Turun yliopisto
University of Turku

Funktion esitysmuotojen yhteyksien aiheuttamat haasteet lukiolaisille

Jussi-Johannes Ylitalo

Pro Gradu – tutkielma

Matematiikan laitos

Luonnontieteiden ja tekniikan tiedekunta

Turun yliopisto

Huhtikuu 2019

TURUN YLIOPISTO
Jussi-Johannes Ylitalo
Funktion esitysmuotojen yhteyksien aiheuttamat haasteet lukiolaisille
Matematiikan didaktinen Pro Gradu, 47 sivua
Huhtikuu 2019

Tässä kirjallisuuskatsauksessa perehdytään toisen asteen opiskelijoiden kohtaamiin haasteisiin, joita funktion symbolisen ja graafisen esitysmuotojen väliset yhteydet aiheuttavat. Tutkielmassa paneudutaan kerätyn kirjallisuusaineiston pohjalta havaintoihin opiskelijoiden funktion symbolisen ja graafisen esitysmuotojen yhteyksien puutteista, siirtymäkyvyn haasteista sekä funktion esitysmuotojen lokeroinnista. Tämän jälkeen kartoitetaan näitä haasteita aiheuttavia tekijöitä. Tutkielman lopussa esitetään omaa henkilökohtaista pohdintaa kirjallisuuskatsauksen aiheesta kirjoittajan oman toisen asteen opiskelun sekä opettajakokemuksen pohjalta. Tutkielma on kirjoitettu osana aineenopettajan pätevyyteen johtavia syventäviä opintoja.

Avainsanat: Esitysmuoto, yhteys, siirtymäkyky, funktiokäsite, lokerointi

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Suomen vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteissa (lyhennetään LOPS 2015) opetustilanteita ohjeistetaan järjestettäväksi siten, että ”erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin.” Vuoden 2016 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (lyhennetään POPS 2016) taas mainitaan, että matematiikassa vuosiluokilla 7-9 ”opetuksessa syvennetään matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä.” Matematiikalle aineena on luontaista sekä eri aihealueiden välitön kytkeytyminen toisiinsa sekä näiden aiheiden kumulatiivinen luonne, jonka vuoksi edistyneempien asioiden ymmärtäminen vaatii peruskäsitteistön vahvaa hallintaa sekä kykyä linkittää tämä yhteen uuden asian kanssa.

Eri aihealueiden tai käsitteiden väliset yhteydet eivät ole kuitenkaan välttämättä ilmeisiä tai triviaaleja ja näiden tavoitteiden täyttäminen opetuksen suunnittelussa saattaa osoittautua hankalaksi. Monet peruskoulun oppilaat ja lukion opiskelijat saattavat kohdata koulutaipaleensa aikana yhteyden puuttumiseen tai heikkoon ymmärtämiseen liittyviä haasteita, joita ovat esimerkiksi hankaluus havaita ja käsitellä konsepteja erilaisista näkökulmista, hankaluus tunnistaa yhteinen matemaattinen käsite erilaisten esitysten välillä ja haaste siirtää käsiteltävä aihe toiseen esitettävään muotoon. Tämänkaltaisia ongelmia voidaan kartoittaa jokaisella matematiikan osa-alueella, kuten geometrian ja trigonometrian välillä tai analyyttisen geometrian ja algebran välillä.

Yksi vastaava toisen asteen matematiikan opetuksen haaste on funktion symbolisen ja graafisen esityksen välisen yhteyden ymmärtäminen. Pitkän matematiikan opiskelijat saattavat työskennellä runsaasti funktion yhtälömuodon kanssa laskiessaan funktion nollakohtia tai derivaattaa ja kuvaajan kanssa tutkiessaan funktion käyttäytymistä, mutta perinteisille rutiinitehtäville altistuminen ei välttämättä johda syvemmän ymmärryksen syntyyn; heikommat opiskelijat ovat saattaneet ohittaa näiden kahden esityksen välisen yhteyden tyystin, eli miten funktion lauseke ja kuvaaja liittyvät toisiinsa. Heikot opiskelijat saattavat käsittää funktion yhtälömuodon ja graafisen kuvaajaan kahdeksi kokonaan erilliseksi käsitteeksi, koska he ovat tottuneet kohtaamaan näitä joko erillisissä konteksteissa tai jos näiden välistä vuorovaikutusta ei ole opetuksessa tuotu esiin. Erityisen riskiryhmän muodostavat varsinkin minimikurssimäärän suorittavat lukioopiskelijat, joilla matematiikan osaamisen taso saattaa säilyä juuri ja juuri peruskoulun 9. luokan tasolla (Metsämuuronen, 2017).

Tämän kirjallisuuskatsauksen tarkoituksena on perehtyä funktion esitysmuotojen välisten yhteyksien haasteisiin ja näiden seurauksiin. Funktio on valittu tutkielman aihealueeksi toisaalta sen mielenkiintoisuuden, ilmaisuvoimaisuuden, soveltuvuuden ja esitysmuotorikkautensa kuin myös haasteellisuutensa vuoksi. Funktion esitysmuodoista rajoitutaan tässä tutkielmassa käsittelemään taas symbolista ja graafista esitysmuotoa. Rajauksessa on jätetty taulukoitu muoto pois siksi, koska tästä ei löydy merkittävää määrää tutkimusmielenkiintoa ja sanallinen muoto taas siitä syystä, että sanallisiin esitysmuotoihin liittyvät ongelmat muodostavat oman erillisen kieleen ja semantiikkaan pohjautuvan tutkimushaaransa ja tähän aiheeseen liittyvät havainnot sekä mekanismit ovat pohjimmiltaan erilaiset symbolisen ja graafisen esitysmuodon väliseen vuorovaikutukseen verrattuna.

Tarkasteltavana kohderyhmänä ovat toisen asteen opiskelijat, jotka suomalaisessa koulujärjestelmässä ovat valtaosin joko kansallisen- tai IB-lukion opiskelijoita. Kirjallisuuskatsauksen tavoitteena ei ole kuitenkaan perehtyä juuri suomalaisten koululaisten matematiikan taitoihin ja oppimisvaikeuksiin, vaan pikemminkin kansainvälisen aineiston pohjalta kartoittaa niitä mahdollisia haasteita, joita toisen asteen opiskelijat saattavat matematiikan opinnoissaan kohdata.

Aiheen käsittely perustuu esitysmuotojen, yhteyksien ja siirtymien käsitteiden viitekehykseen. Tutkielmassa esitetään aluksi matemaattisten esitysmuotojen, yhteyksien ja siirtymäprosessin käsitteet, jonka jälkeen matematiikan haasteita tarkastellaan näiden näkökulmasta. Seuraavaksi näihin käsitteisiin pureudutaan tarkemmin funktion kontekstissa. Tämän jälkeen rajataan sitä tutkimuskirjallisuutta, joka on perehtynyt oppilaiden ja opiskelijoiden haasteisiin funktion esitysmuotojen yhteyksien kanssa ja näiden ongelmien syihin. Tutkielman lopussa esitetään kirjallisuuskatsauksen lopputulokset sekä henkilökohtaista pohdintaa käsiteltävästä aiheesta.

2 Tutkielman käsitteet

Opiskelijan haasteilla tarkoitetaan sellaisia opiskelijan matematiikan osaamisen puutteita, jotka aiheuttavat haittaa opiskelijan matematiikan kehitykselle ja koulumenestykselle. Perehtyessä näiden haasteiden syntyyn ja syihin on välttämätöntä asettaa jokin viitekehys, jonka pohjalta opiskelijoiden matematiikan osaamista voidaan määrittää. Tämän lisäksi tarvitaan jokin oppimisprosessin malli, jonka kautta matematiikan osaamisen oletetaan tapahtuvan. Tällöin haasteiden voidaan todeta seuraavan niistä tekijöistä, jotka haittaavat oppimisprosessin edistymistä. Koska matematiikan opiskelu, oppiminen ja matemaattinen aktiviteetti yleisesti ovat monimutkaisia ilmiöitä, vaativat nämä matematiikalle spesifisten mentaalisten mallien tarkastelua. Tässä kirjallisuuskatsauksessa tämän näkökulman kattavat matemaattiset esitysmuodot, yhteydet sekä siirtymäprosessin käsite, jotka ovat oppilaan tai opiskelijan kehityksellisistä tai yksilöperäisistä tekijöistä riippumattomia ja tarjoavat siten toisen asteen matematiikan opiskeluun tarkasti rajatun näkökulman.

Tässä kappaleessa esitellään esitysmuotojen, yhteyksien ja siirtymäprosessin käsitteet matematiikan didaktiikassa ja perehdytään matematiikan osaamiseen sekä matematiikan oppimiseen näiden käsitteiden kontekstissa. Tämän jälkeen perehdytään erääseen haasteen muotoon, jonka esitysmuodot ja näiden yhteydet aiheuttavat. Lopuksi tarkastellaan, miten nämä käsitteet ovat huomioitu suomalaisessa vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmassa.

2.1 Esitysmuodon määritelmä

Tämän kirjallisuuskatsauksen laajuudessa *esitysmuoto* (engl. representation) tai lyhyemmin *esitys* tai *representaatio* on menetelmä käsitellä abstrakteja matemaattisia konsepteja, ideoita tai riippuvuussuhteita. Esitysmuoto nimensä mukaan esittää tai ilmentää esittämäänsä tai ilmentämäänsä oliota ja tämän ominaisuuksia, jolloin myös vastaavaksi suomennokseksi sopisi termi ”ilmaisutapa”. Gerald Goldin (2014) luokittelee esitysmuodoista sisäiset ja ulkoiset esitykset siten, että sisäiset esitykset käsittävät yksilön mielen sisäiset käsitteet ja rakennelmat. Näitä voivat olla esimerkiksi mielikuvat todellisesta tai abstraktista käsitteestä, mielensisäiset käsitteelliset mallit matemaattisista ideoista, abstraktia tilannetta kuvaava mielensisäinen kieli tai ajatukset tai heidän matematiikan parissa työskentelyyn liittyvät tunnetilat. Nämä esitykset voivat edelleen ilmentyä ulospäin erilaisina kineettisinä tai taktiilisina menetelminä, kuten esimerkiksi sormien tai käsien liikkeinä.

Ulkoiset esitysmuodot ovat sisäisiin nähden mielen ulkoisia tuotteita ja siten ulkopuolisille henkilöille havaittavissa, tulkittavissa ja manipuloitavissa. Tällaisia ovat esimerkiksi paperille kirjotetut piirustukset, diagrammit, kaaviot, symbolit, ja kuvankaappaukset tietokoneen näytöltä. Matematiikassa ulkoisia esitysmuotoja voi olla eri käsitteitä kohtaan lukuisa määrä, mutta nämä kaikki voidaan pääsääntöisesti jaotella symbolisiin, verbaalisiin ja visuaalisiin tyyppeihin. Näistä verbaaliset esitysmuodot vastaavat sanallisia, kielellisiä esityksiä, joissa käsite on esitetty kirjoitetussa tai puhutussa muodossa. Tällainen esitysmuoto voi sisältää sekä matematiikan, arjen kuin myös kontekstille spesifisiä sanoja ja käsitteitä. Koulussa verbaaliset esitysmuodot tulevat opetuksessa vastaan poikkeuksetta tehtävänannoissa ja varsinkin ongelmatehtävissä, jotka on usein puettu *sanallisiksi tehtäviksi* vastaamaan kuvausta jostain todellisesta tai kuvitellusta ongelmatilanteesta.

Symbolisessa muodossa käsite esitetään hyödyntämällä matematiikassa esitettyjä symboleita, kuten merkkejä, välimerkkejä, aakkossymboleita, kuvasymboleita tai muita ihmisen keksimiä merkintöjä. Symbolisten esitysten merkitys matematiikassa kasvaa aina opintojen edetessä (Orton & Frobisner, 2004). Toisaalta ne saattavat olla sekä kulttuuri- tai maantieteellissidonnaisia. Esimerkiksi määrätyn integroinnin laskuvaiheissa sijoitusmerkintä integroituun funktioon sekä desimaalierottimen käyttö poikkeavat selkeästi suomalaisten ja amerikkalaisten opiskelijoiden välillä. Symbolisista esitysmuodoista erityisen merkittävä on yhtälö, jonka käsittelyä esiintyy sekä yläkoulun, lukion kuin myös korkeakoulun matematiikassa.

Visuaalisia esitysmuotoja ovat kaikki esitykset, joissa informaatio välitetään kuvan tai piirroksen avulla. Näitä ovat esimerkiksi kuvaajat, kaaviot, diagrammit ja taulukot. Visuaalisten esitysmuotojen merkitys piilee informaation tiiviydessä verrattuna verbaaliseen esitysmuotoon ja havainnollisuudessa verrattuna symboliseen esitysmuotoon. Näitä esitysmuotoja on kynän ja paperin lisäksi mahdollista tuottaa hyödyntämällä teknologisia apuvälineitä, kuten laskinta ja tietokonetta.

Matematiikassa ulkoisista konkreettisista esitysmuodoista vakiintuneita, hyväksyttyjä ja yleisesti käytettyjä lajikkeita, kuten esimerkiksi lukujen kymmenjärjestelmää, lukusuoraa ja algebrallisia yhtälöitä kutsutaan toisinaan *muodollisiksi* esitysmuodoiksi ja näiden käsittelyyn ja tulkintaan kuuluu siten joukko sovittuja sääntöjä ja konventioita (Goldin, 2014). Painottaessa näiden sääntöjen merkitystä esitysmuodon käsite erotellaan tavanomaisesti *esitysmuotorekisteristä* tai *esitysmuotosysteemistä* (Duval, 2006), joka käsittää kollektiivisesti sekä muodollisen esitysmuodon että tätä koskevat säännöt, konventiot ja periaatteet.

Esitysmuodon merkitys riippuu olennaisesti tutkimusalasta, sillä esimerkiksi kognitiivisessa psykologiassa ja kasvatuspsykologiassa representaation käsitteellä viitataan muistiedustukseen ja vastaavasti mentaalisen representaation käsitteellä sitä, miten ulkoista ympäristöä koskeva kokemus on mielen sisällä edustettuna (Lehtinen, Vauras, Lerkkanen, 2016, s. 97). Tämä vastaa siis Goldinin sisäisen esityksen määritelmää. Toisaalta Duval (2006) esittää, että jos matematiikassa esitysmuotoa tarkastellaan yleisesti menetelmänä käsitellä abstrakteja käsitteitä eikä pelkästään epistemologisena tarpeena saavuttaa abstrakti käsite, katoaa tämän jaottelun merkitys. Tämän vuoksi koska matematiikan didaktiikassa rajoitutaan lähes aina ulkoisiin esitysmuotoihin, viitataan tästä eteenpäin termillä ”esitysmuoto” juuri ulkoisiin esitysmuotoihin.

