



KONTINUUMIHYPOTEESI JA MALLIT

Vilppu Saarinen

Pro Gradu-tutkielma
Toukokuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:
Prof. Vesa Halava
Apul. Prof. Ville Salo

Turun yliopiston laatu järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

VILPPU SAARINEN: Kontinuumihypoteesi ja mallit
Pro Gradu-tutkielma, 29 s.
Matematiikka
Toukokuu 2025

Tässä tutkielmassa esitellään Zermelo-Fraenkel joukko-oppin aksioomat, sekä joitain perustuloksia, joiden jälkeen tutustutaan Paul Cohenin minimaaliseen malliin. Tämän jälkeen käydään läpi Cohenin pakotusmenetelmän kannalta tärkeät esitiedot osittaisista järjestyksistä, sekä esitellään itse menetelmä. Lopuksi muodostetaan edellä mainitulla menetelmällä minimaalisen mallin laajennus ja osoitetaan, että kontinuumihypoteesi ei toteudu kyseisessä laajennuksessa.

Asiasanat: Pro Gradu -tutkielma, joukko-oppi, ensimmäisen kertaluvun logiikka, kontinuumihypoteesi, pakotusmenetelmä.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Ensimmäisen kertaluvun logiikka ja Zermelo-Fraenkel joukko-oppi	2
2.1	Joukko-opin kieli	2
2.2	Zermelo-Fraenkel	2
2.2.1	E erityisiä joukkojen kokoelmia	4
2.2.2	Zermelo-Fraenkel kaavat	5
2.2.3	Kaavan kompleksisuus	5
2.3	Kumulatiivinen hierarkia	6
2.4	Relativisointi	6
2.5	Lévy-Montague reflektioperiaate	6
2.5.1	Kaavan absoluuttisuus	7
2.6	Löwenheimin-Skolemin lause alaspäin	8
2.7	Kontinuumihypoteesi	8
3	Konstruoituvat joukot ja minimaaliset mallit	10
3.1	Cohenin minimaalinen malli	10
4	Mallin laajentaminen ja pakotusmenetelmä	13
4.1	Lisättävä joukko	13
4.2	Osittaisista järjestyksistä	13
4.2.1	Osittaiset järjestykset	14
4.2.2	Osittainen järjestys \mathbb{P}	14
4.2.3	\mathbb{P} -nimet ja evaluaatiot	15
4.3	Totuus mallissa $M[G]$	16
4.3.1	Sisältymisrelaatio joukossa $M[G]$	17
4.3.2	Lauseista	17
4.4	Pakottaminen	17
4.4.1	Maksimaalisen ihanteen geneerisyys	18
4.4.2	Pakottamisrelaatio \Vdash	20
4.4.3	Pakottaminen käytännössä	20
4.5	$M[G]$ on malli	21
5	Kontinuumihypoteesin negaatio	24
5.1	Injektiivisen kuvauksen f_G lisääminen	24
5.1.1	Osittainen järjestys \mathbb{P}	24
5.2	Kardinaalit mallissa $M[G]$	24
5.2.1	Kardinaalien romahtaminen	25
6	Lopuksi	28

1 Johdanto

1800-luvun loppupuoliskolla Georg Cantor aloitti modernin joukko-opin tutkimuksen todistamalla Cantorin lauseen, jonka mukaan mikään joukko ei ole samankokoinen potenssijoukkonsa kanssa. Cantorin lauseen suorana seuraksena myös eri kokoisten äärettömyyksien määrä on ääretön. Kontinuumihypoteesi sanoo, että kokonaislukujen ja reaalilukujen äärettömyksien välissä ei ole ainuttakaan äärettömyyksen kokoluokkaa. Cantor itse yritti, tuloksetta, monia vuosia todistaa kontinuumihypoteesin paikkansa pitävyyttä. Vuonna 1900 Hilbert julkaisi avoimien kysymystensä listan, jolla myös kontinuumihypoteesi esiintyy.

1900-luvun ensimmäisinä vuosikymmeninä kehitys aksiomaattisessa joukko-opissa oli nopeaa. Zermelo ja Fraenkel kehittivät heidän mukaansa nimetyn Zermelo-Fraenkel-aksiomatisoinnin ja sen sisällä tuotettiin paljon uusia tuloksia. Vuonna 1940 Kurt Gödel osoitti, että kontinuumihypoteesi ei ole ristiriidassa Zermelo-Fraenkel-aksiomien (valinta-aksioma mukaan luettuna) kanssa.

Vuonna 1963 Paul Cohen onnistui osoittamaan, että kontinuumihypoteesin negaatiokaan ei ole ristiriidassa Zermelo-Fraenkel-aksiomien kanssa. Nämä kaksi todistusta yhdessä ratkaisevat Hilbertin ongelman Zermelo-Fraenkel-aksiomatisoinnin osalta, Zermelo-Fraenkel-aksiomatisoinnin sisällä ei voida sanoa mitään kontinuumihypoteesin paikkansa pitävyydestä, toisin sanottuna se on ratkeamaton.

Tämä tutkielma käsittelee Cohenin todistusta, sekä todistuksessa käytettyä pakotusmenetelmää (eng. forcing), jolla voidaan tuottaa haluttuja lauseita toteuttavilla malleilla. Tutkielman aluksi esitellään Zermelo-Fraenkel-joukko-opin aksiomat, mallien teorian perusteet ja Löwenheimin-Skolemin lause alaspäin, mitkä muodostavat Cohenin todistuksen pohjan. Näiden jälkeen, luvussa kolme, jotta saadaan jonkinlainen kuva tutkittavista malleista, tutustutaan Cohenin minimaaliseen malliin, joka toimii konkreettisenä esimerkkinä Zermelo-Fraenkel-joukko-opin numeroituvasta ja transitiivisesta mallista.

Luvussa neljä esitellään pakotusmenetelmä yksinkertaistetussa tapauksessa, jossa numeroituvaan ja transitiiviseen malliin lisätään yksi luonnollisten lukujen osajoukko ja osoitetaan, että uuden joukon huolellisella muodostamisella voidaan määrittellä kaikkien uutta joukkoa koskevien lauseiden totuus alkuperäisestä mallista käsin ja osoittaa uuden joukon toteuttavan halutut joukko-opin aksiomat.

Viidennessä luvussa todistetaan, että lisäämällä Zermelo-Fraenkel-aksiomiin ja valinta-aksiomaan kontinuumihypoteesin negaatio, saadaan edelleen ristiriidaton teoria. Tämä toteutetaan muodostamalla teorialle malli, aloittamalla ensin jostain joukko-opin numeroituvasta ja transitiivisesta mallista ja lisäämällä pakotusmenetelmän avulla malliin tarvittava määrä luonnollisten lukujen osajoukko ja injektiivinen kuvaus mallin alkiojoukosta \aleph_2 luonnollisten lukujen osajoukkoihin. Luvussa myös osoitetaan, että edellä kuvattu operaatio ei lisää malliin uusia, kardinaalilukujen välisiä bijektioita, romahduttaen kaksi kardinaalia yhdeksi.

Tutkielman päälähteenä on käytetty Serafim Batzogloun lähestyttävää artikkelia [1].

2 Ensimmäisen kertaluvun logiikka ja Zermelo-Fraenkel joukko-oppi

Tässä tutkielmassa rajoitutaan käsittelemään ensimmäisen kertaluvun logiikkaa ja Zermelo-Fraenkel joukko-oppia. Lukijalta odotetaan ensimmäisen kertaluvun logiikan perusteiden tuntemista joten tässä luvussa keskitytään esittelemään aksiomaattisen joukko-opin perusteita, sekä joitain tutkielman kannalta tärkeitä ensimmäisen kertaluvun logiikkaan erityisiä osa-alueita.

2.1 Joukko-opin kieli

Joukko-oppi käsittelee nimensä mukaisesti joukkoja. Ensimmäisen kertaluvun kieleksi se on hyvin yksinkertainen, sillä sen symboliaakkosto ei sisällä lainkaan vakioita tai funktioita. Relaatioita siihen kuuluu yksi, kaksipaikkainen sisältymisrelaatio \in . Sisältymisrelaatiota käyttävän kaavan $a \in b$ tulkitaan tarkoittavan a on joukon b alkio. Tämän lisäksi käytetään tutkielmassa käytetään myös yleisesti tunnettuja lyhenteitä kuten $a \subset b$, a on joukon b osajoukko.

Huomattakoon myös, että malleissa esiintyvät funktiot tai kuvaukset määritellään joukkoina, joihin kuuluvat vain järjestettyjä pareja siten, että millään kahdella joukon alkiolla ei samaa ole joukkoa parin ensimmäisenä alkiona. Merkintä $f(2) = 5$ on siis tämän muotoilun puitteissa ekvivalentti merkinnän $(2, 5) \in f$ kanssa.

2.2 Zermelo-Fraenkel

Zermelo aloitti joukko-opin aksiomatisointinsa vuoden 1908 artikkelillaan “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I”. Vuonna 1921 kirjeessään Abraham Fraenkel kuitenkin huomautti eräistä puutteista Zermelon järjestelmässä [2], ja myöhemmin Thoralf Skolemin ja John von Neumannin avulla aksiomatisointi saatiin muotoon, joka nykyään tunnetaan nimellä Zermelo-Fraenkel aksiomatisointi tai ZF .

Zermelo-Fraenkel-aksiomatiikka muodostuu seuraavista kahdeksasta joukko-opin aksiomasta. Jatkossa termi joukko-oppi viittaa aina seuraavaksi esiteltävään aksiomatisointiin.

1. **Ekstensionalisuusaksioma:** kaksi joukkoa ovat samat, jos niillä on samat alkiot, eli ZF -joukko-opin kaavana.

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$$

2. **Säännöllisyysaksioma:** jokaiseen epätyhjään joukkoon x kuuluu sellainen joukko y , että joukkojen x ja y leikkaus on tyhjä, eli ZF -joukko-opin kaavana.

$$\forall x [\exists a (a \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))]$$

3. **Erotteluaksioma:** aksiomaskeema, jokaista joukko-opin kielellä muodostettua kaavaa $\Phi(x)$, jossa ovat vapaina muuttujat $x, z, w_1, w_2, w_3, \dots, w_4$, kohti on olemassa aksioma, eli ZF -joukko-opin kaavana.

$$\forall z \forall w_1 \forall w_2 \dots \forall w_n \exists y \forall x [x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \Phi(w_1, w_2, w_3, \dots, w_4, z)]$$

4. **Pariaksioma:** jos x ja y ovat joukkoja, on olemassa joukko z , johon kuuluvat joukot x ja y , eli ZF -joukko-opin kaavana.

$$\forall x \forall y \exists z [x \in z \wedge y \in z]$$

5. **Yhdisteaksioma:** jokaista joukkoa x kohden on olemassa joukko z , kuuluu vain ja ainoastaan joukkoon x kuuluviin joukkoihin kuuluvat alkioit.

$$\forall x \exists z \forall a [a \in z \leftrightarrow \exists y (a \in y \wedge y \in x)]$$

Joukkoa z kutsutaan joukkojen $y \in x$ yhdisteeksi.

6. **Äärettömyysaksioma:** on olemassa sellainen joukko x , että $\emptyset \in x$, ja jos $y \in x$ niin myös $y \cup \{y\} \in x$, eli ZF -joukko-opin kaavana.

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

Pienin tämän aksioman mukainen joukko on ω .

7. **Korvausaksioma:** aksiomaskeema. Olkoon x joukko ja $P(a, b)$ sellainen kaava, että jos $P(x, y)$ ja $P(x, z)$ niin $y = z$. On olemassa joukko $im(P_x) = \{z | P(y, z), y \in x\}$.

8. **Potenssijoukonaksioma:** jokaista joukkoa x kohden on olemassa joukko, johon jokainen sen osajoukko kuuluu, eli ZF -joukko-opin kaavana.

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

Aksiomien voidaan katsoa takaavan, tai vaativan, tiettyjen joukkojen olemassaolon, jotta joukkojen kokonaisuutta voidaan pitää joukko-opin mallina. Luvussa 3.1 tullaan muodostamaan joukko-opin malli lähtemällä liikkeelle äärettömyysaksioman vaatimasta joukosta ja täydentämällä siitä malli lisäämällä aksiomien vaatimat joukot kerta toisensa jälkeen.

Tutkielman kannalta aksiomista merkittävimpiä ovat kaksi, potenssijoukonaksioma ja erotteluaksioma. Potenssijoukonaksioma, yhdessä erotteluaksioman kanssa, vaati jokaiselle joukolle, sen malliin kuuluvien osajoukkojen joukon olemassaoloa.

Erotteluaksioma ei tosiasiaassa ole yksittäinen aksioma vaan se on itseasiassa aksiomaskeema, jossa jokaiselle joukko-opin kielen yksimuuttujaiselle kaavalle on yksi aksioma, joista jokainen puolestaan vaatii, että jokaista joukkoa kohden ne joukon alkioit, jotka toteuttavat kaavan muodostavat joukon.

Näiden kahdeksan aksioman lisäksi otetaan usein mukaan valinta-aksioma, niin myös tässä tutkielmassa. Zermelo-Fraenkel aksiomat yhdessä valinta-aksioman kanssa tunnetaan kirjallisuudessa lyhenteellä ZFC

Määritelmä 1 (Valinta-aksioma). Jokaista keskenään erillisten ei-tyhjien joukkojen joukkoa x kohti on olemassa joukko y , johon kuuluu täsmälleen yksi alkio jokaisesta joukon x alkioista.

Valinta-aksioma on ekvivalentti useiden tunnettujen lauseiden, erityisesti Zornin lemma ja hyvinjärjestysperiaatteen, kanssa. Näistä tässä tutkielmassa tullaan käyttämään vain jälkimmäistä.

