

Gaussiset- ja ei-gaussiset tilat kvanttimekaanisessa faasiavaruudessa

Pro Gradu
Turun yliopisto
Fysiikka
2025

LuK Milo Sulin

Tarkastajat:

dos. Johannes Nokkala

dos. Kimmo Luoma

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan laitos

Sulin, Milo Gaussiset- ja ei-gaussiset tilat kvanttimekaanisessa faasiavaruudessa

Pro Gradu, 88 s., 3 liites.

Fysiikka

Elokuu 2025

Tutkielman aluksi kerrataan kvanttiteorian perusteet. Tämän jälkeen annetaan yksinkertaiset esimerkit diskreeteistä ja ääretönulotteisista systeemeistä ja niiden matematiikasta. Ääretönulotteisille systeemeille muodostetaan jatkuva faasiavaruusformalismi käyttäen Lien algebroidien ja ryhmien teoriaa. Määritellään gaussiset tilat ja tarkastellaan niiden vahvuuksia ja heikkouksia faasiavaruusformalismin sekä kvanttiinformaation sovelluksien kannalta. Johdetaan Wignerin funktio usealle esimerkille sekä käydään läpi Williamsonin ja Blochin-Messiahin matriisihajotelmat ja niiden merkitys gaussisiin tiloihin ja -operaatioihin liittyen.

Määritellään ei-gaussiset tilat ja esitellään joitain niiden karakterisointiin käytettyjä mittoja ja tilojen kvanttiresursseja. Esimerkkien kautta tarkastellaan miten fotoneja lisäämällä tai poistamalla gaussisesta tilasta voidaan saavuttaa Wignerin funktion negatiivisuutta omaava ei-gaussinen tila. Lisättyjen ja poistettujen fotonien tiloja tutkitaan tarkemmin käyttäen apuna Wickin todennäköisyyslausetta ja graafiteoriaa. Selvitetään miten näiden tilojen operaattorimomenttien laskeminen voidaan antaa graafin hafnianin muodossa. Tunnistetaan yhteys hafnianin laskemiseen liittyvän uniikkien termien määrän osaongelman ja graafien nimeämisiin liittyvien ongelmien välillä.

Lopuksi tehdään yhteenveto käsitellyistä aiheista ja pohditaan miten esiin tulleet asiat ja käytetty matematiikka voisivat vaikuttaa jatkossa kvanttialgoritmien kehitykseen.

Asiasanat: Kvanttimekaniikka, kvantti-informaatio, jatkuvat suureet, faasiavaruus, gaussiset tilat, ei-gaussiset tilat, Wickin todennäköisyyslause, graafiteoria, hafniani, Lien teoria

Sisällys

Johdanto	1
1 Kvanttiteorian perusteet	3
1.1 Kvanttimekaniikan postulaatit	4
1.2 Hilbertin avaruus	5
1.3 Tilavektorit	8
1.4 Observaabelit ja niiden odotusarvot	9
1.5 Tiheysoperaattori	11
1.6 Aikakehitys ja kanavat	14
1.7 Mittaukset	16
2 Diskreetit ja jatkuvat muuttujat	19
2.1 Ääretönulotteiset ja jatkuvat systeemit	20
2.2 Kubitti	23
2.3 Kuditti ja kumoodi	25
3 Faasiavaruusformalismi	27
3.1 Lien teoriaa	27
3.2 Faasiavaruusoperaattorit	33
3.3 Wignerin funktio	35
3.4 Gaussiset tilat ja -operaatiot	42
4 Ei-gaussiset tilat	46
4.1 Ei-gaussisten tilojen karakterisointi	47
4.2 Kvanttiresurssit	49
4.3 Ei-gaussisten tilojen valmistelu	52
5 Fotonien lisääminen sekä poistaminen ja Wickin lause	57

5.1	Wickin todennäköisyyslause	58
5.2	Graafiteoria, sovitukset ja hafniani	61
5.3	Sovitusten kombinatoriikasta	64
5.4	Moodien väliset korrelaatiot ja linkkien painot	70
6	Yhteenveto	73
A	Wignerin funktioiden kuvaajien piirtäminen	86
B	Tekoälyn käyttö tutkielmassa	88

Johdanto

Nykypäivän teknologia on niin pitkälle kehittynyttä, että monella alalla seuraavaa läpimurtoa etsitään kvanttifysiikkaa hyödyntämällä. Eräs tällainen kvanttitekniologian suunta on kvantti-informaatio, jonka kontekstissa tutkittavat systeemit jaetaan diskreetteihin ja jatkuviin systeemeihin. Erityisesti diskreettejä systeemejä hyödynnetään paljon kvanttietokoneiden rakentamisessa, mutta myös jatkuvilla systeemeillä on sovelluksensa etenkin kvanttioptiikan kautta.

Tämän tutkielman tarkoitus on tarkastella juurikin jatkuvien kvanttisysteemien tietynlaisiin tiloihin liittyvää laskennallista ongelmaa ja lisäksi tutustuttaa lukija jatkuvien systeemien kuvaamisen ja analysoinnin työkaluihin. Emme keskity yksityiskohtaisesti käytännön sovelluksiin teknologiassa emmekä myöskään käsittele kokeellisia toteutuksia, mutta mainitsemme niistä joitain esimerkkejä ja pyrimme antamaan mahdollisimman kattavat lähteet molemmista sen ollessa oleellista. Painoarvo on siis teoriassa ja tutkielmassa on haluttu nostaa esille taustalla olevan matematiikan tärkeyttä. Tutkielmasta on pyritty tekemään mahdollisimman itsenäinen ja osittain tästä syystä kirjoituskieleksi on valittu suomi, sillä aiheeseen liittyvää modernia suomenkielistä tekstiä on vähän.

Tutkielman aluksi kertaamme kvanttiteorian perusteet ja kiinnitämme erityisesti huomiota siihen miten fysikaalisia prosesseja mallinnetaan matemaattisesti. Käymme läpi pikaisesti myös esimerkin diskreeteistä systeemeistä ennen kuin keskitymme lopun tutkielman ajan täysin jatkuviin systeemeihin. Jatkuvilla systeemeillä on hyvin tunnettu ja mielenkiintoinen joukko kvanttitiloja ja operaatioita joita kutsutaan gaussisiksi. Gaussiset tilat käyttäytyvät tietyllä tavalla siististi moniin muihin verrattuna, mikä nähdään etenkin jatkuvien systeemien kuvaamiseen soveltuvassa faasiavaruusformalismissa. Tutkielman keskiosa on omistettu tämän formalismin ominaisuuksien käsittelyyn ja tarkastelemme gaussisia tiloja useamman esimerkin avulla. Tärkeässä osassa ovat faasiavaruuden symplektinen rakenne sekä kvanttitiloja edus-

tava Wignerin kvasijakaumafunktio. Yhdessä nämä perusteet kattavat tutkielman ensimmäiset kolme lukua.

Gaussisilla tiloilla on merkittäviä rajoja laskennallisissa sovelluksissa, minkä takia luvussa 4 käänämme katseen ei-gaussisten tilojen ja operaatioiden pariin. Nämä tilat ja operaatiot ovat välttämättömiä, jotta jatkuvilla systeemeillä voidaan saavuttaa todellinen laskennallinen etu klassisiin menetelmiin verrattuna. Koska ei-gaussisten tilojen tutkimus ei ole yhtä vakiintunut kuin gaussisten tilojen, ei niiden karakterisointikaan ole vielä yhtä täydellinen. Esittelemme kuitenkin joitain tapoja mitata tilan ei-gaussisuutta ja kvanttiresursseja, jotka tekevät ei-gaussisista tiloista suotuisia laskennallisissa sovelluksissa. Eräs tällainen resurssi on Wignerin funktion negatiivisuus. Luvun lopussa käsitellään tiettyä probabilistista tapaa valmistella ei-gaussisia tiloja gaussisista tiloista lisäämällä tai poistamalla fotoneja kvanttioptisesta systeemistä. Esitämme kaksi esimerkkiä, jotka näyttävät miten lopputuloksena saadaan tila, jolla on ominaisuutena edellä mainittu Wignerin funktion negatiivisuus.

Luvussa 5 analysoimme tarkemmin näiden lisättyjen ja poistettujen fotonien ei-gaussisten tilojen karakterisointiin liittyviä operaattorimomentteja. Tähän käytämme Wickin todennäköisyyslausetta, joka antaa hajottaa parillisen määrän operaattoreiden momentin kahden operaattorin momenttien tulojen summaksi alkuperäisen gaussisen tilan täyttäessä tietyt ehdot. Wickin todennäköisyyslause on saavuttanut vuosikymmenien saatossa jo melkein ”folklore” aseman ja usein kirjallisuudessa viitataan vain Wickin alkuperäiseen artikkeliin. Kyseinen julkaisu ei kuitenkaan todista lausetta sen yleisimmässä muodossa gaussisille tiloille. Lisäksi joidenkin erityistapauksille olemassa olevien todistusten yleistäminen ei ole helppoa, sillä ne ovat riippuvaisia tietyistä operaattoreiden kommutaatio säännöistä, jotka eivät välttämättä enää päde yleisessä tapauksessa. Emme näistä syistä käy todistusta läpi tässä tutkielmassa, mutta annamme useamman aiheetta käsittelevän lähteen joista toivotta-

vasti käy ilmi ettei Wickin todennäköisyyslause ole niin itsestäänselvä kuin joskus voisi luulla.

Wickin todennäköisyyslauseen antama summa voidaan antaa graafiteorian avulla täydellisten sovitusten ongelmana. Liitämme jokaiseen momentissa esiintyvään operaattoriin graafissa esiintyvän solmun ja kaikkiin kahden operaattorin momentteihin graafin linkin. Tällöin operaattorimomenttin arvo saadaan graafin hafniani-funktion arvona. Tarkastelemme näihin täydellisiin sovituksiin liittyviä kombinatorisia ominaisuuksia, kuten esimerkiksi kuinka paljon termejä Wickin lauseen summassa esiintyy, kuinka moni näistä termeistä on uniikki, sekä milloin jotkin termit nollautuvat ja summa voidaan antaa helpommassa muodossa. Mietimme myös onko mahdollista hyödyntää tietoa ennalta lasketuista sovituksista, kun vaihdamme gaussista tilaa johon fotonien poisto- ja lisäysoperaatiot tehdään, siten että uutta laskettavaa olisi vähemmän. Lopuksi teemme yhteenvedon tutkielmassa käsitellyistä aiheista.

Koko tutkielman ajan työskentelemme luonnollisissa yksiköissä ($c = \hbar = 1$) lukuunottamatta joitain poikkeuksia, missä systeemin energian dimensio auttaa havainnollistamaan jotain esimerkkiä. Käytämme myös Diracin notaatiota eli puhumme mielivaltaisesta Hilbertin avaruuden vektorista ψ ket-vektorina, jota merkataan $|\psi\rangle$. Merkkaamme muita vektoreita lihavoiduilla italisoiduilla kirjaimilla, matriiseja ja lineaarioperaattoreita konekirjoituskirjaimilla sekä erityisesti kvanttitilojen tiheysoperaattoreita kreikkalaisilla kirjaimilla. Skalaarin kompleksikonjugaattia merkitsemme yläviivalla $\overline{(\cdot)}$, vektorin tai operaattorin hermiittistä konjugaattia tikarilla $(\cdot)^\dagger$, transpoosia $(\cdot)^\top$ ja jälkioperaatiota $\text{Tr}[\cdot]$.

1 Kvanttiteorian perusteet

Tämän luvun tarkoitus on kerrata kvanttiteorian matematiikan perusteita ja tämän tutkielman kannalta tärkeät ominaisuudet. Sisältö perustuu pääosin Heinosaaren ja Zimanin teokseen *The Mathematical Language of Quantum Theory* [1] sekä Buschin,

Lahden, Pellonpään ja Ylisen teokseen *Quantum Measurement* [2]. Aloitamme niimeämällä kvanttimekaniikan postulaatit [3, 4], minkä jälkeen määrittelemme mainitut termit tarkemmin ja selvitämme myös matemaattisen formalismin fysikaalista tulkintaa. Vaikka tämän luvun esittämät asiat ovat yleispäteviä, käydään ääretönluotteiset ja jatkuvat tapaukset läpi tarkemmin luvuissa 2 ja 3.

1.1 Kvanttimekaniikan postulaatit

1. Postulaatti: Mitä tahansa eristettyä fysikaalista systeemiä vastaa kompleksinen sisätulolla varustettu vektoriavaruus, Hilbertin avaruus, joka on systeemin tila-avaruus. Systeemin tilaa kuvaa sen tiheysoperaattori, joka on positiivinen ja jonka jälki on yksi.

2. Postulaatti: Suljetun systeemin aikakehitys määräytyy jonkin unitaarisen muunnoksen mukaan. Systeemin tilan ollessa puhdas se noudattaa Schrödingerin yhtälöä

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle.$$

3. Postulaatti: Mittauksia kuvaa joukko positiivisia mittausoperaattoreita $\{A_i\}$, missä indeksi i vastaa jotain tiettyä mittaustulosta. Jos systeemin tila on ρ , niin todennäköisyys saada tietty mittaustulos on

$$p(i) = \text{Tr}[\rho A_i].$$

4. Postulaatti: Useasta fysikaalisesta systeemistä koostuvan yhdistetyn systeemin tila-avaruus on osasysteemien tila-avaruuksien tensoritulo. Samoin tiheysoperaattori on osasysteemien tiheysoperaattoreiden tensoritulo.

1.2 Hilbertin avaruus

Määritelmä 1.1. Olkoon V vektoriavaruus yli kompleksilukujen \mathbb{C} . Kuvaus $S : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ on V :n sisätulo. Avaruus V on sisätuloavaruus, jos kaikilla $\varphi, \psi, \xi \in V$ ja kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

1. $S(\varphi, \alpha\psi + \beta\xi) = \alpha S(\varphi, \psi) + \beta S(\varphi, \xi)$,
2. $S(\varphi, \psi) = \overline{S(\psi, \varphi)}$,
3. $S(\varphi, \varphi) \geq 0$,
4. $S(\varphi, \varphi) > 0$, jos $\varphi \neq 0$.

Sisätulo määrittää vektoriavaruudelle V tutun normin $\|\varphi\| = \sqrt{S(\varphi, \varphi)}$ ja jos jokin Cauchyn jono suppenee, on V täydellinen norminsa suhteen.

Määritelmä 1.2. Hilbertin avaruus \mathcal{H} on täydellinen sisätuloavaruus.

Jatkossa merkitsemme Diracin notaation mukaisesti Hilbertin avaruuden sisätuloa $\langle \varphi | \psi \rangle \equiv S(\varphi, \psi)$ ja alkioita $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$. Hilbertin avaruuden duaaliavaruus \mathcal{H}^\dagger on joukko lineaarikuvauksia $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Jokainen $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ määrittää kuvauksen f_φ seuraavasti

$$f_\varphi(\psi) = \langle \varphi | \psi \rangle. \quad (1.1)$$

Frechét'n-Rieszin lauseen [2, s. 17][5, 6] mukaan jokaista duaaliavaruuden alkioita f vastaa yksikäsitteinen $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$, jolla $f = f_\varphi$. Jatkossa merkitsemme $f_\varphi = \langle \varphi | = |\varphi\rangle^\dagger$, ja bra-vektori $\langle \varphi |$ on siis ket-vektorin $|\varphi\rangle$ duaalivektori.

Kahden vektorin sisätulon ollessa nolla $\langle \varphi | \psi \rangle = 0$ sanotaan vektorien oleva ortogonaaliset $\varphi \perp \psi$. Vektorien $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ joukko S , missä \mathcal{I} on jokin indeksijoukko, on ortogonaalinen, jos

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}. \quad (1.2)$$

Joukko S on ortonormaali, jos lisäksi jokaisen vektorin normi on yksi $\|\varphi_i\| = 1$.

Tällöin merkitsemme

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (1.3)$$

missä δ_{ij} on Kroneckerin delta.

