



**TURUN
YLIOPISTO**

BAKERIN-CAMBELLIN-HAUSDORFFIN KAAVA

Joona Oksakari

LuK-tutkielma
Helmikuu 2024

Tarkastaja:
Dos. J. Lahtonen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tämän opinnäytetyön tiivistelmän ideointiin ja laatimiseen käytettiin apuna ChatGPT:tä. Lisäksi ChatGPT:tä käytettiin apuna Lauseen 3 muotoilussa. Sisällön alkuperäisyydestä ja asianmukaisista viittauksista on huolehdittu kirjoittajan toimesta. Kaikki ilmoitetut lähteet ovat kirjoittajan käyttämiä lähteitä, eivät tekoälyn tuotamia

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

JOONA OKSAKARI: Bakerin-Cambellin-Hausdorffin kaava
LuK-tutkielma, 14 s.
Matematiikka
Helmikuu 2024

Tässä tutkielmassa esitetään ja todistetaan Bakerin-Cambellin-Hausdorffin kaava, joka liittyy Lien algebra homomorfismin yhdistämiseen Lien ryhmä -homomorfismin kanssa. Bakerin-Cambellin-Hausdorffin kaava on hyödyllinen esimerkiksi Lien teoriassa, kvanttimekaniikassa tai differentiaali geometriassa.

Tutkielman alussa käsitellään Lien ryhmien eksponenttikuvaus, jonka jälkeen käsitellään Ad- ja ad-kuvaus. Tämän jälkeen tarkastellaan vielä eksponenttikuvauksen derivattaa, joka on olennainen Bakerin-Cambellin-Hausdorffin kaavan todistamisessa. Tämän jälkeen esitellään Bakerin-Cambellin-Hausdorffin kaava ja sen todistus.

Asiasanat: Bakerin-Cambellin-Hausdorffin kaava, Lien ryhmät ja algebrat, Matematiikka

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Lien algebran ja Lien ryhmän kuvauksia	2
2.1	Eksponenttikuvaus	2
2.2	Ad- ja ad-kuvaus	3
2.3	Eksponenttikuvauksen derivaatta	6
3	Baker–Campbell–Hausdorffin kaava	9
3.1	Kaava	10
3.2	Todistus	11
4	Yhteenveto	12

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan ja todistetaan Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava. Ennen Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavaa ja sen todistusta kerrataan keskeisimpiä käsitteitä Lien ryhmistä ja Lien algebroista. Lukijan odotetaan hallitsevan hyvin matematiikan perusteet. Lisäksi lukijan odotetaan tuntevan Lien ryhmien ja Lien algebroiden perusominaisuudet. Tutkielmassa käsitellään aluksi eksponenttikuvauksia, sillä ne ovat keskeinen osa Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavan todistuksesta. Tämän jälkeen tarkastellaan eksponenttikuvauksen derivaattaa, jonka jälkeen siirrytään itse Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavaan ja sen todistukseen.

Lien teoria on nimetty norjalaisen matemaatikon Sophus Lien (1842-1899) mukaan. Lien teorian perusta on geometrinen ja pohjautuu Felix Kleinin (1849-1925) näemyksiin, joiden mukaan avaruuden geometrian määrää sen symmetriaryhmä. Kun avaruuden ja sen geometrinen käsitys kehittyi Eukleideen, Riemannin ja Grothendieckin mukana supersymmetriseksi, kehittyi myös käsitys Lien ryhmistä ja niiden esityksestä.[3] Ryhmiä koskevat kysymykset, jotka kiinnostavat matemaatikkoja, ovat pysyneet hyvin samoina ajan kuluessa: mikä on ryhmän rakenne, missä ryhmä toimii ja mikä sen esitys on?

Homomorfismi on rakenteen säilyttävä kuvaus ja siksi se on kiinnostava kuvaus ja tutkimuskohde. Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava liittyy Lien algebra -homomorfismin yhdistämiseen Lien ryhmä -homomorfismin kanssa. Tämä tulos on syvällinen, eikä sen osoittaminen ole täysin yksinkertaista. Halutun ryhmähomomorfismin $\Phi : G \rightarrow H$ olisi toteutettava $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$. Vaikka Φ olisi hyvin määritelty, ei ole selvää, miksi se olisi ryhmähomomorfismi. Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava ratkaisee tämän ongelman osoittamalla, että kuvaus Φ todella on ryhmähomomorfismi.