2.2 Yhteydet matematiikassa

Yhdysvaltalainen opettajajärjestö National Council of Teachers of Mathematics (lyhyesti NCTM) määrittelee matematiikassa *yhteydet* (engl. connections) kyvyksi:

1. tunnistaa ja käyttää matemaattisten ideoiden välisiä yhteyksiä,
2. ymmärtää, miten matemaattiset ideat liittyvät yhteen ja rakentuvat toisensa päälle muodostaen ehjän kokonaisuuden, ja
3. kyvyksi tunnistaa ja soveltaa matematiikkaa tämän kontekstin ulkopuolella (NCTM, 2000, s. 64)

Matematiikassa yhteyksiä voidaan havaita matemaattisten käsitteiden eri esitysmuotojen välillä, matematiikan eri käsitteiden välillä sekä matematiikan aihealueiden välillä. Näiden lisäksi yhteyksillä viitataan myös miten matematiikka liittyy muihin tieteenaloihin sekä arkielämän ilmiöihin, konteksteihin ja ongelmatilanteisiin. Esimerkiksi peruskoulussa murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi vaatii rationaalilukujen desimaali- ja murtolukuesitysten välisen yhteyden ymmärtämistä, jolloin kyseessä on matemaattisen käsitteen eri esitysmuotojen välisten yhteyksien hyödyntäminen. Vastaavasti lukiossa funktion ja yhtälön välinen yhteys tarjoaa opiskelijalle mahdollisuuden laskea funktion arvoja tietyissä pisteissä, jolloin opiskelijat hyödyntävät taas kahden eri matemaattisen käsitteen välistä yhteyttä.

Yhteyksien merkitys ilmenee useassa koulumatematiikan opetus- ja oppimistilanteessa. Esimerkiksi alakoululla oppilaat opettelevat kokonaislukujen kertolaskua toistuvana yhteenlaskuna, jolloin opettaja hyödyntää oppilaiden aikaisemmin opitun yhteenlaskun yhteyttä uuteen opittavaan asiaan. Lukiossa taas opiskelijoilta edellytetään kykyä tunnistaa matemaattinen käsite ongelmatehtävässä ja kykyä työskennellä niiden yhteyksien kanssa, joilla tämä käsite liittyy ratkaistavaan ongelmaan. Matematiikassa opetettava aines on kuitenkin tavanomaisesti jaettu aihekokonaisuuksiin, kuten esimerkiksi peruskoulussa peruslaskutoimituksiin, geometriaan ja yhtälöihin, joita käsitellään erillisinä osa-alueina. Tällöin juuri yhteydet täyttävät aihekokonaisuuksien jättämän tyhjiön, jolloin yhteydet muodostavat näiden aihekokonaisuuksien kanssa yhteisen matematiikan aineen (NCTM, 2000).

2.3 Siirtymäprosessi

Jotkut matematiikan tehtävätyypit vaativat matemaattisten käsitteiden tarkastelua useilla esitysmuodoilla. Tällaisissa tehtävätyypeissä opiskelija saattaa kohdata tarpeen käyttää näitä useita esitysmuotoja samanaikaisesti tai hänen tulee muodostaa tai esittää käsiteltävä käsite toisessa esitysmuodossa, jolloin näiden esitysten välisien yhteyksien merkitys korostuu. Käsite *siirtymäprosessi* tai *siirtymä* merkitsee niitä opiskelijan kognitiivisia prosesseja, kun opiskelija siirtää abstraktista käsitteestä informaatiota esitysmuodosta toiseen (Janvier, 1987). Suppealla tasolla siirtymäprosessilla viitataan varsinaisesti niihin mielen prosesseihin, joissa opiskelija siirtää informaatiota kahden ulkoisen esitysmuodon välillä. *Siirtymäkyvyllä* (engl. translation ability) kuvataan taas opiskelijan kykyä suorittaa tällainen siirtymä ja *siirtymätehtävällä* matematiikan tehtävää, jonka ratkaisemisen kannalta tällaisen siirtymän suorittaminen on välttämätöntä.

Janvier erottelee siirtymässä *lähde-esitysmuodon* eli muodon, josta informaatio siirretään, sekä *kohde-esitysmuodon*, johon informaatio lopulta siirretään. Siirtymän ei tarvitse kuitenkaan rajoittua vain prosessiksi kahden esitysmuodon välillä, vaan tämä voidaan suorittaa epäsuorasti jonkun kolmannen esitysmuodon kautta. Tämän lisäksi siirtymäprosessilla voidaan tarkoittaa kollektiivisesti sellaisia prosesseja, joissa opiskelija työskentelee usean esitysmuodon kanssa samanaikaisesti tai hyödyntää jotain toista esitysmuotosysteemiä tutkiessaan matemaattista käsitettä. Leinhardt, Zavlasky ja Stein (1990) nimeävät tätä toimintaa vastaavasti *tulkinnaksi.*

Matematiikan tunnilla siirtymäprosessi konkretisoituu sellaisissa tehtävissä, joissa ongelmatilanteen perimmäinen käsite voidaan esittää eri esitysmuodoilla. Tavanomaisia tilanteita lukion opetuksessa ovat funktion kulun ja ominaisuuksien tutkiminen tämän kuvaajan avulla, tilastollisten päättelyjen suorittaminen havaintopisteiden taulukoinnin ja näihin suoritetut laskutoimitukset sekä kokeellisessa työskentelyssä mittapisteiden kirjaaminen koordinaatistoon ja näihin käyrän sovittaminen. Olennaisesti siirtymäprosessissa operaatioita ei suoriteta yksinään yhdessä esitysmuotorekisterissä, ja tämän vuoksi Duval (2006) erottelee siirtymästä erikseen esitysmuotojen *muunnoksen*, jossa opiskelija siirtyy saman esitysmuotorekisterin sisällä. Tätä vastaava tilanne on polynomin jakaminen tekijöihin, jolloin polynomin esitysmuoto saadaan vaihdettua kenties havainnollisempaan muotoon, mutta polynomi säilyy alkuperäisessä esitysmuotorekisterissä eli symbolisessa muodossa.

2.4 Matematiikan osaaminen

Haapasalo ja Kadijevich (2000) jakavat matemaattisen tiedon proseduraaliseen tietoon, joka viittaa perinteisesti nimettyihin ”mekaanisiin taitoihin”, sekä konseptuaaliseen tietoon. Heidän mukaansa proseduraalinen tieto:

> *”…vastaa dynaamista ja onnistunutta tiettyjen sääntöjen, algoritmien ja proseduurien suorittamista aiheeseen liittyvän esityksen tai esitysten sisällä. Tämä yleensä vaatii sekä tietoa käytetyistä objekteista, kuin myös näitä esittävien esitysmuotosysteemien muodoista ja syntakseista.”*

Vastaavasti heidän mukaansa konseptuaalinen tieto:

> *”… vastaa tietämystä ja taidokasta ohjauskykyä edetä pitkin verkostoa, jonka elementit koostuvat käsitteistä, säännöistä ja useissa esitysmuodoissa esitetyistä ongelmista”* (Haapasalo ja Kadijevich, 2000, s. 141*).*

Haapasalon ja Kadijevichin jaottelusta on nähtävissä, että konseptuaaliseen tietoon lukeutuvat sellaiset matematiikan kyvyt, joita ei voida kuvata yksinään mekaanisina suorituksina. Toisaalta heidän mukaansa toinen tiedon tyyppi saattaa varsinkin korkeammalla matematiikan tasolla perustua toiseen. Haapasalo ja Kadijevich erottelevat edelleen toisistaan proseduraaliset ja konseptuaaliset tehtävien ratkaisumenetelmät sen mukaan, kumpaa tiedon tyyppiä näissä tarvitaan. Tällöin ollaan tekemisissä niiden aktiviteettien kanssa, joita opiskelijat matematiikan parissa suorittavat ja joilla opiskelijat vuorovaikuttavat matemaattisten käsitteiden kanssa.

Duval on painottanut erityisesti matematiikan abstraktisuuden luonnetta, joka luo erityiset ehdot matematiikan osaamiselle ja oppimiselle. Abstraktisuus asettaa matematiikan verrattain täysin poikkeavaan asemaan suhteessa luonnontieteisiin, sillä toisin kuin esimerkiksi fysiikassa, kemiassa, astronomiassa tai muissa luonnontieteissä, joissa käsitteitä ja konsepteja voidaan tarpeen vaatiessa havainnollistaa havaintojen ja mittauslaitteiden avulla, matemaattiset käsitteet ovat saavutettavissa vain ja ainoastaan merkkien ja (semioottisten) esitysmuotojen kautta (Duval, 2006, s. 107). Vastaavasti tällöin esitysmuodot ovat ainoa ulospäin ilmenevä seuraus opiskelijoiden ajattelusta ja syvistä mielen rakennelmista (Piaget, 1967, s. 78-79). Tämän vuoksi matematiikan tehtävien ratkaisuja ja matemaattista toimintaa ylipäätänsä tulisi tarkastella vain ja ainoastaan käsiteltävien käsitteiden esitysmuotojen kautta.

Haapasalon ja Kadijevichin erottelussa tehtävät ovat proseduraalisia, jos niissä työskennellään rutiininomaisesti yhden esitysmuotosysteemin sisällä, ja taas konseptuaalisia, jos niissä käsitellään useita käsitteen esitysmuotoja ja siirrytään tietoisesti näiden välillä. Siten käsitteen ymmärtänyt opiskelija osaa tarpeen vaatiessa tuottaa tai esittää kyseisen käsitteen usealla eri esitysmuodolla sekä hallinnoida ja käyttää tämän eri esitysmuotoja täydentämään näiden rajattuja näkökulmia. Tämä seuraa, kun opiskelija ymmärtää eri esitysmuotojen väliset yhteydet sekä kykenee siirtymään näiden esitysten välillä. Esimerkiksi murtoluvun käsitteen ymmärtänyt peruskoululainen osaa muodostaa annettua murtolukua vastaavan ympyrän jaon ja päätellä tämän pohjalta murtolukujen suuruuseron tai osoittaa annetun murtoluvun lukusuoralla suhteessa kokonaislukuihin. Näissä menetelmissä tämä oppilas siis siirtyy murtoluvun esityksestä toiseen muotoon ja hyödyntää tätä toista muotoa tehtävän ratkaisussa.

Useiden esitysmuotojen ja siirtymien painotus esiintyy myös muualla tutkimuskirjallisuudessa. Lesh, Post ja Behr tarkoittavat ymmärryksellä: (1) kykyä tunnistaa kvalitatiivisesti erilaisiin esitysmuotosysteemeihin nivottu idea, (2) kykyä manipuloida tätä ideaa joustavasti näissä esitysmuotosysteemeissä, sekä (3) kykyä siirtää idea tarkasti esitysmuotosysteemistä toiseen (Lesh, Post, Behr, 1987, s. 36). Heidän mukaansa siirtymäprosessit liittyvät myös muihin erityisen hyödyllisiin matemaattisen mallintamisen prosesseihin, kuten: (1) ongelmatilanteen yksinkertaistamiseen; (2) kuvauksen rakentamiseen ongelmatilanteen ja mallin välille; (3) mallin ominaisuuksien tutkimiseen ongelmatilanteen tutkimiseksi; (4) näiden ominaisuuksien siirtämiseen takaisin ongelmatilanteeseen, ja (5) siirrettyjen ominaisuuksien hyödyllisyyden tarkastukseen.

Tämän kirjallisuusarvioinnin pohjalta voidaan todeta, että matemaattisen käsitteen osaaminen edellyttää käsitteen nimellisen tuntemisen lisäksi tämän eri esitysmuotojen sekä näiden yhteyksien hallintaa sekä siirtyä näiden esitysten välillä. Even tiivistää näiden merkityksen seuraavasti:

> *"Kyvyt tunnistaa ja esittää sama asia usealla eri esitysmuodolla ja siirtyä sujuvasti eri esitysten välillä tarjoavat mahdollisuuden havaita rikkaita riippuvuussuhteita, kehittää parempaa konseptuaalista ymmärrystä, laajentaa ja syventää ymmärrystä sekä vahvistaa ongelmanratkaisukykyä. Eri esitysmuotojen välinen yhtenäisyys kehittävät konseptin olemuksen ja tämän monien tahojen ymmärryksellistä oivaltamista" (Even, 1998, s. 105).*

2.5 Dreyfuksen malli oppimisesta

Schneider ja Stern ovat koonneet artikkeliinsa useita merkittäviä huomioita nykyisen kognitiivisesti suuntautuneen tutkimuksen käsityksistä oppimisesta. Näistä ensimmäisinä voidaan mainita: (1) Oppiminen perustuu oppijan omaan toimintaan; (2) Aikaisempi tieto on oppimisen perusta, ja; (3) Oppiminen edellyttää tietorakenteiden integroitumista (Schneider ja Stern, 2010). Nämä huomiot painottavat siis opiskelijan ja tämän kokemusten merkitystä oppimiselle sekä seikkaa, että opiskelijoiden tieto rakentuu jonkinlaiseksi tietorakenteeksi.

Matematiikan opetuksessa oppilaille ja opiskelijoille tarjotaan käsiteltävistä käsitteistä lyhyitä kuvauksia jo vähintään yläkoulun matematiikasta lähtien, mutta varsinaisia perustavanlaatuisia määritelmiä aletaan hyödyntää varhaisintaan vasta toisen asteen opetuksessa ja viimeistään ensimmäisillä korkeakoulukursseilla. Konstruktivistisesta näkökulmasta on kuitenkin aiheellista olettaa, etteivät koululaiset lähtökohtaisesti omaksu matemaattisia käsitteitä näiden määritelmien pohjalta, vaan he assosioivat käsitteet tilanne- ja tehtäväkohtaisiksi ja luovat näistä mielikuvia. Tall ja Vinner (1981) nimittävät näitä mielikuvia kollektiivisesti *konseptikuviksi*, jotka koululaiset assosioivat käsitteen ja sen ominaisuuksien kanssa. Näitä ovat esimerkiksi prototyyppiset esimerkit, muistot ja kokemukset.

Opiskelijoiden konseptikuvat kehittyvät heidän kokemustensa myötä sekä mitä esimerkkejä ja vastaesimerkkejä he käsitteestä kohtaavat ja miten usein näitä esiintyy. Kokemuksen karttuessa opiskelija järjestelee tietoaan edelleen rakennelmiksi, joita Piaget'n kognitiivisen teorian pohjalta nimitetään *skeemoiksi* (Piaget, 1923). Skeema on opiskelijan sisäisesti järjestyneiden muistirakenteiden eli hänen sisäisten esitystensä luoma malli todellisesta maailmasta, jota hän edelleen käyttää apunaan uusien havaintojen käsittelemiseen ja tiedon kartuttamiseen. Täten siis opiskelijan matemaattinen osaaminen pohjautuu näiden rakenteiden toimivuuteen ja kypsyyteen.

Edelleen kuten kaikki matemaattiset aktiviteetit, myös matematiikan oppiminen tapahtuu abstraktisuuden vuoksi esitysmuotojen kautta. Tällöin myös esitysmuodot kietoutuvat osaksi opiskelijoiden matemaattisista konsepteista rakentamiaan skeemoja. Toisaalta nämä esitysmuodot ovat riippumattomia niiden esittämistä abstrakteista konsepteista, jolloin opiskelijat kohtaavat kognitiivisen haasteen, sillä heidän täytyy kyetä erottamaan käsiteltävä käsite tätä esittävästä esitysmuotosysteemistään. Tämän takia myös matematiikan oppimisessa korostuu useiden esitysmuotojen, näiden välisten yhteyksien sekä siirtymien merkitys (Duval, 2006, s. 106-108), sillä eri esitykset tukevat ja täydentävät toisiaan, jolloin opiskelijalle tarjoutuu mahdollisuus rakentaa esitysten perimmäisestä matemaattisesta käsitteestä kokonaiskuva (Gagatsis ja Shiakalli, 2004).