Määritelmä 2 (Hyvinjärjestysperiaate). Jokaiselle ei-tyhjälle joukolle x on olemassa hyvinjärjestys. Joukon x hyvinjärjestys on totaalinen järjestys, jossa jokaisella joukon x ei-tyhjällä osajoukolla on kyseisen järjestyksen mukainen pienin alkio.

2.2.1 Erityisiä joukkojen kokoelmia

Joukko-opin kehittämisen motivaationa on ollut halu saada perinteiselle matematiikalle jokin pohjateoria. Tästä syystä onkin valaisevaa tarkastella yhtä mahdollista tapaa käsitellä luonnollisia lukuja Zermelo-Fraenkel teoriassa.

Luonnolliset luvut määritellään rekursiivisesti, lukua nolla edustaa tyhjä joukko ja lukua yksi joukko, johon kuuluu tyhjä joukko. Luvun n seuraajaksi määritellään $n \cup \{n\}$. Näin saadaan määriteltyä kaikki luonnolliset luvut ja ne muodostavat tutun hyvinjärjestyksen sisältymisrelaation suhteen sillä, jos $a < b$, niin $a \in b$. Luonnolliset luvut ovat erikoistapaus joukoista, joita kutsutaan ordinaaleiksi, ne ovat nimittäin ainoat äärelliset ordinaalit.

Määritelmä 3. Joukko α on *ordinaali*, jos se on transitiivinen ja sisältymisrelaatio \in hyvinjärjestää sen.

Ordinaaleja on kahdenlaisia.

1. Joukko α on *seuraajaordinaali*, jos se on ordinaali ja on olemassa ordinaali β , jolle $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.
2. Joukko α on *rajaordinaali*, jos se on ordinaali ja $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$.

Luonnollisten lukujen joukko on esimerkki rajaordinaalista.

Koska ordinaalit ovat hyvinjärjestettyjä, voidaan niitä hyödyntää erilaisten määritelmien muodostamisessa *transfinitiittisen rekursion* avulla. Transfinitiittinen rekursio on menetelmä, jonka avulla voidaan äärellisesti määritellä mielivaltaisen kokoisia äärettömiä rakenteita, määrittelemällä pohjatapaus, seuraajaordinaalitapaus ja rajaordinaalitapaus. Esimerkiksi luvun 2.3 kumulatiivinen hierarkia määritellään transfinitiittisellä rekursiolla.

Tutkielman käsittelemä kontinuumihypoteesi koskee joukkojen välistä mahtavuutta, joten tarvitaan vielä mahtavuuden määritelmä. Mahtavuus määritellään kuvauksien avulla.

Määritelmä 4. Jos joukosta α on olemassa injektiivinen kuvaus joukkoon β , on β vähintään *yhtämahtava* kuin α , merkitään $\alpha \leq \beta$. Jos joukosta α on olemassa surjektiivinen kuvaus joukkoon β on $\alpha \geq \beta$. Jos joukkojen välillä on olemassa bijektiivinen kuvaus, ovat joukot yhtämahtavat.

Huomattakoon, että ordinaalijärjestys ja mahtavuuksista muodostuva järjestys, eivät ole samat vaikka notaatio onkin. Esimerkiksi $\omega < \omega + 1$, vaikka kyseessä olevat joukot ovat yhtä mahtavat. Tutkielmassa mainitaan kyseisten merkintöjen ohessa kummasta on kyse, paitsi silloin, kun sekoittamisen vaaraa on häviävän pieni.

Kuten jo ylempänä todettiin asettaa mahtavuuden käsite joukot järjestykseen. Tämä motivoi kardinaaliluvun käsitteen.

Määritelmä 5. Ordinaali on *kardinaali*, jos ei ole olemassa bijektioita minkään sitä ordinaalijärjestyksessä pienemmän ordinaalin ja sen itsensä välillä.

Selvästi kardinaaliluvut muodostavat keskenään hyvinjärjestyksen mahtavuuden suhteen. Tätä järjestystä merkitään yleensä \aleph -luvuilla, jossa \aleph_0 on luonnolisten lukujen joukko, sitä seuraava kardinaali \aleph_1 ja niin edelleen. Cantorin diagonaalilauseesta seuraa, että seuraava kardinaali on aina olemassa ja ettei suurinta kardinaalia voi olla olemassa.

2.2.2 Zermelo-Fraenkel kaavat

Zermelo-Fraenkel kaavalla tarkoitetaan ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavaa, joka käyttää joukko-opin kielen symboleita. Kaavoilla saadaan määriteltyä erinäisiä ominaisuuksia ja erotteluaksiooma puolestaan takaa, että näillä ominaisuuksilla varustetut joukot ovat olemassa. Koska kaavat ovat usein pitkiä ja suhteellisen raskaita sekä käyttää, että lukea käydään seuraavassa läpi muutamia usein käytettäviä ominaisuuksia määritteleviä kaavoja, sekä annetaan niille lyhyemmät merkinnät.

1. **Tyhjä joukko:** Koska tyhjän joukon aksiomaa ei tässä tutkielmassa käsiteltyssä aksiomatisoinnissa ole valittu aksiomien joukkoon, tulee tyhjä joukko määritellä ja se määritellään kaavalla $Tyh(x)$, joka on tosi kun x on tyhjä joukko.

$$Tyh(x) := \forall y(y \in x \rightarrow y \neq y)$$

Selvästi joukkoon jolle kaava $Tyh(x)$ on tosi, ei kuulu ainuttakaan alkioita, joten kyseessä on tyhjä joukko. Tyhjäjoukko on myös olemassa jos on olemassa yksikin joukko, sillä se voidaan muodostaa tästä olemassa olevasta joukosta kaavan $Tyh(x)$ ja erotteluaksioman avulla.

2. **Ordinaalit:** Olettaen säännöllisyysaksiomaan, voidaan ordinaalit määritellä transitiviisina joukkoina, jotka ovat trikotomisia relaation \in suhteen (eli $\forall a, \forall b(a \in b \vee b \in a \vee a = b)$). Näin ollen kaavan $Ord(x)$, joka on tosi kun x on ordinaali täytyy sisältää nämä molemmat vaatimukset.

$$Ord(x) := \forall y \forall z [(y \in x \rightarrow (z \in y \rightarrow z \in x)) \wedge (z \in x \rightarrow (z \in y \vee y \in z \vee z = y))]$$

Konnektiivin \wedge vasemmalla puolella vaaditaan transitiivisuus ja oikealla puolella trikotomia relaation \in suhteen.

2.2.3 Kaavan kompleksisuus

Käsitellään vielä hieman kaavojen kompleksisuusteoriaa. Kaavan kompleksisuus määräytyy sen kvanttoreiden mukaan. Kvanttorita kutsutaan sidotuksi, jos se on muotoa $\forall x \in y \phi$ tai $\exists x \in y \phi$, jotka puolestaan ovat lyhenteitä kaavoille $\forall x(x \in y \rightarrow \phi)$ ja $\exists x(x \in y \wedge \phi)$. Jos kaavan kaikki kvanttorit ovat sidottuja, sanotaan kaavan kuuluvan kompleksisuus luokkaan Δ_0 . Jos kaava on muotoa $\forall x \psi$, missä ψ on kuuluu luokkaan

Δ_0 , sanotaan kaavan olevan luokkaa Π_1 . Vastaavasti, jos kaava on muotoa $\exists x\psi$ ja ψ on luokkaa Δ_0 , sanotaan kaavan olevan luokkaa Σ_1 . Tämän tutkielman puitteissa ei tarvita suurempia kompleksisuusluokkia ja ne jätetään tässä käsittelemättä. Asiasta kiinnostunut löytää lisää lähteestä [3].

Huomattakoon, että edellisessä luvussa määritellyt kaavat $Ord(x)$ ja $Tyh(x)$ kuuluvat luokkaan Δ_0 , kaavat on kirjoitettu lyhentämättömässä muodossa, esimerkkinä lyhennetty $Tyh(x)$ on $\forall y \in x (y \neq y)$.

2.3 Kumulatiivinen hierarkia

Zermelo-Fraenkel joukko-opin mallien eräs ominaispiirre ovat kumulatiiviset hierarkiat. Jokaista ordinaalia α kohden on olemassa mallin taso V_α , johon kuuluvat kaikki alempien tasojen alkiot. Tasot määritellään transfiniittisen induktion avulla seuraavasti.

1. $V_0 := \emptyset$
2. $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$
3. $V_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$, kun α on rajaordinaali

Tämän lisäksi saatetaan puhua joukkojen universumista V , joka on kaikkien V_α yhdiste ja säännöllisyysaksioomaan toteutuessa siihen kuuluvat kaikki joukot. Useiden joukko-opillisten paradoksien välttämiseksi joukkojen universumi ei kuitenkaan itsessään ole joukko.

2.4 Relativisointi

Kaava ϕ on *relativisoitu* joukkoon M , kun sen kaikki muuttujat ovat rajoitettu joukkoon M . Merkitään kaavan ϕ relativisointia joukkoon M , ϕ^M .

Esimerkki 1. Olkoon $\phi := \forall x (x = \emptyset)$, joka on ZF -kaavana epätosi, esimerkiksi äärettömyysaksiooman nojalla. Olkoon $M = \{\emptyset\}$. Nyt ϕ^M on $\forall x \in M (x = \emptyset)$, joka puolestaan on selvästi tosi.

Esimerkki 2. Olkoon $\phi(x, y) := (x \in y \vee y \in x \vee x = y)$, ja $\psi := \forall x \forall y \phi(x, y)$. Lause ψ ei selvästi toteudu joukkojen universumissa V , sillä jokaiseen standardimalliin kuuluvat parit $\{1, 2\}$ ja $\{1, 42\}$, eivät toteuta kaavaa ϕ . Toisaalta relativisoituna joukkoon ω lause ψ selvästi toteutuu.

2.5 Lévy-Montague reflektioperiaate

Jotta voidaan tarkastella joukko-opin kaavojen toteutumista suhteessa konkreettisiin malleihin esitellään seuraavaksi reflektio.

Määritelmä 6. Joukko M *reflektoi* kaavan ϕ , jos kaava $\phi \leftrightarrow \phi^M$ on tosi, kun kaavan ϕ vapaat muuttujat rajoittuvat joukkoon M .

Toisin sanottuna osajoukko M reflektoi kaavan ϕ , silloin kun, muuttujien rajoittaminen osajoukkoon M ei muuta kaavan totuusarvoa. Reflektion avulla voidaankin tutkia toteutuvuutta koko mallissa, käsittelemällä mallin oikein valittua yksittäistä osajoukkoa.

Esimerkki 3. Olkoon $\phi(x) := x = 0 \vee \exists y(x = y \cup \{y\})$ ja $M = \omega$, jolloin $\phi^M(x)$ on $x = 0 \vee \exists y \in \omega(x = y \cup \{y\})$. Selvästi, sekä kaava $\phi(x)$, että kaava $\phi^M(x)$ ovat tosia aina, kun $x \in \omega$, joten kaava $\phi(x) \leftrightarrow \phi^M(x)$ aina, kun $x \in \omega$, joten joukko ω reflektoi kaavan ϕ .

Esimerkki 4. Tutkitaan seuraavaksi kaavaa $Tyh(x)$. Olkoon $M = \{1, 2\}$. Reflektoiko M kaavan $Tyh(x)$?

Jos $x = 1 = \{0\}$, niin $Tyh(x)$ on selvästi epätosi. Toisaalta $Tyh^M(x)$ on tosi, sillä $\forall y \in M(y \notin 1)$, koska joukkoon M ei kuulu ainoaa joukkoon 1 kuuluvaa joukkoa, joukkoa 0.

Tilanteeseen tulee radikaali muutos, jos joukolle M lisätään vaatimus transitiivisuudesta. Nyt, koska 0 kuuluu joukkoon 1, on sen kuuluttava joukkoon M ja $Tyh(x) \leftrightarrow Tyh^M(x)$ on tosi.

Kaavan reflektoituvuus transitiivissa joukoissa on yleistettävissä oleva ominaisuus, jota kutsutaan kaavan absoluuttisuudeksi

2.5.1 Kaavan absoluuttisuus

Kaavaa ϕ kutsutaan *absoluuttiseksi*, jos $\phi \leftrightarrow \phi^M$ aina kun M on transitiivinen joukko. Eräs aiemmin esitelty kaavojen joukko, nimittäin Δ_0 -kaavat, on seuraavan lauseen nojalla absoluuttinen.

Lause 1. *Olkoon M transitiivinen joukko ja ϕ Δ_0 -kaava, jonka vapaat muuttujat rajoittuvat joukkoon M . Silloin $\phi \leftrightarrow \phi^M$ on tosi.*

Todistus. Todistetaan lause induktiolla kvanttoreiden suhteen. Jos kaava ϕ ei sisällä ainuttakaan kvanttoria, ovat ϕ ja ϕ^M relativisoinnin määritelmän nojalla täsmälleen samat, joten selvästi $\phi \leftrightarrow \phi^M$.

Olkoon $\phi := \exists x \in y \psi(x, y) \in \Delta_0$, missä y on kaavan ϕ vapaa muuttuja. Koska vapaat muuttujat kuuluvat joukkoon M , on $y \in M$.

Nyt $\phi^M = \exists x \in M(x \in y) \wedge \psi^M(x, y), y \in M$. Koska M on transitiivinen, kaavan ϕ ehto $\exists(x \in y), y \in M$ ekvivalentti ehdon $\exists x \in M(x \in y), y \in M$ kanssa ja, koska $x \in y$ ja $y \in M$, niin myös $x \in M$. Koska $\psi(x, y) \leftrightarrow \psi^M(x, y)$ on aina tosi induktio-oletuksen nojalla, on myös $\phi \leftrightarrow \phi^M$ aina tosi.