Tutkielmassa tarkastellaan Lien ryhmien sijasta Lien matriisiryhmiä, mutta päätulosten todistukset ovat samoja yleisille Lien ryhmille olettaen, että tarvittavat perustulokset on todistettu. Etuna Lien matriisiryhmien käyttämiseen yleisten Lien ryhmien sijaan on se, että tarvittavat pohjatiedot ovat huomattavasti suppeammat. Tällöin ei tarvita esimerkiksi yhtä vahvoja tietoja differentiaaligeometriasta, eikä Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavan todistaminen vaadi Frobeniuksen teoremaa. Tutkielma pohjautuu pääosin Hallin kirjaan [1]. Mikäli muita lähteitä käytetään ilmoitetaan siitä erikseen.

2 Lien algebran ja Lien ryhmän kuvauksia

Tarkastellaan aluksi Lien matriisiryhmän ja Lien algebran kuvauksia. Tarkemmin eksponentti-, Ad- ja ad-kuvauksia. Kaikki edellä mainitut kuvaukset ovat olennaisia Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavassa ja sen todistuksessa.

2.1 Eksponenttikuvaus

Eksponenttikuvaus on keskeinen käsiteltäessä Lien ryhmiä. Se astuu kuvaan heti Lien algebraa määriteltäessä Lien matriisiryhmälle. Eksponentti kuvaus on myös mekanismi, jolla informaatiota pystytään siirtämään Lien algebralta Lien ryhmään. Lisäksi laskut on usein helpompi suorittaa Lien algebra tasolla, kuin suoraan Lien ryhmässä. Tarkastellaan ensiksi yksinkertaista esimerkkiä matriisin eksponenttikuvauksesta ja sen jälkeen eksponenttikuvauksen keskeisimpiä ominaisuuksia Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavan kannalta.

Tarkastellaan matriisin

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

eksponenttikuvausta

$$e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Vaikka kyseessä on matriisi, voidaan eksponenttikuvaus esittää sarjan avulla $e^X := X^0 + X^1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + \dots + \frac{1}{n!}X^n + \dots$. Näin ollen

$$e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^t = t^0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^0 + t^1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^1 + \frac{1}{2}t^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 + \frac{1}{6}t^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^3 + \dots$$

Kun sarjaa jatkaa tarpeeksi pitkälle, laskien kaiken auki huomataan, että kyseessä on tuttu rotaatiomatriisi.

$$\begin{aligned} e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^t &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} - \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt eksponenttikuvauksen keskeisimpiä ominaisuuksia Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavan kannalta.

Lause 1. *Olkoon G ja H Lien matriisiryhmiä joiden vastaavat Lien algebrat ovat \mathfrak{g} ja \mathfrak{h} . Olkoon $\Phi : G \rightarrow H$ Lien ryhmä-homomorfismi. Tällöin on olemassa sellainen uniikki (realinen) lineaarikuvaus $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, että*

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$$

kaikilla $X \in \mathfrak{g}$. Lisäksi kuvauksella ϕ on seuraavat ominaisuudet:

1. $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$ kaikilla $X \in \mathfrak{g}$, $A \in G$.
2. $\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)]$ kaikilla $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. $\phi(X) = \left. \frac{d}{dt} \Phi(e^{tX}) \right|_{t=0}$ kaikilla $X \in \mathfrak{g}$.

Lauseen todistus sivutetaan ja tulokset otetaan annettuina. Lauseen todistus löytyy Hallin kirjasta [1]. Lineaarikuvausta, joka toteuttaa ehdon kaksi, sanotaan Lien algebra -homomorfismiksi. Yleisesti, kun halutaan laskea lineaarikuvaus ϕ Lien ryhmä -homomorfismista Φ , käytetään lauseen kohtaa kolme. Lisäksi ominaisuutta kolme voidaan ajatella seuraavasti: ϕ on ryhmähomomorfismin Φ suunnattu derivaatta (tai differentiaali) identiteetissä.

Edellä esitetty lause osoittaa, että jokainen Lien ryhmä -homomorfismi saa aikaan Lien algebra -homomorfismin. Käänteinen tulos, Lien algebra -homomorfismi synnyttäisi Lien ryhmä -homomorfismin, on totta tietyillä ehdoilla.

2.2 Ad- ja ad-kuvaus

Jokaiselle Lien ryhmälle on olemassa lineaarinen Lien algerban esitys, jonka ulottuvuus on sama kuin Lien ryhmän. Tätä esitystä kutsutaan Ad-kuvaukseksi (eng. *adjoint representation*). Matriisiryhmien tapauksessa kyseessä on matriisin konjugatioesitys AXA^{-1} [4]. Tämä on matriisin X konjugoitu muoto matriisin A avulla.