Määritelmä 1.3. Olkoon S ortonormaali joukko ja $S \subset \mathcal{H}$. Joukko S on \mathcal{H} :n ortonormaali kanta, kun kaikilla $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$

1. jos $\varphi \perp S$, niin $|\varphi\rangle = 0$,
2. $|\varphi\rangle = \sum_{\xi \in S} \langle \xi | \varphi \rangle |\xi\rangle$,
3. $\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_{\xi \in S} \langle \varphi | \xi \rangle \langle \xi | \psi \rangle$,
4. $\|\varphi\|^2 = \sum_{\xi \in S} |\langle \xi | \varphi \rangle|^2$,
5. Joukon S virittämä aliavaruus V on tiheä avaruudessa \mathcal{H} .

Kohdassa 2. on määritelty vektorin $|\varphi\rangle$ esitys kannassa S , missä lukuja $\langle \xi | \varphi \rangle$ sanotaan $|\varphi\rangle$:n Fourier'n kertoimiksi S :n suhteen.

Jokaisella Hilbertin avaruudella on olemassa ortonormaali kanta [2, s. 30]. Jatkossa kun puhumme kannasta, oletamme sen olevan ortonormaali ellei toisin mainita. Kannan kardinaliteetti, eli kantavektoreiden lukumäärä, kertoo avaruuden ulottuvuuden $\dim(\mathcal{H})$.

Hilbertin avaruuden operaattori on lineaarikuvaus $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Operaattori T on rajoitettu, jos on olemassa luku $t \geq 0$, jolla

$$\|T\varphi\| \leq t\|\varphi\|, \quad \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (1.4)$$

Merkitsemme näiden operaattoreiden joukkoa $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Lisäksi määrittelemme operaattorinormin

$$\|T\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|T\varphi\|. \quad (1.5)$$

Merkitsemme nollakuvausta $\mathbf{0}$ ja identiteettikuvausta $\mathbf{1}$, joilla

$$\mathbf{0} |\varphi\rangle = 0 \text{ ja} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{1} |\varphi\rangle = |\varphi\rangle, \quad \forall |\varphi\rangle. \quad (1.7)$$

Koska $T|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ kaikilla $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$, voimme Fréchet'n-Rieszin lauseen nojalla määritellä myös operaattorin adjungaatin T^\dagger

$$(T|\varphi\rangle)^\dagger = \langle\varphi|T^\dagger. \quad (1.8)$$

Jos operaattori on oma adjungaattinsa $T^\dagger = T$, sitä sanotaan itseadjungoiduksi tai hermiittiseksi operaattoriksi ja merkitsemme niiden operaattoreiden joukkoa $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$.

Kun operaattorille pätee

$$TT^\dagger = T^\dagger T, \quad (1.9)$$

se on normaali ja jos lisäksi

$$TT^\dagger = T^\dagger T = \mathbf{1}, \quad (1.10)$$

operaattori on unitaarinen $T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Määrittelemme vielä projektion $T \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, joka on operaattori jolle pätee

$$T = T^2 = T^\dagger, \quad (1.11)$$

$$TT^\perp = T(\mathbf{1} - T) = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

Operaattori $T^\perp = (\mathbf{1} - T)$ on T :n ortogonaalinen komplementti ja on helppo nähdä myös sen olevan projektio.

Hilbertin avaruuden ulottuvuuden ollessa äärellinen voimme antaa operaattorille järkeväen matriisiesityksen $T = [T_{ij}]$, missä

$$T_{ij} = \langle\varphi_i|T|\varphi_j\rangle, \quad |\varphi\rangle \in S, \quad (1.13)$$

ovat matriisin alkiot jonkin ortonormaalin kannan S suhteen. Riippumatta \mathcal{H} :n äärellisyydestä, sanomme operaattorin olevan positiivinen, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$, kun

$$\langle\varphi|T|\varphi\rangle \geq 0, \quad \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (1.14)$$

Määrittelemme vielä lopuksi kaksi tärkeää piirrettä operaattorijonojen suppenemisesta.

Määritelmä 1.4. Olkoon (\mathcal{I}, \geq) järjestetty joukko milloin kuvaus $\mathcal{I} \rightarrow (T_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on jono.

1. Jono $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$ suppenee vahvasti, $s\text{-}\lim T_i = T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, kun $T_i |\varphi\rangle = T |\varphi\rangle$ kaikilla $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$.
2. Jono $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$ suppenee heikosti, $w\text{-}\lim T_i = T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, kun $\langle \psi | T_i | \varphi \rangle = \langle \psi | T | \varphi \rangle$ kaikilla $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

1.3 Tilavektorit

Kvanttiteoria on probabilistinen teoria, jonka mukaan kvanttisysteemiä kuvaa jokin Hilbertin avaruus \mathcal{H} . Vanhempien määritelmien sekä monien kvanttimekaniikan peruskurssien mukaan systeemin tilaa kuvaa jokin vektori $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Näille tilavektoreille pätee ehto

$$\|\psi\| = 1, \quad (1.15)$$

ja ne määrittävät todennäköisyyksiä saadan jokin mittaustulos, kun systeemille tehdään jokin mittaustoimenpide tilassa $|\psi\rangle$.

Olkoon $S = \{\varphi_i \mid \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}\}$ edellä mainitun Hilbertin avaruuden kanta. Näemme heti, että kannan vektorit ovat mahdollisia tilavektoreita. Määritelmän 1.3 mukaan voimme esittää minkä tahansa vektorin kannan suhteen ja saamme tällöin mielivaltaiselle tilavektorille $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle = \sum_{\varphi_i \in S} c_i |\varphi_i\rangle, \quad \|\psi\|^2 = \sum_{\varphi_i \in S} |c_i|^2 = 1, \quad (1.16)$$

missä $c_i = \langle \varphi_i | \psi \rangle$. Tästä seuraa lisäksi, että myös $\alpha |\psi\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$, on pätevä tilavektori, kun $|\alpha| = 1$. Kvanttisysteemin tila riippuu siis vain tilavektorin suunnasta ja vektoreiden $|\psi\rangle$ ja $\alpha |\psi\rangle$ sanotaan olevan ekvivalentit. Yhtälö 1.16 kuvaa yhtä kvantteorialle ominaista piirrettä, tilojen superpositio periaatetta. Tällöin tilavektorin Fourier'n kertoimet c_i ovat todennäköisyysamplitudeja ja arvot $|c_i|^2$ ovat systeemin todennäköisyys olla tilassa $|\varphi_i\rangle$ mittaushetkellä.

Voimme nyt antaa edeltävässä alaluvussa mainituille projektioille esityksen tilavektoreiden suhteen Diracin notaatiolla. Olkoon yksiulotteinen projektio kuvaus $P_\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\psi$ seuraavasti

$$P_\psi |\phi\rangle = \langle \psi | \phi \rangle |\psi\rangle, \quad (1.17)$$

missä vektorit $\langle \psi | \phi \rangle |\psi\rangle$ muodostavat \mathcal{H} :n aliavaruuden \mathcal{H}_ψ . Merkitsemme tätä operaattoria vektorin $|\psi\rangle$ ulkotulolla itsensä kanssa

$$P_\psi = |\psi\rangle\langle \psi|. \quad (1.18)$$

Suoraan laskemalla näemme helposti, että määritelmästä seuraa $P_\psi^\dagger = P_\psi$ ja $P_\psi^2 = P_\psi$. Operaattori $|\psi\rangle\langle \psi|$ siis todellakin on projektio, kun $|\psi\rangle$ on tilavektori. Lisäksi jos joukko projektioita $\{P_i\}$ on ortogonaalinen, eli $P_j P_k = \mathbf{0}$ kun $j \neq k$, niin myös niiden summa on projektio, mikä on myös helppo todistaa suoraan laskemalla.

1.4 Observaabelit ja niiden odotusarvot

Edellisessä alaluvussa mainitsimme, että systeemin tilavektorit liittyvät todennäköisyyksiin ja mittauksiin. Tarkemmin tilavektorit kuvaavat todennäköisyyksiä saada jokin tietty mittaustulos jollekin suurelle. Olkoon Ω kvanttisysteemin kaikkien mahdollisten mittaustulosten joukko ja \mathcal{F} tulosten σ -algebra. Joukko \mathcal{F} on siis koelma alijoukkoja $F \subset \Omega$ siten, että $\emptyset \in \mathcal{F}$ ja σ -algebran alkion komplementti $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}$ sekä alkioden mielivaltainen unioni $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$ kuuluvat myös algebraan [2, s. 63]. Sanomme (Ω, \mathcal{F}) olevan systeemin tulosavaruus. Määrittelemme seuraavaksi mitattavan suuren eli observaabelin:

Määritelmä 1.5. Observaabeli on normalisoitu positiivinen operaattoriarvoinen mitta (POVM), eli kuvaus $A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ siten, että

1. $A(\emptyset) = \mathbf{0}$,
2. $A(\Omega) = \mathbf{1}$,

3. $A(\cup_i X_i) = \sum_i A(X_i)$ mille tahansa sarjalle $\{X_i\}$ erillisiä \mathcal{F} :n joukkoja ja summa suppenee heikosti.

Yhdistettynä kvanttisysteemin tilaan $|\varphi\rangle$ todennäköisyys saada mittaustulos X_i observaabelin A kuvaamalle suureelle A kyseisessä tilassa on

$$p_\varphi^A(X_i) = A_\varphi(X_i) = \langle \varphi | A(X_i) | \varphi \rangle \in [0, 1]. \quad (1.19)$$

Operaattoreiden $A(X_i)$ positiivisuus on vaatimuksena observaabelille sillä muuten saadut todennäköisyydet voisivat olla negatiivisia, mikä ei ole fysikaalisesti järkevää. Observaabelit voivat olla diskreettejä tai jatkuvia. Seuraavaksi määrittelemme diskreetin observaabelin ja sen odotusarvon. Palaamme jatkuvaan tapaukseen myöhemmin.

Määritelmä 1.6. Observaabeli A tulosavaruudella (Ω, \mathcal{F}) on diskreetti, jos on olemassa numeroituva joukko $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ siten, että $A(\Omega_0) = \mathbb{1}$.

Diskreetin observaabelin tapauksessa merkkäämme lyhyesti $A(x_i) \equiv A(\{x_i\})$, kun $\{x_i\} \subset \Omega_0$. Koska observaabeli yhdessä kvanttitalan kanssa määrittää todennäköisyysjakauman mittaustuloksille, voimme laskea suureen A odotusarvon $\langle A \rangle$ tilassa $|\psi\rangle$

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_{x_i \in \Omega_0} x_i \langle \psi | A(x_i) | \psi \rangle. \quad (1.20)$$

Tämä tarkoittaa mittaustulosten keskiarvon lähestyvän tätä arvoa, kun mittaustapahtumien määrä lähestyy ääretöntä. Jatkossa emme merkitse odotusarvoa alaindeksillä, ellei siihen ole erityistä tarvetta. Joskus observaabeleiksi kutsutaan myös niiden ensimmäistä momenttioperaattoria $A[1] = \sum_{x_i \in \Omega_0} x_i A(x_i)$, joka siis antaa suureen odotusarvon. Näin tehdään usein esimerkiksi paikan, liikemäärän ja energian tapauksessa [2, s. 202]

Vanhemmassa kirjallisuudessa ja kvanttimekaniikan peruskursseilla observaabeli määritellään usein hermiittisenä operaattorina, jonka kaikki ominaisarvot ovat re-

aalilukuja ja jonka ominaisvektorit muodostavat Hilbertin avaruuden kannan. Tällainen observaabeli on erityistapaus antamastamme määritelmästä ja sitä sanotaan tarkaksi observaabeliksi. Tarkka observaabeli on POVM A , jolla $A(X_i) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ kaikilla $X_i \in \mathcal{F}$. Tarkkoja observaabeleja kutsutaan myös projektioarvoisiksi mitoiksi tai spektraalimitoiksi. Todellisuudessa mitään mitattavaa suuretta ei käytännössä voi edustaa tarkalla observaabelilla, minkä takia yllä annettu yleisempi määritelmä on tarpeellinen [7].

1.5 Tiheysoperaattori

Olkoon \mathcal{H} jokin Hilbertin avaruus, A observaabeli ja $\{\varphi_i\}$ jokin ortonormaali kanta S . Voimme antaa edellisessä alaluvussa määritellyn todennäköisyysmitan myös muodossa

$$p_\psi^A(X_j) = \langle \psi | A(X_j) | \psi \rangle = \sum_i \langle \varphi_i | | \psi \rangle \langle \psi | A(X_j) | \varphi_i \rangle, \quad (1.21)$$

missä $|\psi\rangle$ on tilavektori ja yhtälön oikea puoli on tuttu jälkioperaatio

$$\text{Tr}[P_\psi A(X_j)] = \sum_i \langle \varphi_i | P_\psi A(X_j) | \varphi_i \rangle. \quad (1.22)$$

Sanomme operaattorin T kuuluvan jälkiluokkaan $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, jos sen jälki on riippumaton kannasta ja äärellinen. Näemme helposti, että jokaiselle tilavektoria vastaavalle projektiolle pätee

$$\text{Tr}[P_\psi] = 1 \quad (1.23)$$

ja määritelmien 1.4 sekä 1.5 nojalla observaabeleille pätee

$$\text{Tr}[A(X)] < \infty, \forall X \in \mathcal{F}. \quad (1.24)$$

Molemmat ovat siis esimerkkejä jälkiluokkaoperaattoreista.

Tilavektoreiden projektiot eivät ole ainoita operaattoreita joiden jälki on yksi. Olkoon λ jokin luku väliltä $[0, 1]$ ja P_ψ, P_ϕ kaksi projektiota $P_\psi \neq P_\phi$. Silloin

$$\text{Tr}[\lambda P_\psi + (1 - \lambda) P_\phi] = 1. \quad (1.25)$$

Eli myös tilavektoreita vastaavien projektoiden konvekssi summa käyttäytyy jäljen alla kuin tila. Voimme nyt määritellä kvanttisysteemin tilaa kuvaavan kappaleen tarkasti.

Määritelmä 1.7. Hilbertin avaruuden \mathcal{H} tila-avaruus on konvekssi joukko $\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0, \text{Tr}[\rho] = 1\}$

Operaattoreita ρ kutsutaan tiheysoperaattoreiksi, tai tiheysmatriiseiksi ulottuvuuden ollessa äärellinen, ja merkkäämmme niitä kreikkalaisilla kirjaimilla. Suuretta $\text{Tr}[\rho^2]$ sanotaan tilan puhtaudeksi ja

$$0 \leq \text{Tr}[\rho^2] \leq 1, \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \quad (1.26)$$

Jos tilan puhtaus on yksi, on silloin sen tiheysoperaattori projektio. Näitä tiloja kutsutaankin puhtaiksi tiloiksi ja muita tiloja sekoitetuiksi. Puhtaat tilat voidaan esittää siis myös ket-vektoreina, mutta sekoitetut tilat voidaan antaa vain tiheysoperaattoreina.

Tilojen konvekssi summa kuvaa klassista todennäköisyyteen liittyvää käyttäytymistä verrattuna puhtaiden tilojen kvanttimekaniikalle ominaiseen superpositioon. Olkoon jokin tila $\rho = \lambda P_\psi + (1 - \lambda)P_\phi$. Nyt tila voi olla joko P_ψ tai P_ϕ kertoimien määrämällä todennäköisyyksillä ja projektiot määrittävät mittausten todennäköisyydet kyseisissä tapauksissa. Jatkossa kun puhumme tilasta, tarkoitamme tiheysoperaattoria ja mainitsemme erikseen tilan oleva puhdas tai tilavektori.

Olemme nyt käyneet läpi yleisesti Hilbertin avaruuden rakenteen, sen alkiot jotka voivat kuvata kvanttisysteemin tiloja, sekä operaattorit jotka kuvaavat mitattavia suureita. Nämä matemaattiset työkalut riittävät kuvaamaan suljettua systeemiä. Käytännössä kuitenkin kaikki systeemit vuorovaikuttavat jonkin toisen systeemin kanssa ja haluamme tutkia myös tällaisia tilanteita. Lisäksi kvanttimekaniikassa systeemit voivat olla tilastollisesti toisistaan riippuvia kvanttikorrelaatioiden [8] kautta, vaikka ne eivät olisi suoraan vuorovaikutuksessa.