Samoin myös tapauksessa, jossa ϕ on muotoa $\forall(x \in y) \wedge \psi(x, y) \in \Delta_0$. □

Monet aiemmin käsitellyt ZF -kaavat ovat Δ_0 -kaavoja. Koska esimerkiksi $Ord(x)$ on Δ_0 -kaava, on ordinaalius absoluuttinen ominaisuus. Siis, jos M_1 ja M_2 ovat joukko-opin malleja ja $M_1 \subset M_2$ ovat niiden ordinaalit täsmälleen samat. Samoin on myös tyhjän joukon ja luonnollisten lukujen laita.

Kardinaalien kohdalla tilanne on eri, sillä kardinaalit määritellään suhteessa kaikkiin bijektioihin. Esimerkiksi jos joukossa M on jokin bijektio ordinaalien α ja $\beta = \alpha + 1$ välillä, ei β ole kardinaali. Jos rajoitutaan tarkastelemaan jotain joukon M osajoukkoa josta kyseinen bijektio puuttuu on β välttämättä kardinaali.

2.6 Löwenheimin-Skolemin lause alaspäin

Vuonna 1915 Leopold Löwenheim todisti, että jos ensimmäisen kertaluvun lauseella on malli, on sillä myös numeroituva malli [2]. Seitsemän vuotta myöhemmin Thoralf Skolem onnistui yleistämään tuloksen koskemaan mielivaltaisia lausejoukkoja seuraavassa muodossa: jokaisella ensimmäisen kertaluvun lausejoukolla, jolla on jokin ääretön malli, on jokaisen, kyseisen kielen kaikkien kaavojen, kaavajoukon ja sitä mahtavampien kardinaalien kokoisia malleja. Erityisesti siis jokaisella äärettömän mallin omaavalla kaavajoukolla on myös numeroituva malli. Ensinäkemältä teoreema vaikuttaa mielettömältä: miten Zermelo-Fraenkelin aksiomatisoinnilla, joka puhuu äärettömästä määrästä eri kokaisia äärettömyksiä, voisi olla numeroituva malli? Tämä näennäinen paradoksi selviää tarkastelemalla numeroituvuuden määritelmää.

Numeroituvuuden määritelmän taustalla on mahtavuus. Joukkoa kutsutaan numeroituvaksi, jos se on yhtämahtava luonnollisten lukujen joukon kanssa. Koska yhtämahtavuus ei ole enempää eikä vähempää kuin bijektioiden olemassaoloa, voidaan helposti kuvitella malli, jossa kaikki joukot ovat “mallin ulkopuolelta” numeroituvia, siinä mielessä, että bijektio jokaisen joukon ja luonnollisten lukujen välillä on kuviteltavissa, eli sen olemassaoloa ei pois sulje mikään, esimerkiksi Cantorin lause, mutta käsillä olevasta numeroituvasta mallista nuo bijektio puuttuvat, jolloin kyseiset joukot ovat mallin sisäisistä näkökulmasta ylinumeroituvia.

Potenssijoukon aksiooma ei myöskään, yllättävää kyllä, muodostu numeroituvien mallien olemassaolon esteeksi, sillä se vaatii vain, että jo malliin kuuluvat osajoukot muodostavat yhdessä joukon, eivät “kaikki mahdolliset osajoukot”. Esimerkiksi Gödelin konstruoituvaan universumiin kuuluu vain joukkoja, jotka voidaan määrittellä kaavoilla, joten sen luonnollisten lukujen joukon potenssijoukkoon mallin sisällä kuuluvat vain kaikki kaavoilla määriteltävät luonnollisten lukujen osajoukot. Myös koska kaavat ovat äärellisiä ja niitä on olemassa vain numeroituva määrä, ei joukkojakaan voi olla sen enempää.

Lause 2. *Jos $|L_S| = \kappa$, missä L_S on S -kielen kaavojen kokoelma, ja kaavajoukolla Γ on malli, jonka mahtavuus $\lambda > \kappa$, niin kaavajoukolla Γ on malli, jonka mahtavuus on κ .*

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [4]. □

Koska joukko-opin kielen kaavojen kokoelman mahtavuus on \aleph_0 , on Löwenheimin-Skolemin lauseen nojalla olemassa joukko-opin teorian numeroituvia malleja. Myöhemmin muodostetaan eräs tällainen malli.

2.7 Kontinuumihypoteesi

Cantorin diagonaalilause osoittaa, että minkä tahansa joukon potenssijoukko on aina alkuperäistä joukkoa mahtavampi. Se ei kuitenkaan sano mitään siitä kuinka paljon mahtavampi potenssijoukko on ja miten asiaa tulisi edes mitata?

Mahtavuuksien tapauksessa vertailuun on käytettävä edellä määriteltyä kardinaalilukujen jonoa vaikka se onkin riippuvainen itse mallista. Kontinuumihypoteesi käsittelee tätä kyseistä dilemmaa.

Määritelmä 7 (Kontinuumihypoteesi CH). $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Kyseessä on joukko-opin kaava, jonka toteuttavat sellaiset mallit, joissa kardinaalin \aleph_0 osajoukkojen kokoelma on yhtämahtava kardinaalin \aleph_1 kanssa. Tavallisesti tämän ajatellaan tarkoittavan sitä, että luonnollisten lukujen osajoukkojen joukko on yhtämahtava reaalilukujen joukon kanssa. Gödel osoitti artikkelissaan [5], että jos ZF -malleja on olemassa, on olemassa myös kontinuumihypoteesin toteuttavia ZF -malleja.

Vielä vahvempi joukkojen ja niiden potenssijoukkojen mahtavuuksien suhdetta käsittelevä kaava on seuraava.

Määritelmä 8 (Yleistetty kontinuumihypoteesi GCH). Kaikille ordinaaleille α pätee, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Yleistetty kontinuumihypoteesi antaa jo hyvin tiukat raamit sille, mitä joukkojen ja niiden potenssijoukkojen mahtavuuden välisestä suhteesta voidaan sanoa. Selvästi jos GCH , niin CH .

3 Konstruoituvat joukot ja minimaaliset mallit

Todistuksessaan kaavajoukkojen ZFC ja $ZFC + GCH$ ristiriidattomuudesta [5] Gödel kehittää konstruoituvien joukkojen käsitteen ja osoittaa, että konstruoituvat joukot muodostavat joukko-opin mallin. Tässä konstruoituvalla tarkoitetaan joukkoa, joka voidaan joitain ennalta määrättyjä operaatioita käyttäen muodostaa sitä aiemmin esiintyneistä joukoista. Tämän jälkeen Gödel osoittaa, että konstruoituvien joukkojen muodostamia malleja löytyy jokaisen ZF -mallin sisältä ja että nämä *sisäiset mallit* toteuttavat myös valinta-aksiooman ja yleistetyn kontinuumihypoteesin.

J.C. Shepherdson artikkelissaan Inner models for set theory [6] lähtee liikkeelle Gödelin sisäisten mallien menetelmästä, ja päätyy osoittamaan, että kyseinen menetelmä ei kykene osoittamaan kaavajoukon $ZFC + \neg CH$ ristiriidattomuutta tai ristiriitaisuutta. Samalla Shepherdson tulee esitelleeksi *minimaalisen mallin* käsitteen.

Minimaalisilla malleilla tarkoitetaan joukko-opin tapauksessa sellaisia malleja joilla ei ole ainuttakaan sisäistä mallia. Toisin sanottuna minimaalinen malli on ekvivalentti sen jokaisen sisäisen mallin kanssa.

Kymmenen vuotta Shepherdsonin jälkeen, Cohen kehitti uuden tavan muodostaa minimaalisia malleja. Tämä luku perustuu Cohenin alkuperäiseen artikkeliin [7].

3.1 Cohenin minimaalinen malli

Olkoon T_0 mielivaltainen transitiivinen kokoelma joukkoja, johon kuuluu luonnollisten lukujen joukko. Määritellään induktiolla jokaiselle ordinaalille $\alpha \geq 1$, T_α seuraavasti.

Olkoon $C_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta$. Nyt:

1. Jos $x, y \in C_\alpha$, niin $\{x, y\} \in T_\alpha$, tämä takaa, että pariaksioma toteutuu.
2. Jos $x \in C_\alpha$, niin $z = \{y \mid \exists u (y \in u \in x)\} \in T_\alpha$ tämä takaa, että T_α on transitiivinen ja toteuttaa yhdisteaksioman.
3. Jos $x \in C_\alpha$, niin $z = \{y \mid y \subseteq x, y \in C_\alpha\} \in T_\alpha$, potenssijoukon C_α rajoittuma kuuluu joukkoon T_α .
4. Jos $R(a, b)$ on joukko-opin kielen symboleista ja joukon C_α alkioista muodostettu kahden vapaan muuttujan kaava ja jos kaikille jonkin joukon $x \in C_\alpha$, alkioille y , on olemassa uniikit alkio $z \in C_\alpha$ siten, että $R(y, z)$ on tosi, kun kaavan R kvanttorit rajataan joukkoon C_α , niin alkioiden z kokoelma muodostaa joukon, joka kuuluu joukkoon T_α . Tämä kohta takaa, että korvaus- ja erotteluaksioma pätevät minimaalisessa mallissa.
5. Joukkoon T_α ei kuulu muita joukkoja.

Ottamalla kaikkien edellä määriteltyjen joukkojen T_α yhdiste, saadaan joukko M , jota kutsutaan joukon T_0 generoimaksi minimaaliseksi malliksi.

Jokaisella $x \in M$ on olemassa pienin ordinaali α siten, että $x \in T_\alpha$. Tätä ordinaalia α kutsutaan joukon x *asteeksi*.

Huomaa, että joukon M määritelmä on sama kuin Gödelin konstruoituvan joukon määritelmä, mutta toisin kuin Gödelin konstruoituissa joukoissa, ei Cohenin minimaalisessa mallissa vaadita, että $C_\alpha \in T_\alpha$.

Lause 3. M on Zermelo-Fraenkel-teorian malli.

Todistus. Todistetaan käymällä läpi Zermelo-Fraenkel aksioomat.

1. **Ekstensionaalisuusaksioma:** Koska jokainen transitiivinen joukko toteuttaa ekstensionaalisuusaksioman ja M on transitiivinen, toteuttaa se ekstensionaalisuusaksioman.
2. **Säännöllisyysaksioma:** Säännöllisyysaksioma pätee jokaisessa joukossa, niin myös joukossa M .
3. **Erotteluaksioma:** Olkoon $x \in M$, α joukon x aste ja ϕ jokin yhden vapaan muuttujan kaava. Olkoon $R(a, b) := (a = b) \wedge \phi(a)$. Koska $R(a, b)$ on tosi, vain jos $a = b$, joukko $\{b \mid R(a, b), a \in x\}$ on täsmälleen niiden alkuiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon x ja toteuttavat kaavan ϕ . Joukon M konstruktion neljännen vaiheen perusteella tämä joukko kuuluu joukkoon T_β kaikilla $\beta > \alpha$ ja siten myös joukkoon M .
4. **Pariaksioma:** Olkoon $x, y \in M$, α ja β joukkojen x ja y asteet ja γ jokin niitä suurempi ordinaali. Nyt $x, y \in C_\gamma$, joten joukon M konstruktion ensimmäisen vaiheen mukaan $\{x, y\} \in T_\gamma$. Koska $M = \bigcup T_\alpha$, kaikille ordinaaleille α , niin $\{x, y\} \in M$.
5. **Äärettömyysaksioma:** T_0 on joukon M osajoukko ja $\omega \in T_0$, joten $\omega \in M$.
6. **Yhdisteaksioma:** Olkoon $x \in M$, α joukon x aste ja β jokin sitä suurempi ordinaali. Koska $x \in T_\alpha$, niin $x \in C_\beta$, joten joukon M konstruktion toisen vaiheen mukaan, on olemassa sellainen $z \in T_\beta$, että $y \in z \leftrightarrow \exists u(y \in u \wedge u \in x)$. Koska $z \in M$, toteuttaa M yhdisteaksioman.
7. **Korvausaksioma:** Olkoon α ordinaali, $x \in C_\alpha$ ja ϕ sellainen kahden muuttujan kaava, että jos $\phi(a, b)$ on tosi, ja $\phi(a, c)$ on tosi, niin $b = c$. Nyt ϕ on joukon M konstruktion vaiheen neljä mukainen kaava, joten $im(\phi_x) = \{z \mid \phi(y, z), y \in x\}$ on joukko, joka kuuluu joukkoon T_α ja siten myös joukkoon M .
8. **Potenssijoukonaksioma:** Olkoon $x \in M$, α joukon x aste ja β joukkoon M kuuluvien joukon x osajoukkojen asteiden maksimi. Nyt sekä joukko x , että kaikki sen joukkoon M kuuluvat osajoukot kuuluvat joukkoon C_γ kaikilla $\gamma > \alpha, \beta$. Joukon M konstruktion kolmannen vaiheen mukaan joukon x potenssijoukko (joukossa M) kuuluu siis jokaiseen T_γ ja siten myös joukkoon M .

□

Seuraavaksi osoitetaan vielä, että kyseinen malli on numeroituva ja minimaalinen siinä mielessä, että se on isomorfinen jokaisen sisäisen mallinsa kanssa.

Lause 4. Jos M' on Zermelo-Fraenkel teorian transitiivinen malli ja $T_0 \subseteq M'$, niin $M \subseteq M'$.