Määritelmä 1. Olkoon G Lien matriisiryhmä ja \mathfrak{g} sitä vastaava Lien algebra. Tällöin kaikille $A \in G$ voidaan määritellä lineaarinen kuvaus $\text{Ad}_A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$,

$$\text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}.$$

Jos tarkastellaan kaikkia Lien algerban \mathfrak{g} kääntyviä lineaarikuvauksia $\text{GL}(\mathfrak{g})$, tällöin Ad-kuvauksella on myös käänteiskuvaus $\text{Ad}_{A^{-1}}$ ja kuvaus $A \rightarrow \text{Ad}_A$ on ryhmähomomorfismi ryhmästä G ryhmään $\text{GL}(\mathfrak{g})$. Lisäksi kaikilla $A \in G$, kuvaus toteuttaa $\text{Ad}_A([X, Y]) = [\text{Ad}_A(X), \text{Ad}_A(Y)]$, kun $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Koska \mathfrak{g} on reaalinen k ulotteinen vektoriavaruus, niin $\text{GL}(\mathfrak{g})$ on käytännössä sama asia, kuin $\text{GL}(k; \mathbb{R})$. Näin ollen $\text{GL}(\mathfrak{g})$ voidaan käsitellä Lien matriisi ryhmänä. On helppoa osoittaa, että kuvaus $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ on jatkuva ja on näin ollen Lien ryhmä -homomorfismi. Lauseen 1 nojalla on olemassa reaalinen lineaarikuvaus $X \rightarrow \text{ad}_X$, joka on kuvaus Lien algebralta G Lien algebraan $\text{GL}(\mathfrak{g})$. Eli siis $\mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$. Lineaarikuvauksella on seuraava ominaisuus:

$$e^{\text{ad}_X} = \text{Ad}(e^X).$$

Lineaarikuvauksessa esiintyy ad-kuvaus. Esitetään ja määritellään ad-kuvaus vielä tarkemmin. Kuvausten Ad ja ad välistä relaatiota tullaan tarvitsemaan myöhemmin Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavan todistuksessa.

Lause 2. Olkoon G Lien matriisi ryhmä ja \mathfrak{g} sitä vastaava Lien algebra. Olkoon Ad -kuvaus Lien ryhmä -homomorfismi, kuten edellä on määritelty. Lisäksi olkoon $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ Lien algebraan liittyvä kuvaus, joka kaikille $X, Y \in \mathfrak{g}$ toteuttaa

$$ad_X(Y) = [X, Y].$$

Tämä voidaan todistaa suoralla laskulla

Todistus.

$$ad_X(Y) = \frac{d}{dt} Ad(e^{tX})(Y) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{tX} Y e^{-tX} \Big|_{t=0} = [X, Y].$$

□

Nyt kun Ad - ja ad -kuvaukset ovat määritelty voidaan esittää ja todistaa Baker-Campbell-Hausdorffin kaavan todistamiseen tarvittava lause.

Lause 3. Olkoon $ad_X : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ määritelty kuten edellä, eli $ad_X Y = [X, Y]$. Jolloin kaikilla $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ pätee

$$e^{ad_X} Y = Ad_{e^X} Y = e^X Y e^{-X}$$

Todistus. Olkoon X ja Y sellaisia $n \times n$ matriiseja, että $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. Kuvaus $ad : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ on määritelty seuraavasti: $ad_X Y = [X, Y] = XY - YX$. Eksponenttikuvaus e^{ad_X} voidaan esittää sarjana

$$e^{ad_X} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ad_X)^m}{m!} \Rightarrow e^{ad_X}(Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ad_X)^m(Y)}{m!}.$$

Osoitetaan seuraavaksi induktiolla, että $e^{ad_X}(Y)$ voidaan esittää sisäkkäisten kommutaattorien avulla.

Induktio väite:

$$(ad_X)^m(Y) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} X^k Y (-X)^{m-k}$$

Ensiksi kun $m = 0$, $(ad_X)^0(Y) = Y$. Induktioväitteen oikea puoli on myös Y , sillä

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} X^k Y (-X)^{0-k} = Y.$$

Oletetaan, että $m = n$ toteuttaa induktio väitteen. Tällöin

$$(ad_X)^n(Y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y (-X)^{n-k}$$

ja $(ad_X)^{n+1}(Y) = [X, (ad_X)^n(Y)]$. Seuraavaksi tarkastellaan $m = n + 1$.

$$(ad_X)^{n+1}(Y) = X \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y (-X)^{n-k} \right) - \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y (-X)^{n-k} \right) X.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$(\text{ad}_X)^{n+1}(Y) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^k Y (-X)^{(n+1)-k},$$

jolloin nähdään, että induktio väite on voimassa kaikilla m . Sijoitetaan seuraavaksi $(\text{ad}_X)^n(Y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y (-X)^{n-k}$ eksponentti kuvaukseen $e^{\text{ad}_X}(Y)$,

$$e^{\text{ad}_X}(Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} X^k Y (-X)^{m-k}.$$