Dreyfuksen (1991) mukaan matemaattisten käsitteiden esittäminen ja abstrahointi ovat kaksi toisiaan täydentävää vastakkaista prosessia, joissa abstrahoinnilla tarkoitetaan käsitteen erottamista sen useasta esitysmuodosta ja jälleen esittämisellä varsinkin abstraktin käsitteen esittämistä. Käytettäessä yhtä esitysmuotoa huomio voidaan keskittää abstraktista käsitteestä tähän kyseiseen esitysmuotosysteemiin, jolloin abstrahoinnin aiheuttama taakka minimoituu. Toisaalta abstrakti käsite on mahdollista irrottaa esityksestään vain usean esitysmuodon avulla, sillä vain hallittaessa abstraktin käsitteen useaa esitysmuotoa näiden välinen relaatio abstraktiin käsitteeseen korostuu.

Edelleen Dreyfus esittää, että näiden esitysten konstruointi jonkin ajatusprosessin, kuten esimerkiksi laskusuorituksen aikaansaamiseksi kulkee kahden matemaattisten ajatusprosessien kanssa. Tällöin matemaatikon ja opiskelijan ajattelu tehostuu, jos he kykenevät siirtymään mielessään johonkin tiettyyn esitykseen ja vaikutus kasvaa, jos he kykenevät käyttämään useampaa esitystä. Hän esittää matemaattisten käsitteiden oppimisen tapahtuvan täten neljän vaiheen kautta:

1. Ensimmäisessä vaiheessa opiskelija hyödyntää vain yhtä esitysmuotoa ankkurinaan käsiteltävään aiheeseen.
2. Toisessa vaiheessa opiskelija voi hyödyntää useampaa esitysmuotoa samanaikaisesti.
3. Kolmannessa vaiheessa opiskelija havaitsee yhteyksiä esitysmuotojen välillä.
4. Viimeisessä vaiheessa opiskelija yhdistää esitysmuodot käsitteen ideaksi ja siirtyy niiden välillä näppärästi (Dreyfus, 1991, s. 39).

Mallin mukaan esimerkiksi funktiokäsitteen oppiminen alkaa jonkun funktion esitysmuodon, yleensä symbolisen muodon käytön sisäistämisellä. Tässä vaiheessa opiskelijan skeema funktiosta on pääsääntöisesti rakentunut siten symbolisen muodon ympärille ja opiskelija palauttaa mieleen aina mielikuvan algebrallisesta lausekkeesta funktioita kohdatessaan. Funktion esitysmuotorikkauden vuoksi opiskelija kohtaa kuitenkin ajan mittaa muita mahdollisia esitysmuotosysteemejä, joiden sisäistäminen koostuu toisesta vaiheesta. Tässä vaiheessa opiskelija oppii esimerkiksi käyttämään funktion graafista esitystä symbolisen lisäksi, vaikka hänellä ei välttämättä ole käsitystä näiden välisestä vuorovaikutuksesta.

Tämän jälkeen kolmannessa vaiheessa opiskelijan abstrakti ymmärrys alkaa kehittyä näiden esitysmuotojen linkkien kautta. Tämä antaa hänelle mahdollisuuden vaihdella esityksiä sekä vahvistaa funktion monitahoista ideaa. Neljännellä vaiheella opiskelija integroi näitä esityksiä ja niiden yhteyksiä yhteen, jolloin hän tulee viimein ”sinuiksi” funktiokäsitteen kanssa. Tällöin opiskelija kykenee vaivatta valitsemaan ja käyttämään tehtävänantoon sopivaa esitysmuotoa hallitusti ja tarkasti.

2.6 Lokeroinnin ilmiö

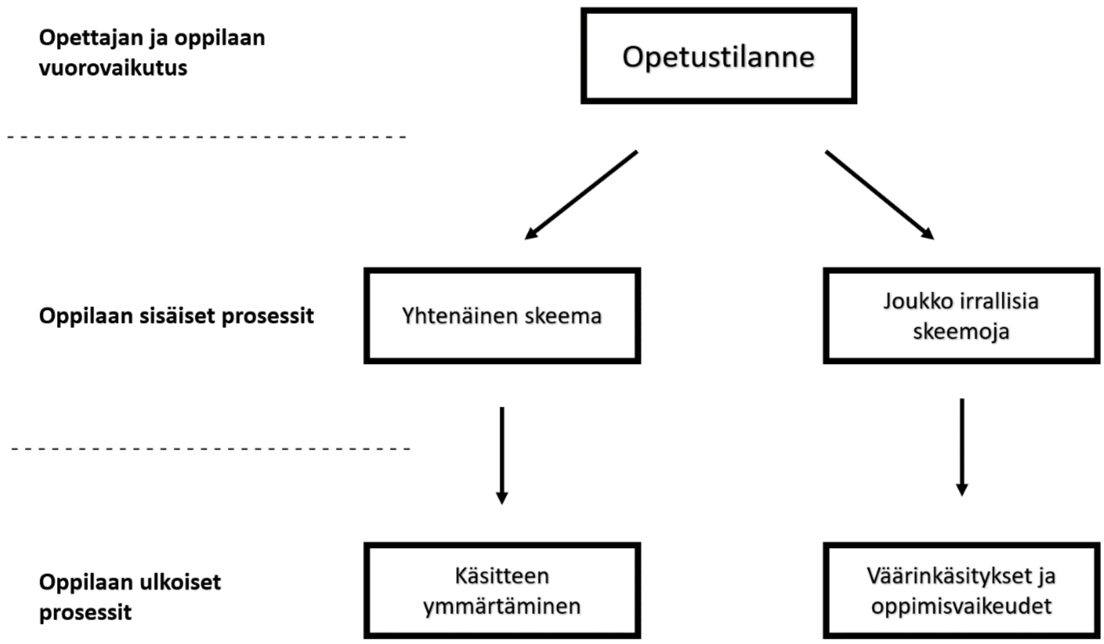
Kognitiivisen luonteensa vuoksi skeemat ja niiden rakenne ovat mielen sisäisiä ja siten suorannaisesti ulkopuolisten tarkastelijoiden saavuttamattomissa. Tämän vuoksi on huomionarvoista, että koska näiden skeemojen luonne riippuu kokemuksista ja näihin liittyvistä kognitiivisista prosesseista, voivat eri ihmisten skeemat olla täysin erilaisia. Tämän välittömänä seurauksena opiskelijan matemaattiseen olioon liittyvät käsitykset voivat erota merkittävästi opettajan vastaavista käsityksistä (Vinner, Dreyfus, 1989). Vaikka eri opiskelijoiden skeemoja ei ole luontevaa arvottaa toisiaan paremmiksi, voivat tietyllä tavalla rakentuneet skeemat asettaa tietyt opiskelijat epäedulliseen asemaan, jossa oppiminen keskeytyy tai sille aiheutuu erityistä haittaa.

Opiskelijat kohtaavat opetuksessa haasteita, jos heidän skeemansa matemaattisesta käsitteestä ovat puutteelliset, väärin rakentuneet tai jos opiskelija on erehtynyt käsittämään jonkin käsitteen eri esitykset erillisiksi konsepteiksi ja siten rakentanut näille omat irralliset skeemansa. Kollektiivisesti ilmiötä, jossa opiskelijan konseptikuva tai skeema poikkeaa muodollisesta määritelmästä tai opiskelijalla on saman käsitteen kahdesta eri esitysmuodosta toisistaan irralliset ja mahdollisesti ristiriitaiset konseptikuvat tai skeemat kutsutaan *lokeroajatteluksi* tai käsitteen *lokeroinniksi* (engl. compartmentalisation) (Vinner, Herschkowitz, Bruckheimer, 1981). Tällöin eri tilanteet aktivoivat opiskelijalla samasta käsitteestä eri skeeman, jolloin lokeroajattelu ilmenee epäjohdonmukaisena toimintana tehtävien ratkaisussa. Toisaalta lokerointi voi ilmentyä myös sellaisessa tilanteessa, jossa opiskelija on aktivoinut tilanteesta riippuen tehtävään vähemmän merkittävämmän skeeman.

Kuten aiemmin määriteltiin, matemaattisesti taitava ja matemaattiseen käsitteen sisäistänyt opiskelija kykenee havaitsemaan käsitteen erilaisten esitysten takaa ja siirtymään näiden välillä. Konstruktivistisesta näkökulmasta tällainen opiskelija on rakentanut tämän käsitteen esityksineen yhdeksi ehjäksi skeemaksi. Koska erilaiset esitysmuodot tarjoavat kuitenkin esittämästään käsitteestä rajoitetun määrän informaatiota, ja opiskelijoiden skeemojen rakentuminen perustuu lähtökohtaisesti heidän kokemuksiinsa näitä konsepteja esittävistä esityksistä, riippuu tällaisen skeeman muodostuminen opiskelijan saamasta opetuksesta, kuten esimerkiksi minkälaisia esityksiä ja missä yhteyksissä hän opetuksessa kohtaa.

Esitysmuotoja lokeroiva opiskelija on rakentanut matemaattista käsitettä kuvaavista esitysmuodoista toisistaan riippumattomat skeemat sisäistämättä näitä esityksiä tämän käsitteen eri näkökulmiksi, jolloin hän kuvittelee nämä esitysmuodot yksinäisinä ja irrallisina käsitteinä itsessään. Tällöin hänellä on myös erityisen heikko käsitys näiden esitysten yhteyksistä, mikä tavanomaisesti johtaa epäjohdonmukaiseen toimintaan ongelmanratkaisutehtävissä (Gagatsis, Elia, Mousoulides, 2006) sekä altistaa opiskelijan väärinkäsityksille. Tämä tuottaa erityisesti opetukselle merkittävän ongelman, sillä opettajan voi olla vaikea havaita opiskelijoiden lokerointia, mikä edelleen saattaa johtaa opettajan tekemiin vääriin johtopäätöksiin opetuksen suunnittelussa ja arvioinnissa.

Tämän kappaleen pohjalta opetuksen seurausta voidaan havainnollistaa seuraavalla kaaviolla:



Kuvio 1. Kaavio matematiikan opetuksen seurauksista

Tämän tarkastelun pohjalta opiskelijoiden haasteet seuraavat heidän matematiikan käsiteiden puutteellisesti rakentuneista skeemoista. Vastaavasti opiskelijoilla, jotka ovat onnistuneet muodostamaan skeemansa yhtenäiseksi, on suuremmat mahdollisuudet kehittyä matematiikassa pidemmälle sekä välttää lokeroituneiden käsitysten aiheuttamat haitat. Tämän johdosta opetus olisi hedelmällisintä järjestää huomioiden useiden esitysmuotojen, yhteyksien sekä siirtymäprosessien merkitykset, jolloin tarpeettomalta matemaattisten käsitteiden lokeroitumiselta voitaisiin välttyä.

2.7 Esitysmuodot, yhteydet ja opetussuunnitelman perusteet

Suomalaisissa opetussuunnitelman perusteissa esitysmuotoja ja yhteyksiä ei mainita ollenkaan vuoden 2004 perusopetuksen tai vuoden 2003 lukion opetussuunnitelmien perusteissa. Molemmat käsitteet esiintyvät taas kummassakin näitä seuraavissa opetussuunnitelmissa. Vuoden 2016 perusopetuksen perusteissa (POPS 2016) määritellään matematiikan oppiaineen tehtävät ja opetuksen tavoitteet erillisesti vuosiluokille 1-2, 3-6 ja 7-9. Kahdella ensimmäisellä luokalla ”Opetus kehittää oppilaiden kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkiten kuvia”. Vuosiluokilla 3-6 esiintyy vastaavasti tavoitteet ”T3 kannustaa oppilasta esittämään päättelyään ja ratkaisujaan muille konkreettisin välinein, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti myös tieto- ja viestintäteknologiaa käyttäen” ja tämän lisäksi tavoite ”T2 ohjata oppilasta havaitsemaan yhteyksiä oppimiensa asioiden välillä”.

Yläasteen luokat 7-9 sisältävät myös samat edellä esitetyt tavoitteet. Nämä luokat ovat myös nyt käsiteltävien seikkojen kannalta merkittäviä, sillä tämän ajanjakson sisältöalueisiin kuuluu funktio (S4), joka sisältää funktiokäsitteen, riippuvuuksien kuvaamisen graafisesti ja algebrallisesti, suoran ja paraabelien käsitteen ja kuvaajien tulkintaa. Pelkästään jo tähän sisältöalueeseen sisältyy täsmällisesti funktion kahteen esitysmuotoon perehtyminen ja implisiittisesti siirtyminen näiden esitysmuotojen välillä suoran kulmakertoimen, vakiotermin ja funktion kasvamisen, vähenemisen ja nollakohdan graafisen etsinnän kautta. Tämän lisäksi oppilaan työskentelyn taidoiksi vuosiluokille 7-9 on kirjattu ”T3 ohjata oppilasta havaitsemaan ja ymmärtämään oppimiensa asioiden välisiä yhteyksiä”.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2015 esitysmuodot ja siirtymät esitellään täsmällisesti: ”Opiskelijaa rohkaistaan myös käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen” (LOPS 2015, s. 129). Nämä huomiot tukevat vahvasti käsitystä, että matemaattinen toiminta on vahvasti kytköksissä esitysmuotojen eli niiden menetelmien kanssa, joilla opiskelijat käsittelevät ja tulkitsevat matemaattisia ideoita ja ilmiöitä. Tämän lisäksi perusteissa kehotetaan tukemaan opiskelijoiden siirtymäkyvyn taitoa, jolloin lukion opetuksessa tulisi vastaavasti käsitellä matemaattisten käsitteiden erilaisten esitysmuotojen välisiä yhteyksiä sekä harjoitella näihin liittyviä siirtymätehtäviä.

3 Funktiokäsite

Sierpinska (1992) tarjoaa artikkelissaan kattavan esityksen funktiosta ja funktiokäsitteen ymmärtämisestä, ja tässä tutkielmassa perehdytään erityisesti funktion esitysmuotojen merkityksiin. Tästä näkökulmasta funktio on juuri sen esitysten monimuotoisuuden vuoksi yksi tärkeimpiä matemaattisia ideoita yhdistävistä käsitteistä (Romberg, Carpenter & Fennema, 1993), sillä se mahdollistaa matemaattisten käsitteiden, kuten jatkuvuuden tai jaksollisuuden tarkastelun sekä visuaalisesti kuin myös analyyttisesti. Lukiossa funktion kanssa työskentely tarjoaa opiskelijoille taas keskeisen alustan rakentaa matemaattisen käsitteen esitysten välisiä yhteyksiä. Opetuksellisessa mielessä on huomioitava, että funktion lausekkeeseen ja tämän kuvaajaan perehtyminen merkitsee muodollisessa opetuksessa opiskelijalle ensimmäistä sellaista merkkipaalua, jossa hän voi hyödyntää yhtä symbolista järjestelmää oppiakseen ja ymmärtääkseen toista (Leinhardt, Zavlasky, Stein, 1990).

Tässä kappaleessa perehdytään aluksi opiskelijan funktiokäsitykseen osana matematiikan osaamista ja sekä funktion huomiointiin lukion opetussuunnitelmassa. Tämän jälkeen tarkastellaan funktion määritelmää, funktion eri esitysmuotoja sekä näiden rajoitteita. Lopuksi esitellään funktion symbolisen ja graafisen esitysten välinen yhteys ja perehdytään lokeroinnin ilmiöön funktion kontekstissa.