Todistus. Merkitään jokaista ordinaalia $\alpha \in M'$ kohden symboleilla T'_α ja C'_α , joukkoja, jotka on muodostettu samoin kuin T_α ja C_α . Selvästi, jos $\alpha \in M'$, niin $T'_\alpha = T_\alpha$ ja $C'_\alpha = C_\alpha$. Olkoon

$$\begin{aligned} M'' &= \bigcup_{\alpha \in M'} C'_\alpha \\ \Sigma &= \{\alpha \mid C_{\alpha+1} \neq C_\alpha\} \\ \Sigma' &= \{\alpha \mid \alpha \in M', C'_{\alpha+1} \neq C'_\alpha\} \end{aligned}$$

Sekä Σ , että Σ' ovat alaspäin suljettuja ordinaalien joukkoja, eli jos $x \in \Sigma$ ja $y < x$, niin $y \in \Sigma$, josta seuraa, että $\Sigma \subseteq \Sigma'$, sillä muutoin on olemassa pienin sellainen $\beta \in \Sigma$, että $\beta \notin \Sigma'$ ja $C_\beta = M''$. Nyt, koska M'' on ZF -malli, yllämääritellyt operaatiot 1-4 eivät tuota uusia joukkoja kun otetaan $C_\alpha = C_\beta$, joten $C_\beta = C_{\beta+1}$, toisin sanottuna $\beta \notin \Sigma$, mikä on ristiriita. Tästä seuraa, että kaikilla $\alpha \in \Sigma$, $T_\alpha \subseteq M'$, ja siis $M \subseteq M'$. □

Lause 5. Jos T_0 on numeroituva, niin myös joukon T_0 generoima M on numeroituva.

Todistus. Koska T_0 on numeroituva, voidaan muodostaa jokaista joukkoon T_0 kuuluvaa alkioita a ja sen kuulumista toiseen joukon T_0 alkioon b kohden lause $a \in b$. Lisäämällä nämä lauseet kaavajoukkoon ZF saadaan kaavajoukko jota merkitään $ZF + (T_0 \in M)$. Koska yllä määritelty joukko M on kaavajoukon $ZF + (T_0 \in M)$ malli on Löwenheimin-Skolemin

lauseen nojalla olemassa numeroituva malli M' , joka toteuttaa kyseisen kaavajoukon ja on siis ZF -teorian malli, johon kuuluu joukko T_0 .

Määritellään transfiniittisellä rekursiolla joukkojen $x \in M'$ kumulatiivisen hierarkian asteen suhteen kuvaus,

$$\phi(x) = \{ y \mid z \in M', z \in x, \phi(z) = y \}.$$

Tämän kuvauksen kuvana saadaan relaation \in suhteen joukon M' kanssa isomorfinen transitiivinen joukko M'' (tämä on erikoistapaus *Mostowskin romahdus lemmasta*. Lisätietoa löytää esimerkiksi lähteestä [8]).

Nyt, koska M'' on ZF -mallin kanssa \in -relaation suhteen isomorfinen, on myös se ZF -malli. Koska M'' on myös numeroituva, transitiivinen ja siihen kuuluu joukko T_0 , niin lauseen 4 nojalla $M \subseteq M''$, joten myös M on numeroituva. □

4 Mallin laajentaminen ja pakotusmenetelmä

Tässä luvussa esitellään menetelmä mallin laajentamiseksi ja tiettyjen lauseiden totuuden varmistaminen muodostuvissa uusissa malleissa. Tekniikka esitellään konkreettisesti lisäämällä edellisessä luvussa määritellyyn Cohenin minimaaliseen malliin jokin luonnollisten lukujen osajoukko jota sieltä ei vielä edellisen määritelmän mukaan löydy. Pakotusmenetelmää varten on tarpeellista ensin esitellä joitain yleisiä osittaisten järjestysten ominaisuuksia.

4.1 Lisättävä joukko

On selvää, että mitä tahansa joukkoja lisäämällä ei saada muodostettua uutta mallia. Seuraavaksi muutamia huomioita mahdollisista ja mahdottomista lisättävistä joukoista.

Kuten joukko-opin aksioomia käsittelevässä luvussa todettiin, asettavat aksioomat tiettyjä vaatimuksia malliin kuuluville joukoille. Lisäämällä jo kuuluvia joukkoja ei saada aikaiseksi uutta mallia ja näiden malliin jo kuuluvien joukkojen määrä on valtava. Vaikka suunnitelmana onkin lisätä vain yksi luonnollisten lukujen osajoukko ja Cohenin minimaalinen malli on numeroituva, on lisättävän joukon valinnassa silti noudatettava huolellisuutta.

Ensinnäkin kaikki luonnollisten lukujen äärelliset osajoukot kuuluvat jo malliin, sillä ne saadaan muodostettua äärellisellä määrällä pari- ja yhdisteaksiomien soveltamista, joten joukon tulee olla ääretön. Malliin kuuluvat myös kaikki erotteluaksiomalla muodostettavat osajoukot, eli kaikki luonnollisten lukujen osajoukot jotka voidaan määritellä äärellisellä kaavalla, joten lisättävän joukon tulee olla kaavalla määrittämätön, toisin sanottuna ei-konstruoituva.

Jotta edellä mainitusta, ei-konstruoituvasta joukosta, on mahdollista puhua, käytetään seuraavaa strategiaa. Joukkoa ei ikinä määritellä kerralla kokonaan, vaan määritellään reunaehtoja lisättävälle joukolle, ja todetaan, että lisättävä joukko on “jokin ehdot täyttävistä joukoista”. Strategian helpottamiseksi edes ehtoja ei pidetä mukana kerralla monia, vaan erinäiset vaatimukset sulautetaan aina yhdeksi ehdoksi. Tämän mahdollistaa toimiminen myöhemmin määriteltävässä ehtojen osittaisessa järjestyksessä.

Tässä tutkielmassa ehtoina toimivat aluksi funktiot luonnollisten lukujen äärellisistä osajoukoista, ja myöhemmin joukon $\aleph_0 \times \aleph_2$ äärellisistä osajoukoista, joukkoon $\{0, 1\}$. Huomionarvoista on, että kyseiset funktiot löytyvät alkuperäisestä mallista M . Koska ehtojen lähtöjoukot ovat äärellisiä, tulee niiden vaatimien ominaisuuksien olla määriteltävissä jonkin lisättävän joukon äärellisen osan perusteella. Tällaista ominaisuutta kutsutaan *geneeriseksi* ja joukkoa, jonka jokainen ominaisuus on geneerinen kutsutaan geneeriseksi joukoksi. Vain geneeristen joukkojen lisääminen malliin M on mahdollista, kuten myöhemmin nähdään.

4.2 Osittaisista järjestyksistä

Tässä luvussa käsitellään Cohenin todistuksen ymmärtämiseen tarvittavia esitietoja osittaisista järjestyksistä.

4.2.1 Osittaiset järjestykset

Osittainen järjestys on kokoelma alkioita varustettuna binäärirelaatiolla, joka on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen.

Osittaisen järjestyksen P alkioita a kutsutaan *koatomiksi*, jos

$$\forall x[(x \in P) \wedge x \geq a] \rightarrow x = \{a\}$$

Osittaista järjestystä kutsutaan koatomittomaksi, jos mikään sen alkio ei ole koatomi. Esimerkkinä koatomittomasta osittaisesta järjestyksestä otetaan kaikkien äärellisten binäärisanojen joukko varustettuna relaatiolla $b \geq a$, jos sana a on sanan b prefiksi. Relaatio on selvästi sekä refleksiivinen, antisymmetrinen, että transitiivinen. Välittömästi myös nähdään, että kyseessä on koatomiton osittainen järjestys, sillä jokaiselle alkioille a on olemassa ainakin alkio $a0$, jolle pätee $a0 \geq a$ ja $a0 \neq a$ tai $a0 \neq P$. Voidaan siis ajatella osittaisen järjestyksen olevan koatomiton, jos sen jokainen alkio on tietyssä mielessä laajennettavissa ylöspäin.

Määritelmä 9. Osittaisen järjestyksen P osajoukkoa G kutsutaan sen *ihanteeksi* jos:

1. Kaikille $p, q \in G$, on olemassa $r \in G$, jolle $p \leq r$, ja $q \leq r$.
2. G on alaspäin suljettu eli, jos $p \leq q$ ja $q \in G$, niin $p \in G$

Jos jokaiselle $p \in P$, joko $p \in G$ tai on olemassa sellainen $q \in G$, että kaikille $r \in G$, $p \not\leq r$ tai $q \not\leq r$, ihannetta G kutsutaan *maksimaaliseksi ihanteeksi*.

4.2.2 Osittainen järjestys \mathbb{P}

Esitellään vielä esimerkkinä eräs myöhemmin hyödynnettävä osittainen järjestys ja sen eräiden ihanteiden ominaisuuksia.

Esimerkki 5. Muodostetaan osittainen järjestys \mathbb{P} luonnollisten lukujen joukon ω avulla ottamalla osittaisen järjestyksen alkioiksi kaikki funktiot luonnollisten lukujen äärellisistä osajoukoista, joukkoon $\{0, 1\}$. Jos $a, b \in \mathbb{P}$, niin $a \leq b$ silloin, kun $a \subseteq b$, eli kun funktio a on funktion b rajoittuma funktion a lähtöjoukkoon.

Selvästi kaikki osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkioita kuuluvat Cohenin minimaaliseen malliin M , sillä ne voidaan muodostaa äärellisistä ordinaaleista käyttämällä äärellisen määrän *ZFC*:n aksioomia. Olkoon G osittaisen järjestyksen \mathbb{P} mielivaltainen ihanne. Kuuluuko ihanteen alkioiden yhdiste $\bigcup_{g \in G} g$ malliin M ?

Tarkastellaan ihanteen määritelmää suhteessa kyseiseen osittaiseen järjestykseen. Ihanteen tulee olla suljettu perättäisten unionien suhteen sillä, jos $p, q \in G$, niin kohdan yksi nojalla on olemassa jokin $r \in G$, johon kuuluvat alkioita p ja q , joten siihen kuuluu myös niiden unionin. Kohdan kaksi nojalla taas ihanteeseen G kuuluvat kaikki alkioita r kuuluvat joukot, joten myös $p \cup q \in G$. Kohta yksi asettaa myös rajoituksen ihanteen alkioille. Nimittäin kaikkien ihanteen alkioiden pitää olla *yhteensopivia* siinä mielessä, että jos $p, q \in G$ ja $n \in \text{Dom}(p) \cap \text{Dom}(q)$, niin $p(n) = q(n)$, sillä muuten $p \cup q$ ei olisi funktio, eikä siis voisi kuulua joukkoon \mathbb{P} eikä täten ihanteeseen G .

Kohta kaksi puolestaan sanoo, että jos $p \in G$, myös jokainen funktion p rajoituma johonkin sen lähtöjoukon osajoukkoon kuuluu ihanteeseen G . Näiden operaatioiden (unioni ja rajoittumien lisääminen) avulla voidaan mikä tahansa yhteensopiva osittaisen järjestyksen \mathbb{P} osajoukko laajentaa ihanteeksi. Yhteensopivuudesta seuraa myös, että jokaisen maksimaalisen ihanteen unioni antaa kuvauksen $f_G : \omega \rightarrow \{0, 1\}$, joka voidaan tulkita tuttuun tapaan luonnollisten lukujen osajoukoksi. Jokaista mahdollista luonnollisten lukujen osajoukkoa kohden on siis olemassa vähintään yksi sellainen maksimaalinen ihanne, jonka unioni muodostaa funktion, jolla luvun yksi alkukuva on kyseinen joukko. Koska Cohenin minimaalinen malli on numeroituva, on olemassa sellaisia luonnollisten lukujen osajoukkoja, jotka eivät siihen kuulu. Näin ollen on oltava olemassa myös sellaisia osittaisen järjestyksen \mathbb{P} ihanteita joiden unionit eivät kuulu malliin M .

Yksittäisiä osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkioita voidaan edellä kuvatun maksimaalisten ihanteiden ja luonnollisten lukujen osajoukkojen välisen suhteen näkökulmasta pitää sääntöinä jonkin osajoukon ominaisuuksille. Esimerkiksi $p \in \mathbb{P}$, $p(3) = 1$ takaa, että jokainen maksimaalinen ihanne G , johon kuuluu alkio p määrittää osajoukon johon luku kolme kuuluu. Suunnitelmana onkin lisätä jokin näistä maksimaalisista ihanteista G malliin M muodostaen täten mallin $M[G]$ ja pakottaen kyseiselle mallille joitain valittuja ominaisuuksia.

4.2.3 \mathbb{P} -nimet ja evaluaatiot

Mallin $M[G]$ muodostamiseksi käytetään niin sanottuja \mathbb{P} -nimien evaluaatioita.

\mathbb{P} -nimi on joukko järjestettyjä pareja (σ, p) missä σ on \mathbb{P} -nimi ja $p \in \mathbb{P}$. \mathbb{P} -nimet muodostetaan transfiniittisellä rekursiolla seuraavasti.

1. $N_0 := \emptyset$
2. $N_{\alpha+1} := \mathcal{P}(N_\alpha \times \mathbb{P}) \cap M$, kun $\alpha + 1$ on seuraajaordinaali
3. $N_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta$, kun α on rajaordinaali

Kaikkien \mathbb{P} -nimien kokoelma $\bigcup_{\alpha \in ON} N_\alpha$ on liian kuuluakseen malliin M . Siitä käytetään merkintää $M^{\mathbb{P}}$.

Jokainen \mathbb{P} -nimi kuuluu malliin M . Määritelmästä seuraa, että jokaisella \mathbb{P} -nimellä on sitä vastaavan ordinaalin mukainen *nimiaste*.

Valitsemalla jokin osittaisen järjestyksen \mathbb{P} ihanne G , voidaan määritellä \mathbb{P} -nimien G -evaluaatio kyseisen ihanteen suhteen tulkitsemalla nimiasteen $\alpha + 1$ \mathbb{P} -nimet $N_\alpha \times \mathbb{P}$ relaatioina ja ottamalla näiden alkukuvia rekursiivisesti ihanteen G suhteen.