Kuvaamme yhdistettyä systeemiä, joka koostuu Hilbertin avaruuksien \mathcal{H}_1 ja \mathcal{H}_2 kuvaamista systeemeistä, Hilbertin avaruuksien tensoritulolla

$$\mathcal{H}_\otimes = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (1.27)$$

Tämä tensoritulo yleistyy mielivaltaiselle määrälle avaruuksia ja Hilbertin avaruuden \mathcal{H}_\otimes alkioille $|\phi \otimes \psi\rangle$, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ pätee

$$\langle \phi \otimes \psi | \phi \otimes \psi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle, \quad (1.28)$$

sekä

$$(A \otimes B) |\phi \otimes \psi\rangle = |A\phi \otimes B\psi\rangle; \quad A \otimes B \in \mathcal{H}_\otimes, \quad (1.29)$$

kun $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$. Jos $\{\varphi_i\}$ ja $\{\eta_j\}$ ovat vastaavasti avaruuksien \mathcal{H}_1 ja \mathcal{H}_2 kantoja, niin silloin $\{\varphi_i \otimes \eta_j\}$ on avaruuden \mathcal{H}_\otimes kanta. Näin ollen, jos Hilbertin avaruuden kaikkien alasysteemien $\{\mathcal{H}_i\}$ ulottuvuudet ovat äärellisiä, $d_i < \infty$, on koko avaruuden ulottuvuus

$$\dim(\mathcal{H}_\otimes) = \prod_i d_i. \quad (1.30)$$

Loput operaattoreiden joukot, kuten tiheysoperaattorit, määräytyvät samoilla periaatteilla. Vielä yksi erittäin tärkeä ominaisuus löytyy tensorituloavaruuden jälki-
luokkaan kuuluvilta operaattoreilta $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_\otimes)$.

Määritelmä 1.8. Osittainen jälki on jäljen säilyttävä, positiivinen kuvaus $\text{Tr}_\mathcal{K} : \mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Tämä tarkoittaa, että kaikille $A \otimes B \in \mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ pätee

$$\text{Tr}_\mathcal{K}[A \otimes B] = \text{Tr}_\mathcal{H} \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), \quad (1.31)$$

$$\text{Tr}[A \otimes B] = \text{Tr}[\text{Tr}_\mathcal{H}]. \quad (1.32)$$

Vastaavasti $\text{Tr}_\mathcal{H} : \mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K})$.

1.6 Aikakehitys ja kanavat

Luvun alussa nimetyn kvanttimekaniikan toisen postulaatin mukaan suljetussa systeemissä ajasta riippuvan puhtaan tilan $|\psi(t)\rangle$ kehittymisen määrää Schrödingerin yhtälö

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle, \quad (1.33)$$

missä \hbar on redusoitu Planckin vakio ja H Hamiltonin operaattori, eli hamiltoni. Tästä seuraa tuttu muoto systeemin unitaarille aikakehitysoperaattorille $U(t)$ Hamiltonin operaattorin eksponenttikuvauksena

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}, \quad (1.34)$$

hamiltonin ollessa ajasta riippumaton. Aikekehittyvän tilan määritelmä on nyt

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi\rangle, \quad (1.35)$$

missä $|\psi\rangle$ on systeemin tila hetkellä $t = 0$.

Unitaaristen operaattoreiden erityinen piirre on niiden isometrisyys

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t') | \psi(t') \rangle = \langle \psi | \psi \rangle, \quad (1.36)$$

eli tilavektorit pysyvät tilavektoreina kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Tilavektoria $|\psi(t)\rangle$ vastaava ajassa kehittyvä tiheysoperaattori $\rho(t) \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ on

$$\rho(t) = U(t) |\psi\rangle\langle\psi| U^\dagger(t) = U(t) \rho U^\dagger(t), \quad (1.37)$$

ja sekoitetuille tiloille $\rho = \sum_i w_i P_i$, $\sum_i w_i = 1$

$$\rho(t) = \sum_i w_i U(t) P_i U^\dagger(t). \quad (1.38)$$

Selvästi siis

$$\text{Tr}[\rho(t)] = \text{Tr}[\rho] = 1, \quad (1.39)$$

eli aikakehitys on lineaarikuvaus $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Samoin voimme, käyttäen jäljen syklisyyttä,¹

$$p_{\rho(t)}^A = \text{Tr}[\rho(t)A] = \text{Tr}[\rho U^\dagger(t)AU(t)], \quad (1.40)$$

määritellä aikakehittyvän observaabelin

$$A(t) = U^\dagger(t)AU(t), \quad (1.41)$$

joka on tilan aikakehityksen duaalikuvaus. Aikakehittyvien tilojen ja observaabeleiden kuvia kutsutaan vastaavasti Schrödingerin ja Heisenbergin kuviksi.

Haluamme seuraavaksi tietää miten yleisesti kuvaamme tilan kehittymistä tai muuttuamista toiseksi. Olkoon Φ kuvaus $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $\Phi^\dagger : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sen duaalikuvaus. Kuvaus Φ^\dagger on positiivinen, kun $\Phi^\dagger(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$ kaikilla $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$. Olkoon $M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ nyt $n \times n$ kokoisten matriisien \mathbf{A} avaruus, joiden alkiot ovat operaattoreita $A_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Kuvaus Φ^\dagger on n -positiivinen, kun matriisi

$$\Phi_n^\dagger(\mathbf{A}) = [\Phi^\dagger(A_{ij})] \quad (1.42)$$

on positiivinen. Jos Φ^\dagger on n -positiivinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$, kuvaus on täyspositiivinen [2, s.137] ja tällöin myös Φ on täyspositiivinen. Voimme nyt määritellä fysikaalisesti mahdollisen kvanttioperaation.

Määritelmä 1.9. Lineaarikuvaus $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K})$ on operaatio, jos se on

1. täyspositiivinen ja
2. $0 \leq \text{Tr}[\Phi(\rho)] \leq 1$, kaikilla $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Jos lisäksi kuvaus on jäljen säilyttävä, kutsumme sitä kanavaksi. Merkitsemme operaatioiden joukkoa \mathcal{O} ja kanavien joukkoa \mathcal{O}_c .²

¹Tarkalleen ottaen operaattoreiden jälki $\text{Tr}[ST]$ on syklinen vain, kun S tai T on jälkiluokko-operaattori.

²Joskus kirjallisuudessa kanavia ei nimetä erikseen ja puhutaan vain operaatioista tai toisin päin.

Operaatioiden täyspositiivisuus on vaatimus, jotta kuvaus pysyy fyysisesti mahdollisena myös yhdistetyissä systeemeissä. Operaation, joka ei säilytä jälkeä, voidaan tulkita tuhoavan joitain systeemin alkutiloja ja lopputulos on silloin alinormalisoitu tila $\text{Tr}[\Phi(\rho)] < 1$. Operaatio $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K})$ voidaan antaa operaattorisumma muodossa [9]

$$\Phi(T) = \sum_k A_k T A_k^\dagger, \quad A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K}), \quad (1.43)$$

jota kutsutaan Krausin hajotelmaksi. Schrödingerin ja Heisenbergin kuvat yhdistää siis yhtäsuuruus

$$\text{Tr}[\Phi(\rho)A] = \text{Tr}[\rho\Phi^\dagger(A)], \quad \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (1.44)$$

Operaation Φ sanotaan olevan unitaalinen, kun $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Näemme tästä heti, että duaalikuvauksen Φ^\dagger ollessa unitaalinen, on Φ kanava. Aikakehitys on siis esimerkki unitarisesta kanavasta $\sigma_{U(t)}$, jonka Krausin hajotelma on $\sigma_{U(t)}(T) = U(t)TU^\dagger(t)$

$$\text{Tr}[\sigma_{U(t)}(\rho)] = \text{Tr}[U(t)\rho U^\dagger(t)] = \text{Tr}[\rho U^\dagger(t)U(t)] = \text{Tr}[\rho\sigma_{U(t)}^\dagger(\mathbf{1})]. \quad (1.45)$$

1.7 Mittaukset

Edeltävissä osissa olemme puhuneet mittauksista niiden tulosten ja observaabeleiden suhteen. Voimme laajemmin ajatella mittaustapahtuman koostuvan tutkittavasta systeemistä, anturisysteemistä joka kytkeytyy tutkittavaan systeemiin, systeemien kehittymisestä mittauksen johdosta ja lopulta anturista tuloksen lukemisesta. Käymme seuraavaksi läpi miten mittausjärjestelyä voidaan kuvata matemaattisesti. Aloitamme mainitsemalla joitain seikkoja laajennusteoriasta (engl. *dilation theory*) [2, luku 7]. Tämän teorian tarkempi käsittely vaatisi yleisempiä algebrallisia rakenteita kuin mitä olemme tässä tutkielmassa esittäneet. Tämän takia käsittelemme vain joitain tuloksia ja vain Hilbertin avaruuksiin sekä niiden operaattoreihin liittyen, mikä on tämän tutkielman kannalta olennainen osa.

Olkoon \mathcal{H} jokin kvanttisysteemiä kuvaava Hilbertin avaruus, $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ edellisen alaluvun mukainen operaatio ja $\Phi^\dagger : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sen duaalikuvaus. Stinespringin lauseen [10] mukaan on olemassa Hilbertin avaruus \mathcal{K} , rajoitettu operaattori $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, ja unitaalinen kuvaus $\omega : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K})$ siten, että

$$\Phi^\dagger(T) = V^\dagger \omega(T) V, \quad \forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (1.46)$$

Kolmikko $\langle \mathcal{K}, \omega, V \rangle$ on operaation Φ^\dagger Stinespringin esitys tai Stinespringin laajennus. Jos nyt Φ on kanava ja valitsemme $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$, missä \mathcal{H}_E on jokin systeemin ympäristö, kuvauksen ω unitaalisuus vaatii, että kaikille $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$\omega(T) = T \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_E}, \quad (1.47)$$

ja silloin V on isometria. Kiinnitämme tilavektorin $\xi \in \mathcal{H}_E$ ja merkitsemme

$$V |\varphi\rangle = U |\varphi \otimes \xi\rangle, \quad (1.48)$$

milloin isometrisyydestä johtuen U on unitaarinen operaattori $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E)$. Koska ω on unitaalinen ja nyt jäljen säilyttävä, sen duaalikuvaus on määritelmän 1.8 osittainen jälki. Saamme lopulta kanavalle Φ esityksen

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_E}[U(\rho \otimes P_\xi)U^\dagger], \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \quad (1.49)$$

Olkoon seuraavaksi (Ω, \mathcal{F}) jonkin systeemin tulosavaruus ja $A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ observaabeli. Naimarkin laajennuslauseen [11] mukaan on olemassa Hilbertin avaruus \mathcal{K} , rajoitettu operaattori $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ ja kuvaus $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K})$ siten, että

$$A(X) = V^\dagger \pi(X) V, \quad \forall X \in \mathcal{F}. \quad (1.50)$$

Tämä kolmikko $\langle \mathcal{K}, \pi, V \rangle$ on Naimarkin esitys observaabelille A ja lisäksi on olemassa niin kutsuttu minimaalinen Naimarkin laajennus missä V on isometria ja kuvaus π on tarkka observaabeli avaruudessa \mathcal{K} [12].

Olkoon \mathcal{H} jotain kvanttisysteemiä kuvaava Hilbertin avaruus, A observaabeli tulosavaruudella (Ω, \mathcal{F}) . Olkoon sitten \mathcal{K} toisen systeemin, anturin (engl. *probe*),

Hilbertin avaruus, ξ anturin alkutila ja oletamme anturin observaabelilla C olevan sama tulosavaruus (Ω, \mathcal{F}) . Merkitsemme $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ ja mittauksen vuorovaikutusta kuvaa nyt unitaarinen kanava $\sigma_U : \mathcal{T}(\mathcal{H}') \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H}')$.

Määritelmä 1.10. Nelikko $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}, \xi, \sigma_U, C \rangle$ on mittausjärjestely observaabelille A , jos se toteuttaa todennäköisyyden reprodusointiehdon

$$\text{Tr}[\rho A(X)] = \text{Tr}[\sigma_U(\rho \otimes \xi)(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes C(X))] \quad (1.51)$$

kaikille $X \in \mathcal{F}$ ja $\rho \in \mathcal{H}$. Lisäksi kutsumme observaabelia C osoittimeksi (engl. *pointer*).

Mittauksille merkittävä tulos on havainto, että jokaiselle observaabelille on olemassa mittausjärjestely, jossa anturin alkutila on puhdas ja osoitin on tarkka [13]. Mittauksen kanava myös määrittää systeemin ja anturin lopputilat seuraavasti

$$\rho^f = \text{Tr}_{\mathcal{K}}[\sigma_U(\rho \otimes \xi)], \quad (1.52)$$

$$\xi^f = \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\sigma_U(\rho \otimes \xi)]. \quad (1.53)$$

Olkoon nyt $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}, \xi, \sigma_U, C \rangle$ mittausjärjestely observaabelille A ja mittauksen jälkeen mittaamme toista observaabelia B suoraan systeemissä. Saamme observaabeleille yhteistodennäköisyyden tilassa ρ

$$\begin{aligned} p_{\rho}(X \& Y) &= \text{Tr}[\sigma_U(\rho \otimes \xi)(B(Y) \otimes C(X))] \\ &= \text{Tr}[B(Y) \text{Tr}_{\mathcal{K}}[\sigma_U(\rho \otimes \xi)(\mathbf{1} \otimes C(X))]]. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Määrittelemme nyt instrumentin $\mathcal{I}_X^{\mathcal{M}} : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{H})$, joka on operaatio

$$\mathcal{I}_X^{\mathcal{M}}(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{K}}[\sigma_U(\rho \otimes \xi)(\mathbf{1} \otimes C(X))] \quad (1.55)$$

ja missä $\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{H})$ on alinormalisoitujen tilojen joukko. Instrumentti $\mathcal{I}_{\Omega}^{\mathcal{M}}$ yli koko mittaustulosten joukon Ω on siis kanava, sillä määritelmän 1.5 mukaan $C(\Omega) = \mathbf{1}$.

Instrumentin duaalikuvaus itseasiassa määrittää mitattavan observaabelin $A^{\mathcal{I}}$ ja instrumenttia kutsutaan A -yhteensopivaksi, kun

$$A^{\mathcal{I}}(X) = \mathcal{I}_X^{\dagger}(\mathbf{1}). \quad (1.56)$$

Instrumentit, joiden yhteensopiva observaabeli on sama, muodostavat ekvivalenssiluokan $[\mathcal{I}]$ ja samoin mittausjärjestelyt, joiden instrumentti on sama, ovat ekvivalenssiluokka $[\mathcal{M}]$. Käytännössä siis yhden suureen mittaus voi muuttaa systeemiä eri tavoilla ja suuretta voi mitata eri mittausjärjestelyillä [1, s. 228-230].

Mittausjärjestely johtaa myös tapaan valmistella systeemi suodattamalla tiloja riippuen saaduista mittaustuloksista. Edellä instrumentti kertoo systeemin tilan kehittymisen, kun mittaustulokseksi on rekisteröity X ja saamme nyt kuvauksen

$$\rho \mapsto \rho_X^f = \frac{1}{\text{Tr}[\mathcal{I}_X^{\mathcal{M}}(\rho)]} \mathcal{I}_X^{\mathcal{M}}(\rho). \quad (1.57)$$

Mittausjärjestelyn valinnalla ja mittaustulosten perusteella preparoimme siis systeemin (normalisoituun) ehdolliseen lopputilaan ρ_X^f ilman, että teemme mittausta suoraan systeemille itselleen [14].