3.1 Funktiokäsitys ja funktio lukion opetussuunnitelmassa

Funktion tai funktiokäsitteen ymmärrystä voidaan kutsua lyhyesti *funktiokäsitykseksi*. Aikaisemman matematiikan osaamisen erottelun pohjalta opiskelijan funktiokäsityksellä viitataan siis sellaisiin seikkoihin, jotka ulottuvat funktion määritelmän tuntemusta ja mekaanisia laskutoimituksia kauemmas ja tähän liittyy esimerkiksi funktioon liittyvien esitysmuotojen hallinta, näiden välisten yhteyksien ymmärtäminen sekä kyky siirtyä näiden esitysten välillä. Moschkovich ym. (1993) tarkoittavat funktiokäsityksellä (1) kykyä tarkastella funktiota eri näkökulmista, ja (2) kykyä siirtyä sujuvasti funktion eri esitysten välillä ongelmanratkaisutehtävissä. Tämän käsityksen perustavanlaatuinen rajoite on, ettei se kata kaikkia monimutkaisia funktioon liittyviä ilmiöitä, mutta painottamalla esitysten yhteyksiä ja siirtymäkykyä voidaan keskittyä hankkimaan informaatiota juuri niistä haasteista, joita nämä konseptit aiheuttavat.

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa funktio on määrätty yhdeksi keskeiseksi sisältöalueeksi vuosiluokille 7-9 (POPS 2016). Opetussuunnitelman perusteiden pohjalta peruskoulussa funktion opetus keskittyy lähtökohtaisesti funktiokoneen esittelyyn, suoran ja tämän ominaisuuksien tutkimiseen sekä pintapuolisesti myös paraabelin käsittelyyn, kun taas itse funktiokäsitteeseen perehdytään vasta lukiossa. Lukion opetussuunnitelman perusteissa (LOPS 2015) funktio on kirjattu keskeiseksi sisältöalueeksi lyhyen ja pitkän oppimäärän yhteiselle, ensimmäiselle kurssi MAY1 ja kurssin tavoitteeksi opiskelijalle on merkitty ”vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä*”*. Alleviivataan tässä sanaa ”vahvistaa”, sillä funktiokäsityksen kehitys jatkuu ensimmäisen kurssin jälkeenkin aina koko lukion ja ylioppilaskirjoitusten läpi. Funktio tulee opiskelijoille vastaan toistuvasti vähintäänkin pitkän oppimäärän pakollisilla kursseilla MAA2; *Polynomifunktiot ja – yhtälöt*, MAA6; *Derivaatta*, MAA7; *trigonometriset funktiot,* MAA8*; juuri- ja logaritmifunktiot,* MAA9; *integraalilaskenta*, sekä lyhyessä oppimäärässä kursseilla MAB2; *Lausekkeet ja yhtälöt* ja MAB4; *Matemaattisia malleja*.

3.2 Funktiokäsitteen määritelmä

Funktio joukosta X joukkoon Y on joukko järjestettyjä pareja $f = \{(x, y) | x \in X\ ja\ y \in Y\}$, kun jokainen joukon X *alkio* x esiintyy täsmälleen vain yhden kerran. Tällöin alkiota y kutsutaan alkion x *kuvaksi* tai *argumentin* x *arvoksi*, joukkoa X funktion *määrittelyjoukoksi* ja joukkoa Y funktion *maalijoukoksi*. Jos kaikkien arvojen y muodostama joukko on maalijoukon Y osajoukko, kutsutaan tätä osajoukkoa funktion *arvojoukoksi*. Funktio on siis relaatio, jolla jokaista arvoa y vastaa vain yksi argumentti x. Tämän määrittelyn nojalla funktio käsittää valtavan määrän käsiteltäviä riippuvuussuhteita, kuten esimerkiksi kalenteripäivän ja valitun ihmisen iän riippuvuuden; annettuna kalenteripäivänä x ihmisellä on yksikäsitteinen ikä y, joka ilmaistaan ”y on muuttujan x funktio” ja merkitään $y = f(x)$.

3.3 Funktion esitysmuodot ja niiden rajoitteet

Funktiota voidaan esittää usealla eri esitysmuodolla, ja näiden tyypit voidaan pääpiirteittäin erotella *numeeriseen* eli *taulukoituun* esitykseen, verbaaliseen eli *sanalliseen* esitykseen (joko suullisessa tai kirjoitetussa muodossa), *graafiseen* eli visuaaliseen esitykseen sekä *algebralliseen* eli symboliseen esitykseen. Näistä esimerkkeinä sanallinen esitys viittaa yksinkertaisesti sellaiseen esitysmuotoon, jossa funktiota tai funktion käyttäytymistä luonnehditaan sanallisesti tai kirjoitetussa muodossa. Esimerkiksi seuraavassa tehtävässä funktiota kuvataan verbaalisessa muodossa (Hautamäki, Ottelin, Wallin-Jaakkola, 2004, s. 111):

”Hahmottele sellaisen funktion kuvaaja, jolla on kaksi nollakohtaa. Lisäksi funktion määrittelyjoukko on [0,2] ja arvojoukko [0,3].”

Sanallisen esitysmuodon rajoitteet liittyvät erityisesti kielellisiin seikkoihin, sillä opiskelija ei välttämättä ymmärrä kirjoitettuja käsitteitä tai niiden tarkoituksia, opiskelija saattaa ymmärtää esityksen väärin tai ei välttämättä huomaa jotain olennaista annettua informaatiota. Toisaalta opiskelijalla voi olla haasteita tulkita itse esityksen tulkinnanvaraisuutta tai tehtävänlaatijan/opettajan tarkoitusperää. Edelleen sanallista esitysmuotoa voi rajoittaa myös sen pituus sekä missä määrin sitä on mielekästä lukea

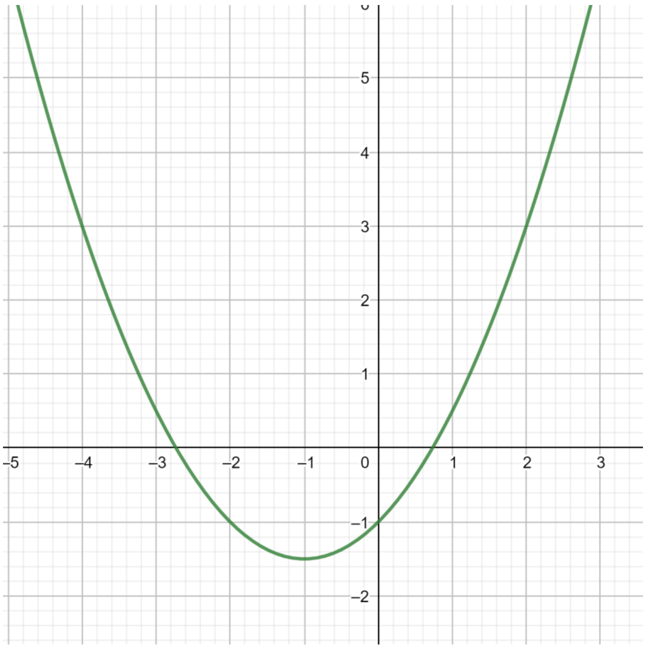
Taulukoidussa esityksessä tieto funktion kulusta on taas esitetty taulukkona, kuten esimerkiksi pituus iän funktiona alla olevassa taulukossa:

Henkilön ikä [vuosi]	Pituus [cm]
15	168
34	181
3	97
6	118
18	179

Kuvio 2. Taulukko henkilön iän ja pituuden välisestä relaatiosta

Taulukon ideana on kuvata funktiota esittävät yksittäiset pisteet sekä eritellä näiden pisteiden argumentti ja arvo taulukon eri puolille, jolloin informaatio on kirjattu helpommin luettavaan muotoon. Toisaalta taulukko asettaa esitykselle sellaiset rajoitteet, jotka muuttavat käsiteltävän käsitteen luonnetta; taulukko voidaan nimittäin täydentää aina mielivaltaisen paljon, mutta taulukoiduista pisteistä ei itsestään selviä, että onko käsittelyn alla yksittäisiä pisteitä, yhtälö tai sitten funktio. Tämän vuoksi taulukko on toisinaan hyvin rajoittunut, ellei opiskelijalla ole jo entuudestaan tietoa käsiteltävän olennon luonteesta.

Graafinen esitys on käytännössä koordinaatistoon piirretty funktion kuvaaja, jossa mahdollisesti näkyvät funktion käyrän lisäksi x- ja y-akselit. Alla on Geogebra-ohjelmistolla piirretty esimerkki paraabelifunktiosta:



Kuvio 3. Paraabelin kuvaaja Geogebra-ohjelmistossa

Kuvaajan esityksessä on keskeistä valita, mitä kohtaa kuvaajasta halutaan esittää. Tässä kyseisessä esityksessä on onnistuttu tavoittamaan sekä kummatkin koordinaattiakselit että myös paraabelin minimi. Kuvaaja on manipuloitavissa valittaessa uusi kuvan keskipiste tai skaalaamalla eli muuttamalla koordinaattipisteiden mittasuhteita kuvaan nähden.

Funktion kuvaaja xy-koordinaatistossa antaa lähes poikkeuksetta parhaimman kuvan funktion kulusta ja luonteesta. Opiskelijoille funktion havainnollistaminen koordinaatistossa on merkittävästi helpottunut graafisten ja symbolisten laskimien sekä matemaattisten ohjelmistojen opetuskäytön yleistymisen myötä. Toisaalta kuvaajan havainnollisuus on riippuvainen kuvan koosta ja skaalauksesta, valitusta keskipisteestä sekä olennaisesti siitä, miten opiskelija kykenee tuottamaan kuvan siten, että hän saa siitä mahdollisimman paljon tietoa irti eli hallitseeko opiskelija käyrän piirtämisen joko käsin tai hallitseeko hän apuvälineensä. Kuvaaja voi myös hämätä, sillä jokainen piirretty kuvaaja on aina kuitenkin approksimatiivinen eikä opiskelijoilta tavanomaisesti sallita graafisia ratkaisuja tehtävissä, joissa vaaditaan tarkka tulos. Tämän vuoksi kuvaajaa pidetään epämuodollisena funktion esitysmuotona.

Funktion symbolinen esitys on kaikista esitysmuodoista eniten riippuvainen symboleista. Yllä kuvatun paraabelin symbolinen esitys on $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 1$, kun x ∈ ℝ. Ottamalla huomioon funktion kuvaaja tätä muotoa on hyvä täydentää merkitsemällä funktion lauseeseen muuttuja y, jolloin saadaan y = $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 1$. Tällöin yhtälö $y = 0{,}5x^2 + x - 1$ kuvaa funktioon kuuluvat pisteet xy-koordinaatistossa ja merkintä $f(x)$ taas ilmentää, että funktion arvo y on muuttujan x funktio.

Symbolinen esitysmuoto on funktion esityksistä lyhyin ja informatiivisin niille, jotka tätä esitystä osaavat tulkita. Symbolisen muodon idea on sekä tiivistää funktion olennainen informaatio mahdollisimman tiiviiseen muotoon ja toisaalta antaa opiskelijalle työkalut ratkaista funktioon ja funktion kulkuun liittyviä laskutehtäviä. Lukiossa tavanomaisimmat laskutoimitukset ovat funktion koordinaattiakselien leikkauspisteiden löytäminen, funktion derivoiminen ja funktion ääriarvopisteiden etsiminen derivoimalla. Näissä tehtävätyypeissä korostuvat varsinkin opiskelijoiden mekaaniset taidot.

Funktion Symbolinen muoto antaa kuitenkin rajatun määrän tietoa itse funktion kulusta. Esimerkiksi paraabelin $P(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaajan muodon määräävät parametrien *a, b* ja *c* arvot, joista parametrin a etumerkki kertoo paraabelin aukeamissuunnan ja parametri c kuvaajan y-akselin leikkauspisteen, mutta kuvaajan sijoittuminen koordinaatistoon ei sen sijaan näistä välity suoraviivaisesti. Toisaalta opiskelija saattaa pystyä laskemaan yksittäisiä funktion arvoja annetuilla muuttujan x arvoilla, mutta opiskelija ei tämän avulla kykene hahmottamaan funktion globaalia käytöstä eli miltä funktion kuvaaja näyttää läpi koko vaakasuuntaisen reaaliakselin.

Jokaisella funktion esitysmuodolla on siis omat informatiiviset rajoitteensa. Tämän lisäksi funktion useat esitysmuodot aiheuttavat opiskelijoille kognitiivisen taakan, sillä heidän tulee opetella funktiokäsitteen lomassa myös näiden esitysmuotosysteemien hallinta ja niihin liittyvät konventiot (Schoenfeld, Smith, Arcavi, 1993; Hitt, 1998). Lukion opiskelijat joutuvat olemaan kuitenkin tekemisissä jokaisen esitysmuodon kanssa jossain vaiheessa opintojaan, sillä esimerkiksi sanallinen muoto liittyy kauttaaltaan sanallisiin tehtävänantoihin, taulukot taas todennäköisyys- ja tilastotieteen kursseille sekä kuvaajat että symboliset esitykset differentiaali- ja integraalilaskennan kursseille.

3.4 Funktion symbolisen ja graafisen esitysmuodon yhteys

Kaikki funktion esitysmuodot liittyvät toisiinsa ominaisten yhteyksien kautta ja toisen asteen matematiikassa näistä erityisen merkittävä on funktion symbolisen ja graafisen esitysmuodon välinen yhteys. Schoenfeld, Smith ja Arcavi nimeävät tätä yhteyttä käsitteellä *karteesinen yhteys* (engl. cartesian connection), jonka he esittävät kahdessa osassa:

1. piste (x_0, y_0) kuuluu funktion $y = f(x)$ kuvaajaan, jos ja vain jos piste toteuttaa kuvaajan yhtälön $y_0 = f(x_0)$.
2. Algebrallisilla lausekkeilla on karteesisella tasolla graafinen vastike. Esimerkiksi koulumatematiikassa $(y_2 - y_1)$ kuvaa suunnattua janaa, jolla on karteesisessa koordinaatistossa suunta ja suuruus (Schoenfeld, Smith, Arcavi, 1993, s. 108 - 109).

Näistä ensimmäinen esiintyy myös Moschkovichin, Schoenfeldin ja Arcavin (1993) artikkelissa muodossa ”piste on suoran L kuvaajalla, jos ja vain jos sen koordinaatit toteuttavat suoran L yhtälön.” Tämä yhteys tarjoaa menetelmän, jolla annetusta funktion lausekkeesta voidaan piirtää kuvaaja ja edelleen miten kuvaajasta voidaan tulkita yksittäisiä funktion argumentti-arvopareja. Toisaalta tämän yhteyden avulla suoran tapauksessa voidaan välittömästi päätellä suoran y-akselin leikkauspiste, sillä jos suora on muodossa $f(x) = mx + b$, kuuluu piste $(0, b)$ suoran kuvaajalle. Schoenfeld, Smith ja Arcavi sisällyttivät toisen kohdan tarkastellessaan suoran kulmakertoimen määrittämistä kahden suunnatun janan $(y_2 - y_1)$ ja $(x_2 - x_1)$ avulla siten, että pisteet (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) sekä näiden kautta piirrettyjen x- ja y-akselin suuntaisten suorien leikkauspiste muodostavat kolmion, jonka kateetteja ovat suunnatut janat $(y_2 - y_1)$ ja $(x_2 - x_1)$.

Karteesinen yhteys on perustavanlaatuinen silta funktion kuvallisen ja symbolisen esityksen välillä, mutta se ei ole mekaanisen suorituksen onnistumiselle välttämätön. Esimerkiksi toisen asteen opiskelijat oppivat tulkitsemaan esimerkiksi yhtälön $y = x + 4$ suoraksi, koska se vastaa suoran yhtälön yleistä muotoa $y = mx + b$. Tämän jälkeen opiskelija voi hyödyntää suoran käsittelyyn liittyviä mekaanisia taitojaan, kuten esimerkiksi määrittämään yhtälöstä suoran kulmakertoimen tai y-akselin leikkauspisteen tuntematta sen tarkemmin yhtälön yhteyttä kuvaajamuotoon.

