pystyy vielä konstruoimaan ja näin muokkaamaan omaa käsitystään murtoluvuista. Murtolukujen suuruuden ymmärtäminen näyttäisi olevan avainasemassa murtolukujen laskuproseduurien ymmärtämiselle. Ne ryhmät, joissa murtolukujen suuruusvertailu sujui, myös laskuproseduurit tuntuivat sujuvan. Ne oppilaat, jotka eivät hallinneet laskujärjestyssääntöä 7. luokalle tullessaan, eivät myöskään juurikaan kehittyneet lukuvuoden aikana. Tällaiset oppilaat ovat vaarassa pudota opetuksesta. Kun taas ne oppilaat, jotka tunnistivat 7. luokalle tullessaan murtoluvun desimaalilukuesityksen, olivat jo lähtökohtaisesti vahvoilla, pystyivät hyödyntämään annettua opetusta ja oppimaan uutta.

Missä sitten on vika? Opetetaanko murtolukuja liian varhain alakoulussa, jolloin oppilaat eivät vielä ymmärrä mistä on kyse? Mielestäni murtolukuja aletaan joko pohjustamaan aivan liian aikaisin tai sitten siirrytään liian aikaisin pois konkreettisten mallien ääreltä symboliesitysmuotoon. Mielestäni murtolukujen opettaminen kannattaisi siirtää vasta esimerkiksi neljännelle luokalle ja opettaa murtolukuja yhdellä kertaa hieman pidempi ajanjakso ja päästä samalla myös hieman pidemmälle. Tällöin oppilaat ehtisivät ihmetellä murtoluvun suuruutta, opetella samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua, tutustua sekaluvun käsitteeseen ja sekalukujen yhteen- ja vähennyslaskuun, ja opetella jopa murtoluvun kertomista ja jakamista luonnollisella luvulla. Näin murtoluvuista ja niiden välisistä laskutoimituksista olisi mahdollista muodostaa yhtenäisempi kuva. Opetussuunnitelmassa (2004) murtolukujen opetus oli pirstottu viiden kouluvuoden ajalle, jolloin yksittäinen murtolukujakso oli kovin lyhyt sekä ajallisesti että asiasisällöllisesti.

Murtoluvun suuruuden ymmärtämiseen tulisi mielestäni kiinnittää enemmän huomiota alakoulussa, jotta oppilaat ymmärtäisivät sen laajemminkin kuin osana kokonaista. Liikaa kiirehditään opettamaan oppilaille laskuproseduureja symbolien avulla. Symboliesityksessä oppilaat helposti turvautuvat tuttuihin piirteisiin, ja hyödyntävät luonnollisten lukujen ominaisuuksia ymmärtämättä murtoluvun merkitystä. Ilman murtoluvun suuruuden ymmärtämistä, laskuproseduureja opitaan ulkoa hetkeksi ja sitten unohdetaan. Matematiikan aineenopettajalla saattaa olla liian positiivinen kuva uusien oppilaidensa todellisesta osaamistasosta katsoessaan alakoulun matematiikan opetussuunnitelman sisältöä. Opettajan olisikin hyvä testata yläkoulutulokkaansa ja varmistaa hallitsevatko oppilaat *luonnollisten lukujen laskujärjestyssäännön*, *murtolukujen suuruusvertailun* ja tunnistavatko he *murtoluvun desimaalilukuesityksen*. Edellä mainitut kolme taitoa erottelivat oppilaita tässä tutkimuksessa. Oppilaat, jotka hallitsivat hyvin murtolukujen peruslaskutoimitukset, osasivat yleensä myös järjestää murtoluvut suuruusjärjestykseen Tutkimuksen oppilaiden suorituksissa tapahtui kehittymistä vain muutaman prosenttiyksikön verran yhden lukuvuoden aikana. Jotain on tehtävä toisin, jotta saadaan oppi menemään paremmin perille.

Uudistuneessa Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014), matematiikan tavoitteissa vuosiluokille 7 – 9, nostetaan esille konkretia ja toiminnallisuus keskeisenä osana matematiikan opetusta ja opiskelua. Opettajien tulisi rohkaista oppilaita käyttämään ajattelua tukevia piirroksia ja välineitä, mikä osaltaan tukee tavoitetta kehittää viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja. (Opetushallitus 2014.). Ehkäpä uusi opetussuunnitelma luo viimein tilaa myös muillekin perustelutavoille kuin symboliselle esitysmuodolle. Oleellista on oppilaan ajattelun näkyväksi tekeminen, tavalla tai toisella. Opetussuunnitelmassa velvoitetaan aineenopettaja tukemaan oppilasta, jos hän havaitsee puutteita alempien vuosiluokkien keskeisissä sisällöissä, vaikka ne kuuluisivatkin alakoulun opetussuunnitelmaan. Aineenopettajien ja luokanopettajien olisi aika uudistaa opetustaan opetussuunnitelman hengessä ja antaa oppilaille konkretiaa oppimisen tueksi ja mahdollisuus ilmaista matemaattista ajatteluaan eri tavoin.

Jatkossa olisi kiinnostavaa toteuttaa interventio ja tutkia miten konkretia ja murtoluvun suuruuteen keskittyminen yhdessä vaikuttaisivat 6.-luokkalaisten ja 7.-luokkalaisten murtolukutaitoihin.

Lähteet

Cramer, K., Post, T. & delMas, R. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effect of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111–144.

DeWolf, M., Bassok, M. & Holyoak, K. (2015). From rational numbers to algebra: Separable contribution of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*, *133*, 72–84.

Hihnala, K. (2005). Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopiston julkaisusarja 278 (ss. 86, 89). Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Meert, G., Grégoire, J. & Noël M.-P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representation are used by 10- and 12-year-olds*? Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(3), 244–259.

Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Impli-cations of Whole Number Bias Teaching. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Niemi, E.K. (2004). Perusopetuksen oppimistulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisessa kontekstissa. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000. Turun yliopiston julkaisuja 216, Ser C. (ss. 131–132). Turku: Turun yliopisto.

Näveri, L. (2009). Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana. (ss. 11, 101). Helsingin yliopiston tutkimuksia 309. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet* (ss. 158–167). Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf [Luettu 15.05.2016].

Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet* (ss. 374–378). Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf [Luettu 10.10.2016]

Siegler, R. (2003). Implications of Cognitive Science Research for Mathematics Education. Teoksessa J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (toim.) *A research companion to principles and standards for school mathematics* (ss. 219–223). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Siegler, R. & Pyke, A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994–2004.

Siegler, R., Thompson C. & Schneider. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*, 273–296.

Soro, R. & Pehkonen, E. (1998). Kassel-projekti, osa 1. Peruskoulu oppilaiden matemaattiset taidot kansanvälisessä vertailussa. Helsingin yliopiston tutkimuksia 197 (ss. 29). Helsinki: Helsingin yliopisto.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*, 503–518.

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction*, *37*, 50–55.

Van Hoof, J., Vandewalle, Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *37*, 30–38.