2 Diskreetit ja jatkuvat muuttujat

Tässä luvussa käymme läpi joitain tavanomaisia ja yksinkertaisia esimerkkejä kvanttisysteemeistä. Luvussa esiintyy termejä, kuten ”kubitti”, joiden alkuperä on kvantti-informaation sovelluksissa [3], mutta tarkasteltavia systeemejä esiintyy kaikkialla kvanttifysiikassa. Kyseisen terminologian käyttö johtuu luvussa 5 tarkasteltavan ongelman merkityksestä kvanttilaskenassa. Suurin osa kvantti-informaation ja kvanttilaskennan malleista perustuu diskreetteihin systeemeihin, mikä on nähtävissä esimerkiksi olemassa olevista kvanttietokoneprototyypeistä, joista iso osa käyttää suprajohtavia kubitteja [15]. Kuitenkin myös jatkuvien suureiden systeemejä voidaan hyödyntää kvanttilaskennassa ja ne omaavat monia niille ominaisia etuja

[16–19]. Tämän luvun jälkeen keskitymme täysin jatkuvien suureiden systeemeihin, mutta ennen sitä tarkastelemme pikaisesti myös diskreettejä systeemejä. Aloitamme kuitenkin esittämällä lisää matematiikkaa, joka tukee edeltävää lukua ja käsittelee ääretönulotteisia ja jatkuvia Hilbertin avaruuksia.

2.1 Ääretönulotteiset ja jatkuvat systeemit

Ensimmäisen luvun asioiden yleistäminen ääretönulotteisille ja jatkuville systeemeille vaatii tarkkuutta, jotta fysikaalisen tulkinnan omaavat ominaisuudet säilyvät. Tärkeintä on, että sisätulo on hyvin määritelty sekä vektoriavaruus normin suhteen täydellinen sillä muuten kyseessä ei olisi Hilbertin avaruus.

Esimerkki 2.1. Olkoon $l_2 = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^2 < \infty\}$, eli joukko ω -monikkoja [20] joiden koordinaattien itseisarvojen neliöiden summan on äärellinen. Nyt l_2 on ilmeisellä tavalla määritellyn alkioiden yhteenlaskun ja skalaareilla $\alpha \in \mathbb{C}$ kertomisen suhteen vektoriavaruus. Määrittelemällä alkioille $f, g \in l_2$ sisätulo

$$\langle f|g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{f(n)}g(n),$$

johtaa alkioiden summausehto sekä Hölderin epäyhtälö normin $\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}$ täydellisyyteen [1]. Saamme siis ääretönulotteisen Hilbertin avaruuden l_2 , jolla on esimerkiksi Kroneckerin funktioista

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

muodostuva ortonormaali kanta $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sillä selvästi

$$\langle \delta_k|\delta_l \rangle = \delta_{kl}. \quad (2.1)$$

Mielivaltaisella alkioilla f on siis kyseissä kannassa esitys

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)\delta_n$$

ja jos $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^2 = 1$, niin f on tietenkin puhdas tila.

Toinen erityisempi Hilbertin avaruus on neliöintegroituvien funktioiden avaruus. Tähän avaruuteen kuuluvat esimerkiksi monilta kvanttimekaniikan peruskursseilta tutut aaltofunktiot.

Määritelmä 2.1. Olkoon Ω jokin joukko, \mathcal{A} σ -algebra Ω :n alijoukkoja ja $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ joukkofunktio johonkin kuntaan \mathbb{F} . Nyt kolmikko $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on mitta-avaruus varustettuna mitalla μ . Määritellään funktioiden joukko

$$L_2^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{F} \mid \int_{\mathcal{S}} |f|^2 d\mu < \infty, \forall \mathcal{S} \in \mathcal{A}\}.$$

Samoin kuin yllä olevassa esimerkissä, L_2^0 on yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella varustettu vektoriavaruus. Määritellään normi

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

ja joukko $N = \{h \in L_2^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \mid |h| = 0 \text{ } \mu\text{-melkein kaikkialla}\}$, joka on lineaarinen aliavaruus. Avaruuden N virittämä tekijäavaruus on

$$L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = L_2^0/N = \{[f] \mid |f - g| = 0 \text{ } \mu\text{-m.k. ; } f, g \in [f]\},$$

missä $[f]$ on ekvivalenssiluokka $[f] = f + N$. Funktioiden sisätulolla

$$\langle [f] | [g] \rangle = \int_{\Omega} \bar{f} g d\mu, \quad (2.3)$$

ja normilla $\|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle}$ varustettuna $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on Hilbertin avaruus [21].

Kuten kirjallisuudessa lähes aina [2, 21], puhumme jatkossa vain funktioista f emmekä niiden ekvivalenssiluokista. Yllä oleva määritelmä on kuitenkin annettu täsmällisyyden nimessä. Funktioavaruuksien matematiikasta ja etenkin niiden operaattoreiden esityksistä voi lukea lisää lähteistä [2, 21–23]. Lisäksi usein joukko Ω ja kunta \mathbb{F} ovat reaali- tai kompleksilukujen kunta \mathbb{R} tai \mathbb{C} , milloin vastaavaa Hilbertin avaruutta merkitään lyhyemmin $L_2(\mathbb{R})$ tai $L_2(\mathbb{C})$.

Esimerkki 2.2. Olkoon \mathcal{H} jokin Hilbertin avaruus ja $\mathcal{K} = L_2(\mathbb{R})$. Saamme avaruuskien välille yhteyden käyttämällä muodollisia merkintöjä $\langle x | \psi \rangle = \psi(x)$ ja $\int_{\mathbb{R}} |x\rangle \langle x| dx =$

1 [24, 25]. Nyt sisätulo saa siis muodon

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \langle\psi|\mathbb{1}|\psi\rangle = \langle\psi|\int_{\mathbb{R}}|x\rangle\langle x|dx|\psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}}\langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx = \int_{\mathbb{R}}\overline{\psi(x)}\psi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2dx\end{aligned}\tag{2.4}$$

ja odotusarvo voidaan laskea operaattorilla $\int_{\mathbb{R}}x|x\rangle\langle x|dx$ seuraavasti

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \langle\psi|\int_{\mathbb{R}}x|x\rangle\langle x|dx|\psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}}x|\psi(x)|^2dx\end{aligned}\tag{2.5}$$

Yllä oleva muoto $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ esiintyy, kun puhutaan systeemin paikkaesityksestä ja usein koordinaattia merkataan $q \equiv x$. Tällöin systeemin paikkaobservaabeli on operaattori Q , jolle pätee

$$Q\psi(x) = x\psi(x).\tag{2.6}$$

Systeemin liikemääräesitys saadaan paikkaesityksen Fourier'n muunnoksena

$$F\psi(x) = \hat{\psi}(p),\tag{2.7}$$

missä F on Fourier-Plancherel operaattori [2]. Vastaavasti liikemääräobservaabeli saadaan paikkaobservaabelin muunnoksena [26]

$$P = F^{-1}QF.\tag{2.8}$$

On tärkeää huomata, että ensimmäisessä luvussa käsitellyistä asioista poiketen nämä observaabelit voivat saada arvoja koko reaaliiviivalta ja ovat siis rajoittamattomia. Paikka- ja liikemääräoperaattorit voidaan antaa niitä vastaavien spektraalimittojen ensimmäisinä momenttioperaattoreina, mutta reaaliiviivan jatkuvuudesta johtuen täytyy summaaminen korvata integroinnilla [2, 26]. Rajoittamattomien operaattoreiden käsittely vaatii siis operaattoreiden spektraaliteoriaa ja kiinnostuneelle lukijalle suositellaan jälleen lähteitä [2, luku 5][21, 23].

2.2 Kubitti

Kubitti on yksinkertaisin ei-triviaali esimerkki kvanttisysteemistä. Sen Hilbertin avaruus on kaksiulotteinen, $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2$, ja voimme siis helposti esittää sen kannan pystyvektoreilla

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Systemin operaattorit ovat siis esitettävissä 2×2 kompleksimatriiseilla $M_2(\mathbb{C})$ ja niiden kannaksi voidaan valita Paulin matriisit

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Mielivaltainen operaattori $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ voidaan antaa muodossa

$$T = r_0 \mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.11)$$

missä $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^3$ ja $\boldsymbol{\sigma}$ on operaattoreiden pystyvektori

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Yksiulotteinen projektio, eli puhdas tila, on muotoa [1, 2]

$$\rho_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad \|\mathbf{n}\| = 1.$$

Näemme laskemalla, että

$$\lambda \rho_{\mathbf{n}_1} + (1 - \lambda) \rho_{\mathbf{n}_2} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + (\lambda \mathbf{n}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{n}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

kun $\lambda < 1$ ja yleisen tiheysoperaattorin olevan muotoa

$$\rho_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad \|\mathbf{n}\| \leq 1,$$

sillä vektorien normille pätee

$$\|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\| \leq \|\mathbf{n}_1\| + \|\mathbf{n}_2\|. \quad (2.12)$$

Tuutin esimerkki kubittisysteemistä on elektronin, tai minkä tahansa spin-1/2 kappaleen, spinin suunta. Tällöin Pauli-operaattori σ_z antaa meille systeemin energiaan liittyvän tarkan observaabelin

$$H = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

minkä mukaan kantavektorit $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ vastaavat nyt systeemin ominaisenergioiden $\pm\frac{\hbar}{2}$ tiloja

$$H|0\rangle = \frac{\hbar}{2}|0\rangle, \quad H|1\rangle = -\frac{\hbar}{2}|1\rangle. \quad (2.14)$$

Määrittelemme lisäksi fermioniset lasku- ja nosto-operaattorit

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

joiden toiminta kubittisysteemin kantavektoreihin on helppo laskea matriisien kertolaskuna

$$\sigma_-|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_+|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Näemme operaattorin σ_{\pm} siis nostavan tai laskevan kubitin korkeamman tai alemman energian tilaan. Selvästi $\sigma_+ = \sigma_-^\dagger$ ja lisäksi operaattoreille pätee laskusääntö $\sigma_+\sigma_- - \sigma_-\sigma_+ = \sigma_z = \frac{2}{\hbar}H$. Joukko $\{\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-\}$ muodostaa kannan matriiseille $A \in M_2(\mathbb{C})$, joiden jälki on nolla $\text{Tr}[A] = 0$. Operaattori H on siis systeemin vapaa hamiltoni ja vuorovaikuttavassa systeemissä operaattoreista σ_+ ja σ_- riippuvat termit kuvaavat vuorovaikutuksia. Eri tapoja toteuttaa kubitteja fysikaalisesti etenkin kvanttilaskennan tarkoituksiin löytyy esimerkiksi Nielsenin ja Chuangin kirjan [3] luvusta 7 tai lähteistä [19, 27, 28].

2.3 Kuditti ja kumoodi

Kubitin käsite voidaan yleistää systeemeihin joiden Hilbertin avaruuden ulottuvuus on suurempi kuin kaksi. Näitä d -ulotteisia kvanttisysteemejä kutsutaan kvantti-informaation kontekstissa kuditeiksi.³ Esimerkiksi fermioninen spin-3/2 hiukkanen on edeltävän esimerkin kubitin kaltainen systeemi, jonka Hilbertin avaruus on kolmiulotteinen [29]. Kudittien käyttäminen kvanttilaskennassa luo lisää mahdollisuuksia suurempiin etuihin klassiseen laskentaan verraten kuten esimerkiksi parempaa laskentatehoa [30, 31] ja virheiden vastustuskykyä [32].

Kumoodi taas on ääretönulotteinen systeemi, jonka Hilbertin avaruus on esimerkiksi 2.1 nimetty l_2 -avaruus. Yleisin ja tutuin esimerkki on sähkömagneettisen kentän moodi optisessa kaviteetissa tai muut systeemit joita kvanttimekaaninen harmoninen oskillaattori mallintaa hyvin [32, 33]. Jatkossa käsittelemme vain sähkömagneettisen kentän systeemejä ja kutsumme siksi kumoodin kvantteja fotoneiksi. Kumoodin kanta Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H} = l_2$ on niin kutsuttu Fockin kanta $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, missä $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, ja kantavektoreiden sisätulo on

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}. \quad (2.19)$$

Systeemillä on bosoniset nosto- ja laskuoperaattorit $\{a, a^\dagger\}$, joiden toiminta kantavektoreihin on

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.20)$$

Eryistapauksena laskuoperaattori annihiloii tilan $|0\rangle$ ja nosto-operaattori tekee saman duaalille

$$a|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a^\dagger = 0.$$

Operaattoreiden tulolla määrittelemme lukumääräoperaattorin $N = a^\dagger a$, jonka vai-

³Esim. kun $d = 3$, niin systeemiä kutsutaan kutritiksi.

kutus on

$$N |n\rangle = a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.21)$$

Lukumääräoperaattorin avulla tulkitsemme Fockin kannan vektoreiden merkitsevän systeemissä havaittujen fotonien määrää ja operaattori n antaa siis fotonien lukumäärään liittyvän observaabelin ensimmäisen momentin eli odotusarvon tilassa ρ

$$\langle N \rangle_\rho = \text{Tr}[\rho N].$$

Esimerkki 2.3. Saamme avaruuden \mathcal{H} tilavektoreille esityksen avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$ määrittelemällä kuvauksen $\mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $|n\rangle \mapsto h_n$, missä h_n on n :n asteen Hermiten funktio

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad (2.22)$$

missä taas H_n on vastaava Hermiten polynomi [25]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (2.23)$$

Nyt siis esimerkiksi tilalla $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \in \mathcal{H}$ on esitys

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \mapsto \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(h_0 + h_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{(-1)}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} e^{x^2} (-2x) e^{-x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Kun laskemme tämän funktion normin neliön $\|\psi(x)\|^2$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} e^{-x^2} + \sqrt{2} x e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x^2} dx}_{=\sqrt{\pi}/2} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} x e^{-x^2} dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx}_{=\sqrt{\pi}/2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = 1, \end{aligned} \quad (2.25)$$

näemme sen täyttävän puhtaan tilan sisätulon ehdon.

3 Faasiavaruusformalismi

Tämän tutkielman aiheena käsittelemme tarkemmin jatkuvien suureiden kvanttisysteemejä ja niiden analysoinnissa on olennaisessa osassa systeemien faasiavaruusformalismi. Faasiavaruuden käsite on tuttu klassisesta mekaniikasta [34] ja sen rakentaminen kvanttisysteemeillä on saanut alkunsa niin kutsuttujen koherenttien tilojen tutkimisesta. Koherentit tilat ovat sellaisia joiden dynamiikka on lähimpänä klassista systeemiä ja näemme tässä luvussa miten tämä ilmenee. Aloitamme luvun käymällä läpi hieman Lien algebroiden ja ryhmien teoriaa, sillä näiden avulla faasiavaruuden ja olennaisten tilojen määrittely on helppoa ja perustuu aikaisemmissa luvuissa käytettyihin matemaattisiin työkaluihin. Usein kirjallisuudessa asiaa lähestytään hieman eri lähtökohdasta ja Lien teoria jää korkeintaan sivumaininnaksi. Kuitenkin tutkielman kirjoittaja näkee sen olevan erittäin hyödyllistä ja tämä osa lukua perustuukin osittain, sekä myös kehittää, kirjoittajan alemman korkeakoulututkinnon tutkielman aihetta [35]. Luvun loppuosa käsittelee jatkuvien kvanttisysteemien niin sanottuja gaussisia tiloja, joihin jo mainitut koherentit tilat kuuluvat, ja -operaatioita sekä kvasijakaumafunktioita. Mietimme gaussisten tilojen kvantti-informaatio sovelluksia, mihin ne eivät riitä ja miksi ne ovat silti mielenkiintoisia.