Moschkovich, Schoenfeld ja Arcavi (1993) esittävät viitekehyksessään, että funktiokäsitettä voidaan lähestyä useiden esitysmuotojen kontekstissa kahdesta eri näkökulmasta; *prosessiperspektiivistä* ja *objektiperspektiivistä*. Prosessiperspektiivissä funktio tulkitaan muuttujien x ja y liitokseksi, sillä jokaiselle muuttujan x arvolle on olemassa funktion arvo y. Tätä lähestymistapaa käyttävä opiskelija osaa siis sijoittaa muuttujan x arvon funktion yhtälöön ja ratkaista muuttujan y arvon tai löytää yhtälön ratkaisun hakemalla jonkun kuvaajan pisteen koordinaatit. Objektiperspektiivissä funktiota lähestytään taas olentona itsessään ja tätä lähestymistapaa käyttävät ymmärtää muotoa $y = 3x + b$ olevien funktioiden muodostavan samansuuntaisten suorien parven. Tämä idea saattaa mennä sellaiselta opiskelijalta ohi, jonka funktiokäsitys rajoittuu vain prosessiperspektiivin mekaanisen osaamisen tasolle, jonka johdosta funktiokäsitteen ymmärrys vaatii siis kykyä tarkastella funktiota objektiperspektiivistä.

Vaikka karteesisen yhteyden käsite esiintyy pääosin lineaarisia funktioita koskevassa tutkimuskirjallisuudessa, voidaan käsite yleistää koskemaan jokaista mielivaltaista funktiota tai yhtälöä. Moon, Brenner, Jacob ja Okamoto (2013) esittävät artikkelissaan karteesisen yhteyden määritelmäksi: ”piste A on matemaattisen relaation $R(x, y) = 0$ kuvaajalla, jos ja vain jos sen koordinaatit toteuttavat yhtälön $R(x, y) = 0$.” Heidän tutkimuksensa esimerkkinä oli vastaavasti 1600-luvun persialaisen matemaatikon Omar Khayyamin ratkaisema vaillinainen kolmannen asteen yhtälö $x^3 + p^2x = p^2q$.

3.5 Funktiokäsitteen lokeroituminen

Koska useat esitysmuodot ovat funktiokäsitteen perimmäinen ominaisuus, vaatii ehjä funktiokäsitys sellaista yhtenäistä skeemaa, jossa yhdistyvät sekä funktion eri esitysmuotojen kuin myös niiden välisten yhteyksien hallinta. Opiskelijan funktiokäsitys on taas lokeroitunut, jos opiskelija käsittelee funktion esitysmuotoja itsenäisinä objekteina (Gerson, 2001) eli jos opiskelijalla on funktion esitysmuodoista omat irralliset skeemansa, opiskelijan funktiokäsitys rajoittuu vain yhteen esitysmuotoon tai jos opiskelija ei ymmärrä funktion eri esitysmuotojen välisiä yhteyksiä.

Opiskelijat, joiden funktiokäsitys rajoittuu vain tiettyihin esitysmuotoihin, voivat hallita näiden esitysmuotojen käytön hyvinkin sujuvasti näitä käsittelevissä mekaanisissa tehtävissä. Toisaalta näillä opiskelijoilla on taas hankaluuksia käsitellä taas muita esityksiä sisältäviä tehtäviä. Edelleen esitysmuotojen välisiä yhteyksiä hallitsemattomat opiskelijat joutuvat ponnistelemaan sellaisissa tehtävissä, jotka vaativat useiden esitysmuotojen käyttämistä samanaikaisesti riippumatta siitä, miten he hallitsevat näiden esitysmuotojen käytön yksinään. Siirtymätehtävät ovat juuri tämänkaltaisia tehtävätyyppejä ja Gagatsis, Elia ja Mousoulides (2006) ovat käyttäneet artikkelissaan seuraavia havaintoja merkkeinä funktiokäsitteen lokeroinnista:

- Opiskelijan ratkaisumenetelmät ovat epäjohdonmukaisia tai ristiriitaisia sellaisissa tehtävissä, joissa esiintyy funktion erilaisia esitysmuotoja tai siirtymiä esitysmuodoista toiseen, ja/tai
- Yhden esitysmuodon tai siirtymän hallinta ei vastaavasti viittaa toisen esitysmuodon tai siirtymän hallintaan.

Näiden lisäksi esitysmuotoja lokeroivilla opiskelijoilla saattaa olla haasteita valita helpompia ja sopivimpia ratkaisumenetelmiä sellaisissa tehtävissä, joissa ongelmaa on mahdollista käsitellä sekä funktion graafisen ja symbolisen esityksen avulla. Jos opiskelijat eivät hallitse toista näistä esitysmuodoista tai he eivät ymmärrä tämän yhteyttä funktioon, he käyttävät useimmiten niitä ratkaisumenetelmiä, jotka he ovat mekaanisesti oppineet.

4 Tutkimuskirjallisuuden havainnot koululaisten haasteista

Tyypillisesti esitysmuototutkimusten kohteina ovat moniesitykselliset matematiikan käsitteet, kuten murtoluku ja lukukäsite yleisesti, geometria tai funktiokäsite. Tutkimuksessa on myös perehdytty koululaiset luovat näiden esityksiä, suorittavat muunnoksia ja siirtyvät niiden välillä sekä tulkitsevat esityksiä toisten avulla (Goldin, 2014). Funktion tapauksessa tutkimuskirjallisuudesta voidaan erottaa kolme eri haaraa, jotka liittyvät funktion esitysmuotojen välisten yhteyksien aiheuttamiin haasteisiin. Ensimmäisenä ovat sellaiset haasteet, jotka keskittyvät välittömästi karteesisen yhteyden puutteelliseen ymmärrykseen. Toisena ovat taas sellaiset haasteet, jotka liittyvät vaikeuksiin suoriutua funktion esitysmuotoja koskevissa siirtymätehtävissä. Viimeiseksi voidaan luokitella kirjallisuus, joka keskittyy koululaisten esitysmuotojen lokeroinnin ilmiöön. Toisaalta jokainen näistä liittyy toiseensa, sillä lokerointi ilmenee heikkojen yhteyksien ymmärtämisen seurauksena ja edelleen estää tämän yhteyden syntymisen, kun taas puutteelliset yhteydet taas seuraavat haasteina suoriutua siirtymätehtävistä.

Tässä kappaleessa perehdytään rajattuun tutkimuskirjallisuuteen lukiolaisten haasteista funktion symbolisen ja graafisen esitysmuodon yhteyden kanssa, eli tutkitaan karteesiseen yhteyteen ja siirtymätehtäviin perehtyvää kirjallisuutta. Tämän jälkeen eritellään sitä tutkimuskirjallisuutta, jossa on tarkasteltu opiskelijoiden funktion esitysmuotojen lokerointia. Lopuksi esitetään kirjallisuuden pohjalta näihin ilmiöihin johtavia tekijöitä. Kirjallisuuskatsauksen kohderyhmänä ovat toisen asteen opiskelijat eli lukiolaiset tai näiden ikäryhmää vastaavat koululaiset, mutta tutkimusotannan rajauksessa on huomioitu myös näitä edeltäviä yläkoulun oppilaita sekä matematiikan ja opetusalan korkeakouluopiskelijoita käsittelevät artikkelit.

4.1 Karteesisen yhteyden puutteet

Tutkimuskirjallisuudesta löytyy runsaasti havaintoja menneeltä vuosituhannelta peruskoulun oppilaiden funktion symboliseen ja graafiseen esitykseen liittyvistä haasteista (Sierpinska, 1992). Erityisesti funktion kuvaajan tapauksessa oppilaat ovat alttiita monenlaisille väärinkäsityksille (Leinhardt, Zavlasky, Stein, 1990) ja monet tutkijat ovat pyrkineet kartoittamaan näistä kumpuavia haasteita tutkimalla oppilaiden käsityksiä suoran kulmakertoimesta, pisteistä, pisteiden koordinaateista sekä miten he näitä konstruoivat (Moschkovich, Schoenfeld, Arcavi, 1993; Schoenfeld, Smith, Arcavi, 1993). Leinhardt'n ja muiden mukaan väärinkäsitykset koskevat esimerkiksi funktion tunnistusta, muuttujien vastaavuutta, lineaarisuutta, jatkuvan ja diskreetin ominaisuuksien eroa, variaation ideaa, merkintätapoja sekä funktion esitysmuotoja.

Schoenfeld ja muut (1993) ovat kartoittaneet näitä väärinkäsityksiä kahden opiskelijan mikrogeneettisellä tutkimuksella tietokoneympäristössä, jossa he havaitsivat opiskelijoiden tietorakenteissa useita puutteita liittyen suoran kulmakertoimeen ja pisteiden koordinaatteihin. Nämä opiskelijat eivät esimerkiksi osanneet kuvata suoran käyttäytymistä kulmakertoimen k arvon muuttuessa, määrittää pisteiden koordinaatteja erilaisissa ongelmatilanteissa ja näiden lisäksi heidän skeemansa suorasta eivät vastanneet suoran muodollista määritelmää. Jokaista tutkimuksessa tehtyä havaintoa yhdisti kuitenkin karteesisen yhteyden puute, eli nämä opiskelijat eivät olleet sisäistäneet funktion symbolisen ja graafisen esityksen välistä perimmäistä yhteyttä, joka oli merkittävä syy tutkimuksessa havaituille haasteille ja väärinkäsityksille.

Karteesisen yhteyden puute on myös havaittu suurilla opiskelijamäärillä. Eric Knuth'n (2000) tutkimuksessa kuvataan koeasetelma, jossa 178 yhdysvaltalaiselle opiskelijalle jaetussa tehtävässä esiteltiin suoran kuvaaja sekä tätä vastaava puutteellinen yhtälö ja opiskelijoiden pyydettiin selittämään ratkaisumenetelmä, miten suoran yhtälö täydennetään puutteellisesta täydelliseksi. Tutkimuksen hypoteesi oli, että karteesisen yhteyden ymmärtäneet opiskelijat kykenisivät havaitsemaan kaksi erilaista (graafinen ja symbolinen) tehtävään liittyvää ratkaisustrategiaa ja valitsemaan näistä luonnollisesti helpomman ja tehokkaamman (näissä tehtävätyypeissä graafisen) menetelmän. Tulosten perusteella kuitenkin yli 75 prosenttia opiskelijoista tukeutui symbolisen esitysmuodon hyödyntämiseen tehtävän ratkaisussa. Tämän lisäksi vain alle kolmannes hyödynsi graafista menetelmää osana ratkaisuaan ja moni ei ollut maininnut graafista ratkaisumenetelmää ollenkaan.

Yllä esitetyt havainnot antavat ymmärtää, että suoran ja funktion kuvaajien tuottamat haasteet eivät häviä toisen asteen opetuksen aikana, mutta tällä kouluasteella opiskelijoiden kehittyneet mekaaniset taidot saattavat maskeerata perustavanlaatuiset konseptuaalisen taidon puutteet. Schoenfeld ja muut esittävät, että karteesisen yhteyden elementit:

> *…ovat matemaattisesti suoraviivaiset, ja tyypillisesti oppilaiden oletetaan sisäistävän nämä lyhyessä ajassa. … … Tämä on tavanomainen pedagoginen oletus. Jos opiskelijat ovat tutustuneet graafiseen esittämiseen aikaisemmin, ei*

differentiaali- ja integraalilaskentaa opettava luennoitsija käyttäisi näiden seikkojen kertaamiseen muutamaa minuuttia kauempaa (Schoenfeld, Smith, Arcavi, 1993, s. 110)".

Suomalaisten opetussuunnitelmien pohjalta funktiokäsite esitellään suomalaisissa kouluissa perustavanlaatuisesti vasta toisella kouluasteella ja näin on aiheellista olettaa tapahtuvan myös muissa koulujärjestelmissä. Toisen asteen opetus voidaan nähdä siis erityisen merkitykselliseksi karteesisen yhteyden kehityksen kannalta ja tutkittaessa karteesisen yhteyden haasteellisuutta olisi siten tähdellistä erottaa keskenään ne toisen asteen opiskelijat, joilla haasteet kumpuavat perustavanlaatuisten mekaanisten taitojen ja perustietojen puutteesta ja opiskelijat, joilla matematiikan osaamisen taso mahdollistaisi karteesisen yhteyden synnyn.

Heikkojen opiskelijoiden haasteita voidaan kartoittaa tarkastelemalla peruskoululaisilla tehtyjä suoran käsittelyyn liittyviä havaintoja. Graafiseen esitykseen liittyen esimerkiksi Greens, Chang ja Ben-Chaim (2007) ovat tutkineet vuonna 2005 Yhdysvaltalaisten, Korealaisten ja Israelilaisten kahdeksannen ja yhdeksännen luokka-asteen oppilaiden kykyjä käsitellä lineaarisia funktioita, suoran kulmakerrointa sekä näiden esityksiä. Heidän havaintojensa mukaan oppilailla oli hankaluuksia huomata suoran kuvaajan suunnan vaikutusta kulmakertoimen etumerkkiin. Jotkut oppilaat tarkastelivat vain muuttujan y muutosta laskiessaan kulmakerrointa, toiset eivät ymmärtäneet mihin suuntaan muuttujien erotuksia tulisi laskea ja toiset eivät osanneet ottaa huomioon koordinaattiakselien skaalausta. Toisena havaintoja oppilaat eivät myöskään ymmärtäneet taulukoitujen pisteiden koordinaattien olevan suoran yhtälön ratkaisuja, jotka muodostavat suoran kuvaajan.

Vastaavasti suoran symbolisen muodon haasteita kuvataan Postelnicun väitöskirjassa (2011), jossa tutkittiin yhdysvaltalaisten toisen asteen vuosiluokkien 8-10 koululaisten taitoja suoran ja kulmakertoimen kanssa sekä kerättiin ongelmista informaatiota haastattelujen avulla. Havainnoissa toistuivat hyvin perustavanlaatuiset ongelmat, kuten vaikeus tarkistaa onko piste suoralla jos pisteen koordinaatit ja suoran yhtälö oli annettu, sekä vaikeus täydentää taulukkoon pisteitä vastaavat koordinaattien x ja y arvot, kun suoran yhtälö oli annettu. Nämä yhdessä muiden havaintojen (Greens, Chang, Ben-Chaim, 2007) kanssa todentavat, että heikkojen opiskelijoiden tulokset kumpuavat heikoista mekaanisista taidoista sekä kyvyttömyydestä tulkita graafisia esitysmuotosysteemejä.