Termit voidaan järjestellä uudelleen jolloin saadaan

$$e^{\text{ad}_X}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m!} \binom{m}{k} X^k Y (-X)^{m-k}.$$

Koska

$$\sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m!} \binom{m}{k} (-X)^{m-k} = \frac{1}{k!} (e^X)$$

voidaan todeta, että

$$e^{\text{ad}_X} Y = \text{Ad}_{e^X} Y = e^X Y e^{-X}.$$

□

2.3 Eksponenttikuvauksen derivaatta

Eksponenttikuvauksen derivaatta on helppo laskea jos matriisit kommutoivat keskenään. Tällöin eksponenttikuvauksen $e^{X+tY} = e^X e^{tY}$ derivaatta on

$$\frac{d}{dt} e^{X+tY} \Big|_{t=0} = e^X \frac{d}{dt} e^{tY} \Big|_{t=0} = e^X Y.$$

Yleensä matriisit eivät kuitenkaan kommutoi, jolloin $\frac{d}{dt} e^{X+tY} \neq e^X Y$. Tällöin on helpompaa ajatella eksponenttikuvauksen derivaattaa kiinnittämällä jokin piste X ja ottamalla suunnattu derivaatta kohdassa X , suuntaan Y . Jolloin yhtälön vasenpuoli, $\frac{d}{dt} \exp X + tY$, vastaa kaikkien funktion suunnattujen derivaattojen laskemista. Voidaan lisäksi olettaa, että suunnatut derivaatat ovat matriisin Y lineaarisia funktiota, jokaiselle kiinnitetyle pisteelle X .

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $\frac{1-e^{-z}}{z}$ ja esitetään se sarjana. Tämä sarja käy pian järkeen kun z korvataan äärellisulotteisen vektoriavaruuden lineaarisella operaattorilla A . Kompleksianalyysin pohjalta tiedetään, että funktio $\frac{1-e^{-z}}{z}$ voidaan esittää potenssisarjana seuraavasti

$$\frac{1 - e^{-z}}{z} = \frac{1 - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \dots\right)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(k+1)!} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \dots$$

Lisäksi kompleksianalyysistä tiedetään, että funktio on kokonainen, myös kohdassa $z = 0$.

Lause 4. *Olkoon X ja Y $n \times n$ kompleksisia matriiseja. Tällöin*

$$\frac{d}{dt} e^{X+tY} \Big|_{t=0} = e^X \left\{ \frac{I - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X} (Y) \right\} = e^X \left\{ Y - \frac{[X, Y]}{2!} + \frac{[X, [X, Y]]}{3!} - \dots \right\}. \quad (2.1)$$

Mikä voidaan ilmaista yleisemmin seuraavassa muodossa. Jos $X(t)$ on sileä matriisiarvoinen funktio niin

$$\frac{d}{dt} e^{X(t)} = e^{X(t)} \left\{ \frac{I - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X} \left(\frac{dX}{dt} \right) \right\}. \quad (2.2)$$

Esitetään ja todistetaan ensiksi lemma, jonka avulla Lause 4 voidaan todistaa.

Lemma 1. *Olkoon X ja Y $n \times n$ kompleksisia matriiseja. Tällöin*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \exp \left(\frac{-\text{ad}_X}{m} \right)^k = \frac{I - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X}.$$

Kaikki lemmän komponentit ovat lineaarisia operaattoreita äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa $M_n(\mathbb{C})$.

Todistus. Koska ad_X kommutoi itsensä kanssa voidaan kirjoittaa $\exp\left(-\frac{\text{ad}_X}{m}\right)^k$ muodossa $\exp\left(-\frac{k\text{ad}_X}{m}\right)$. Lasketaan sitten

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\frac{-\text{ad}_X}{m}\right)^k &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{-k\text{ad}_X}{m}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{k}{m}\right)^i \right] \frac{(-1)^i}{i!} (\text{ad}_X)^i. \end{aligned}$$

Hakasulkeissa oleva termi on Riemannin summa integraalille $\int_0^1 x^i dx$, jonka arvo on $\frac{1}{(i+1)}$. Eli kun m lähestyy ääretöntä, niin hakasulkeissa oleva termi lähestyy myös arvoa $\frac{1}{(i+1)}$. Koska funktio x^i on kasvava suljetulla välillä $[0, 1]$, niin hakasulkeissa olevan termin arvo tulee olemaan pienempi kuin integraalin arvo jokaisella arvolla m .