3.1 Lien teoriaa

Määritelmä 3.1. Lien algebra \mathfrak{g} on vektoriavaruus yli skalaarikunnan \mathbb{F} varustettuna tulolla $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, joka on antisymmetrinen

$$[x, y] = -[y, x], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

ja toteuttaa Jacobin identiteetin

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Esimerkiksi vektoriavaruus \mathbb{R}^3 on Lien algebra ristitulon suhteen [36], mutta tässä tutkielmassa olemme kiinnostuneita tapauksista missä $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ja \mathfrak{g} on jokin operaattorialgebra. Tällöin Lien tulo $[\cdot, \cdot]$ on lineaarialgebrasta tuttu kommutaattori

$$[x, y] = xy - yx. \quad (3.1)$$

Lien algebran kanta on joukko sen alkioita $\{x_i\}$, jotka virittävät koko algebran $\mathfrak{g} = \langle x_i \rangle_{\mathbb{C}}$ ja niiden Lien tuloille pätee sääntö

$$[x_i, x_j] = \sum_k c_{ij}^k x_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

missä kertoimia c_{ij}^k sanotaan rakennevakioiksi. Koska kaikki algebran alkiot voidaan antaa kannan alkioiden lineaarikombinaatioina, kannan Lien tulot määräävät siis kaikkien algebran alkioiden Lien tulot. Määrittämällä mielivaltaisen kannan ja sen rakennevakiot voimme siis määrittellä minkä tahansa abstraktin Lien algebran [36]. Lien algebran esitys φ on homomorfismi $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$, missä V on jokin vektoriavaruus ja $\text{End}(V)$ sen endomorfismien joukko⁴. Jos nyt $\dim(V) = n$, niin $\text{End}(V)$ on $n \times n$ -matriisien joukko. Tällaista vektoriavaruutta kutsutaan myös Lien algebran moduliksi ja esitykselle pätee [36]

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Lien ryhmä G sen sijaan on ryhmä jolla on kertolaskun lisäksi differentoituvan moniston rakenne. Lien algebrat voidaankin määrittellä tällaisen ryhmän tangentti-vektoriavaruutena identiteetissä ja etenkin jokainen äärellinen Lien algebra vastaa jotain Lien ryhmää [37]. Yleisin esimerkki on jonkin n -ulotteisen vektoriavaruuden V kääntyvien lineaarimuunnosten ryhmä $GL_n(V)$. Lien algebran alkiot voidaan kuvata vastaavan ryhmän alkioiksi eksponentiaalikuvauksella $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, $x \mapsto e^x$, joka voidaan antaa tapauksessa $x \in \text{End}(V)$ kaavalla

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots. \quad (3.3)$$

⁴Joukon A endomorfismi φ on homomorfismi, jonka maalijoukko on joukko itse $\varphi : A \rightarrow A$.

Lien ryhmän alkion $G \ni g = e^x$ käänteisalkio on tietenkin $g^{-1} = e^{-x}$.

Käykin ilmi, että Lien algebra on itsensä moduli niin kutsutun adjungoidun esityksen $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \text{ad}[x]$ suhteen. Tämä määrittää alkioiden toiminnan toisiinsa seuraavasti

$$\text{ad}[x](y) = [x, y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \quad (3.4)$$

Adjungoitu esitys on itseasiassa algebran sisäinen derivaatta [36], joka siis noudattaa derivaatan laskusääntöä

$$\text{ad}[x](yz) = \text{ad}[x](y)z + y\text{ad}[x](z). \quad (3.5)$$

Lien ryhmille on olemassa vastaavanlainen esitys $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ algebran automorfismeina⁵, joka määrittelee ryhmän alkioille $g \in G$ toiminnan

$$\text{Ad}[g](x) = gxg^{-1}, \quad x \in \mathfrak{g}. \quad (3.6)$$

Ensimmäinen tärkeä tulos, jonka saamme Lien teoriasta on adjungoituihin esityksiin ja eksponentiaalikuvaukseen liittyvä identiteetti [36, 37], joka pätee kun $x, y \in \mathfrak{g}$, $g \in G = \exp(\mathfrak{g})$

$$gxg^{-1} = \text{Ad}[g](x) = \text{Ad}[e^y](x) = e^{\text{ad}[y]}(x). \quad (3.7)$$

Yllä olevassa kaavassa kuvaus määritellään

$$e^{\text{ad}[y]} = 1 + \text{ad}[y] + \frac{1}{2!}\text{ad}[y]^2 + \frac{1}{3!}\text{ad}[y]^3 + \dots, \quad (3.8)$$

missä adjungoidun esityksen potenssi $\text{ad}[y]^n$ toimii peräkkäisinä kommutaattoreina

$$\text{ad}[y]^n(x) = \underbrace{[y, [y, [y, [\dots, x] \dots]]}_{n \text{ kommutaattoria}}. \quad (3.9)$$

Tästä näemme heti, että Lien ryhmän alkioille $g = e^x, h = e^y \in G$ pätee kaava

$$ghg^{-1} = e^x e^y e^{-x} = \exp(e^x y e^{-x}) = \exp(e^{\text{ad}[x]}(y)). \quad (3.10)$$

⁵Automorfismi on isomorfinen endomorfismi.

Toisena seurauksena saamme Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) kaavana tunnetun identiteetin Lien ryhmän alkioden tulolle [38–40]

$$e^x e^y = \exp\left(x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] - \frac{1}{12}[y, [x, y]] - \frac{1}{24}[x, [y, [x, y]]] + \dots\right). \quad (3.11)$$

Jo mainitun spin- $\frac{1}{2}$ systeemin operaattorit virittävät erityisen lineaarisen algebran $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \langle \sigma_z, \sigma_+, \sigma_- \rangle_{\mathbb{C}}$ ja bosoniselle systeemille on algebra $\mathfrak{h}_4 = \langle N, a, a^\dagger, \mathbb{1} \rangle_{\mathbb{C}}$ [38], jonka kommutaattorit ovat

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [a, a^\dagger] = \mathbb{1}. \quad (3.12)$$

Näemme heti, että kommutaattori $[a, a^\dagger]$ kuuluu algebran keskukseen eli [36]

$$[[a, a^\dagger], x] = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{h}_4. \quad (3.13)$$

Näitä algebroja vastaavat Lien ryhmät ovat $SL(2, \mathbb{C}) = \{g \in GL(\mathbb{C}^2) \mid \det g = 1\}$ ja Heisenbergin-Weylin ryhmä H_4 . Erityisesti nämä ryhmät sisältävät Hilbertin avaruuden symmetriamuunnokset eli unitaariset operaattorit, jotka ovat Lien algebran antihermiittisten alkioden, $x^\dagger = -x$, generoimia

$$g^\dagger = (e^x)^\dagger = e^{-x} = g^{-1}. \quad (3.14)$$

Bosonisen systeemin vapaan hamiltonin

$$H_0 = a^\dagger a + \frac{1}{2}, \quad (3.15)$$

määrää aikakehitys

$$U_t = e^{-iHt}$$

on siis selvästi ryhmän H_4 operaattori samoin kuin yleisempi algebran \mathfrak{h}_4 määräämä unitaarinen operaattori

$$U = \exp(-i\eta_1 N - i\eta_2 \mathbb{1} + \beta a^\dagger - \bar{\beta} a), \quad (3.16)$$

missä $\eta_i \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{C}$.

Yleensä fysikaalisesti kiinnostavat ryhmät ovat juurikin Lien ryhmiä [38, 41] ja kuten näimme hamiltoni määrää olennaisella tavalla kvanttisysteemin dynamiikkaan liittyvän Lien algebran ja ryhmän. Löydämme systeemin dynaamisesta ryhmästä lisää rakennetta tarkastelemalla sellaisia Hilbertin avaruuden \mathcal{H} aliavaruuksia jotka ovat invariantteja jollain aliryhmällä $H \leq G$, missä G on systeemin hamiltoniin liittyvä Lien ryhmä. Esimerkiksi operaattoreiden N ja $\mathbb{1}$ generoimilla unitaarisilla muunnoksilla

$$e^{-i\eta N} |n\rangle = e^{-i\eta n} |n\rangle, \quad e^{-i\eta \mathbb{1}} |n\rangle = e^{-i\eta} |n\rangle,$$

eli operaattoreiden toiminta Fockin kannan vektoreihin on verrattavissa skalaarilla kertomiseen. Erityisesti siis tiheysoperaattori $P_n = |n\rangle\langle n|$ on tällaisen muunnoksen U toiminnassa invariantti

$$UP_nU^\dagger = P_n. \quad (3.17)$$

Koska kaikki tiheysoperaattorit voidaan antaa operaattoreiden P_n konvekseina summina, Lien ryhmän toiminta tiheysoperattoreihin määräytyy täysin sen sivuluokkien $G/H = \{gH = \omega_g H \mid g = \omega_g \cdot h \in G, \omega_g \in G \setminus H, h \in H\}$ toiminnan mukaan [37, 38] sillä

$$gP_n g^{-1} = \omega_g h P_n h^{-1} \omega_g^{-1} = \omega_g P_n \omega_g^{-1}, \quad (3.18)$$

$$gH |n\rangle = \omega_g H |n\rangle = \omega_g |n\rangle e^{-i\phi}, \quad (3.19)$$

missä $e^{-i\phi}$ on jokin ykkösenjuuri. Kvanttisysteemin yleisen unitaarisen operaattorin, joka on muotoa kuten kaavassa 3.16 saadaan BCH-kaavojen avulla muodossa

$$U = \exp(-i\eta_1 N - i\eta_2 \mathbb{1} + \beta a^\dagger - \bar{\beta} a) = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a) \exp(-i\theta_1 N - i\theta_2 \mathbb{1}), \quad (3.20)$$

joten sen sivuluokka on siis muotoa

$$UH = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a) H. \quad (3.21)$$

Jatkossa valitsemme viitetilaksi vakuumin $|0\rangle$ ja unitaarisen operaattorin toiminta siihen on

$$UP_0U^\dagger = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha}a)P_0 \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha}a)^\dagger, \quad (3.22)$$

ja kutsumme näitä siirto-operaattoreiksi (engl. *displacement*)

$$D_\alpha = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha}a). \quad (3.23)$$

Kaavan 3.22 mukaisia tiloja kutsutaan koherenteiksi ja hyvin merkittävä tulos on näiden tilojen omaavan symplektisen moniston rakenteen [38, 42]. Laajentamalla systeemin algebraa operaattoreilla aa ja $a^\dagger a^\dagger$ saamme puristusoperaattorin (engl. *squeezing*)

$$S_\gamma = \exp(\gamma a^\dagger a^\dagger - \bar{\gamma}aa). \quad (3.24)$$

Muotoa $R_\theta = \exp(-i\theta a^\dagger a)$ olevia operaattoreita kutsutaan systeemin rotaatioksi ja yhdessä nämä operaattorit, toimimalla vakuumitilaan tai termisiin tiloihin ρ_{th} , määrittelevät joukon kvanttitiloja joita kutsutaan gaussisiksi tiloiksi [43, 44]. Termisen tilan määritelmä on

$$\rho_{th} = \frac{1}{Z} e^{-\omega a^\dagger a}, \quad (3.25)$$

missä $Z = \text{Tr} [e^{-\omega a^\dagger a}]$ ja ω on systeemin ominaistajuudesta ja lämpötilasta riippuva parametri [43, 44]. Suoraan laskemalla näemme, että termisen tila voidaan ilmaista myös muodossa

$$\rho_{th} = \sum_n \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} - 1)^{n+1}} |n\rangle\langle n|, \quad (3.26)$$

missä $\bar{n} = (e^\omega - 1)^{-1}$ on fotonien lukumäärän odotusarvo. Nämä määritelmät yleistyvät useammalle moodille suoraan, kun systeemin operaattorialgebran kannassa $\{N_i, a_i, a_i^\dagger, a_i^\dagger a_j^\dagger, a_i a_j, \mathbb{1}\}$ indeksit käyvät läpi kaikki moodit ja niille pätee kommutaatioääntö

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \mathbb{1}. \quad (3.27)$$

3.2 Faasiavaruusoperaattorit

Koherenteilla tiloilla $|\alpha\rangle = D_\alpha |0\rangle$ on symplektisen rakenteen lisäksi muita kiinnostavia ominaisuuksia. Ne ovat esimerkiksi laskuoperaattorin ominaistiloja

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.28)$$

ja ne myös pysyvät koherentteina aikakehityksen toiminnassa [35, 38]. Määrittelemme nyt nosto- ja laskuoperaattoreiden avulla itseadjungoidut operaattorit [24, 25, 38]

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a), \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a), \quad (3.29)$$

jotka siis ovat laskuoperaattorin skaalatut reaali- ja imaginääriosat.⁶ Abstraktille harmoniselle oskillaattorille nämä vastaavat paikka- ja liikemääräoperaattoreita ja kvanttioptiikassa niistä puhutaan systeemin kvadratuurioperaattoreina. Saamme näillä kirjoitettua siirto-operaattorin muodossa

$$D_\alpha = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a) = \exp(i(pQ - qP)) = D_{q,p}, \quad (3.30)$$

missä kertoimet q ja p ovat

$$q = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha), \quad p = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\alpha). \quad (3.31)$$

Paikka- ja liikemääräoperaattorit noudattavat tuttua kanonista kommutaatiorelaatiota [2, 38, 43, 44]

$$[Q, P] = i\mathbf{1}, \quad (3.32)$$

Kommutaattorin keskeisyydestä seuraten, kuten nosto- ja laskuoperaattoreilla, saadaan BCH-kaavoista siirto-operaattorille identiteetit [35, 38, 41]

$$D_\alpha = e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a} = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\bar{\alpha} a} e^{-\frac{\alpha \bar{\alpha}}{2}}, \quad (3.33)$$

$$D_{q,p} = e^{i(pQ - qP)} = e^{ipQ} e^{-iqP} e^{-i\frac{qp}{2}}. \quad (3.34)$$

⁶Tarkalleen ottaen niiden sulkeumat [2, 45].

Operaattorit Q ja P vastaavat koherenttien tilojen kanonisia koordinaatteja [38] ja niiden odotusarvot tilassa $\rho_{q,p} = \rho_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ ovat

$$\langle Q \rangle = \text{Tr}[Q\rho_{q,p}] = q, \quad (3.35)$$

$$\langle P \rangle = \text{Tr}[P\rho_{q,p}] = p. \quad (3.36)$$

Operaattoreiden $U_q = e^{-iqP}$ ja $V_p = e^{ipQ}$ toiminta kanonisiin operaattoreihin on [35, 38]

$$U_q^\dagger Q U_q = Q + q, \quad V_p^\dagger Q V_p = Q, \quad (3.37)$$

$$V_p^\dagger P V_p = P + p, \quad U_q^\dagger P U_q = P, \quad (3.38)$$

joten ne ovat siis oskillaattorin tapauksessa paikkaa siirtävä ja liikemäärää lisäävä operaattori [2, 25, 38].

Bosonisilla systeemeillä kvadratuurisuureet saavat siis arvoja koko reaali- ja imaginaaliväliltä ja vastaavat operaattorit ovat siis rajoittamattomia. Vastaavanlainen käsittely voidaan tehdä myös fermionisille systeemeille, mutta niiden faasiavaruus on rajoitettu [35, 38]. Toinen olennainen piirre on bosonisten systeemien faasiavaruusoperaattoreiden kanoninen kommutaatiorelaatio 3.32, koska tällä relaatiolla on tärkeä yhteys klassisen mekaniikan Poissonin sulkuihin [35, 38, 44]. Itseasiassa voidaan todistaa, että kanoniseen kommutaatiorelaatioon vaaditaan vähintään toisen operaattorin olevan rajoittamaton ja, että nosto- ja laskuoperaattoreiden kommutaatiorelaatio on mahdollinen vain äärettömässä Hilbertin avaruudessa [45]. Tämän perusteella voimme sanoa äärettömän Hilbertin avaruuden olevan vaatimus jatkuville suureille ja miksi fermionisten systeemien tapauksessa ei usein puhuta tällaisista suureista.