Muiden opiskelijoiden karteesisen yhteyden puutteen tarkastelua vaikeuttaa tutkimuskirjallisuuden rajallisuus, sillä edelliset tutkimukset eivät selitä, missä määrin opiskelijat ovat sisäistäneet karteesisen yhteyden ja miten nämä yhteydet rakentuvat (Adu-Gyamfi, Bossé, Chandler, 2016). Knuth'n tutkimuksen kaltaisissa havainnoissa karteesisen yhteyden hallinta perustui mittariin, jossa yhteyden hallitseva opiskelija valitsee ensisijaisesti tehtävänannon kannalta tehokkaamman menetelmän eli graafisen esityksen käytön, mutta tämä lähtökohta käsittää opiskelijan ongelmanratkaisumenetelmät hyvin yksinkertaisella tasolla. Ensimmäiseksi huomio tehokkaammasta ratkaisumenetelmästä on jo itsessään ainoastaan subjektiivisesti määriteltävissä, eikä menetelmän tehokkuus itsessään mittaa merkittävästi karteesisen yhteyden laatua; opiskelija on kenties hylännyt graafisen esityksen siitä syystä, ettei se tarjoa kuin approksimatiivisen ratkaisun ongelmaan. Toisaalta opiskelija on saattanut ratkaista tehtävän kuvaajan pohjalta hyödyntämällä aikaisemmin oppimaansa tehtävätyyppiä, jossa suoran yhtälön muoto päätellään suoraviivaisesti leikkauspisteen ja suorakertoimen pohjalta. Tässä tapauksessa tehtävänratkaisu kuvaa pikemminkin opiskelijan mekaanista taitoa käsitellä tietynlaisia tehtävätyyppejä kuin opiskelijan konseptuaalista tietoa.

Moon ym. (2013) tutkimuksesta käy ilmi, että tietynkaltaisissa funktioihin tai yhtälöihin liittyvissä ongelmatehtävissä opiskelijat tarvitsevat karteesisen yhteyden ohella myös variaation ideaa. He perehtyivät tutkimuksessaan tulevien lukion matematiikan opettajien karteesisen yhteyden haasteisiin vaikuttaviin tekijöihin ympyrän ja paraabelin kontekstissa, jossa opiskelijaryhmien tuli piirtää annettua yhtälöä $y^2 + x^2 = qx$ vastaava kuvaaja. Havaintojen perusteella tehtävän suorittamiseksi ryhmien oli päättelyissään välttämätöntä ymmärtää variaation käsite, jonka mukaan muuttujapari (x, y) kuvaa muuttuvia koordinaatteja graafisessa kontekstissa, kun taas muuttujat x ja y kuvaajat yksittäin muuttuvia muuttujia symbolisessa kontekstissa. Tämän sivuuttaneet opiskelijaryhmät käsittivät termin $\sqrt{qx}$ ympyrän säteeksi, mikä johti virheellisiin kuvaajiin. Kollektiivisesti ryhmien vastauksia ja perusteluja tutkiessaan havaittiin, että opiskelijat ymmärtävät algebrallista relaatiota vastaavan kuvaajan rakentuvan yksittäisten pisteiden muodostamasta urasta yhdistämällä variaation idean ja karteesisen yhteyden idean.

Adu-Gyamfi, Bossé ja Chandler (2016) ovat taas tutkineet yhteyksien muodostumisen luonnetta nojautuen Hiebertin (1988) viitekehykseen, jossa yhteyksiin liittyvä matemaattinen tieto on lajiteltu kenttätietoon (engl. domain knowledge) ja rekisteritietoon (engl. register knowledge), joista kenttätieto vastaa opiskelijoiden tietoa ja ymmärrystä käsiteltävästä aihekokonaisuudesta kuten polynomeista ja rekisteritieto taas niitä taitoja, jotka liittyvät tätä esittävien esitysmuotosysteemien hallintaan. Heidän havaintojensa mukaan opiskelijaryhmä, joka kykeni yhdistämään kenttätiedon polynomeista yhteen tämän graafiseen esitykseen liittyvän rekisteritiedon kanssa pärjäsi paremmin kuin ryhmä, jolla nämä eri tiedon lajit olivat toisistaan irrallaan.

4.2 Havainnot siirtymätehtävien haasteista

Dreyfuksen oppimisen nelivaiheisen mallin mukaisesti lukiolaisten funktiokäsitteen, funktion esitysmuotojen hallintaa ja näiden yhteyksien ymmärrystä voidaan tarkastella siirtymätehtävien avulla. Yleisesti tutkimuksissa, joissa on käytetty siirtymätehtäviä hyödyksi näiden seikkojen tutkimisessa, on tarkasteltu myös muita seikkoja, kuten opiskelijoiden ratkaisumenetelmiä ja ratkaisujen johdonmukaisuutta. Opiskelijoiden haasteista siirtymätehtävien kanssa on tehty mittavasti tutkimusta (Adu-Gyamfi, Bossé, Chandler, 2015; Bossé, Adu-Gyamfi, Cheetham, 2011a; Elia, Panaoura, Eraclous, Gagatsis, 2007; Gagatsis, Shiakalli, 2004). Adu-Gyamfi, Bossé ja Chandler (2015) kartoittavat artikkelissaan opiskelijoiden haasteita siirtymissä verbaalisten ja symbolisten muotojen välillä sekä näihin liittyviä tekijöitä. Bossé, Adu-Gyamfi ja Cheetham (2011a) erittelevät taas yleisesti siirtymien ja yhteyksien haasteita kokoavassa kirjallisuuskatsauksessaan näihin vaikuttavien tekijöiden ulottuvuuksia.

Elia, Panaoura, Eracleous ja Gagatsis (2007) tutkivat kyproslaisten toisen asteen opiskelijoiden funktiokäsitteen ymmärrystä sekä mitä he ajattelevat funktiosta ja miten he sitä käyttävät. Tutkijat kartoittivat näitä seikkoja kolmen lähtökohdan pohjalta: (1) mitä ideoita opiskelijoilla funktioista on; (2) miten opiskelijat tunnistavat funktion eri esitysmuotojen takaa, ja (3) miten opiskelijat ratkaisevat funktion siirtymiä vaativia ongelmatehtäviä. Tutkimukseen osallistui 179 16-vuotista lukiolaista kolmesta eri koulusta. Opiskelijoille jaetussa seitsemässä tehtävässä ensimmäisessä heidän tuli antaa funktion määritelmä ja seuraavissa kolmessa tunnistaa funktio annetuista viivadiagrammeista, kuvaajista ja symbolisista esityksistä. Viimeiset kolme olivat funktioon liittyviä siirtymätehtäviä. Vain noin kolmasosa opiskelijoista osasi antaa suoran symbolisen muodon annetun kuvaajan pohjalta. Vastaavasti myös vain noin kolmasosa opiskelijoista pystyi ratkaisemaan sanallisen tehtävän, joka vaati funktion symbolisen muodon tuottamista annetusta sanallisesta muodosta.

Jotkin siirtymätehtäviä käyttäneet tutkimushavainnot antavat ymmärtää, että funktion graafisen esityksen esiintyminen siirtymätehtävässä tuottaa opiskelijoille selvästi erityisiä hankaluuksia. Esimerkiksi Gagatsis's ja Shiakallin (2004) havainnoissa opiskelijat suoriutuivat kaikissa tehtävätyypeissä heikommin siirtymästä sanallisesta muodosta graafiseen muotoon kuin sanallisesta muodosta symboliseen muotoon. Vastaavasti Markovits, Eylon ja Bruckheimer (1986) havaitsivat yhdeksäsluokkalaisilla olevan vaikeuksia siirtyä juuri funktion graafisesta esitysmuodosta symboliseen esitykseen, sillä vain kolmasosa oppilaista kykeni kirjoittamaan suoran yhtälön annetun kuvaajan perusteella.

Myös muissa tutkimuksissa on havaittu, että juuri siirtymä funktion graafisesta esityksestä symboliseen tuottaa opiskelijoille enemmän haasteita kuin päinvastaiset siirtymätehtävät. Esimerkiksi Knuth'n tutkimuksessa vain kolmasosa opiskelijoista kykeni yrittämään ratkaista ongelmatehtävä kuvaajan avulla, vaikka tehtävässä oli kyseessä lineaarinen funktio joita opiskelijat ovat todennäköisesti kohdanneet jo peruskoulusta lähtien. Nämä havainnot eivät ole yllättäviä, sillä kuvaajan piirtäminen symbolisen lausekkeen avulla voidaan mekanisoida yksinkertaisesti piirtämistehtäväksi varsinkin suoran tapauksessa. Sen sijaan päinvastainen tilanne eli funktion ominaisuuksien päätteleminen kuvaajasta vaatii edellä esitetyn karteesisen yhteyden elementit, ellei opiskelijalle ole tahdonmukaisesti teetetty mekaanisia ohjeita suoriutua tämänkaltaisista tehtävätyypeistä.

Opiskelijoilla voidaan erotella sekä kyvyt ja taipumukset käyttää joko algebrallisia tai geometrisia menetelmiä funktioon liittyvissä ongelmanratkaisutehtävissä (Mousoulides, Gagatsis, 2004). Mousoulides ja Gagatsis havaitsivat tutkimuksessaan, että vain geometrisen lähestymistavan hallinneet opiskelijat kykenivät ratkaisemaan haastavampia funktioon liittyviä ongelmanratkaisutehtäviä. Tämän havainnon mukaisesti funktion siirtymätehtävien haasteet saattavat seurata siis yleisesti haasteisiin funktioon liittyvien ongelmatehtävien kanssa. Gagatsis ja Shiakalli (2004) ovat perehtyneet siirtymäkyvyn ja ongelmanratkaisukyvyn väliseen relaatioon ja heidän tutkimuksessaan 195 kyproslaista opettajaopiskelijaa vastasivat yksinkertaisiin funktion symbolista, graafista ja sanallista esitystä koskeviin siirtymätehtäviin sekä näitä funktioita koskeviin ongelmatehtäviin. Havaintojen mukaan siirtymäkyky selitti 95 % merkitsevyystasolla 53 % ongelmanratkaisukykyä vastaavan muuttujan varianssista. Tämän tuloksen johdosta siirtymäkyky olisi suurin osatekijä onnistuneessa ongelmanratkaisussa.

Edellisten tutkimusten havainnot eivät välttämättä toistu ainakaan samankaltaisilla tehtävätyypeillä tämän päivän opiskelijoilla johtuen opiskelijoilla käytettävissä olevista elektronisista apuvälineistä. Siinä missä siirtymätehtävien haasteet ovat aikaisemmin saattaneet seurata kuvallisten esitysmuotojen konstruoinnin vaativuudesta, niin tietokonetta tai graafista laskinta käyttävällä opiskelijalla esimerkiksi funktion kuvaajan piirtäminen saattaa onnistua muutamassa sekunnissa. Tämän vuoksi opiskelijan välittömiksi haasteiksi nousevat näiden työkalujen hankkiminen ja hallinta sekä motivaatio opetella ja käyttää niitä. Tästä huolimatta apuvälineet itsessään eivät korvaa opiskelijan ymmärrystä, jonka kehittymisestä hän on itse vastuussa ja kuvallisten esitysmuotojen sisäominaiset haasteet tulevat seuraamaan aina käsiteltäessä funktion kuvallista esitystä. Teknologian kehitys pikemminkin madaltaa välttämätöntä kynnystä lähestyä näitä esityksiä ylipäätänsä.

4.3 Opiskelijoiden lokeroajattelu

Havainnot peruskoululaisten epäjohdonmukaisista ratkaisumenetelmistä sekä tuloksista siirtymätehtävissä antavat viitteitä, että koululaiset ovat erityisen taipuvaisia lokeroimaan uusia käsitteitä varhaisessa oppimisen vaiheessa. Gagatsis'n ja muiden (2006) artikkeli tiivistää tutkimuksia, joissa tutkittiin toisen luokan sekä 12-vuotiaiden peruskoulun oppilaiden lokerointia yhteen - ja vähennyslaskusta, desimaaliluvusta ja murtoluvuista sekä symbolisessa muodossa kuin lukusuoramuodossa. Kaikissa tutkimuksissa toistuivat havainnot, että oppilailla oli hankaluuksia siirtyä eri esitysmuotojen välillä, oppilaat käyttivät epäsäännöllisiä ratkaisumenetelmiä sekä oppilaiden ratkaisujen havaittiin riippuvan tehtävissä kyseessä olevasta esitysmuodosta. Yhdessä nämä havainnot tukevat siten käsitystä, että myös aloittavilla toisen asteen opiskelijoilla on taipumus lokeroida funktiokäsitys varhaisilla matematiikan kursseilla.

Elia, Gagatsis ja Gras (2005) ovat tutkineet 14- ja 16-vuotiaiden opiskelijoiden funktion ja algebrallisten relaatioiden esitysmuotojen lokerointia yksinkertaisten siirtymätehtävien avulla. Heidän havaintojensa mukaan samasta algebrallisesta relaatiosta tai funktiosta riippumatta opiskelijoiden onnistumiseen tehtävissä vaikutti lähde-esitysmuodon tyyppi, sillä esimerkiksi opiskelijat pärjäsivät paremmin graafisen esityksen kanssa verrattuna sanalliseen esitykseen. Analyysin mukaan onnistuminen jollain lähde-esityksellä ei implikoinut onnistumista toisella lähde-esityksellä siirtymätehtävissä. Tämä viittaa esitysmuotojen lokerointiin, sillä jos eri lähde esitysmuodot olisivat semanttisesti kongruentit, tulisi heidän kyetä vastaavasti suorittamaan näitä siirtymiä riippumatta lähde – esityksen tyypistä.

Gerson (2008) erottelee funktion kontekstissa lokeroinnin ilmiön kahteen kategoriaan: esitysmuotojen lokerointiin ja käsitteiden lokerointiin. Hänen tutkimuksessaan näiden kummankin yhteisvaikutus on havaittavissa tutkittaessa erään toisen asteen opiskelijan ratkaisuja ja näiden perusteluja liittyen jaksollisiin funktioihin. Havaintojen mukaan opiskelijan käsitys jaksollisuudesta perustui määritelmän sijasta sellaisiin olettamuksiin, jotka hän oli itse luonut aikaisemmin havaitsemiensa esimerkkien pohjalta. Perinpohjainen tarkastelu osoitti, että hänen käsityksensä jaksollisuudesta oli nivoutunut yhteen funktion graafisen kuvaajan kanssa. Tämän johdosta vaikka hän pystyi siirtymään funktion taulukon ja graafisen esitysten välillä, hän ei pystynyt tekemään jaksollisuuteen liittyviä johtopäätöksiä taulukkoasetelmassa.

Gersonin havainnot tähdentävät niiden esitysmuototyyppien merkitystä, joihin opiskelijat funktion ja tämän ominaisuudet assosioivat, sillä tämä saattaa merkittävästi vaikuttaa opiskelijoiden ratkaisustrategioihin sekä kykyyn suunnitella ja arvioida ratkaisujaan. Tähän liittyy kyproslaisilla matematiikan opettajaopiskelijoilla teetetty tutkimus, joka käsitteli heidän ratkaisumenetelmiään liittyen funktion siirtymätehtäviin (Mousoulides, Gagatsis, 2004). Opiskelijat jaettiin ratkaisumenetelmien mukaan algebralliseen lähestymistapaan ja geometriseen lähestymistapaan siten, että symbolista muotoa käyttäneet opiskelijat luettiin algebrallisen lähestymistavan ryhmään ja kuvallista hyödyntäneet geometrisen lähestymistavan ryhmään. Havaintojen perusteella algebrallisen lähestymistavan valinneet opiskelijat käyttivät funktion symbolista muotoa ratkaisumenetelmänään myös niissä tehtävissä, joissa geometrinen lähestymistapa olisi ollut helpompi ja tehokkaampi. Tämän lisäksi 88,4 % opiskelijoista ei kyennyt esittämään tutkimuksen viimeisessä tehtävässä graafista ratkaisumenetelmää ollenkaan, vaikka tehtävä ei ollut ratkaistavissa symbolisilla menetelmillä.