Jokainen termi sarjassa on avaruuden $M_n(\mathbb{C})$ lineaarinen operaattori. Näitä operaattoreita voidaan ajatella $n^2 \times n^2$ matriiseina. Näin ollen, jokainen termi on rajattu ylhäältä

$$\frac{1}{i+1} \frac{1}{i!} \|\text{ad}_X\|^i. \quad (2.3)$$

Koska jokainen alkio $n^2 \times n^2$ matriiseissa on pienempi kuin matriisin normin itseisarvo ja (2.3) termit ovat äärellisiä voidaan käyttää dominoivan konvergenssin lausetta. Dominoivan konvergenssin lause oikeutta tarkastelemaan jokaista alkioita matriisi arvoissa summassa erikseen ja korvaamaan raja-arvon $\lim_{m \rightarrow \infty}$ muuttujan i summalla. Siis

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\frac{-k\text{ad}_X}{m}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (\text{ad}_X)^i}{(i+1)!} = \frac{1 - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X}.$$

□

Todistetaan seuraavaksi Lause 4. Todistus mukailee Tuymannin todistusta [2] mikä on myös esitetty Hallin kirjassa.

Todistus. Todistetaan kohta (2.1) jolloin yhtälö (2.2) seuraa suoraan siitä. Olkoon X ja Y $n \times n$ kompleksisia matriiseja. Määritellään

$$\Delta(X, Y) = \left. \frac{d}{dt} e^{X+tY} \right|_{t=0}.$$

Kuvaus $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ on jatkuva differentioituva kuvaus. Jolloin $\Delta(X, Y)$ on karteesisessa tulossa jatkuva funktio, sillä muuttujat X ja Y ovat järjestettynä parina jatkuva funktio. Lisäksi Y on lineaarinen, jokaisella kiinitetyllä matriisilla X . Olkoon m positiivinen kokonaisluku, tällöin

$$e^{X+tY} = \left[\exp\left(\frac{X}{m} + \frac{tY}{m}\right) \right]^m. \quad (2.4)$$

Käyttämällä tulon derivoimissääntöä saadaan m määrä termejä ja joissa kussakin kohdassa (1.4) esitetyistä tekijöistä $m - 1$ arvioidaan kohdassa $t = 0$ ja jäljelle jäävä tekijä differentioidaan hetkellä $t = 0$. Eli saadaan,

$$\frac{d}{dt} e^{X+tY} \Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\frac{X}{m}\right)^{m-k-1} \left[\frac{d}{dt} \exp\left(\frac{X}{m} + \frac{tY}{m}\right) \Big|_{t=0} \right] \exp\left(\frac{X}{m}\right)^k \quad (2.5)$$

$$= \exp\left(\frac{m-1}{m}X\right) \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\frac{X}{m}\right)^{-k} \Delta\left(\frac{X}{m}, \frac{Y}{m}\right) \exp\left(\frac{X}{m}\right)^k \quad (2.6)$$

Koska $\Delta(X, Y)$ on lineaarinen Y :ssä ja kuvausten Ad ja ad välillä vallitsee yhteys kuten aikaisemmin on todettu voidaan (1.6) kirjoittaa muodossa

$$\frac{d}{dt} e^{X+tY} \Big|_{t=0} = \exp\left(\frac{m-1}{m}X\right) \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\frac{-\text{ad}_X}{m}\right)^k \left(\Delta\left(\frac{X}{m}, Y\right) \right). \quad (2.7)$$

Yhtälön (1.7) yhtäsuuruus on voimassa kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$. Näin ollen yhtäsuuruus on myös voimassa kun m lähestyy ääretöntä. Kun $m \rightarrow \infty$ termi $\exp\left(\frac{m-1}{m}X\right)$ lähestyy $\exp(X)$. Koska $\Delta(X, Y)$ oli karteesisessa tulossa jatkuva funktio, niin $\Delta\left(\frac{X}{m}, Y\right) \rightarrow \Delta(0, Y) = Y$. Jäljelle jää vain termi

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\frac{-\text{ad}_X}{m}\right)^k,$$

jonka raja-arvo lemmän 1 nojalla on

$$\frac{1 - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X}.$$

Tämä todistaa lauseen. □

Tämä todistus päättää eksponenttikuvauksen derivaatan tarkastelun ja seuraavaksi siirrytään Baker-Campbell-Hausdorffin kaavaan.

3 Baker–Campbell–Hausdorffin kaava

Luvussa kolme tarkastellaan edelleen Lien matriisiryhmiä ja niiden vastaavia Lien algebroja. Tässä luvussa esitetään Bakerin-Cambellin-Hausdorffin kaava ja sen todistus. Luku pohjautuu Hallin kirjaan [1].