Koherentit tilat muodostavat lisäksi ylitäyden kannan Hilbertin avaruudessa joten mikä tahansa puhdas tila $|\psi\rangle$ voidaan antaa niiden avulla muodossa [38]

$$|\psi\rangle = \int |\alpha\rangle f(\bar{\alpha}) e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{d^2\alpha}{\pi}, \quad (3.39)$$

missä $f(\bar{\alpha}) = \langle\alpha|\psi\rangle e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}$ ja $d^2\alpha$ on kompleksitasen Lebesguen mitta [25, 46]. Faasiavaruusformalismin avulla voidaan kuvata bosonisysteemin ääretönulotteiselle Hilbertin

avaruudelle kahdella reaaliparametrilla (q, p) . Yleiselle systeemille, joka sisältää n moodia, faasiavaruus on siis $\Gamma = (\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{J})$, missä \mathbb{J} on symplektinen muoto [43, 44]

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{O}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}^2 = -\mathbf{1}_{2n}. \quad (3.40)$$

Yllä \mathbf{O}_n ja $\mathbf{1}_n$ ovat $n \times n$ kokoiset nolla- ja yksikkömatriisit. Merkkaamme jatkossa faasiavaruusoperaattoreiden vektoria

$$\mathbf{R} \equiv (\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{Q}_n \quad \mathbf{P}_1 \quad \dots \quad \mathbf{P}_n)^\top, \quad (3.41)$$

ja näemme nyt miten faasiavaruuden symplektinen muoto liittyy operaattoreiden kommutaatiorelaatioihin sillä

$$[\mathbf{R}, \mathbf{R}^\top]_{lk} = [\mathbf{R}_l, \mathbf{R}_k] = i\mathbb{J}_{lk}. \quad (3.42)$$

Erityisesti gaussiset tilat, joilla on vahva yhteys gaussisiin jakaumafunktioihin, ovat täysin karakterisoitu faasiavaruusoperaattoreiden $\{\mathbf{Q}_i, \mathbf{P}_i\}$ ensimmäisten ja toisten momenttien avulla tilan odotusarvojen vektorilla \mathbf{d} ja kovarianssimatriisilla σ [43, 44]

$$\mathbf{d} \equiv \text{Tr}[\rho_G \mathbf{R}] = (\langle \mathbf{Q}_1 \rangle \quad \langle \mathbf{Q}_2 \rangle \quad \dots \quad \langle \mathbf{Q}_n \rangle \quad \langle \mathbf{P}_1 \rangle \quad \dots \quad \langle \mathbf{P}_n \rangle)^\top, \quad (3.43)$$

$$\sigma \equiv [\sigma_{ij}] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{R}_i \rangle - \langle \mathbf{R}_i \rangle \langle \mathbf{R}_j \rangle, \quad (3.44)$$

missä ρ_G on mielivaltainen gaussinen tila. Yleisen gaussisen tilan generoi hamiltoni, joka on korkeintaan kvadraattinen faasiavaruusoperaattoreiden suhteen ja usein gaussiset tilat määritellään juuri tätä kautta kanonisesti kvantisoimalla [24, 44] jokin sopiva klassinen Hamiltonin funktio.

3.3 Wignerin funktio

Klassisessa mekaniikassa systeemin tilan ja dynamiikan tunteminen faasiavaruudessa määrittää sen kaikki ominaisuudet [34]. Tätä mukaillen ja kvanttimekaniikan todennäköisyystulkinnan puitteissa kvanttisysteemien ominaisuuksia on pyritty kuvaamaan todennäköisyysjakaumina edellä käsitellyssä kvanttifaasiavaruudessa. Valitettavasti kvanttimekaniikassa tällaiset jakaumat eivät ole suoraan mahdollisia [47]

kuten tulemme pian huomaamaan, mutta ne kertovat silti huomattavasti systeemin ominaisuuksista ja niistä puhutaan kvasi- tai pseudojakaumina [48]. Näitä kvasijakaumia voidaan jopa mitata suoraan ja lisäksi niiden ominaisuuksia käytetään luokittelemaan ja karakterisoimaan jatkuvien systeemien kvanttiresursseja [49–51]. Kvasijakaumafunktioita on kolmea yleisintä tyyppiä ja esittelemme nopeasti ne kaikki, mutta keskitymme jatkossa vain viimeiseen.

Ensimmäinen kvanttimekaanisen faasiavaruuden kvasijakaumista on Husimin Q-funktio [38, 44, 52]

$$Q_T(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | T | \alpha \rangle, \quad (3.45)$$

missä T on mielivaltainen jälkiluokkaoperaattori ja $|\alpha\rangle$ koherentti tila kuten aikaisemmin. Seuraava kvasijakauma on Glauberin-Sudarshanin P-funktio $P(\alpha)$

$$T = \int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha| P_T(\alpha) \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (3.46)$$

Kvasijakaumafunktiot voidaan antaa myös operaattorin T karakterisen funktion

$$\chi_T^s(\beta) = \text{Tr}[TD_\beta] e^{s|\beta|^2} \quad (3.47)$$

avulla [43, 44]

$$Q_T(\alpha) = \int_{\mathbb{C}} \chi_T^{-1}(\beta) e^{\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}} \frac{d^2\beta}{\pi}, \quad P_T(\alpha) = \int_{\mathbb{C}} \chi_T^1(\beta) e^{\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}} \frac{d^2\beta}{\pi}. \quad (3.48)$$

Husimin Q-funktio on aina positiivinen ja ei hajaannu [44], kun taas P-funktio saa negatiivisia arvoja tai muuttuu singulaariseksi jos T on jokin tiheysoperaattori, joka ei ole sekoitus pelkästään koherentteja tiloja [43]. Juuri tällainen käyttäytyminen on syy mikseivät funktiot ole päteviä todennäköisyysjakaumia ja sama on totta myös viimeiselle kvasijakaumalle.

Wignerin kvasijakaumafunktio $W(\alpha)$ [53] on Hilbertin avaruuden jälkiluokkaoperaattoria T vastaava funktio

$$W_T(\alpha) = \int_{\mathbb{C}} \chi_T^0(\beta) e^{\alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha}} \frac{d^2\beta}{2\pi^2}, \quad (3.49)$$

jonka voimme antaa myös funktiona kvanttisysteemin faasiavaruudessa (q, p) , kun $\alpha = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$ ja $\beta = \frac{q'+ip'}{\sqrt{2}}$ ja nyt

$$W_{\mathbf{T}}(q, p) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\mathbf{T}}^0(q', p') e^{i(pq' - qp')} \frac{dq' dp'}{4\pi^2}, \quad (3.50)$$

missä karakteristinen funktio on

$$\chi_{\mathbf{T}}^0(q', p') = \text{Tr}[\text{TD}_{q', p'}] = \text{Tr}\left[\text{T}e^{i(p'Q - q'P)}\right]. \quad (3.51)$$

Useamman moodin systeemin faasiavaruuden kvasijakaumat voimme antaa nyt helposti symplektisen muodon avulla. Olkoot \mathbf{r} ja \mathbf{y} kaksi reaaliparametriverktoria $\mathbf{r}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$ ja \mathbf{R} operaattorivektori kuten aikaisemmin. Karakterinen funktio voidaan antaa siis muodossa

$$\chi_{\mathbf{T}}^s(\mathbf{y}) = \text{Tr}[\text{TD}_{\mathbf{y}}] e^{s \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2}} = \text{Tr}\left[\text{T}e^{i\mathbf{y}^{\top} \mathbf{J} \mathbf{R}}\right] e^{s \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2}}, \quad (3.52)$$

ja Wignerin funktio on näin ilmaistuna

$$W_{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_{\mathbf{T}}^0(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{y}^{\top} \mathbf{J} \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{y}}{(2\pi)^{2n}}. \quad (3.53)$$

Integrointia ei itseasiassa tarvitse suorittaa gaussisille tiloille, vaan saamme Wignerin funktiolle suoraan kaavan [43, 44, 54]

$$W(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{d})^{\top} \sigma^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{d})}}{(2\pi)^n \sqrt{\det \sigma}}. \quad (3.54)$$

Kuten P-funktio, Wignerin funktio voi myös saada negatiivisia arvoja. Tämä tarkoittaa ettei se ole suoraan tulkittavissa kvanttisysteemin todennäköisyysjakoumaksi faasiavaruudessa. Syy tälle johtaa suoraan paikka- ja liikemääräoperaattoreiden ei-kommutatiivisuudesta, joka kertoo meille ettei näille suureille ole olemassa yhtäaikaista mittausta [55, 56]. Jälkiluokkaoperaattoreilla Wignerin funktion muodostaminen on muunnos $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n})$, $\text{T} \mapsto W_{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$ joten kahdelle operaattorille $\text{T}_1, \text{T}_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ pätee [2]

$$\langle W_{\text{T}_1}(\mathbf{r}) | W_{\text{T}_2}(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{W_{\text{T}_1}(\mathbf{r})} W_{\text{T}_2}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi} \text{Tr}\left[\text{T}_1^{\dagger} \text{T}_2\right], \quad (3.55)$$

ja erityisesti kahdelle tiheysoperaattorille $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ tästä seuraa, että Wignerin funktio on injektiivinen [2] eli

$$W_{\rho_1}(\mathbf{r}) = W_{\rho_2}(\mathbf{r}) \Rightarrow \rho_1 = \rho_2. \quad (3.56)$$

Tiheysoperaattorin ρ Wignerin funktion marginaalit antavat kvantttilan paikka- ja liikemääräesitysten todennäköisyystiheydet [57]

$$\int_{\mathbb{R}^n} W_{\rho}(\mathbf{r}) d\mathbf{p} = |\psi(\mathbf{q})|^2, \quad \int_{\mathbb{R}^n} W_{\rho}(\mathbf{r}) d\mathbf{q} = |\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2. \quad (3.57)$$

Tiedämme lisäksi, että kvadraattisen hamiltonin generoiman tilan, eli gaussisen tilan, Wignerin funktio on aina positiivinen [58], mikä jälleen tuo ilmi miten gaussiset tilat ovat lähimpinä klassisia systeemejä.

Esimerkki 3.1. Esitämme Wignerin funktiot vakuumi- ja termiselle tilalle. Vakuumitilan funktion johtamisen käymme läpi tarkemmin, mutta termiselle tilalle käytämme kaavaa 3.54. Karakterisen funktion laskeminen on tässä tapauksessa helppoa ja saamme tulokseksi

$$\begin{aligned} \chi_0(\alpha) &= \text{Tr}[|0\rangle\langle 0| D_{\alpha}] = \langle 0| D_{\alpha} |0\rangle \\ &= \langle 0| e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Wignerin funktio näyttää siis seuraavalta

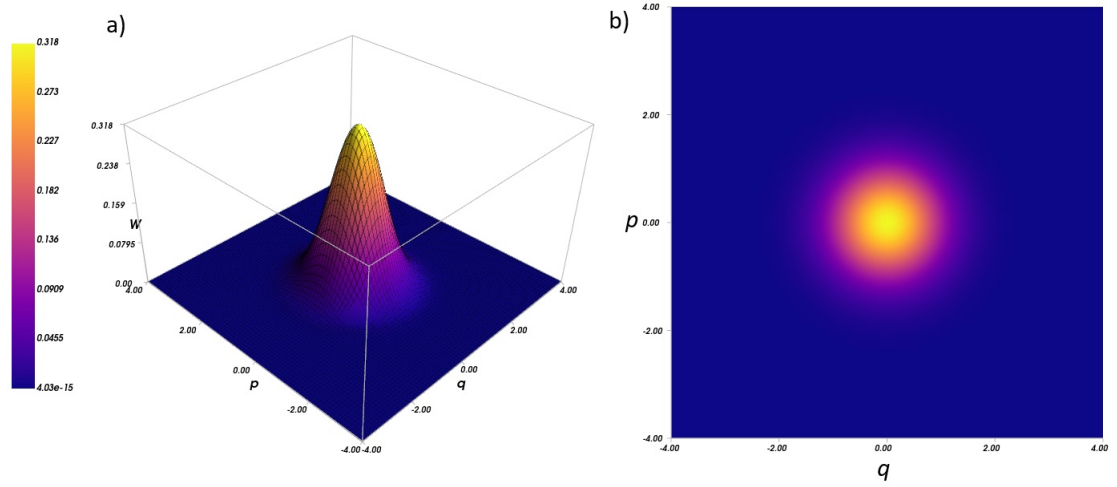
$$W_0(q, p) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{4}(q'^2 + p'^2)} e^{i(pq' - qp')} \frac{dq' dp'}{(2\pi)^2}, \quad (3.59)$$

kun esitämme kompleksiparametrit faasiavaruuskoordinaattien muodossa. Mietimme seuraavaksi tarkemmin integraalin osaa

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}p'^2} e^{-iqp'} \frac{dp'}{2\pi}.$$

Pienellä käsittelyllä voimme antaa sen muodossa

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}p'^2} e^{-iqp'} \frac{dp'}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}p'^2 - iqp' + q^2 - q^2} \frac{dp'}{2\pi} = e^{-q^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{p'}{2} + iq)^2} \frac{dp'}{2\pi}, \quad (3.60)$$



Kuva 1. Vakuumitilan Wignerin funktion $W_0(q, p)$ kuvaaja a) kolmiulotteisena ja b) kaksiulotteisena.

missä oikeinpuolimmaisoin integraali voidaan laskea kompleksianalyysin tietojen avuin, sillä integrandin analyttisyydestä ja Cauchyn lauseesta [59] seuraa ratkaisu

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{p'}{2} + iq\right)^2} \frac{dp'}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.61)$$

Vakuumitilan Wignerin funktio on siis

$$W_0(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-q^2 - p^2} \quad (3.62)$$

ja kuvassa 1 on piirrettynä sen kuvaaja.

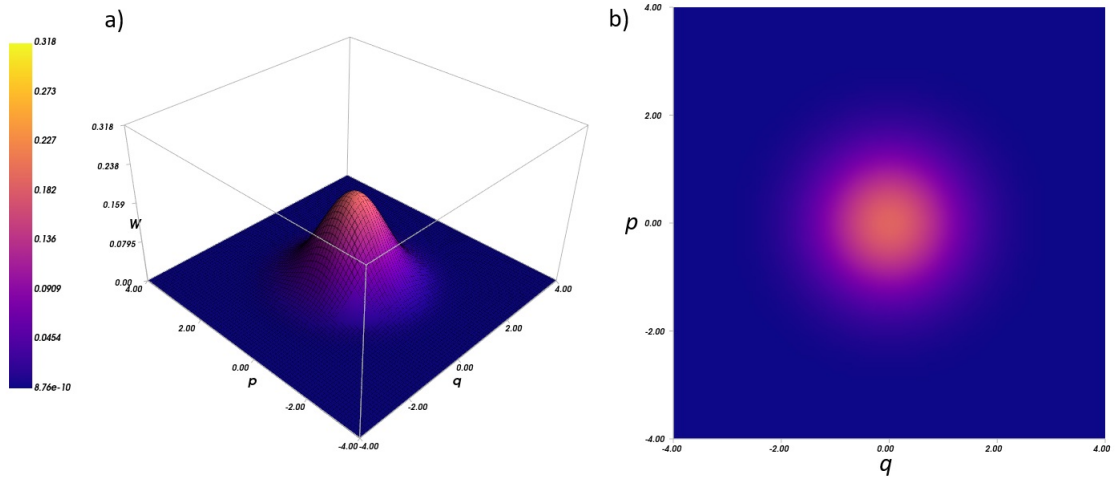
Vältymme hankalalta integraalien käsittelyltä käyttämällä kaavaa 3.54 ja saamme termisen tilan Wignerin funktioksi esimerkiksi

$$W_{th}(q, p) = \frac{3}{5\pi} e^{-\frac{3}{5}(q^2 + p^2)}, \quad (3.63)$$

kun sen kovarianssimatriisi on

$$\sigma_{th} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Kyseisen termisen tilan Wignerin funktio on esitetty kuvassa 2. Lisää tietoa tämän ja neljännen luvun esimerkkien kuvaajien piirtämisestä löytyy liitteestä A.



Kuva 2. Esimerkin 3.1 termisen tilan Wignerin funktion $W_{th}(q, p)$ kuvaaja a) kolmiulotteisena ja b) kaksiulotteisena.

Esimerkki 3.2. Koherentin tilan kovarianssimatriisi ja odotusarvovektori ovat

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

missä $x = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha)$ ja $y = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\alpha)$, kun α on tilan generoivan siirto-operaattorin parametri. Wignerin funktio on nyt

$$W_{\alpha}(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q-x)^2 - (p-y)^2} \quad (3.64)$$

ja sen kuvaaja on esitetty kuvassa 3 tapauksessa $\operatorname{Re}(\alpha) = 0.5 = \operatorname{Im}(\alpha)$.