Esimerkki 6. Olkoon $\tau = \{(\sigma_0, p), (\sigma_1, q)\}$, $\sigma_0 = \{(\sigma_1, p)\}$ ja $\sigma_1 = \{(\emptyset, r)\}$. Nyt riippuen siitä kuuluvatko alkiot p , q ja r ihanteeseen G vai eivät, tulee alkion τ G -evaluaatio, merkitään τ^G , olemaan eri. Tätä havainnollistetaan seuraavassa taulussa.

p	q	r	$\tau = \{(\sigma_0, p), (\sigma_1, q)\}$	$\sigma_0 = \{(\sigma_1, p)\}$	$\sigma_1 = \{(\emptyset, r)\}$
\in	\notin	\notin	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset\}$	\emptyset
\notin	\in	\notin	$\{\emptyset\}$	\emptyset	\emptyset
\notin	\notin	\in	\emptyset	\emptyset	$\{\emptyset\}$
\notin	\in	\in	$\{\{\emptyset\}\}$	\emptyset	$\{\emptyset\}$
\in	\notin	\in	$\{\{\{\emptyset\}\}\}$	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset\}$
\in	\in	\notin	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset\}$	\emptyset
\in	\in	\in	$\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset\}$

Joukko $M[G]$ määritellään ottamalla jokaisen \mathbb{P} -nimen G -evaluaatio. Näin ollen valittu ihanne G määrittää täysin mitä alkioita joukosta $M[G]$ löytyy. Seuraavaksi osoitetaan, että ihanteen G ollessa maksimaalinen joukosta $M[G]$ löytyy aina jokainen joukon M alkio.

Lause 6. *Olkoon G osittaisen järjestyksen \mathbb{P} maksimaalinen ihanne. Tällöin $M \subset M[G]$.*

Todistus. Määritellään ensin jokaiselle mallin M alkioille x kanoninen \mathbb{P} -nimi

$$\check{x} = \{ (\check{y}, p) \mid y \in x, p \in \mathbb{P} \}$$

Todistetaan lause osoittamalla, että $\check{x}^G = x$ transfiniittisella induktiolla nimiasteen suhteen. Selvästi $\check{\emptyset}^G = \emptyset$ kaikille ihanteille G .

Nyt riippumatta siitä mitkä alkiot kuuluvat ihanteeseen G on nimen \check{x} G -evaluaatio $\check{x}^G = \{\check{y}^G \mid y \in x\}$ ja induktio-oletuksen nojalla $\{\check{y}^G \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$, sillä kaikkien \check{y} nimiaste on pienempi kuin nimen \check{x} nimiaste. \square

Jokainen $x \in M$ kuuluu siis joukkoon $M[G]$, mutta löytyykö sieltä uusia joukkoja? Näin käy ainakin, kun maksimaalinen ihanne $G \notin M$, sillä G kuuluu aina joukkoon $M[G]$. Jokainen $p \in \mathbb{P}$ kuuluu joukkoon M , joten jokaiselle osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkioille on olemassa kanoninen nimi \check{p} , joiden avulla määritellään joukko

$$\Gamma := \{ (\check{p}, p) \mid p \in \mathbb{P} \}$$

Tutkimalla joukon Γ G -evaluaatiota saadaan

$$\Gamma^G = \{\check{p}^G \mid p \in G\} = \{p \mid p \in G\} = G$$

joten ihanne G siis kuuluu aina joukkoon $M[G]$.

4.3 Totuus mallissa $M[G]$

Tarkoituksena on osoittaa joukon $M[G]$ toteuttavan joitain ensimmäisen kertaluvun logiikan lauseita, erityisesti Zermelo-Fraenkel joukko-opin aksioomat, mutta miten joukkoa $M[G]$ koskevien lauseiden totuutta pitäisi käsitellä? Kaikista suoraviivaisinta olisi, jos joukon $M[G]$ ominaisuuksia voisi johtaa suoraan mallista M . Juuri tämä onkin Cohenin pakotusmenetelmän ideana.

Koska malli $M[G]$ muodostetaan joukon M alkioista (\mathbb{P} -nimistä), jotka evaluoidaan suhteessa joukon \mathbb{P} alkioihin, jotka kuuluvat myös malliin M , löytyvät kaikki joukon $M[G]$ tutkimiseen tarvittavat osat jo mallista M .

Totuus ei kuitenkaan ole yksiyhteen mallien $M[G]$ ja M välillä. Tämä käy selväksi jo seuraavasta yksinkertaisesta esimerkistä.

Esimerkki 7. Olkoon $\phi := \check{0} \in \check{1}$. Selvästi $M \not\models \phi$, sillä

$$\check{0} = \{ (\emptyset, p) \mid p \in \mathbb{P} \} \notin \{ (0, p) \mid p \in \mathbb{P} \} = \check{1}$$

Toisaalta,

$$\check{0}^G = 0 \in 1 = \check{1}^G$$

riippumatta joukon G valinnasta, joten $M[G] \models \phi$, kaikilla $G \subset \mathbb{P}$.

Ylläolevassa esimerkissä lauseen ϕ totuus ei riipu ihanteesta G , sillä kaikki lauseeseen kuuluvat alkioit ovat mallin M alkioita vastaavia kanonisia nimiä.

4.3.1 Sisältymisrelaatio joukossa $M[G]$

Tarkastellaan ensin mallin $M[G]$ sisältymisrelaation toimintaa suhteessa mallin M alkioihin. Olkoon $\tau, \sigma \in M^{\mathbb{P}}$ ja G , jokin osittaisen järjestyksen \mathbb{P} maksimaalinen ihanne. Mitkä ovat riittävät ja tarpeelliset reunaehdot näille, jotta $\sigma^G \in \tau^G$? Nii-visti ehdoksi voisi kuvitella riittävän $(\sigma, p) \in \tau$, jollain $p \in G$. Kyseisessä tapaukses-sa tietysti $\sigma^G \in \tau^G$, mutta se ei vielä määritä yksikäsitteisesti sisältymisrelaatiota. Selvästi, jos $\rho = \{(\tau, p)\}$, $\sigma = \{(\tau, q)\}$ ja $p, q \in G$, niin $\rho^G = \sigma^G$, vaikka $\rho \neq \sigma$. On siis mahdollista, että $\sigma^G \in \tau^G$, vaikka $\forall p \in G ((\sigma, p) \notin \tau)$, jos $\rho^G = \sigma^G$ ja $\exists p \in G ((\rho, p) \in \tau)$.

4.3.2 Lauseista

Koska joukko-opin lauseet käsittelevät vain joukkojen olemassaoloa ja toisiinsa kuu-lumista, ja ihanteen G alkioit määrittävät joukossa $M[G]$ olevien joukkojen olemas-saolon ja siten myös niiden kuulumisen muihin joukkoihin, määrittävät ihanteen G alkioit myös lauseiden totuusarvon.

Ihannetta G ei kuitenkaan voida määrittää kertarysäyksellä, sillä se ei kuulu malliin M eikä sitä näin ollen voi käyttää mallin M sisällä. Tästä syystä onkin tarpeellista katsoa asiaa ikään kuin alkioiden p suunnasta ylöspäin. Jos jokin tietty $p \in G$, niin mitä se kertoo ihanteeseen G liittyvistä muista alkioista, ja erityisesti uudesta joukosta $f_G = \bigcup_{g \in G} g$? Jotta totuudesta olisi mielekästä puhua joudutaan aina tyytymään jonkin lauseen totuusarvon tutkimiseen jonkin tietyn, yksittäisen, alkion p suhteen, tutkimalla takaako tai estääkö alkion p kuulumisen ihanteeseen G lauseen toteutumisen mallissa $M[G]$?

4.4 Pakottaminen

Joukko $M[G]$ muodostuu \mathbb{P} -nimien G -evaluaatioista. Yksinkertaisimmillaan ihan-teen G alkioit kertovat funktiosta f_G . Havainnollistetaan tätä esimerkin avulla.

Esimerkki 8. Jos $p = \{(5, 0)\} \in G$, niin selvästi $f_G(5) = 0$ pitäisi olla tosi mallis-sa $M[G]$. Tarkistetaan asia vääntämällä rautalangasta, suunnitelmana muodostaa mallin M alkioita (\mathbb{P} -nimiä) vakioina käytävä lause, joka G -evaluoituu halutuksi lauseeksi.

Johtuen funktion f_G muodostamis tavasta on $f_G(5) = 0$ ekvivalentti helpommin käsiteltävän lauseen $\phi := (5, 0) \in \bigcup G$ kanssa. Nyt on etsittävä lauseen vakioita

vastaavat \mathbb{P} -nimet. Järjestetty pari $(5, 0)$ löytyy jo mallista M , joten sen \mathbb{P} -nimi on sen, lauseen 6 todistuksessa määritelty kanoninen nimi. Riippumatta ihanteen G valinnasta sen \mathbb{P} -nimenä toimii samassa luvussa esitelty Γ .

Samoin myös kaikilla $q \geq p$. Voidaan siis sanoa, että $p \in G$ (tai mikä tahansa $q \geq p$, $q \in G$) pakottaa, lauseen $f_G(5) = 0$ olevan tosi mallissa $M[G]$. Tämä yksinkertaistettu näkemys pakottamisesta riittää toistaiseksi. Merkitään $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_k)$, aina kun $p \in G \rightarrow \phi^{M[G]}(\tau_1^G, \dots, \tau_k^G)$.

Jotta mitään lisättävän joukon G ominaisuuksia ei jätetä arvailun varaan on tärkeää, että jokaiselle ominaisuudelle ϕ , joka on tosi joukolla G on olemassa sellainen $p \in G$, että $p \Vdash \phi$. Tämän joukon G piirteen varmistamiseksi tarvitaan geneerisen ihanteen käsite.

Ei ole lainkaan selvää, että jokaiselle joukko-opin lauseelle olisi olemassa sellainen yksittäinen $p \in G$, joka pakottaisi mallin toteuttamaan lauseen. Toisaalta, vaikka jokin tietty $p \in G$, sen ei tarvitse pakottaa kyseisen lauseen totuutta. Jos voidaan varmistua siitä, että jokainen alkion p laajennus q voidaan puolestaan laajentaa alkioiksi, joka takaa lauseen toteutumisen mallissa $M[G]$, sanotaan alkion p pakottavan kyseisen lauseen. Tämän ajatuksen toteuttamisen mahdollistavat *mahdollisuusverkot*.

Käsitteen avaamiseksi tarkastellaan aiempaa esimerkki lausetta $\phi := f_G(5) = 0$. Ylempänä todettiin, että jos $p = \{(5, 0)\} \in G$, niin $\phi^{M[G]}$. On myös välittömästi selvää, että jos $\{(5, 1)\} \in q \in G$, niin ihanteen yhteensopivuusehdon nojalla $p \notin G$, joten $M[G]$ ei voi toteuttaa lausetta ϕ .

Jos taas ainoa tietomme ihanteesta G on, että $r \in G$ ja $5 \notin \text{Dom}(r)$ on *mahdollista*, että $p \in G$. Lauseen ϕ mahdollisuusverkolla Z^ϕ tarkoitetaan kaikkien niiden osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkioden joukkoa, jotka ovat yhteensopivia jonkin alkion p kanssa jolle $p \Vdash \phi$. Edellisen esimerkin tapauksessa

$$Z^\phi := \{ q \in \mathbb{P} \mid q \geq p \} \cup \{ r \in \mathbb{P} \mid 5 \notin \text{Dom}(r) \}$$

Eräs tärkeä mahdollisuusverkkojen ominaisuus on, että ne sisältyvät malliin M ja antavat siten työkalun, jolla voidaan käsitellä lauseiden toteutumisen mahdollisuutta mallista M käsin. Seuraavan lauseen todistus on pitkä ja koostuu lähinnä taupausanalyysistä, joten se sivuutetaan.

Lause 7. *Olkoon \mathbb{P} osittainen järjestys ja ϕ joukko-opin symboleista ja \mathbb{P} -nimistä muodostuva lause. Tällöin $Z^\phi \in M$.*

Todistus. [1] □

4.4.1 Maksimaalisen ihanteen geneerisyys

Pakotusmenetelmän mahdollistamiseksi tarvitaan vielä eräs joukko-opin mallien kanssa vuorovaikuttavien osittaisten järjestysten ihanteiden ominaisuus, *geneerisyys*, jonka määrittelemiseksi esitellään ensin osittaisen järjestyksen tiheyden käsite.

Määritelmä 10. Jos D on osittaisen järjestyksen P osajoukko ja jokaiselle $q \in P$, on olemassa sellainen $r \in D$, että $q \leq r$ sanotaan joukon D olevan tiheä joukossa P .

Olkoon $p \in P$, jos jokaiselle $q \geq p$ on olemassa sellainen $r \in D$, että $r \geq q$, sanotaan joukon D olevan tiheä alkion p yläpuolella.

Esimerkkinä epätriviaaleista tiheistä joukoista toimivat jokaista mahdollisuusverkkoa Z^ϕ kohden määriteltävät joukot,

$$D^\phi := \{ p \in \mathbb{P} \mid (\exists q \in \mathbb{P} \setminus Z^\phi \ p \geq q) \vee (\forall q \in \mathbb{P} \setminus Z^\phi \ p \perp q) \} \quad (1)$$

Missä merkintä $p \perp q$ tarkoittaa alkioiden p ja q olevan keskenään epäyhteensopivia, ei siis ole olemassa sellaista $r \in \mathbb{P}$, että $r \geq p, q$

Toisin sanottuna joukkoon D^ϕ kuuluvat kaikki ne osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkiot jotka ovat joko jonkin mahdollisuusverkkoon Z^ϕ kuulumattoman alkion yläpuolella tai yhteensopimattomia kaikkien kyseiseen mahdollisuusverkkoon kuulumattomien alkioiden kanssa.