Keskeinen tulos, mihin pyritään, on seuraavanlainen. Olkoon G ja H Lien matriisiryhmiä, jotka on varustettu vastaavilla Lien (äärellisulotteisilla) algebroilla \mathfrak{g} ja \mathfrak{h} . Olkoon G yhdesti yhtenäinen, tällöin jos kuvaus $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ on Lien algebra -homomorfismi, niin on olemassa sellainen uniikki Lien ryhmä -homomorfismi $\Phi : G \rightarrow H$, että

$$\Phi(\exp X) = \exp \phi(X) \quad (3.1)$$

kaikilla X , jotka kuuluvat Lien algebraan \mathfrak{g} . Tämä tulos on tärkeä, sillä se osoittaa, että jos G on yhdesti yhtenäinen niin on olemassa luonnollinen bijektio ryhmän G esityksen ja sen Lien algebran \mathfrak{g} esityksen välillä. Koska käytännössä on helpompi tarkastella Lien algebran esitystä kuin vastaavan ryhmän esitystä, on tulos erittäin käyttökelpoinen.

Lien algebra -homomorfismin yhdistäminen Lien ryhmä -homomorfismiin on syvällinen tulos. Jotta tähän tulokseen päästäisiin on halutun ryhmähomomorfismin $\Phi : G \rightarrow H$ toteutettava

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}. \quad (3.2)$$

Kuvaus Φ haluttaisiinkin määritellä tämän relaation avulla.

Kun asiaa lähestytään näin kohdataan kaksi haastetta. Ensiksi jokin alkio ryhmässä G ei välttämättä ole esitettävissä muodossa e^X , kun X kuuluu Lien algebraan \mathfrak{g} . Ja vaikka alkio olisikin näin esitettävissä, ei ole selvää, miksi Φ olisi ryhmähomomorfismi, vaikka Φ olisi hyvin määritelty.

Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava ratkaisee näistä ongelmista jälkimmäisen. Koska Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava sanoo, että mikäli X ja Y ovat tarpeeksi pieniä, niin

$$\log(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2} [X, Y] + \frac{1}{12} [X, [X, Y]] - \frac{1}{12} [Y, [X, Y]] + \dots \quad (3.3)$$

Tärkeintä lausekkeessa on huomata, että se on annettu täysin X, Y ja kommutaattorin $[\cdot, \cdot]$ avulla. Koska Φ on Lie algebra -homomorfismi, niin

$$\begin{aligned} \phi(\log(e^X e^Y)) &= \phi(X) + \phi(Y) + \frac{1}{2} [\phi(X), \phi(Y)] \\ &= +\frac{1}{12} [\phi(X), [\phi(X), \phi(Y)]] - \frac{1}{12} [\phi(Y), [\phi(X), \phi(Y)]] + \dots \\ &= \log(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tämä relatio on tärkeä, sillä luonnollisesti

$$e^X e^Y = e^{\log(e^X e^Y)}$$

jolloin (3.1) avulla saadaan, että

$$\Phi(e^X e^Y) = e^{\phi(\log(e^X e^Y))}.$$

Tällöin (3.4) avulla saadaan, että

$$\Phi(e^X e^Y) = e^{\log(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)})} = e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)} = \Phi(e^X) \Phi(e^Y).$$

Eli kun X on tarpeeksi pieni osoittaa Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava, että muotoa e^X oleville alkioille Φ on ryhmähomomorfismi.

3.1 Kaava

Tarkastellaan aluksi funktiota

$$g(z) = \frac{\log z}{1 - \frac{1}{z}},$$

joka on määritelty ja holomorfinen kiekossa $\{|z - 1| < 1\}$. Lisäksi $g(z)$ voidaan esittää sarjana

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - 1)^m.$$

Sarjan suppenemissäde on yksi. Jos vektoriavaruus V on äärellisulotteinen, voidaan V samaistaa kompleksilukukunnan \mathbb{C} kanssa käyttämällä mielivaltaista kantaa. Nyt Hilbert–Schmidt-normi voidaan määrittää lineaarisena operaattorina vektoriavaruudessa V . Tällöin mielivaltaiselle vektoriavaruuden V operaattorille A , jolle pätee $\|A - I\| < 1$, saadaan sarja

$$g(A) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (A - I)^m.$$

Seuraavaksi esitellä Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava ja sen todistus. Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava esitetään integraalimuodossa sarjamuodon sijaan.

Lause 5 (Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava). *Kaikille kompleksisille $n \times n$ matriiseille X ja Y pätee*

$$\log(e^X e^Y) = X + \int_0^1 g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_X})(Y) dt,$$

kun $\|Y\|$ ja $\|X\|$ ovat tarpeeksi pienet.

Huomataan, että $e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y}$ ja myös $g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})$ ovat molemmat avaruuden $\text{gl}(n; \mathbb{C})$ lineaarisia operaattoreita. Kun oletetaan, että X ja Y ovat tarpeeksi pieniä, taataan, että $e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y}$ on lähellä identiteetti operaattoria kun t on välillä $0 \leq t \leq 1$. Tällöin myös $g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})$ on hyvin määritelty.