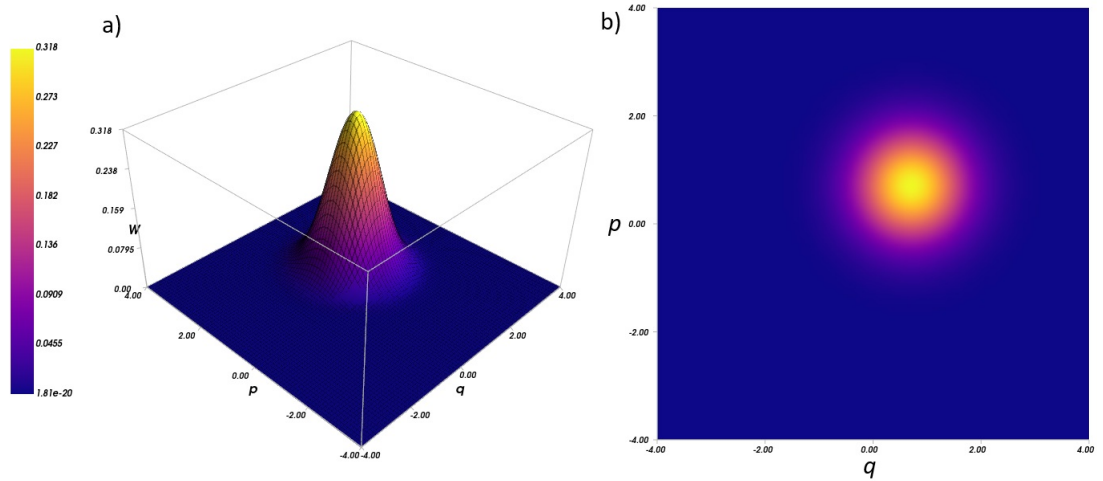
Esimerkki 3.3. Puristetun vakuumitilan $S_{\gamma} |0\rangle$ kovarianssimatriisi ja odotusarvovektori ovat

$$\sigma = \begin{pmatrix} B & C \\ C & A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

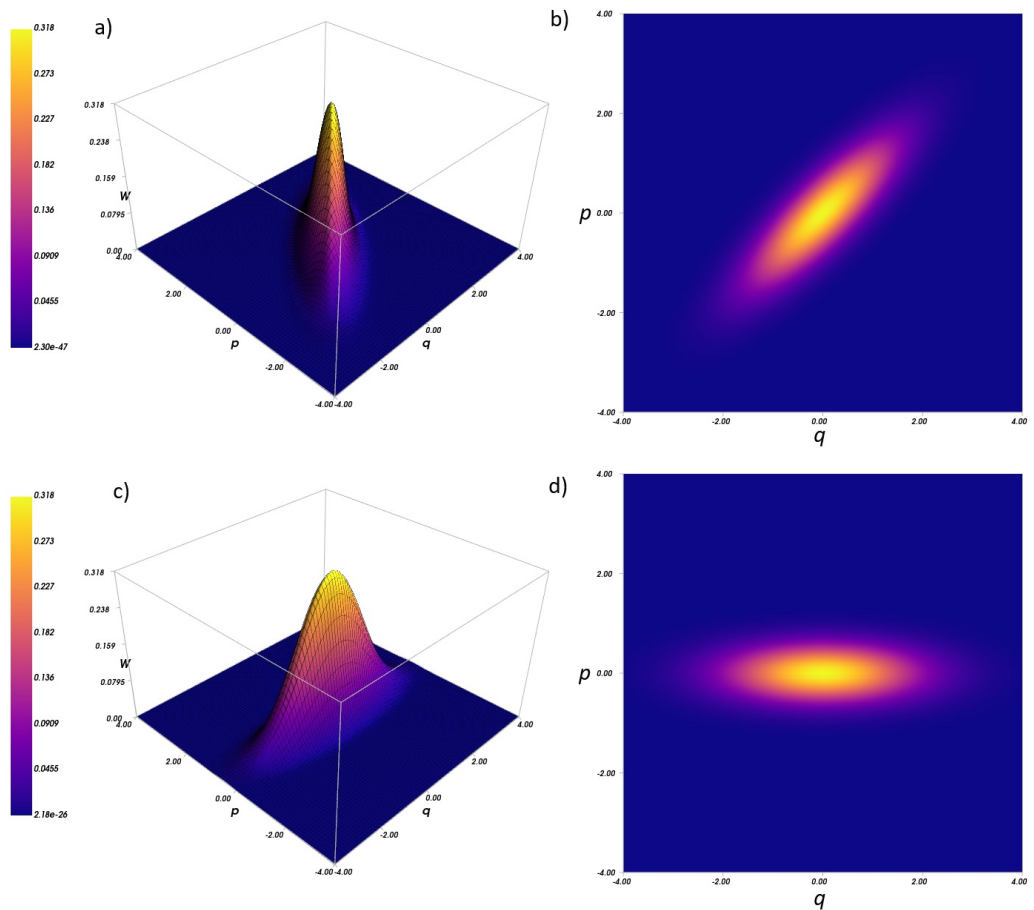
missä termit A, B ja C ovat

$$A = \cosh(4|\gamma|) - \cos(\varphi) \sinh(4|\gamma|), \quad B = \cosh(4|\gamma|) + \cos(\varphi) \sinh(4|\gamma|),$$

$$C = \sin(\varphi) \sinh(4|\gamma|),$$



Kuva 3. Esimerkin 3.2 koherentin tilan Wignerin funktion $W_\alpha(q, p)$ kuvaaja a) kolmiulotteisena ja b) kaksiulotteisena.



Kuva 4. Esimerkin 3.3 puristetun tilan Wignerin funktion $W_\gamma(q, p)$ kuvaaja a) kolmiulotteisena ja b) kaksiulotteisena sekä sama tila rotaation $\theta = \pi/4$ jälkeen c) kolmiulotteisena ja d) kaksiulotteisena.

ja φ on puristusparametrin vaihe $\gamma = |\gamma|e^{i\varphi}$. Wignerin funktio on siis

$$W_\gamma(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-Aq^2 - Bp^2 + 2Cqp} \quad (3.65)$$

ja sen kuvaaja on esitetty kuvassa 4, kun $|\gamma| = 0.3$ ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Rotaation vaikutuksen voimme laskea helposti sillä

$$\begin{aligned} R_\theta S_\gamma \rho_0 S_\gamma^\dagger R_\theta^\dagger &= R_\theta S_\gamma R_\theta^\dagger R_\theta \rho_0 R_\theta^\dagger R_\theta S_\gamma^\dagger R_\theta^\dagger \\ &= e^{R_\theta(\gamma a^\dagger a^\dagger - \bar{\gamma} a a) R_\theta^\dagger} \rho_0 e^{R_\theta(-\gamma a^\dagger a^\dagger + \bar{\gamma} a a) R_\theta^\dagger} \end{aligned}$$

ja nyt kaavojen 3.7 ja 3.8 avulla näemme, että

$$R_\theta a^\dagger R_\theta^\dagger = a^\dagger e^{-i\theta}.$$

Rotaation vaikutus puristettuun tilaan siis muuttaa vain parametrin γ vaihetta

$$\gamma \mapsto \gamma' = |\gamma| e^{i(\varphi - 2\theta)}.$$

Lopputuloksena saatu Wignerin funktio, kun $\theta = \frac{\pi}{4}$, on esitetty myös kuvassa 4.

3.4 Gaussiset tilat ja -operaatiot

Tilan odotusarvovektori \mathbf{d} ja kovarianssimatriisi σ siis karakterisoivat sen täysin gaussisen tilan tapauksessa ja silloin tilan Wignerin funktio on kaikkialla positiivinen. Kovarianssimatriisin diagonaali-alkiot ovat tietenkin faasiavaruussuureiden varianssit

$$\sigma_{ii} = \Delta^2 Q_i = \langle Q_i^2 \rangle - \langle Q_i \rangle^2, \quad \sigma_{i+n, i+n} = \Delta^2 P_i = \langle P_i^2 \rangle - \langle P_i \rangle^2,$$

joten niille pätee Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen [60] sääntö

$$\sigma_{ii} \sigma_{i+n, i+n} \geq \frac{1}{4}. \quad (3.66)$$

Kovarianssimatriisille on voimassa vahvempikin sääntö [61, 62]

$$\sqrt{\sigma} \mathbf{J} \sigma \mathbf{J}^\top \sqrt{\sigma} \geq \frac{1}{4}, \quad (3.67)$$

joka kertoo milloin mielivaltainen reaaliarvoinen positiivisesti definiitti matriisi on pätevä kovarianssimatriisi jollekin kvanttisysteemin tilalle. Nämä molemmat ehdot voidaan yhdistää helpommin ilmaistavaan epätarkkuusrelaatioon [43, 44, 61]

$$\sigma + \frac{i}{2}\mathbb{J} \geq 0, \quad (3.68)$$

joka siis sanoo matriisin $\sigma + \frac{i}{2}\mathbb{J}$ oltava positiivisesti semidefiniitti.

Gaussisiksi operaatioiksi kutsutaan sellaisia, jotka kuvaavat gaussisen tilan gaussiseksi. Näistä unitaariset kanavat ovat aikaisemmin esitettyä muotoa olevien operaattoreiden virittämiä. Olkoon $G_{\alpha,\theta,\gamma}$ yleinen unitaarinen gaussinen operaattori, jonka voimme siis antaa yleisten siirto-, rotaatio- ja puristusoperaattoreiden tulona

$$G_{\alpha,\theta,\gamma} = D_\alpha R_\theta S_\gamma, \quad (3.69)$$

missä operaattori D_α on tietenkin siirto-operaattori ja operaattori S_γ voi sisältää yhden moodin puristusten lisäksi myös kahden moodin puristusoperaattoreita, esimerkiksi

$$S_\gamma = \exp\left(\gamma a_i^\dagger a_j^\dagger - \bar{\gamma} a_j a_i\right). \quad (3.70)$$

Samoin operaattori R_θ voi sisältää kahden moodin ”rotaatioita”, eli kvanttioptiikassa säteenjakajaportteja

$$R_\theta = \exp\left(\theta a_i^\dagger a_j - \bar{\theta} a_j^\dagger a_i\right). \quad (3.71)$$

Unitaarinen gaussinen kanava on nyt siis mielivaltaisen tiheysoperaattorin ρ kuvaus

$$\rho \mapsto G_{\alpha,\theta,\gamma} \rho G_{\alpha,\theta,\gamma}^\dagger.$$

Merkkaamme jatkossa tällaista mielivaltaista gaussista tilaa tiheysoperaattorilla ρ_G . Heisenbergin kuvassa kanavan toiminta mielivaltaiseen Hilberin avaruuden operaattoriin T on tietenkin

$$T \mapsto G_{\alpha,\theta,\gamma}^\dagger T G_{\alpha,\theta,\gamma}.$$

Nämä unitaariset kuvaukset voidaan esittää myös translaatioina faasiavaruudessa, kun \mathbf{r} on siirto-operaattorin faasiavaruusparametrien vektori

$$D_{\mathbf{r}}\rho_G D_{\mathbf{r}}^\dagger \Leftrightarrow \mathbf{d} \mapsto \mathbf{d} + \mathbf{r},$$

sekä symplektisen ryhmän $Sp(2n, \mathbb{R}) = \{X \in SL(2n, \mathbb{R}) \mid X\mathbb{J}X^\top = \mathbb{J}\}$ [63] toimintana vektoriin \mathbf{d} ja kovarianssimatriisiin

$$\sigma \mapsto X\sigma X^\top, \quad \mathbf{d} \mapsto X\mathbf{d}.$$

Unitaarisen gaussisen kanavan toiminta systeemin tilaan on siis

$$\rho \mapsto G_{\alpha, \theta, \gamma} \rho G_{\alpha, \theta, \gamma}^\dagger, \quad \sigma \mapsto X\sigma X^\top, \quad \mathbf{d} \mapsto X\mathbf{d} + \mathbf{r}, \quad (3.72)$$

missä matriisi X ja vektori \mathbf{r} riippuvat tietenkin operaattorin $G_{\alpha, \theta, \gamma}$ parametreista. Yleinen gaussinen kanava on nyt kovarianssimatriisin ja odotusarvo vektorin kuvaus [64, 65]

$$\sigma \mapsto X\sigma X^\top + Y, \quad \mathbf{d} \mapsto X\mathbf{d} + \mathbf{r}, \quad (3.73)$$

missä matriisi Y kuvaa klassisen kohinan lisäämistä systeemiin [64] ja sille pätee sama positiivisuuden ja epätarkkuuden sääntö [65]

$$Y + \frac{i}{2}\mathbb{J} \geq 0.$$

Gaussinen mittaaminen on mittausjärjestely, jonka tulosten jakauma on gaussinen ja jonka virittämä instrumentti on gaussinen operaatio.

Faasiavaruusformalismien vahvuksien lista gaussisten tilojen kuvaamisessa kasvaa erilaisten matriisihajotelmien avulla. Williamsonin hajotelma [43, 44, 66, 67] sanoo, että mielivaltainen symmetrinen positiivisesti definiitti matriisi, joka olkoon nyt jonkin kvanttisysteemin gaussisen tilan kovarianssimatriisi σ , voidaan antaa symplektisen matriisin toimintana diagonaalimatriisiin V seuraavasti

$$\sigma = XVX^\top, \quad X \in Sp(2n, \mathbb{R}), \quad V = \mathbf{v} \oplus \mathbf{v}, \quad (3.74)$$

missä matriisi \mathbf{v} sisältää tilan symplektiset ominaisarvot ν_i

$$\mathbf{v} = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n). \quad (3.75)$$

Nyt matriisin determinantin ominaisuuksista seuraa suoraan

$$\begin{aligned} \det \sigma &= \det(\mathbf{XVX}^\top) = \det \mathbf{X} \det V \det \mathbf{X}^\top \\ &= \det V = \prod_i \nu_i^2, \end{aligned} \quad (3.76)$$

epätarkkuusperiaatteen takia arvoille pätee

$$\nu_i \geq \frac{1}{2},$$

ja tapaus $\nu_i = \frac{1}{2}$ kertoo kyseisen moodin olevan puhtaassa tilassa. Saamme nyt kovarianssimatriisin determinantista kaavan myös kvanttitalan puhtaudelle [43, 44]

$$\text{Tr}[\rho^2] = \frac{1}{2^n \sqrt{\det(\sigma)}}. \quad (3.77)$$

Symplektisille matriiseille taas on olemassa Blochin-Messiahin hajotelma, joka on tunnettu myös Eulerin hajotelmana, jonka mukaan symplektinen matriisi $\mathbf{X} \in Sp(2n, \mathbb{R})$ voidaan antaa muodossa [44, 67–69]

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}_1 \mathbf{K} \mathbf{O}_2, \quad (3.78)$$

missä matriisit $\mathbf{O}_i \in Sp(2n, \mathbb{R})$ ovat ortogonaalisia

$$\mathbf{O}_i \mathbf{O}_i^\top = \mathbf{O}_i^\top \mathbf{O}_i = \mathbf{1}, \quad \mathbf{O}_i^\top = \mathbf{O}_i^{-1},$$

ja diagonaalimatriisi \mathbf{K} on muotoa

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\kappa} \oplus \boldsymbol{\kappa}^{-1}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n).$$

Minkä tahansa symplektisen matriisin \mathbf{X} tuottama kovarianssimatriisi, kun alkupe-
räinen tila on vakuumitila $V = \frac{1}{2}\mathbf{1}$, on siis [64]

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{XVX}^\top = \mathbf{O}_1 \mathbf{K} \mathbf{O}_2 \frac{1}{2} \mathbf{1} \mathbf{O}_2^\top \mathbf{K} \mathbf{O}_1^\top \\ &= \mathbf{O}_1 \frac{1}{2} \mathbf{K}^2 \mathbf{O}_1^\top. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Näistä diagonaalimatriisi K vastaa kvanttioptiikassa aktiivisia operaatioita, tässä tapauksessa yhden moodin puristuksia, ja ortogonaaliset matriisit passiivisia operaatioita eli rotaatioita [70]. Näiden kahden tyyppin erona on aktiivisten operaatioiden kyky muuttaa systeemin energiaa, kun taas passiivisten operaatioiden suhteen energia on invariantti [71]. Tämä hajotelma kertoo meille, että mielivaltainen unitaarinen gaussinen kanava voidaan toteuttaa sarjana kahdenlaisia portteja [70]. Gaussiset tilat eivät siis pelkästään ole yleisiä luonnossa, vaan myös hyvinkin saavutettavissa kokeellisessa ympäristössä [43, 44].