Esitysmuotojen lokeroitumisella saattaa olla ratkaisumenetelmien lisäksi myös sellainen seuraus, etteivät opiskelijat välttämättä arvota esitysmuotoja yhtäläisesti. Dufour – Janvier, Bednarz ja Belanger (1987) esittävät tätä tukevan havainnon tutkimuksessaan, jossa lukiolaisille oli annettu tehtäväksi ratkaista yhtälö $\sqrt{x} = -x + 6$ käyttäen opettajan antamaa viisikohtaista algoritmia juuriyhtälöiden ratkaisemiseksi. Viiden askeleen jälkeen opiskelijat olivat saaneet ratkaisuiksi juuret $x = 4$ ja $x = 9$ eivätkä aluksi hyväksyneet tehtävän oikeaa ratkaisua, joka käsitti vain juuren $x = 4$. Oppilaat tukeutuivat kahden eri juuren ratkaisuun siitäkin huolimatta, että heille esitettiin yhtälöiden $y = \sqrt{x}$ ja $y = -x + 6$ kuvaajat, jotka leikkasivat ilmiselvästi vain yhdessä pisteessä. Opiskelijat hylkäsivät toisen ratkaisun vasta, kun heille esitettiin algebrallinen menetelmä yhtälön ratkaisun tarkistamiseen sijoittamalla ratkaisu yhtälöön. Koska tämä opiskelijaryhmä oli assosioinut funktiokäsitteen yhdeksi symbolista esitystä, eivät he osanneet arvottaa kuvaajan todistusarvoa. Tämä kulkee käsi kädessä havainnoista opiskelijoiden haasteista kuvallisten esitysmuotojen kanssa.

Lokeroituminen selittää oppilaiden osaltaan karteesisen yhteyden puutteen, sillä lokeroiva oppilas ei osaa erottaa funktion käsitettä sen esitysmuodosta, jonka vuoksi oppilas käsittää funktion kaksi eri esitysmuotoa kahtena eri objektina. Lokeroiva oppilas saattaa assosioida funktioon graafisen esityksen aina kuvaajaa tulkitessaan, kun taas hänelle symbolinen esitys viittaa vastaavasti vain sellaisiin tehtäviin, joissa pyritään laskemaan derivaatan kulmakerroin tai muulla tavoin manipuloimaan matemaattista symbolikieltä. Tällöin oppilaalle ei siten synny tarvetta pohtia näiden esitysten välistä vuorovaikutusta. Toisaalta oppilas myös lokeroi nämä esitysmuodot yhteyksien havaitsemisen puutteesta, jolloin yhteyksien puute ja lokeroinnin ilmiö tavallaan vahvistavat toisiaan ja ovat toinen toisensa rinnakkaisilmiöt. Tämä sykli siten ruokkii oppilaiden haasteita rakentaa funktion esitysmuotojen välille yhteyksiä, joka johtaa edelleen hankaluuksiin ongelmatehtävien kanssa.

4.4 Haasteita ja lokerointia aiheuttavat tekijät

Funktiokäsityksen erityinen haaste seuraa funktion esitysten monimuotoisuudesta (Hitt, 1998). Tämän lisäksi jos oppimisen oletetaan perustuvan opiskelijan omaan toimintaan sekä tietorakenteiden integroitumiseen, niin yhteyksiin liittyvien haasteiden syitä on tähdellistä kartoittaa perehtymällä luokkaopetukseen liittyviin tekijöihin. Evangelidou ym. (2004) ovat jaotelleet funktiokäsityksen kehityksen haasteet kolmeen ulottuvuuteen, jotka ovat; (1) epistemologinen ulottuvuus, joka käsittää opiskelijan funktiota koskevan a priori tiedon ja funktion muodollisen määritelmän esittämän formalismin suhdetta, eli niitä prosesseja, jotka koskevat funktion virallisen määritelmän ja opiskelijan käsitysten vuorovaikutusta; (2) matematiikan opettajien näkemyksiä ja uskomuksia koskeva ulottuvuus, sekä; (3) didaktinen ulottuvuus, johon voidaan lukea opetuksen ja opetusmenetelmien aiheuttamat rajoitteet opiskelijoille.

Epistemologinen ulottuvuus kumpuaa yksinkertaisesti siitä seikasta, että opiskelijat eivät opi matematiikkaa yksinään käsitteiden määritelmistä ja että heidän ymmärryksensä matemaattisista käsitteistä eivät välttämättä vastaa näiden muodollista määritelmää. Sierpinska (1992) täsmentää artikkelissaan, että funktion tapauksessa ymmärryksen ensiedellytyksenä opiskelijat vaativat tietynlaisen konkretisoituvan prototyypin funktiosta, jonka käyrä on useimmiten kaikkialla jatkuva, derivoituva ja sileä. Tällaiset prototyypit seuraavat todennäköisimmin siksi, koska ensimmäiset opiskelijoiden kohtaamat funktiot rajoittuvat tavanomaisesti lineaarisiin, polynomisiin ja trigonometrisiin funktioihin. Näiden prototyyppien tulee kuitenkin olla yhtäpitäviä opiskelijoille annetun määritelmän kanssa ja jos tämä määritelmä taas tuottaa toisenlaisia prototyyppejä kuin mihin opiskelijat ovat tottuneet, ei määritelmä ole käyttökelpoinen. Sierpinska painottaa, että määritelmä ei nimestään huolimatta määrittele kohdetta, sillä kohde on olemassa määritelmästä huolimatta. Tämän johdosta opiskelijoille annetun funktion määritelmän tulisi seurata opiskelijoiden kypsyyttä ja taitotasoa sekä heille annettuja esimerkkejä ja yleisen kaikenkattavan määritelmän esittelyä tulisi tämän vuoksi siirtää myöhempään ajankohtaan.

Tutkimushavainnot tukevat Sierpinskan käsitystä. Esimerkiksi Elian ja muiden (2007) havainnoissa opiskelijoiden kyvyllä tuottaa funktion määritelmä ei ollut vaikutusta opiskelijoiden ongelmanratkaisukyvylle tai -menetelmille. Opiskelijat saattoivat esimerkiksi tulkita tehtävien funktioita tai ratkaista ongelmia menetelmillä, jotka olivat ristiriidassa heidän antamiensa määritelmien kanssa ja vastaavasti funktion määritelmän tuottamista kykenemättömät opiskelijat pärjäsivät yhtä hyvin funktioihin liittyvissä ongelmanratkaisutehtävissä. Näiden havaintojen antina on, että toisen asteen opetuksessa pääpainoa ei ole didaktisesti perustelua asettaa funktion määritelmään, koska tämä ei mitä ilmeisimmin edesauta opiskelijoiden ymmärrystä; jos funktion muodollinen määritelmä ei kuvaa opiskelijan funktiokäsitystä, niin opiskelijalla on mitä todennäköisimmin haasteita myös muiden funktion näkökulmien kuten esitysmuotojen kanssa. Tämä seikkaa kuvaa erityisesti sellaisten opiskelijoiden haasteita, joiden altistuminen funktiolle rajoittuu määritelmään laskurutiinin puutteen vuoksi.

Merkittävä didaktinen tekijä on tiettyjen esitysmuotojen toistuva käyttö opetuksessa. Jotkut tutkijat esittävät, että toisen asteen matematiikan opettajat ovat painottaneet erityisesti funktion symbolista esitysmuotoa (Elia, Gagatsis, Gras, 2005). Dunham ja Osborne (1991) väittävät, että kouluopetus suosii varsinkin matemaattisten käsitteiden symbolista manipulointia ja algebrallisia esitysmuotoja, jonka vuoksi opiskelijoiden kokemukset eri esitysmuotojen käytöstä saattavat jäädä vähäisiksi. Eisenberg ja Dreyfus (1991) esittävät myös, että koulussa opetus on tavanomaisesti järjestetty oppimisprosessin kannalta siten, että funktioiden analyyttistä tarkastelua vahvistetaan graafisen tulkinnan kustannuksella. Kaldrinmidou ja Iconomou (siteerattu artikkelissa Gagatsis, Elia, Mousoulides, 2006) ovat taas havainneet sekä opettajien ja opiskelijoiden kiinnittävän enemmän huomiota algebrallisiin symboleihin kuin kuviin ja kuvaajiin.

Symbolisten esitysten suosio on ymmärrettävissä, kun tarkastellaan varsinkin useita kymmeniä vuosia vanhoja oppikirjoja; kirjojen laadinnassa on huomioitu hyvin vähän tai ei ollenkaan oppimateriaaliin liittyviä pedagogisia tekijöitä, jotka näkyvät esimerkiksi tekstiä selventävien kuvien ja diagrammien puutteina, teksti- ja kaavavoittoisuutena sekä tietynlaisena yksitoikkoisuutena. Toisaalta sekä oppikirjoissa, kuin myös matematiikan opetuksessa on tapahtunut merkittävän suuria harppauksia viimeisen kolmenkymmenen vuoden ajanjaksolla, jonka johdosta nämä maininnat eivät kuvaa nykyisenkaltaista opetusta. Sen sijaan nämä selittävät osittain varhaisimpia havaintoja opiskelijoiden heikoista tuloksista graafisten esitysten käsittelyn kanssa sekä havainnot, joissa opiskelijat turvautuivat ensisijaisesti symbolisiin menetelmiin ongelmanratkaisuissa tai arvottivat symbolisia menetelmiä graafisia enemmän.

Kuvien ja kuvaajien karsastaminen voidaan myös tulkita seuraavaan kognitiivisesta taakasta, jonka visuaaliset esitysmuotosysteemit opiskelijoille asettavat. Ainsworth'n (1999) mukaan esitysmuotosysteemien oppiminen vaatii eri menetelmien ja tottumuksien opettelua sekä näiden soveltamista eri tehtävissä ja konteksteissa, johon jokaisella opiskelijalla ei välttämättä ole rajatulla opetusajalla valmiuksia. Vastaavasti Aspinwall ym. (1997) esittävät, että esimerkiksi diagrammina esitetyn implisiittisen matemaattisen informaation käsittely ja tarkastelu vaatii suuremman panostuksen kuin muut ongelman näkökulmat. Käytännössä näitä väitteitä selittää se, ettei toisen asteen opiskelijoilla ole välttämättä suurta opiskelumotivaatiota, tai tätä motivaatiota säätelevät pitkälti tehtävien ratkaisemiseen liittyvä vaivannäkö ja uskomus vaivannäön määrästä. Opiskelijalla saattaa olla merkittäviä vaikeuksia ratkaista tutkimuksellisia tehtäviä, joissa täytyy piirtää funktion kuvaaja, koska funktion kuvaajan piirtäminen saattaa olla työkaluista riippuen raskaampi suorittaa kuin yhtälöjen ratkaisu ruutupaperilla. Tällaisen tehtävän vaativuus riippuu myös merkittävästi, kuinka opiskelija hallitsee työvälineensä; jos opiskelijalta puuttuu rutiini kuvaajien piirtämiseen, myös kynnys piirtää ja käyttää näitä kuvaajia ongelmanratkaisussa kasvaa.

Opettajien näkemykset ja uskomukset vuorovaikuttavat osaltaan didaktisiin seikkoihin, sillä nämä määräävät minkälaisia esitysmuotoja opettajat päätyvät käyttämään opetuksessa kuvatessaan tiettyjä matemaattisia ideoita. Jos opettajan näkemyksen mukaan paras menetelmä kuvata derivoituvuutta on graafisen esityksen avulla, niin todennäköisesti hän myös haluaa havainnollistaa tätä graafisen esityksen avulla. Opettajan uskomuksia voivat taas olla esityksen muodollinen kelvollisuus tai pedagogisuus. Havainnot opettajien kuvaajavastaisuudesta voivat esimerkiksi selittyä sillä, että opettajat joko tietämättään vähättelevät kuvaajan merkitystä tai tietoisesti kieltävät kuvaajan todistusarvon eliminoiden siten opiskelijoilta sellaiset käsitykset, jossa opiskelijat luulevat approksimatiivisen kuvan piirtämisen tai kuvaajasta tulkitsemisen kelpaavan muodolliseksi todistukseksi. Opettajien keskuudessa toistuva fraasi ”laskin on hyvä apuri, mutta huono isäntä” saattaa peilautua opiskelijalle käsityksenä, että funktion kuvaajasta vedetyt johtopäätökset eivät ole siten käyttökelpoisia, vaikka opettajan tarkoitus saattoi olla opastaa opiskelijoita esimerkiksi tarkastamaan tulostensa järkevyys vertailemalla vastausta ja funktion kuvaajaa tai muuten käyttämään kuvaajaa apuna ratkaisumenetelmien laatimiseksi.

Opiskelijoiden haasteet voivat myös seurata opettajien omista haasteista ja väärinkäsityksistä (Stylianou, 2010). Esimerkiksi Hitt (1998) on tutkinut tulevien opettajien virhekäsityksiä funktiokäsityksestä ja hänen havainnoissaan kolmasosa opettajaopiskelijoista erehtyi luulemaan kartioleikkausta esittävät kuvaajat funktion kuvaajiksi. Tämän lisäksi opettajilla oli toistuvia ongelmia hyödyntää tarjoamaansa funktion määritelmää funktiontunnistustehtävissä varsinkin niissä tapauksissa, joissa kuvaajista oli annettu symbolinen muoto. Even on käyttänyt omassa vastaavassa tutkimuksessaan seuraavaa ongelmatehtävää:

> *”Problem 1: If you substitute 1 for x in* $ax^2 + bx + c$ *(a, b and c are real numbers), you get a positive number. Substituting 6 gives a negative number. How many real solutions does the equation* $ax^2 + bx + c = 0$ *have? Explain.* (Even, 1998)“

Vain 14 prosenttia 152 opettajaopiskelijasta kykenivät ratkaisemaan edellä esitetyn tehtävän ja noin 80 prosenttia vastanneista eivät hyödyntäneet kuvaajaa ratkaisuissaan ollenkaan. Vastaavanlaisia havaintoja tulevien opettajien haasteista on kirjattu myös muualla (Gagatsis ja Shiakalli, 2004; Moon, Brenner, Jacob, Okamoto, 2013; Presmeg, Nenduradu, 2005)

Toiset tutkijat esittävät opettajien myös lokeroivan funktion esitysmuotoja (Even, 1998; Gagatsis, Elia, Mousoulides, 2006; Hitt, 1998), joka edelleen seuraa näiden opettajien kyvyttömyydestä erotella funktiokäsite tämän esitysmuodosta. Esimerkiksi Stylianoun (2010) mukaan opettajien taipumus painottaa funktion symbolisen esityksen käyttöä opetuksessa saattaa johtua siitä, että opettajat käsittävät funktion symbolisen esityksen muodollisuuden vuoksi ainoaksi oikeaksi esitykseksi, siinä missä kuvalliset esitykset nähdään epätarkkoina ja vain osviittaa antavina.

5 Johtopäätökset ja henkilökohtaisia näkemyksiä

Tässä kappaleessa esitetään lyhyesti johtopäätökset tutkimusaineiston pohjalta sekä kirjoittajan omia näkemyksiä tutkielman aiheesta sekä tuloksista.

5.1 Johtopäätökset

Tämän tutkielman tavoitteena oli perehtyä funktion symbolisen ja graafisen esitysmuodon väliseen yhteyteen ja tähän liittyviin havaintoihin lukiolaisten haasteista. Tutkimuskirjallisuudessa esiintyy toistuvasti havaintoja, että oppilailla ja opiskelijoilla on haasteita rakentaa yhteyksiä funktion symbolisen ja graafisen esitysmuodon välille sekä haasteita suorittaa erilaisia siirtymätehtäviä. Toisen asteen opiskelijat ovat alttiita funktion esitysten lokeroinnille, jos opetusta ei ole sopeutettu opiskelijan kykyjen ja matematiikan osaamisen kanssa tai jos opetuksessa suositaan liikaa symbolisia esityksiä. Edelleen lokerointi heikentää opiskelijoiden kykyä rakentaa yhteyksiä funktion esitysten välille, jolloin syntyy oppimiselle haitallinen itseään ruokkiva kierto.