Erotteluaksiooman nojalla joukot $D^\phi \in M$, aina kun $Z^\phi \in M$. Ne ovat myös tiheitä, sillä jos $p \in \mathbb{P}$ on yhteensopiva, jonkin $q \in \mathbb{P} \setminus Z^\phi$ kanssa, niin $q, p \leq (p \cup q) \in D^\phi$. Toisaalta, jos p ei ole yhteensopiva minkään $q \in \mathbb{P} \setminus Z^\phi$ kanssa, kuuluu p itse joukkoon D^ϕ .

Joukot D^ϕ ovat todistuksen kannalta merkittäviä, sillä jos saadaan osoitettua, että kaikki ihanteen G alkiot kuuluvat mahdollisuusverkkoon Z^ϕ ja jonkin alkion $p \in G$ voitaisiin osoittaa kuuluvan joukkoon D^ϕ , olisi varmaa, että jokainen alkion p laajennus kuuluisi myös mahdollisuusverkkoon Z^ϕ , kuten tullaan myöhemmin todistamaan. Tämän mahdollistamiseksi tulee ensin määritellä ihanteen geneerisyyden käsite.

Määritelmä 11 (Geneerinen ihanne). Olkoon G osittaisen järjestyksen \mathbb{P} ihanne, jonka leikkaus minkä tahansa tiheän joukon $D \subset \mathbb{P}$, $D \in M$ kanssa on epätyhjä. Tällaista ihannetta G kutsutaan geneeriseksi yli mallin M .

Koska joukot D^ϕ ovat tiheitä, löytyy jokaiselle joukolle D^ϕ jokaisesta geneerisestä ihanteesta jokin alkio, joka kuuluu molempiin joukkoihin. Jos $G \subset Z^\phi$ ja G on geneerinen ihanne, niin on olemassa sellainen $p \in G$, että $p \in D^\phi$, joten myös kaikki alkion p laajennukset kuuluvat mahdollisuusverkkoon Z^ϕ . Geneeriset ihanteet toimivat siis juuri halutulla tavalla. Käydään lause ja todistus silti vielä ajatuksen selkeyttämiseksi läpi.

Lause 8. *Olkoon G osittaisen järjestyksen \mathbb{P} geneerinen ihanne ja $G \subset Z^\phi \in M$. On olemassa $p \in G$, jonka kaikki laajennukset kuuluvat joukkoon Z^ϕ .*

Todistus. Olkoon D^ϕ kuten kohdassa (1). Koska D^ϕ on tiheä ja G geneerinen niin on olemassa jokin $p \in G \cap D^\phi$. Joukon D^ϕ määritelmästä seuraa, että joko p on jonkin $q \in Z^\phi$ laajennus tai p ei ole yhteensopiva minkään $q \in Z^\phi$ kanssa.

Ensimmäinen vaihtehto on mahdoton, sillä jos $p \geq q \in Z^\phi$, niin siitä, että ihanne on alaspäin suljettu ja oletuksesta $p \in G$ seuraisi, että $q \in G$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen $G \subset Z^\phi$, joten p ei ole yhteensopiva minkään $q \in Z^\phi$ kanssa ja sen kaikki laajennukset kuuluvat näin joukkoon Z^ϕ . \square

Nyt vaaditaan enää, että maksimaalisia geneerisiä ihanteita on olemassa,

Lause 9. *Olkoon $p \in \mathbb{P}$ ja M numeroituvaa malli. Tällöin on olemassa osittaisen järjestyksen \mathbb{P} geneerinen ihanne G , yli mallin M , johon p kuuluu.*

Todistus. Koska M on numeroituva, voidaan tiheet osajoukot $D \subset \mathbb{P}$, $D \in M$ numeroida. Olkoon D_1, D_2, D_3, \dots niiden jokin numerointi.

Muodostetaan jono $S = p_0, p_1, p_2, \dots$, asettamalla $p_0 = p$. Nyt, koska D_1 on tiheä on olemassa alkio $p_1 \in D_1$, jolle $p_1 \geq p_0$. Vastaavasti, koska D_{i+1} on tiheä löytyy $p_{i+1} \in D_{i+1}$, jolle $p_{i+1} \geq p_i$.

Muodostetaan ihanne $G = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq p_i, \text{ jollakin } p_i \in S\}$. Ihanne G leikkaa jokaisen joukon D_i , sillä $p_i \in G \cap D_i$. Ihanne G on selvästi alaspäin suljettu, ja jokaiselle parille $p, q \in G$, $p \leq p_i$ ja $q \leq p_j$, valitaan $k \geq i, j$ jolloin, $p, q \leq p_k$, joten p ja q ovat yhteensopivia. G on siis ihanne. \square

Edellisessä todistuksessa huomionarvoista on mallin numeroituvuuden hyväksikäyttö. Geneerisyydellä saadaan myös varmistettua eräs aiemmin mainittu ominaisuus, nimittäin se, ettei joukko G löydy vielä mallista M .

Lause 10. *Olkoon G geneerinen ihanne yli numeroituvan mallin M . Tällöin $G \notin M$*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $G \in M$. Muodostetaan joukko $D_G = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists q \in G, p \perp q\}$. Erotteluaksiooman nojalla $D_G \in M$ ja selvästi D_G on tiheä mallissa M . Koska G on geneerinen, kuuluu siihen ainakin yksi alkio jokaisesta malliin M kuuluvasta tiheästä joukosta, myös joukosta D_G , mikä on ristiriita. \square

4.4.2 Pakottamisrelaatio \Vdash

Luvun alussa esitelty pakottamisrelaation määritelmä on nyt mahdollista korvata oikealla, tarkalla määritelmällä.

Määritelmä 12 (Pakottamisrelaatio). Osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkion p sanotaan pakottavan lauseen $\phi(\tau_1, \dots, \tau_k)$, jos $\phi^{M[G]}(\tau_1^G, \dots, \tau_k^G)$ on tosi kaikille geneerisille ihanneille G , joihin kuuluu alkion p .

Pakottaminen muodostaa jokaiselle k vapaata muuttujaa sisältävälle kaavalle ϕ erillisen relaation joukossa $\mathbb{P} \times (M^{\mathbb{P}})^k$. Tätä relaatiota merkitään $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_k)$.

Jokaisen lauseen pakottamisrelaation jokainen alkio kuuluu siis malliin M ja antaa näin mahdollisuuden tarkastella mallia $M[G]$ koskevia lauseita mallin M sisällä. Kuten jo esimerkissä 7 todettiin, lauseet eivät ulkoisesti näytä liittyvän toisiinsa. Seuraava määritelmä helpottaa pakottavien alkiodien kokoelmista puhumista.

Määritelmä 13. Olkoon $\phi(x_1, \dots, x_k)$ joukko-opin kaava. Silloin \mathcal{F}_α^ϕ on kaikkien niiden vektorien $(p, \tau_1, \dots, \tau_k)$ kokoelma, joissa jokaisen \mathbb{P} -nimen τ_i aste on maksimissaan α ja $\phi^{M[G]}(\tau_1^G, \dots, \tau_k^G)$ on tosi, kun $p \in G$.

Lauseiden ψ tapauksessa muuttujalla α ei ole väliä ja $\mathcal{F}^\psi \subset \mathbb{P}$. Esimerkiksi, jos määritellään ϕ kuten esimerkissä 8 saadaan $\mathcal{F}^\phi = \{q \in \mathbb{P} \mid q \geq (5, 0)\}$.

4.4.3 Pakottaminen käytännössä

Tämän tutkielman kannalta hyödyllisintä on käsitellä pakottamista kolmena meta-lauseena, jotka käsittelevät mallia M , joukkoa $M[G]$ ja osittaista järjestystä \mathbb{P} sekä pakottamisrelaatiota \Vdash . Jokaiselle joukko-opin kaavalle ϕ pakottamisen metalauseet tuottavat *ZFC*-todistuksen lauseiden paikkansa pitävyydestä kyseisen kaavan suhteen.

Lause 11 (Pakottamisen määriteltävyys). *Olkoon $\phi(x_1, \dots, x_k)$ joukko-opin kaava joka sisältää k vapaata muuttujaa. On olemassa sellainen joukko $\mathcal{F}_\alpha^\phi \in M$ siten, että $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_k)$, jos ja vain jos $(p, \tau_1, \dots, \tau_k) \in \mathcal{F}_\alpha^\phi$. Toisin sanoen, määritelmän 13 mukaiset kokoelmat \mathcal{F}_α^ϕ ovat siis joukkoja mallissa M .*

Määriteltävyys mahdollistaa pakotusjoukkojen käyttämisen osana aksioomien todistamista pohjamallista M käsin, sillä ne kuuluvat malliin M .

Lause 12 (Pakottamisen kattavuus). *Olkoon G osittaisen järjestyksen \mathbb{P} geneerinen ihanne. Silloin $\phi^{M[G]}(\tau_1^G, \dots, \tau_k^G)$ jos ja vain jos on olemassa sellainen $p \in G$, että $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_k)$.*

Kattavuus takaa, että jokainen mallin $M[G]$ toteuttama lause on jonkin $p \in G$ pakottama.

Lause 13 (Pakottamisen johdonmukaisuus). *Jos $p \Vdash \phi$ ja $q \geq p$, niin $q \Vdash \phi$.*

Yhdessä osittaisten järjestysten ihanteiden ensimmäisen ominaisuuden kanssa, pakottamisen johdonmukaisuus mahdollistaa lauseiden “yhtäaikaisen toteutumisen” sillä, jos $p, q \in G$ ja $p \Vdash \phi$ ja $q \Vdash \psi$, niin on olemassa sellainen $p, q \leq r \in G$, joten johdonmukaisuuden nojalla $r \Vdash \phi$ ja $r \Vdash \psi$.

Kaikkien kolmen ylläolevan lauseen todistukset löytyvät lähteestä [1].

4.5 $M[G]$ on malli

Edellisten lukujen määritelmien ja lauseiden avulla on nyt mahdollista osoittaa, että $M[G]$ on joukko-opin malli, kun ihanne G on geneerinen yli mallin M . Huomattavaa on, että todistuksen keskeisin osa on erottelu-, korvaus- ja potenssijoukonaksiomien käsittely. Ekstensionaalisuus-, säännöllisyys- ja äärettömyssaksiomat ovat suoria seurauksia tietyistä joukon $M[G]$ ominaisuuksista, kun taas muiden aksiomien toteutumisen osoittamiseen käytetään aina samaa strategiaa.

Kuten aiemmin on todettu aksiomat käsittelevät vain tiettyjen joukkojen olemassaoloa ja siten niiden toteutumisen osoittamiseksi riittää näyttää, että tarvittavat joukot löytyvät malliehdokkaasta. Johtuen joukon $M[G]$ muodostamistavasta ja siitä, miten totuus voidaan pakottamisen avulla määritellä mallista M käsin, tullaan näkemään sama todistusstrategia yhä uudelleen. Ensimmäiseksi todetaan, että aksioma vaatii jonkin muotoisen joukon a olemassaoloa, tämän jälkeen muotoillaan ehdokas, \mathbb{P} -nimi α . Lopuksi osoitetaan $\alpha^G = a$, joka todistaa väitteen.

Lause 14. *Struktuuri $M[G]$, missä G on osittaisen järjestyksen \mathbb{P} geneerinen ihanne yli mallin M on ZFC joukko-opin malli.*

Todistus. Osoitetaan käymällä läpi joukko-opin aksiomat.

1. **Ekstensionaalisuusaksioma:** Koska jokainen transitiivinen joukko on ekstensionaalinen (toteuttaa ekstensionaalisuusaksioman) ja $M[G]$ on transitiivinen, on $M[G]$ myös ekstensionaalinen.
2. **Säännöllisyysaksioma:** Jokainen joukko toteuttaa säännöllisyysaksioman.

3. **Erotteluaksioma:** Tämä on ensimmäinen aksiomista, jonka toteutumisen osoittamiseen tarvitaan pakottamislauseita. Osoittamiseksi tulee näyttää, että jokaiselle parille $\phi^{M[G]}(x)$ ja $\tau^G \in M[G]$, on olemassa $z := \{ \sigma^G \in \tau^G \mid \phi(\sigma^G) \} \in M[G]$. Muita vastaavia todistuksia mukailleen, on tarkoitus etsiä jokin \mathbb{P} -nimi v , joka G -evaluoituu joukoksi z .

Muodostetaan lauseen 11 mukainen joukko \mathcal{F}_α^ϕ , missä α on joukon τ nimiasete. Joukko \mathcal{F}_α^ϕ muodostuu pareista (p, σ) , joille $p \Vdash \phi(\sigma)$. Koska myös τ on mallissa M , saadaan mallin M erotteluaksioman avulla muodostettua \mathbb{P} -nimi $v := \{ (\sigma, p) \in \tau \mid p \Vdash \phi(\sigma) \}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $v^G \subseteq z$. Olkoon $\sigma^G \in v^G$. Tällöin on olemassa sellainen $p \in G$, että $p \Vdash \phi(\sigma)$ ja $(\sigma, p) \in \tau$. Siis $\phi(\sigma^G)$ ja $\sigma^G \in z$.

Näytetään vielä, että $z \subseteq v^G$. Olkoon $\sigma^G \in z$, jolloin $\sigma^G \in \tau^G$ ja $\phi(\sigma^G)$. On siis olemassa jokin pari $(\sigma, p) \in \tau$ ja $p \in G$. Koska myös $\phi(\sigma^G)$ toteutuu, on lauseen 12 nojalla olemassa sellainen $q \in G$, että $q \Vdash \phi(\sigma)$. Olkoon $r \in G$ jokin alkioiden p ja q yhteinen laajennus, jonka olemassaolon takaa se, että G on ihanne. Nyt $(\sigma, r) \in \tau$ ja lauseen 13 nojalla $r \Vdash \phi(\sigma^G)$. Joukon v määritelmän perusteella $(\sigma, r) \in v$, jolloin $\sigma^G \in v^G$.