Kaava ei ole missään mielessä yksinkertainen mutta se on hyödyllinen siksi, että se ilmaisee $\log(e^X e^Y)$ (ja näin ollen myös $e^X e^Y$) Lie algebrallisilla suureilla ad_X ja ad_Y .

3.2 Todistus

Todistus. Määritellään aluksi

$$Z(t) = \log(e^X e^{tY})$$

Kun matriisit X ja Y ovat tarpeeksi pienet on $Z(t)$ määritelty kun $0 \leq t \leq 1$. Lisäksi funktio $Z(t)$ on sileä. Suoraan määritelmästä saadaan, että $e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$. Jolloin

$$e^{-Z(t)} \frac{d}{dt} e^{Z(t)} = (e^X e^{tY})^{-1} e^X e^{tY} Y = Y.$$

Tai toisaalta suoraan Lauseesta 4.

$$e^{-Z(t)} \frac{d}{dt} e^{Z(t)} = \left\{ \frac{I - e^{-\text{ad}_{Z(t)}}}{\text{ad}_{Z(t)}} \right\} \left(\frac{dZ}{dt} \right).$$

Nämä yhdistämällä saadaan:

$$Y = \left\{ \frac{I - e^{-\text{ad}_{Z(t)}}}{\text{ad}_{Z(t)}} \right\} \left(\frac{dZ}{dt} \right) \Rightarrow \frac{dZ}{dt} = \left\{ \frac{I - e^{-\text{ad}_{Z(t)}}}{\text{ad}_{Z(t)}} \right\}^{-1} (Y). \quad (3.5)$$

Jotta näin saadaan laskea, täytyy olettaa, että X ja Y ovat tarpeeksi pienet. Tällöin myös $Z(t)$ on tarpeeksi pieni, jolloin $\left\{ \frac{I - e^{-\text{ad}_{Z(t)}}}{\text{ad}_{Z(t)}} \right\}$ on lähellä identiteettiä ja näin ollen kääntyvä.

Käytetään adjoint kuvausta joka on homomorfismi ja muistetaan $e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$:

$$\text{Ad}_{e^{Z(t)}} = \text{Ad}_{e^X} \text{Ad}_{e^{tY}}.$$

Kuvausten Ad ja ad välinen suhde johdettiin Lauseessa 3, jolloin yllä oleva yhtälö saa muodon:

$$e^{\text{ad}_{Z(t)}} = e^{\text{ad}_X} e^{\text{ad}_{tY}} \Rightarrow \text{ad}_{Z(t)} = \log(e^{\text{ad}_X} e^{\text{ad}_{tY}})$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön 3.5 jolloin saadaan

$$\frac{dZ}{dt} = \left\{ \frac{I - (e^{\text{ad}_X} e^{\text{ad}_{tY}})^{-1}}{\log(e^{\text{ad}_X} e^{\text{ad}_{tY}})} \right\}^{-1} (Y) \quad (3.6)$$

Koska

$$g(z) = \left\{ \frac{1 - z^{-1}}{\log z} \right\}^{-1},$$

niin yhtälöä 3.6 voidaan esittää muodossa

$$\frac{dZ}{dt} = g(e^{\text{ad}_X} e^{\text{ad}_{tY}})(Y).$$

Lopuksi huomioidaan, että $Z(0) = X$ ja integroidaan välillä nolasta yhteen ja saadaan

$$Z(1) = X + \int_0^1 g(e^{\text{ad}_X} e^{t\text{ad}_Y})(Y) dt.$$

□

Integraalimuodosta päästään myös summamuotoon. Siirtyminen integraalimuodosta summamuotoon on esitetty Hallin kirjassa kappaleessa 3.5.

4 Yhteenveto

Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava liittyi Lien algebra -homomorfismin yhdistämiseen Lien ryhmä -homomorfismin kanssa. Kaavan avulla todella nähtiin, että Φ on ryhmähomomorfismi kuten luvun 3 alussa osoitettiin. Kuitenkin ennen kuin Lien algebra -homomorfismi voidaan yhdistää Lien ryhmä -homomorfismin kanssa täytyy käsitellä myös topologisia ominaisuuksia. Sillä voi hyvin olla, että Lien ryhmän G alkioita ei välttämättä voida ilmaista eksponentti kuvauksen e^X avulla. Ja vaikka voitaisiin, ei voida olla varmoja onko X yksikäsitteinen. Tämä ongelma saadaan ratkaistua olettamalla, että G on yhdesti yhtenäinen. Lisäksi Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaavassa jouduttiin olettamaan, että $\|X\|$ ja $\|Y\|$ ovat tarpeeksi pienet. Näin ollen Lien algebra määrää Lien ryhmän rakenteen ainakin lokaalisti, lähellä identiteettiä.