Funktion lokeroinnin syntyä on mahdollista välttää esimerkiksi esittelemällä opiskelijoille opintojen aikana symbolisesta muodosta vaihtoehtoisia esitysmuototyyppejä tarpeeksi varhaisessa vaiheessa. Opettaja voi kehittää opiskelijoille erilaisia tutkimustehtäviä, joissa opiskelijoiden on välttämätöntä tulkita kuvaajia saadakseen tietoa funktioiden ominaisuuksista, kuten käytöksestä, määrittely – sekä arvojoukosta. Käyttämällä taulukkoa erilaisissa tehtävätyypeissä opiskelijoilla on taas mahdollisuus hahmottaa funktion kuvaajien pisteluonne sekä tämän yhteys funktion lausekkeeseen. Opetuksessa tulisi myös olla sekä suljettuja ja avoimia siirtymätehtäviä, joissa opiskelijoille syntyy välttämätön tarve käyttää funktion eri esitysmuotoja hyväkseen ongelmanratkaisussa.

Viimeiseksi opettajien tulisi myös tuntea lokeroinnin ilmiö ja tätä ruokkivat opetusmenetelmät sekä tiedostaa mitkä havainnot kertovat opiskelijan lokeroajattelusta, jolloin heillä olisi mahdollisuus suunnitella opetusta torjuakseen ja ennaltaehkäistäkseen lokeroinnin kaltaisia ongelmia. Tämä auttaisi myös opettajan opiskelija-arviointia, sillä kyky todeta opiskelijan lokeroitumisen taso sekä syyt antavat opettajalle paremman kuvan opiskelijan todellista työmäärästä sekä kuvaa, missä määrin opiskelijan osaaminen perustuu proseduraaliseen tai konseptuaaliseen tietoon. Tämä seikka nousee erityisen merkittäväksi käänteisen opetuksen ja arvioinnin menetelmissä, joissa avaintekijöinä ovat opettajan ja opiskelijan vuorovaikutus ja tuntemus.

5.2 Kirjoittajan pohdintaa

Tämän kirjallisuuskatsauksen idea on lähtenyt henkilökohtaisesta konkreettisesta kokemuksesta, jonka allekirjoittanut on lukio-opinnoissaan havainnut. Muistan edelleen varhaisilla lukion kursseilla, miten funktion nollakohtia saatettiin ratkoa paperilla muuttamalla funktion lauseke yhtälömuotoon opettajan kehottaessa tarkastamaan tuloksen mielekkyys graafisen laskimen avulla kuitenkin muistuttaen, ettei vastauksena hyväksyttäisi kuitenkaan suoraan laskimesta kopioitua lukuarvoa perusteluitta. Näissä tilanteissa funktion kuvaaja toimi siis jonkinlaisena apukeinona, mutta lukioikäisen tasolla minulle avautui vasta hyvin myöhään, että tämä kuvaaja koostui juuri niistä kaikista pisteistä, jotka täyttävät tätä funktiota kuvaavan yhtälön. Tämä idea nousi tarkastellessa parametrisiä yhtälöitä laskimen piirto-ohjelmassa, jossa kuvaajan muotoa ei määrännyt enää funktion lauseke vaan yhtälöpari, jossa tuli kirjoittaa muuttujien x ja y arvot kyseisen parametrin funktiona. Tämä näpräys lähti sattumoisin liikkeelle mielenkiinnosta piirrellä laskimen näytölle spiraalien ja muiden käyrien kuvia, jotka olennaisesti näillä kyseisillä laskimilla onnistuivat vain parametristen yhtälöiden kautta.

Edellä kuvatussa tilanteessa, lukio- sekä korkeakouluopinnoissa graafisen laskimen käyttö on osoittautunut minulle henkilökohtaisesti välttämättömäksi apuvälineeksi. Toisaalta lukioissa nämä laskimet saivat hyvin nopeasti valmistumiseni jälkeen tehdä tilaa symbolisille laskimille, jotka kehittyneempinä laitteina eivät vaatineet käyttäjältään samassa suhteessa matemaattisiin konsepteihin perehtymistä ja keskustelu lukiolaisten perusrutiinien ja kyvyistä suorittaa alkeellisia laskusuorituksia kiihtyi. Tämän pohjalta on siis luontevaa ajatella, että laskimen hyödyllisyys pohjautuu hyvin pitkälti siihen, mitä laskimella tehdään; jos laskin laskee tehtävät opiskelijan puolesta, ei opiskelijalle välttämättä synny motivaatiota perehtyä laskujen taustalla olevien käsitteiden tai prosessien syvempiin mekanismeihin. Toisaalta laskin tuo opiskelijalle merkittävän ilmaisuavaruuden graafisen esityksen puolesta, joiden havainnollistaminen näitä ilman on opiskelijalle haasteellista ja aikaa vievää. Tämän vuoksi laskinten ja laskinohjelmistojen täysi tyrmääminen johtaisi helposti niihin samoihin ongelmiin, joita matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa on havaittu jo viimeisen viidenkymmenen vuoden ajalta.

Opettajan on kuitenkin erittäin merkityksellistä pohtia, missä määrin ja miten tekniikkaa opetuksessa käytetään. Nykyisin koululaisilla saattaa olla jo peruskoulussa käytössä tablettitietokoneet ja edelleen lukiossa henkilökohtaiset kannettavat tietokoneet. Nuorilla oppilailla ja opiskelijoilla tekniikan käyttöön liittyy sekä käytön haasteita kuin myös tarkoituksenmukaisuuden puutetta, sillä lukion ensimmäisen vuoden opiskelijat eivät välttämättä ole löytäneet itselleen vielä sopivia oppimismenetelmiä tai opiskelumotivaatiota, jolloin tietokoneen käyttö tunnilla saattaa rajoittua viihdekäyttöön. Tämän vuoksi niin peruskoulussa kuin lukiossa tekniikan käytön pitäisi olla hallittua ja tarkoituksenmukaista, ettei tietokone muodostu pelkäksi oppitunnilla käytettäväksi leluksi.

Erilaisista ilmaisista ohjelmista esimerkiksi Geogebra tarjoaa opettajalle runsaasti työkaluja kehittää oppilaiden ja opiskelijoiden kykyä opetella funktion esitysmuotojen käyttöä ja manipulointia. Tehtävissä tulee kuitenkin huomioida, että ratkaisut eivät redusoidu mekaanisiksi, vaan opettajan tulee implementoida näihin tehtäviin myös sellaisia vaiheita, jotka liittyvät välittömästi näiden esitysmuotojen välisiin yhteyksiin. Opettaja voi esimerkiksi teettää opiskelijoilla rinnakkain sellaisia siirtymätehtäviä, joissa käsitellään sekä funktioita, yhtälöitä kuin myös yksittäisiä pisteitä. Tällöin karteesinen koordinaatisto ei muodostu opiskelijalle vain funktion kuvaajiin rajatuksi ympäristöksi. Opettajan tulee myös varmistaa näiden laskenta- ja piirtämisohjelmistojen ulkopuolella, ettei opiskelijan ymmärryksen taso rajoitu vain kyseisessä ohjelmistoympäristössä toimimiseen, sillä yhteydet havainnut opiskelija kykenee siirtämään ajatuksensa myös kynän kautta paperille.

Reformimatematiikan puitteita ei ole sovellettu suomen opetussuunnitelmissa sokeasti. Tästä huolimatta tämän maailman anti on jokaiselle opettajalle tuttu, joka kehottaa ongelmanratkaisua tekeviä oppilaita ja opiskelijoita piirtämään tilanteesta kuvan. Vastaavasti luonnontieteissä opiskelijoita kehotetaan kirjoittamaan ylös kaikki tehtävänannossa mainitut suureet sekä piirtämään tilanteesta mallin. Nämä ovat juuri niitä esitysmuotoja soveltavia menetelmiä, joilla pyritään saada opiskelijat tallentamaan omaa ajatteluaan paperille, kirjoittamaan ongelmatilanne toisessa muodossa sekä manipuloimaan näitä muotoja ja viime kädessä myös siirtämään näihin lisää informaatiota. Tätä on ollut perinteisesti hyvin helppo harrastaa paperilla, jonka johdosta tietoteknisten apuvälineiden tulisi olla suunniteltu siten, että ne sallisivat myös vastaavat vapaat merkintä- ja piirrostyökalut, jotta tekniikan käyttö ei muodostuisi rajoitteeksi ajatusten hahmottamiselle.

6 Kirjallisuusviitteet

Adu-Gyamfi, A., Bossé, M. J. (2014). Processes and Reasoning in Representations of Linear Functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 12(1), 167-192.

Adu-Gyamfi, A., Bossé, M. J., Chandler, K. (2015). Situating Student Errors: Linguistic-to-Algebra Translation Errors. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* 1-29.

Adu-Gyamfi, A., Bossé, M. J., Chandler, K. (2016). Student Connections between Algebraic and Graphical Polynomial Representations in the Context of a Polynomial Relation. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 15(5), 915-938.

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representation. *Computers & Education*. 33(2-3), 131-152.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33(3), 301-317.

M. J. Bossé, K. Adu-Gyamfi, K., Cheetham, M. R. (2011a). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings, *International Electric Journal of Mathematics* Education. 6(3), 113-133.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Teoksessa Tall, D. *Advanced mathematical thinking*. 25-41. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. Teoksessa Janvier, C. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* 109-122.

Dunham, P., Osborne, A. (1991). Learning How to See: Students' graphing difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 13(4), 35-49.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61(1-2), 103-131.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. Teoksessa Zimmermann, W., Cunningham, S. *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 9-24. United States: Mathematical Association of America.

Elia, I., Gagatsis, A., Gras, R. (2005). Can we “trace” the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis*, 175-185. Palermo, Italy: Universita degli Studi di Palermo.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., Gagatsis, A. (2007). Relations Between Secondary Pupils’ Conceptions About Functions and Problem Solving in Different Representations. *International Journal of Science and Mathematics Education.* 5(3), 533-556.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students’ conceptions of function. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2, 351-358. Bergen, Norway: Bergen University College.

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *Journal of Mathematical Behavior*. 17(1), 105-121.

Gagatsis, A., Elia, I., Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students’ thinking? *Relime, Número Especial*. 197-224.

Gagatsis, A., Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and mathematical Problem Solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645-657.

Gerson, H. (2001). Making connections: Compartmentalization in pre-calculus students’ understanding of functions. (Väitöskirja, University of New Hampshire). https://scholars.unh.edu/dissertation/16

Gerson, H. (2008). David’s Understanding of Functions and Periodicity. *School Science and Mathematics,* 108, 28-38.

Goldin, G. (2014). Mathematical Representations. Teoksessa Lerman, S. *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Greens, C., Chang, K. Y., Ben-Chaim, D. (2007). International survey of high school students understanding of key concepts of linearity. *31th Annual Meeting of the International Group*. 2, 273-280. Seoul: PME.

Haapasalo, L., Kadijevich, D. (2000). Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. *Journal für Mathematik-Didaktik.* 21(2), 139-157.

Hautamäki, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola, L. (2004). *Laudatur 1 MAA1: Funktiot ja yhtälöt*. Keuruu: Otava.

Heinze, A., Star, J. R., Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM - International Journal for Mathematics Education*. (41)5, 535-540.

Hiebert, J. (1988). A Theory of Developing Competence With Written Mathematical Symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 333-355.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*. 17, 123-134.

Janvier, J. (1987). Teoksessa Janvier, J. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Knuth, E. (2000). Student Understanding of the Cartesian Connection: An Exploratory Study, 2000. *Journal for Research in Mathematics Education.* 31(4), 500-507.

Lehtinen, E., Vauras, M., Lerkkanen, M-K. (2016). *Kasvatuspsykologia*. 3. painos. (97). Juva: Bookwell Oy.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing; Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Lesh, R., Behr, M., Post, T. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. Teoksessa Janvier, J. *Problems of representation in the teaching and learning mathematics*, 33-40, Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 (LOPS 2015). Helsinki: Opetushallitus.

Markovits, Z., Eylon, B-S., Bruckheimer, M. (1986). Function Today and Yesterday. *For the Learning of Mathematics.* 6(2), 18-24.

Metsämuuronen, J. (2017). Oppia ikä kaikki – matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015. *Kansallinen koulutuksen arviointikeskus*, julkaisut 1:2017.

Moon, K., Brenner, M., Jacob, B., Okamoto, Y. (2013). Prospective Secondary Mathematics Teachers' Understanding and Cognitive Difficulties in Making Connections among Representations. *Mathematical Thinking and Learning,* 15(3), 201-227.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A., Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. Teoksessa Harel, G., Dubinsky, E. *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 69-100, 1991. Washington DC, Mathematical Association of America.

Mousoulides, N., Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. Teoksessa Hoines., M., Fuglestad, A. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 385-392. Bergen, Norway: Bergen University College.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Veston, VA: NCTM.

Orton, D., Frobisher, L. (2004). Teoksessa *Insight into teaching mathematics*. 2004. New York: Continuum International Publishing.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2016 (POPS 2016). Helsinki: Opetushallitus.

Piaget, K. (1923). *Le langage et la pensée chez l'enfant: Ètudes sur la logique de l'enfant*. Paris: Neuchatel.

Piaget, J. (1967). *Biologie et connaissance*, 78-79. Paris: Gallimard.

Postelnicu, V. (2011). Student Difficulties with Linearity and Linear Functions and Teachers' Understanding of Student Difficulties. (Väitöskirja, Arizona State University). https://repository.asu.edu/items/8924.

Presmeg, N., Nenduradu, R. (2005). An Investigation of a Preservice Teacher's Use of Representations in Solving Algebraic Problems Involving Exponential Relationships. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education international conference,* 4, 105-112.

Romberg, T.A., Carpenter, T.P., Fennema, E. (1993). Towards a common research perspective. Teoksessa Romberg, T.A., Carpenter, T.P., Fennema, E. *Integrating research on the graphical representation of function*, 1-9. Hillsdale NJ: Erlbaum.

Schneider, M., Stern, E. (2010). The cognitive perspective on learning: ten cornerstones findings. Teoksessa *Organisation for Economic Co-Operation and Development* (OECD), The Nature of learning: Using research to inspire practice, 69–90. Paris: OECD.

Schoenfeld, A. H., Smith, J., Arcavi, A. (1993). Learning: The Microgenetic Analysis of One Student's Evolving Understanding of a Complex Subject Matter Domain. Teoksessa Glaser, R. *Advances in Instructional Psychology*, 55-175, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the notion of Function. Teoksessa Harel, G., Dubinsky, E. *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25-28. Washington DC, Mathematical Association of America.

Stylianou, D. A., Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning,* 6(4), 353–387.

Stylianou, D. (2010). Teacher's conception of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education.* 13(4), 325–343.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Tall, D., Smith, D., Piez, C. (2008). Technology and Calculus. Teoksessa Heid, K., Blume, G. *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases and Perspectives*, 207-258. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Vinner, S., Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Vinner, S., Hershkowitz, R., Bruckheimer, M. (1981). Some Cognitive Factors as Causes of Mistakes in the Addition of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 12(1), 70-76.