4. **Pariaksioma:** Olkoon $\sigma^G, \tau^G \in M[G]$. Tarkastellaan osittain kanonisten nimien tapaan muodostettavaa \mathbb{P} -nimeä $v = \{(\sigma, p) \mid p \in \mathbb{P}\} \cup \{(\tau, p) \mid p \in \mathbb{P}\}$. Nyt kanonisten nimien evaluaation verrattavasti, $v^G = \{\tau^G, \sigma^G\}$ riippumatta ihanteen G valinnasta.
5. **Yhdisteaksioma:** Olkoon $\tau^G \in M[G]$. Muodostetaan ehdokas joukon $\bigcup \tau^G$ \mathbb{P} -nimeksi $v = \{(\rho, p) \mid (\rho, p) \in \sigma, \text{ jollain } (\sigma, p) \in \tau\}$. Selvästi, jos $a \in \tau^G$, niin $a \in v^G$, eli $\tau^G \subseteq v^G$. Myös, jos $(\rho, p) \in v$, niin on olemassa jokin $(\sigma, p) \in \tau$, jolle $(\rho, p) \in \sigma$, joten $v^G \subseteq \tau^G$.
6. **Äärettömyysaksioma:** Seuraa siitä, että $\omega \in M \subset M[G]$.
7. **Korvausaksioma:** Olkoon $\phi(x, y, z)$ joukkoon $M[G]$ relativisoitu kaava ja valitaan $\pi^G \in M[G]$ niin, että jokaiselle $\sigma^G \in \pi^G$ on olemassa yksikäsitteinen τ^G , jolle $\phi(\sigma^G, \tau^G, \pi^G)$. Tavoitteena on osoittaa, että on olemassa sellainen joukko $\rho^G \in M[G]$, johon kuuluvat kaikki alkio τ^G , joille $\phi(\sigma^G, \tau^G, \pi^G)$ on tosi, jollain $\sigma^G \in \pi^G$.

Kiinnitetään jokin malliin M kuuluva \mathbb{P} -nimi π . Olkoon jokaista $(\sigma, p) \in \pi$, kohti $\alpha_{\sigma, p}$, pienin mallin M ordinaali, jolle on olemassa τ siten, että $(p, \sigma, \tau, \pi) \in \mathcal{F}_{\alpha_{\sigma, p}}^\phi$, eli $p \Vdash \phi(\sigma, \tau, \pi)$, jos jokin ehdot täyttävä p on. Jos taas mikään p ei pakota lausetta $\phi(\sigma, \tau, \pi)$, olkoon $\alpha_{\sigma, p} = \emptyset$. Koska jokaiselle joukolle π ja mille tahansa $(\sigma, p) \in \pi$ on olemassa vain yksi α jolle kaava,

$$\text{Ord}(\alpha) \wedge (\exists p \exists \tau (p, \sigma, \tau, \pi) \in \mathcal{F}_\alpha^\phi \vee \alpha = \emptyset) \wedge \forall \beta \in \alpha \neg (\exists p \exists \tau (p, \sigma, \tau, \pi) \in \mathcal{F}_\beta^\phi) \quad (2)$$

pitää paikkansa, ja koska korvausaksioma toteutuu mallissa M , on kyseisten ordinaalien kokoelma oikea joukko mallissa M . Näin ollen, myös jokaiselle (σ, p) on olemassa edellä mainitun joukon supremum α^* , joka sekään on joukossa M .

Määritellään nyt $V_\alpha := \{\sigma^G \mid \sigma \in N_\alpha\} \in M[G]$, mille tahansa $\alpha \in M$. Jos voidaan näyttää, että minkä tahansa τ^G , jolle $\phi(\sigma^G, \tau^G, \pi^G)$ kun $\sigma^G \in \pi^G$, on pakko kuulua joukkoon V_α , voidaan määrittellä kaikkien niiden τ^G joukko, ylempänä todistetun erotteluaksiomaan nojalla. Formaalisimmin

$$\{ y \in V_\alpha^* \mid \exists x \in \pi^G \phi(x, y, \pi^G) \} \in M[G]. \quad (3)$$

Tästä seuraa, että riittää osoittaa, että kaikkien niiden \mathbb{P} -nimien τ , joille $\phi(\sigma^G, \tau^G, \pi^G)$, nimiaste on suurimmillaan α^* .

Olkoon $\sigma^G \in \pi^G$, jolloin $(\sigma, p) \in \pi$, jollakin $p \in G$. Tällöin on olemassa myös jokin τ^G , jolle $\phi(\sigma^G, \tau^G, \pi^G)$, joten lauseen 12 nojalla on olemassa jokin $q \in G$, jolle $q \Vdash \phi(\sigma, \tau, \pi)$. Ottamalla alkioden p ja q yhteinen laajennus $r \in G$ tiedetään myös, että $(\sigma, r) \in \pi$ ja $r \Vdash \phi(\sigma, \tau, \pi)$. Koska α^* on pienimpien $\alpha_{(\sigma, p)}$ ordinaalien supremum, joille $p \Vdash \phi(\sigma, \tau', \pi)$, on oltava olemassa sellainen nimiasteeltaan maksimissaan ordinaalin α^* tasoinen τ' ja $r \Vdash \phi(\sigma, \tau', \pi)$. Koska ϕ "kuvaa" jokaisen joukon σ joksikin tietyksi alkiksi τ , niin $\tau = \tau'$ ja molempien nimiaste on maksimissaan tasoa α^* .

8. **Potenssijoukonaksioma:** Aksiomaan todistamiseksi tulee jokaista joukkoa $\tau^G \in M[G]$ kohden löytää sellainen \mathbb{P} -nimi v siten, että $v = \mathcal{P}(\tau^G) \cap M[G]$.

Tarkastellaan joukkoa $\pi = \{ (\sigma, p) \mid \sigma \subseteq \tau \in M^{\mathbb{P}}, p \in \mathbb{P} \}$. Selvästi joukkoon π kuuluu maksimaalinen määrä joukon τ osajoukkoja, joten on selvää, että $\pi^G \subseteq \mathcal{P}(\tau^G) \cap M[G]$, osoitettavaksi jää siis $\mathcal{P}(\tau^G) \cap M[G] \subseteq \pi^G$.

Olkoon σ^G joukon τ^G mielivaltainen osajoukko. Koska joukkoon π kuuluvat kaikki parit (σ, p) riittää ehdon $\sigma^G \in \tau^G$ osoittamiseksi löytää jokin \mathbb{P} -nimi $\sigma' \subset \tau$, jolle $\sigma'^G = \sigma^G$.

Muodostetaan joukko $\sigma' = \{ (\rho, p) \mid p \Vdash \rho \in \sigma \}$, jonka olemassaolon lause 11 takaa. Jos nyt $\rho^G \in \sigma'^G$, niin on olemassa $p \in G$ siten, että $p \Vdash \rho \in \sigma$, joten $\rho^G \in \sigma^G$ ja $\sigma'^G \subseteq \sigma^G$. Toisaalta, jos $\rho^G \in \sigma^G$, niin lauseen 12 nojalla on olemassa sellainen $p \in G$, että $p \Vdash \rho \in \sigma$. Tällöin joukon σ' määritelmän mukaan $(\rho, p) \in \sigma'$, joten $\sigma' \subseteq \sigma$.

9. **Valinta-aksioma:** Koska valinta-aksioma on ekvivalentti hyvinjärjestysperiaatteen kanssa, riittää todistaa, että jokaiselle $\tau^G \in M[G]$ on olemassa hyvinjärjestys.

Olkoon α \mathbb{P} -nimien τ nimiaste, jolloin $\tau \subset N_\alpha \times \mathbb{P}$. Koska malli M toteuttaa valinta-aksioman, ja siten myös hyvinjärjestysperiaatteen, on olemassa joukon τ hyvinjärjestys $\{(\sigma_\beta, p_\beta) \mid 0 \leq \beta < \gamma\}$ ja funktio $f = \tau \rightarrow \gamma \in M$, joka hyvinjärjestää joukon τ .

Nyt, koska jokaisella mallin M alkiolla on kanoninen nimi, on myös kuvauksella f ja kanonisen nimen määritelmästä \check{f}^G hyvinjärjestää joukon τ^G .

□

5 Kontinuumihypoteesin negaatio

Pakotusmenetelmän esittelemisen jälkeen voidaan siirtyä itse kontinuumihypoteesin negaation pariin. Edellisessä luvussa osoitettiin, että joukko-opin numeroituvaan transitiiviseen malliin M voidaan lisätä, jokin luonnollisten lukujen geneerinen osajoukko $\bigcup G$ pakotusmenetelmän avulla siten, että joukko johon uusi joukko kuuluu on edelleen joukko-opin malli.

Kontinuumihypoteesin toteutuessa $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Kardinaliteetin määritelmästä seuraa, että kontinuumihypoteesi ei toteudu, jos mistä tahansa ensimmäistä ylinumeroituvaa kardinaalia suuremmasta joukosta on olemassa injektiivinen kuvaus luonnollisten lukujen osajoukkojen joukkoon. Suunnitelmana onkin lisätä malliin M kuvaus $f_G : \aleph_2 \rightarrow 2^{\aleph_0}$, yllä esitellyn pakotusmenetelmän avulla, jolloin $\aleph_2^{M[G]} \leq (2^{\aleph_0})^{M[G]}$. Lopuksi tulee vielä osoittaa, että $\aleph_2^{M[G]} = \aleph_2^M$ ja todistus on valmis.

5.1 Injektiivisen kuvauksen f_G lisääminen

Injektiivisen kuvauksen f_G lisäämisen strategia on täsmälleen sama kuin luvussa neljä esitellyn yhden joukon lisäämisen kohdalla. Valitaan sopiva osittainen järjestys \mathbb{P} , jonka alkiot löytyvät valmiiksi mallista M ja jonka maksimaalisten ihanteiden unionit muodostavat haluttuja kuvauksia. Kun rajataan lisättävät ihanteet geneerisiin menevät kaikki aikaisemmat todistukset aksioomien toteutumiseksi läpi, mutatis mutandis.

5.1.1 Osittainen järjestys \mathbb{P}

Haluttu kuvaus $\aleph_2 \rightarrow 2^{\aleph_0}$, voidaan, samoin kuin luonnollisten lukujen osajoukot edellisessä luvussa, kirjoittaa muodossa $\aleph_2 \times \aleph_0 \rightarrow \{0, 1\}$. Osittaisen järjestyksen \mathbb{P} muodostavat tuttuun tapaan kaikki äärelliset osittaiskuvaukset joukosta $\aleph_2 \times \aleph_0$, joukkoon $\{0, 1\}$. Selvästi kaikki osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkiot kuuluvat malliin M . Osittaisjärjestys \mathbb{P} on myös koatomiton, sillä jokainen äärellinen osittaiskuvaus on laajennettavissa uudeksi äärelliseksi osittaiskuvaukseksi äärettömän monella, yhteensopimattomalla tavalla.

Koska luvun 4.4.1 todistukset eivät vaadi muuta kuin ylläolevat ominaisuudet ja mallin numeroituvuuden, voidaan todeta, että osittainen järjestys \mathbb{P} sisältää jokaiselle $p \in \mathbb{P}$ geneerisen ihanteen G yli mallin M , johon p kuuluu. Tästä seuraa, että $M[G]$, kaikilla geneerisillä $G \subset \mathbb{P}$, on joukko-opin malli, josta löytyy haluttu funktio $f_G : \aleph_2 \rightarrow 2^{\aleph_0}$. Nyt kontinuumihypoteesin negaation toteutumisen ainoaksi esteeksi jää tilanne, jossa malliin muodostuu uusia bijektioita kardinaalien \aleph_1 ja \aleph_2 välille romahduttaen ne yhtämahtaviksi.

5.2 Kardinaalit mallissa $M[G]$

Luvussa 2.2.2 esitellyn kaavan $Ord(x)$ absoluuttisuudesta seuraa, että mallin $M[G]$ ordinaaleina toimivat mallin M ordinaaleja vastaavien kanonisten nimien G -evaluaatiot. Voidaan siis todeta, että siirtyessä mallista M malliin $M[G]$ pysyvät ordinaalit samoina. Toisaalta kardinaalin määritelmä perustuu mallista löytyviin bijektioihin,

joten ei ole lainkaan selvää, että kardinaalit pysyisivät samoina. Perimmäisenä tarkoituksen on todistaa, että $\aleph_2^M = \aleph_2^{M[G]}$ tai oikeammin $(\aleph_2^{\check{M}})^G = \aleph_2^{M[G]}$. Tämän osoittamiseksi tulee varmistua siitä, ettei uusia kardinaaleja muodostu, jonka jälkeen on vielä osoitettava, etteivät eri kardinaalit voi romahtaa samaksi kardinaaliksi.

Uusien kardinaalien muodostumisen kannalta tilanne hyvin suoraviivainen. Koska malliin $M[G]$ kuuluvat kaikki mallin M joukot, ei uusia kardinaaleja voi muodostua, sillä jokainen bijektio mallissa M on bijektio myös mallissa $M[G]$.

5.2.1 Kardinaalien romahtaminen

Koska mallin M laajentaminen malliksi $M[G]$ lisää huomattavan määrän joukkoja, on todistuksen toimimiseksi varmistuttava siitä, ettei laajentaminen lisää malliin bijektioita kardinaalien välille. Ajatuksena on tarkastella uusia funktioita $f^G \in M[G]$, mallista M käsin ja varmistua siitä, että kyseisten funktioiden kuvat pysyvät riittävän pieninä. Funktioiden kuvien mahtavuuksien käsittely on kuitenkin ajatuksena hankala johtuen mahtavuuden määritelmästä suhteessa mallien numeroituvuuteen, tästä syystä on hyödyllistä tarkastella asiaa myös toisesta näkökulmasta, nimittäin mitä kardinaalien romahtus käytännössä tarkoittaisi?