Tarkastellaan vielä lopuksi esimerkin tapaisesti, kuinka Bakerin-Campbellin-Hausdorffin kaava toimii Heisenbergin ryhmän tapauksessa. Heisenbergin ryhmä H on ryhmä joka koostuu 3×3 reaalista matriiseista, jotka ovat muotoa

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Heisenbergin ryhmän vastaavaa Lie algebra on \mathfrak{h} . Olkoon lisäksi G Lien ryhmä ja \mathfrak{g} sitä vastaava Lie algebra. Algebrojen välinen Lie algebra -homomorfismi on $\phi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$. Heisenbergin ryhmän eksponenttikuvauksen e^H on bijektiivinen kuvaus. Olkoon "log" eksponenttikuvauksen käänteiskuvaus kuten aikaisemminkin. Nyt voidaan määrittellä kuvaus Φ Lien ryhmien H ja G välillä seuraavasti:

$$\Phi(A) = e^{\phi(\log A)}.$$

Seuraavaksi halutaan näyttää, että kuvaus Φ on Lie ryhmä -homomorfismi.

Kun matriisit X ja Y kuuluvat Heisenbergin ryhmään H on niiden kommutaattori $[X, Y]$ seuraavaa muotoa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriisit X ja Y kommutoivat myös kommutaattorin $[X, Y]$ kanssa. Koska ϕ on Lie algebra -homomorfismi niin $\phi(X)$ ja $\phi(Y)$ kommutoi myös kommutaattorin kanssa:

$$\begin{aligned} [\phi(X), [\phi(X), \phi(Y)]] &= [\phi(X), \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)] \\ &= \phi([X, XY - YX]) \\ &= \phi([X, [X, Y]]) = 0. \end{aligned}$$

Vastaavasti myös $[\phi(Y), [\phi(Y), \phi(X)]] = 0$.

Matriisi A voidaan ilmaista myös muodossa e^X , jollakin uniikilla $X \in \mathfrak{h}$. Vastavasti myös matriisi B voidaan ilmaista myös muodossa e^Y , jollakin uniikilla $Y \in \mathfrak{g}$. Seuraavaksi halutaan laskea $\Phi(AB)$. Jotta tämä voidaan tehdä esitellään seuraava lause, jonka todistus sivutetaan sillä se on kohdan (3.3) erikoistapaus.

Lause 6. *Olkoon X ja Y $n \times n$ sellaisia kompleksisia matriiseja, että X ja Y kommutoivat kommutaattoriensa kanssa. Eli*

$$[\phi(X), [\phi(X), \phi(Y)]] = [\phi(Y), [\phi(Y), \phi(X)]] = 0.$$

Tällöin

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}.$$

Nyt voidaan laskea

$$\Phi(AB) = \Phi(e^X e^Y) = \Phi(e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}).$$

Kuvaus Φ on määritelty aikaisemmin $\Phi(A) = e^{\phi(\log A)}$. Nyt Lauseen 6 nojalla ja lisäksi huomioimalla, että ϕ on Lie algebra -homomorfismi saadaan

$$\begin{aligned} \Phi(AB) &= e^{(\phi(X)+\phi(Y)+\frac{1}{2}[\phi(X),\phi(Y)])} \\ &= e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)} \\ &= \Phi(A)\Phi(B). \end{aligned}$$

Näin ollen Φ on ryhmähomomorfismi. Lisäksi Φ on jatkuva, sillä \log , \exp ja ϕ ovat kaikki jatkuvia. Jolloin siis Φ on Lie ryhmä -homomorfismi. Lisäksi koska eksponenttikuvaus on tässä tapauksessa bijektio, niin on olemassa vain yksi yksikäsitteinen kuvaus $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$.

Viitteet

- [1] B.C. Hall: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representation: An Elementary Introduction*, Springer 2015, second edition. ISBN: 978-3-319-13466-6
- [2] G. M. Tuynman: *The Derivation of the Exponential Map of Matrices*
The American Mathematical Monthly, Vol. 102, No. 9. (Nov., 1995), pp. 818-820.
- [3] V.S. Varadarajan: *Historical review of Lie Theory*,
<https://www.math.ucla.edu/~vsv/liegroups2007/historical%20review.pdf>,
luettu 24.5.2024
- [4] P. Woit: *Topics in Representation Theory: The Adjoint Representation*,
<https://www.math.columbia.edu/~woit/notes3.pdf>, luettu 1.12.2024