Ensinnäkin jokainen kardinaali on myös ordinaali. Tästä syystä voidaan puhua niiden ordinaalijärjestyksestä, mahtavuudesta riippumatta. Tästä näkökulmasta on selvää, että $\aleph_1^M < \aleph_2^M$. Koska kardinaaliluvut määritellään sellaisina ordinaaleina joilla ei ole bijektioita minkään sitä ordinaalijärjestyksessä pienemmän ordinaalin kanssa, tarkoittaisi bijektion $f^G : (\aleph_1^{\check{M}})^G \rightarrow (\aleph_2^{\check{M}})^G$ olemassaolo sitä, että $(\aleph_2^{\check{M}})^G$ ei ole kardinaaliluku. Sen todistamiseksi, ettei kardinaalien romahtamista tapahdu, riittää siis osoittaa, että niiden mallin M äärettömien ordinaalien, jotka ovat kardinaalilukuja mallissa M , kanonisten nimien G -evaluaatiot ovat kardinaalilukuja mallissa $M[G]$. Tämän osoittamiseksi tarvitaan vielä eräs osittaisia järjestyksiä käsittelevä määritelmä, sekä muutama aputuloks.

Määritelmä 14 (Numeroituva ketjuehto). Osittainen järjestys \mathbb{P} toteuttaa numeroituvan ketjuehdon, jos mikään sen epäyhteensopivien alkioiden joukko ei ole ylinumeroituva. Merkitään kaavaa “ x toteuttaa numeroituvan ketjuehdon”, $nke(x)$.

Selvästi Cohenin osittainen järjestys \mathbb{P} toteuttaa numeroituvan ketjuehdon, sillä koko joukko on numeroituva, eikä numeroituvan joukon osajoukko voi olla ylinumeroituva. Koska numeroituvuus on kuitenkin mallin sisäinen ominaisuus, ei ole selvää, että $nke(\mathbb{P})^M$. Relativisoidun lauseen totuuden tarpeellisuuden teroittamiseksi osoitetaan kuitenkin ensin, ettei kardinaalien romahtamista tapahdu, jos lause oletetaan, jonka jälkeen siirrytään itse lauseen todistukseen.

Lause 15. *Olkoon \mathbb{P} malliin M kuuluva osittainen järjestys, joka $(\mathbb{P}$ toteuttaa numeroituvan ketjuehdon) M , G on osittaisen järjestyksen \mathbb{P} geneerinen ihanne, ja $f^G : \eta \rightarrow \theta$ on funktio ordinaalien $\eta < \theta$ välillä. Nyt,*

1. *On olemassa funktio $g \in M$, $g : \eta \rightarrow 2^\theta$ siten, että $\forall \alpha < \eta$ ($f^G(\alpha) \in g(\alpha)$) ja $(g(\alpha))$ on numeroituva) M .*
2. *Äärettömät ordinaalit, jotka ovat kardinaaleja mallissa M , ovat kardinaaleja mallissa $M[G]$.*

Todistus. 1. Olkoon f funktion f^G \mathbb{P} -nimi, ja p oletuksen mukaisen geneerisen ihanteen G alkio, joka pakottaa lauseen ($f : \check{\eta} \rightarrow \check{\theta}$ on funktio.) Määritellään $g(\alpha) = \{\beta \in \theta \mid \exists q \geq p, q \Vdash f(\check{\alpha}) = \check{\beta}\}$, jokaisella $\alpha \in \eta$. Mallin M erotteluaksiomaan ja pakotuksen määriteltävyyden 11 nojalla, jokainen $g(\alpha)$ on joukko mallissa M ja $f^G(\alpha) \in g(\alpha)$.

Muodostetaan seuraavaksi jokaiselle $\alpha \in \eta$ injektio $h : g(\alpha) \rightarrow \mathbb{P}$ valitsemalla jokaiselle $\beta \in g(\alpha)$ jokin q_β , jolle $q_\beta \Vdash f(\check{\alpha}) = \check{\beta}$. Nyt funktion h kuva on epäyhteensopivien alkioiden joukko, joten lauseesta $(nke(\mathbb{P}))^M$ seuraa $(im(h))$ on numeroituva ^{M} ja, koska h on injektiivinen toteutuu siis myös $(g(\alpha))$ on numeroituva ^{M} .

2. Olkoon $\theta \in M$ sellainen ääretön ordinaali, että $(\theta$ ei ole kardinaali) ^{$M[G]$} . Olkoon myös η ääretön ordinaali, $\eta < \theta$, ja $f^G : \eta \rightarrow \theta$ surjektio mallissa $M[G]$. Tarkastellaan ensimmäisen kohdan mukaista funktiota $g : \eta \rightarrow 2^\theta$. Selvästi, $\theta = \bigcup_{\alpha \in \eta} g(\alpha)$, josta saadaan $(|\theta| = |\bigcup_{\alpha \in \eta} g(\alpha)| \leq |\eta \times \aleph_0| = |\eta|)^M$, joten θ ei ole kardinaali myöskään mallissa M . Näin ollen kardinaalit mallissa M ovat kardinaaleja myös mallissa $M[G]$. □

Nyt tulee enää osoittaa, että osittainen järjestys \mathbb{P} toteuttaa numeroituvan ketjuehdon mallissa M . Sen todistamiseen tarvitaan seuraavaa äärettömiä joukkoja koskevan kombinatoriikan tulosta, joka kulkee nimellä Δ -systeemilemma.

Lause 16 (Δ -systeemilemma). *Olkoon X ylinumeroituva kokoelma äärellisiä joukkoja. Tällöin on olemassa ylinumeroituva $Y \subseteq X$ ja äärellinen joukko r siten, että $\forall x, y \in Y, x \cap y = r$. Joukkoa r kutsutaan juureksi.*

Todistus. Todistus löytyy lähteestä [9]. □

Koska osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkioita ovat äärellisiä osittaiskuvauksia, ovat ne myös äärellisiä joukkoja, joten Δ -systeemilemmaa voidaan soveltaa osittaisen järjestyksen \mathbb{P} , mallin M näkökulmasta ylinumeroituviiin, osajoukkoihin seuraavasti.

Lause 17. *Osittainen järjestys \mathbb{P} toteuttaa numeroituvan ketjuehdon mallissa M .*

Todistus. Olkoon S jokin mallin M näkökulmasta ylinumeroituva joukko osittaisen järjestyksen \mathbb{P} alkioita p ja $X = \{Dom(p) \mid p \in S\}$. Koska jokainen $Dom(p)$ on äärellinen joukko, on myös kuvauksien määrä $\{0, 1\}^{Dom(p)}$ äärellinen, joten X on (ylinumeroituva) ^{M} .

Nyt malliin M relativisoidusta Δ -systeemilemmasta seuraa, että on olemassa joukon X osajoukko Y , joka on (ylinumeroituva) ^{M} ja äärellinen joukko r siten, että $\forall x, y \in Y (x \cap y = r)$. Muodostetaan joukko Z valitsemalla jokaista $x \in Y$ kohden jokin $p_x \in S$ siten, että $x = Dom(p_x)$. Tällöin kaikkien joukkoon Z kuuluvien kuvausten lähtöjoukkojen leikkaus on r . Koska r on äärellinen, on olemassa vain äärellinen määrä tapoja kuvata r joukkoon $\{0, 1\}$. Toisaalta joukko Z on (ylinumeroituva) ^{M} , joten siihen on pakko kuulua jotkin kuvaukset p_x ja p_y , jotka kuvaavat joukon r samoin, joten ne ovat yhteensopivia.

Koska S on mielivaltainen on osoitettu, että mikään mallin M näkökulmasta yli-numeroituva, osittaisen järjestyksen \mathbb{P} osajoukkoon ei voi kuulua pelkästään keskenään epäyhteensopivia alkioita, joten \mathbb{P} toteuttaa numeroituvan ketjuehdon mallissa M . \square

Lause 18. *Malli $M[G]$ toteuttaa lauseen ($\aleph_2 \leq 2^{\aleph_0}$).*

Todistus. Lauseen 17 nojalla osittainen järjestys \mathbb{P} toteuttaa numeroituvan ketjuehdon mallissa M , joten lauseen 15 mukaan $\aleph_2^{M[G]} = \aleph_2^M$, ja malli $M[G]$ toteuttaa lauseen “ $\bigcup G : \aleph_2 \times \aleph_0 \rightarrow \{0, 1\}$ on funktio”. Muodostetaan jokaista $(\alpha, n) \in \aleph_2 \times \aleph_0$ kohti joukko $p_{(\alpha, n)} = \{p \in \mathbb{P} \mid (\alpha, n) \in \text{Dom}(P)\}$. Koska joukot $p_{(\alpha, n)}$ ovat tiheitä, seuraa ihanteen G geneerisyydestä, että G leikkaa niistä jokaisen ja $\aleph_2 \times \aleph_0 \subseteq \text{Dom}(G)$.

Muodostetaan seuraavaksi jokaista eriävien joukkojen paria $\alpha, \beta \in \aleph_2$ kohti joukko $d_{(\alpha, \beta)} = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n (G(\alpha, n) \neq G(\beta, n))\}$. Koska myös joukot $d_{(\alpha, \beta)}$ ovat tiheitä mallissa M leikkaa ihanne G niistä jokaisen, joten jokainen pari kuvauksen G “riivejä” eroaa jossakin kohdasta toisistaan. Sama argumentti toimii, pitämällä α mielivaltaisen joukon \aleph_2 alkiona ja korvaamalla β mielivaltaisen, mallista M löytyvän, luonnollisten lukujen osajoukon karakteristisella funktiolla, joten kuvauksen G “riivit” eroavat myös kaikista “vanhojen” luonnollisten lukujen osajoukkojen karakteristisista funktioista.

Kuvaus $\bigcup G : \aleph_2 \times \aleph_0 \rightarrow \{0, 1\}$ on siis mallista $M[G]$ löytyvä injektiiivinen kuvaus kardinaalista \aleph_2 joukkoon 2^{\aleph_0} . \square

6 Lopuksi

Tutkielman alkuperäisenä ajatuksena oli esitellä Cohenin pakotusmenetelmää ja sen tunnetuinta sovellusta eli todistusta kontinuumihypoteesin negaation ristiriidattomuudesta ZFC joukko-opin kanssa. Suunnitelmaksi muodostui esitellä ensin jokin konkreettinen esimerkki numeroituvasta ja transitiivisesta joukko-opin mallista, jotta lukijalla olisi myöhemmissä vaiheissa jokin selkeä esimerkki johon palata tarvittaessa. Esimerkimmalliksi valikoitui Cohenin minimaalinen malli, osittain historiallisista syistä, mutta pääosin siksi, että määritelmä on tiivis ja sellaisenaan helposti hahmotettavissa.

Tutkielma eteni niin, että Cohenin minimaalisen mallin esittelemisen jälkeen siirryttiin esittelemään pakotusmenetelmää, sekä sen vaatimia esitietoja. Koska itse menetelmä on hyvin tekninen, esiteltiin se yksinkertaisimman mahdollisen esimerkin avulla. Tutkielmassa esitetyssä esimerkissä tarkoituksena oli lisätä numeroituvaan transitiiviseen malliin yksi luonnollisten lukujen osajoukko, jota mallista ei vielä löydy. Tämän jälkeen osoitettiin, että minkä tahansa joukon lisääminen malliin on mahdollista edellyttäen, että joukko täyttää luvussa käsitellyt reunaehdot eli joukko on jonkin osittaisen järjestyksen geneerinen ihanne yli alkuperäisen mallin.

Lopuksi osoitettiin, että lisäämällä ZFC joukko-oppiin lause $\phi := \aleph_2 \leq 2^{\aleph_0}$ saadaan ristiriidaton teoria. Tämä tehtiin osoittamalla ensin, että pakotusmenetelmällä voidaan lisätä numeroituvaan transitiiviseen malliin kuvaus $f : \aleph_2 \rightarrow 2^{\aleph_0}$. Tämän jälkeen todistettiin vielä, että kardinaaliluvut pysyvät mallin laajentamisen yhteydessä kardinaalilukuina, eikä niitä ilmesty lisää. Näin ollen uusi malli toteuttaa halutun teorian, joten täydellisyyslauseen nojalla se on ristiriidaton. Koska lauseesta ϕ seuraa kontinuumihypoteesin negaatio, on myös $ZFC + \neg CH$ ristiriidaton.

Kontinuumihypoteesin ratkeamattomuus on Gödelin ensimmäisen epätäydellisyyslauseen ohella yksi tunnetuimpia ratkeamattomuustuloksia. Kuitenkin monet asiasta kiinnostuneet jättävät perehtymisensä asiaan varsin pintatasolle, todennäköisesti osin joukko-opin abstraktiuden ja osin Cohenin pakotusmenetelmän teknisyiden vuoksi. Tämän tutkielman tarkoituksena ja tavoitteena on ollut osaltaan tuoda edellä kuvatuin keinoin konkretiaa abstrakteihin tuloksiin ja näin tehdä niistä helpommin lähestyttäviä uhraamatta kuitenkaan liaksi Cohenin pakotusmenetelmän teknisiä hienouksia.

Viitteet

- [1] Serafim Batzoglou: *Independence of the Continuum Hypothesis: an Intuitive Introduction* 2022
- [2] Heinz-Dieter, Peckhaus Ebbinghaus; *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work* 2007
- [3] Yiannis N. Moschovakis: *Descriptive Set Theory* 1980
- [4] Vesa Halava, Tero Harju: *Logiikka: Peruskurssi*
- [5] Kurt Gödel: *The consistency of the Continuum Hypothesis* 1940
- [6] JC Shepherdson: *Inner Models for Set Theory* 1952
- [7] Paul J Cohen: *A Minimal Model for Set Theory* 1963
- [8] Thomas Jech: *Set theory* 2003
- [9] Kenneth Kunen *Set theory: An Introduction to Independence Proofs* 1980