Gaussisilla tiloilla ja -operaatioilla on jo sovellutuksia kvanttiteknologioissa [72, 73], mutta niillä on myös merkittäviä rajoituksia. Gaussisilla operaatioilla ei esimerkiksi voida tehdä virheenkorjauskoodeja [74], universaalia kvanttilaskentaa [54], eikä suorittaa lomittumisen tislausta [75]. Etenkin lomittumisen suhteen gaussiset tilat ovat samanlaisen kovarianssimatriisin omaavista kvanttituloista vähiten lomittuneita [76, 77]. Lisäksi gaussisten tilojen ja -operaatioiden Wignerin funktion positiivisuudesta seuraa, että teoriassa kaikki tällaiset tilat ja operaatiot ovat tehokkaasti simuloitavissa klassisesti. Edellä mainituista vahvuuksista, etenkin kokeellisesta helppoudesta, johtuen gaussiset tilat ovat rajoituksista huolimatta mielenkiintoisia. Seuraavassa luvussa käsittelemme kvanttisysteemin loppua tila-avaruutta eli ei-gaussisia tiloja. Tarkastelemme erilaisia tapoja karakterisoida tätä joukkoa, näiden tilojen kvanttiressurssuja gaussisiin tiloihin verrattuna, sekä myös miten joitain niistä voidaan valmistella gaussisista tiloista tietyillä mittausjärjestelyillä.

4 Ei-gaussiset tilat

Jotta voimme saavuttaa jatkuvilla kvanttisysteemeillä todellista etua laskennallisissa ongelmissa, tarvitsemme ei-gaussisia tiloja. Ei-gaussisten tilojen joukko on suuri ja nimensä mukaisesti nämä tilat ovat kaikki ne, jotka eivät ole gaussisia. Tällaisia ovat esimerkiksi Fockin kannan puhtaat tilat, Schrödingerin kissa -tilat ja

Gottesman-Kitaev-Preskill (GKP) -tilat [78], jotka ovat kaikki hyvin erilaisia. Näiden tilojen perusteellinen luokittelu sekä kvanttiresurssien tutkiminen on siis huomattavasti hankalampaa verrattuna gaussisiin tiloihin ja tämä on myös uudempi tutkimuksen kohde [64]. Näistä syistä emme pysty tekemään yhtä täydellistä selvitystä kuin gaussisille tiloille, mutta tarkastelemme seuraavaksi joitain tapoja karakterisoida ei-gaussisia tiloja, niiden resursseja, sekä niiden valmistelua.

4.1 Ei-gaussisten tilojen karakterisointi

Gaussiset tilat ovat siis kvadraattisen hamiltonin generoimia ja niiden Wignerin funktio on aina positiivinen. Toisaalta kahden gaussisen tilan, esimerkiksi kahden erilaisen koherentin tilan, sekoitus ei ole gaussinen tila sillä selvästi näiden tilojen Wignerin funktioiden painotettu summa ei ole enää normaalijakauma. Kuitenkin kyseisen tilan Wignerin funktio on selvästi edelleen kaikkialla positiivinen. Tämän joukon ulkopuolella ovat tilat joita kutsumme ei-klassisiksi ei-gaussisiksi tiloiksi (engl. *quantum non-Gaussian states*). Niiden Wignerin funktio voi edelleen olla positiivinen, mutta niitä ei voida antaa vain puhtaiden gaussisten tilojen sekoituksena, vaan hajotelmaan täytyy kuulua jokin tila, jonka Wignerin funktiossa on negatiivisuutta [64].

Tilan ei-gaussisuuden laadun arvioimiseksi on ehdotettu erilaisia mittoja [79, 80], mutta yksi hyödyllisimmistä on suhteellinen entropia [64]. Olkoon $S(\rho)$ kvanttitalan von Neumannin entropia [3]

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log \rho]. \quad (4.1)$$

Mielivaltaisen tilan ρ suhteellinen entropia on

$$\delta(\rho) = S(\rho||\sigma) = \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)], \quad (4.2)$$

missä σ on gaussinen tila, jolla on sama kovarianssimatriisi kuin tilalla ρ . Sen lisäksi, että gaussiset tilat ovat saman kovarianssimatriisin omaavista tiloista vähiten

lomittuneet ne myös maksimoivat entropian [64]. Tämä tarkoittaa, että $\delta(\rho) \geq 0$ aina. Suhteellisen entropian vahvuuksiin kuuluu ominaisuus [81]

$$\delta(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho = \sigma, \quad (4.3)$$

ja lisäksi voidaan todistaa, että σ todella on tilaa ρ lähin gaussinen tila [82].

Puhtailla tiloilla pätee, että positiivisen Wignerin funktion omaava tila on aina gaussinen [58, 83]. Tämä pohjalta on kehitetty yhden moodin tilojen ei-gaussisuudelle tähtiasteeksi (engl. *stellar rank*) kutsuttu mitta [64, 84]. Kun kvanttitalan Wignerin funktio on positiivinen, sen Q-funktio on aina suurempi kuin nolla. Näemme nyt suoraan Q-funktion määritelmästä, että se voidaan esittää puhtaalla tilalla $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ myös muodossa

$$Q_\rho(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} f_\psi(\bar{\alpha}) \overline{f_\psi(\bar{\alpha})} e^{-|\alpha|^2}, \quad (4.4)$$

missä $f_\psi(\bar{\alpha})$ on kaavassa 3.39 esiintyvä funktio. Kvanttitalan Q-funktion nollakohtien olemassa olo riippuu siis täysin funktiosta $f(\bar{\alpha})$ [64, 84]. Olkoon $r^*(\psi) = \{\alpha_i\}$ tilan funktion $f_\psi(\bar{\alpha})$ nollakohtien joukko. Kyseinen tila voidaan ilmaista myös tavalla

$$|\psi\rangle = \frac{1}{K} \prod_{r^*} D_{\alpha_i}^\dagger a^\dagger D_{\alpha_i} |G\rangle, \quad (4.5)$$

missä $|G\rangle$ on jokin gaussinen tila ja K on normalisointikerroin. Kvanttitalan tähtiaste määritellään nyt funktion $f_\psi(\bar{\alpha})$ nollakohtien määränä $|r^*(\psi)| = N$ [84]. Tähtiasteen käsite yleistyy sekoitetuille tiloille siten, että sen jokaisen mahdollisen hajotelman tähtiaste on suurin kyseisessä hajotelmassa esiintyvä aste ja tilan lopullinen aste on pienin näistä arvoista [64].

Tähtiasteen ominaisuuksiin kuuluu sen eräänlainen robustisuudeksi kutsuttu piirre, jonka avulla johonkin viitetilaan vertaamalla voidaan selvittää kuinka suuri mielivaltaisen kvanttitalan tähtiasteen täytyy olla [84, 85]. Selvästi kaikkien gaussisten tilojen aste on nolla ja tähtiaste on myös hyvin määritelty tapauksessa $N = \infty$, esimerkiksi GKP-tilat kuuluvat tähän luokkaan. Valitettavasti tähtiaste ei yleisty

suoraan usealle moodille, mutta Chabaud *et al.* ovat esittäneet toisenlaisen määritelmän näiden systeemien karakterisoimiseen. Kuten yhden moodin systeemillä, myös tämä tähtiasteen määritelmä liittyy tilan esittämiseen kompleksiarvoisen ja analyttisen funktion avulla, mutta on tärkeää huomata etteivät nämä kaksi määritelmää kuitenkaan ole ekvivalentteja [86].

4.2 Kvanttiresurssit

Kvanttiresurssiteoria jakaa kvanttisysteemin tilat ja kanavat vapaiden ja resurssien joukkoihin jonkin fysikaalisen rajoituksen perusteella [87]. Käytössä on siis jokin rajattu joukko fysikaalisia operaatioita ja ne tilat ja kanavat, jotka eivät ole toteutavissa niillä ovat resursseja. Olennainen kysymys on mitä resursseja vaaditaan ja kuinka, jotta kvanttisysteemi suoriutuu paremmin jostain laskennallisesta, tai muusta informaatioteoreettisesta, tehtävästä paremmin kuin mikään klassinen systeemi [88]. Tällaisen kvanttiedun saavuttaminen laskennallisissa tehtävissä on riippuvainen kolmen erilaisen resurssin läsnäolosta systeemissä [89]. Diskreeteille systeemeille nämä ovat lomittuminen [90], taikuus (engl. *quantum magic*) [91] ja koherenssi [92]. Jatkuville systeemeille näitä vastaavat resurssit ovat lomittuminen, ei-gaussisuus ja hiljattain identifioitu symplektinen koherenssi [89].

Ei-gaussisuuden etu on tietenkin sen Wignerin funktion negatiivisuudessa, sillä gaussisiin tiloihin ja kanaviin perustuva kvanttilaskenta on teoriassa mahdollista simuloida klassisesti [93, 94]. Eräs mitta on Wignerin funktion negatiivisuuden tilavuus [64, 95]

$$N(\rho) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |W_\rho(\mathbf{r})| d\mathbf{r} - 1. \quad (4.6)$$

Tämä mitta perustuu Wignerin funktion normalisointiin

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |W(\mathbf{r})| d\mathbf{r} \geq 1,$$

koska yhtäsuuruus ei toteudu Wignerin funktion saadessa negatiivisia arvoja [64]. Laajennamme nyt jatkuvassa formalismissa sekoitetun kvantttilan määritelmää ja merkitsemme

$$\rho = \int p(\tau) \rho^\tau d\tau, \quad (4.7)$$

missä τ on jokin mielivaltainen tapa nimetä puhtaat tilat ja $p(\tau)$ on todennäköisyysjakauma. Wignerin funktion negatiivisuuden tilavuus on konveksinen mitta, mikä tarkoittaa että [64]

$$N(\rho) \leq \int p(\tau) N(\rho^\tau) d\tau. \quad (4.8)$$

Tämä mitta valitettavasti ei ole additiivinen eli $N(\rho_1 \otimes \rho_2) \neq N(\rho_1) + N(\rho_2)$, minkä takia toinen tärkeä mitta on Wignerin funktion logaritminen negatiivisuus [95]

$$L(\rho) = \log \int_{\mathbb{R}^{2n}} |W(\mathbf{r})| d\mathbf{r}. \quad (4.9)$$

Logaritminen negatiivisuus selvästi on additiivinen, mutta sen sijaan se ei ole konveksinen [64].

Lomittuminen on yksi vain kvanttisysteemeille mahdollisista korrelaatioista, joita yleisesti kutsutaan kvanttikorrelaatioiksi [8]. Perinteinen esimerkki lomittuneesta tilasta on kahden spin- $\frac{1}{2}$ systeemin, joiden Hilbertin avaruudet olkoot \mathcal{H}_A ja \mathcal{H}_B , yhdistetty tila

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle),$$

missä $|xy\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$ ja $|x\rangle \in \mathcal{H}_A, |y\rangle \in \mathcal{H}_B$. Kun yhdistetyn systeemin puhdas tila voidaan antaa alisysteemien puhtaiden tilojen tensoritulona, sanotaan tilan tällöin olevan separoituva. Kvanttitila on lomittunut, jos se ei ole separoituva. Yleisemmin voidaan merkitä tilan $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ olevan separoituva, jos se on annettavissa muodossa

$$\rho = \sum_{\tau} p_{\tau} \rho_A^{\tau} \otimes \rho_B^{\tau}, \quad \sum_{\tau} p_{\tau} = 1. \quad (4.10)$$

Separoituvuus voidaan ilmaista myös Wignerin funktion avulla, kun merkkäämme systeemin A faasiavaruuskoordinaatteja vektorilla \mathbf{r} ja systeemin B koordinaatteja vektorilla \mathbf{s}

$$W(\mathbf{r} \oplus \mathbf{s}) = \int p(\tau) W_A^\tau(\mathbf{r}) W_B^\tau(\mathbf{s}) d\tau. \quad (4.11)$$

Yllä olevissa kaavoissa todennäköisyydet p_τ ja $p(\tau)$ edustavat klassisia korrelaatioita. Olkoot nyt X systeemin A observaabeli, Y systeemin B observaabeli ja $P_\rho(x)$ sekä $P_\rho(y)$ niiden mittaustulosten todennäköisyysjakaumat kvantttilassa ρ . Tilan separoituvuus antaa observaabeleiden yhteiseksi todennäköisyydeksi [64]

$$P_\rho(x, y) = \int p(\tau) P_\rho^\tau(x) P_\rho^\tau(y) d\tau. \quad (4.12)$$

Jos siis on olemassa jokin observaabeleiden pari (X, Y) , joka ei noudata yllä olevaa kaavaa 4.12, tiedetään tämän olevan todiste tilan lomittuneisuudesta.

Lomittumista vahvempi kvanttikorrelaatio on Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) -ohjaus (engl. *steering*) [96]. Tätä varten merkitsemme observaabeleiden X ja Y yhteistodennäköisyyttä

$$P(x, y) = \int p(\tau) P^\tau(x) P^\tau(y) d\tau, \quad (4.13)$$

missä nyt jakauma $P^\tau(x)$ on mielivaltainen todennäköisyysjakauma eli sen ei tarvitse liittyä mihinkään kvanttitilaan. Jos pari (X, Y) ei noudata kaavaa 4.13, systeemin A mittauksien sanotaan voivan ohjata systeemin B mittaustuloksia. Ohjaukseen liittyen on olemassa epäyhtälöitä, jotka asettavat rajan sille kuinka paljon informaatiota systeemin B mittaustuloksista voidaan saada mittaamalla vain systeemin A suureita pelkästään klassisilla korrelaatioilla [64]. Selvästi mikä tahansa tila, joka ei toteuta yhtälöä 4.13 ei toteuta myöskään yhtäsuuruutta 4.12. Jokainen EPR-ohjattava tila on siis lomittunut, mutta kaikki lomittuneet tilat eivät ole ohjattavissa. Kuten jo aikaisemmin mainitsimme gaussiset tilat ovat vähiten lomittuneita joten ei-gaussisten tilat voivat tarjota hyötyä myös sen suhteen Wignerin funktion negatiivisuuden li-

säksi. Toisaalta gaussisten tilojen lomittumisella ja EPR-ohjauksella on tärkeä rooli, kun haluamme valmistella ei-gaussisia tiloja gaussisista tiloista.

4.3 Ei-gaussisten tilojen valmistelu

Kuten jo mainitsimme gaussisilla kanavilla ei voida suorittaa universaalia kvanttilaskentaa, eli toteuttaa mielivaltaista unitaarista operaattoria. Tätä varten siirto-, puristus- ja rotaatio-operaattoreiden joukkoon on lisättävä kolmannen asteen operaattoreiden $\{a, (a^\dagger)^3\}$ virittämä unitaarinen operaattori, joka voidaan antaa faasiavaruusformalismissa kuutiovaiheoperaattorina (engl. *cubic phase*) [97–99]

$$C_\eta = e^{-i\eta Q^3}. \quad (4.14)$$

Tämä operaattori todella on tarpeeksi, jotta joukon $\{D_\alpha, S_\gamma, R_\theta, C_\eta\}$ operaattoreiden tuloilla voidaan toteuttaa mielivaltainen unitaarinen operaattori [54, 97, 100]. Tietenkin operaattorin C_η virittämä kvanttitila ei ole gaussinen sillä se ei ole kvadraattinen faasiavaruusoperaattoreiden suhteen. Kuutiovaiheporttia käyttämällä ei-gaussisia tiloja voidaan valmistella deterministisesti, mutta sen toteuttaminen käytännössä on erittäin hankalaa [64, 101] joten keskitymme lopun tutkielman ajan probabilistisiin tapoihin valmistella ei-gaussisia tiloja.

Ei-gaussisia tiloja voidaan valmistaa ehdollisesti gaussisista tiloista käyttämällä ei-gaussisia mittauksia osassa 1.7 käsitellyn järjestelyn avulla. Tällöin käytämme osaa systeemimme moodeista anturina, johon tehtyjen mittausten tulosten perusteella valitsemme halutun lopputilan. Lomittumisella ja EPR-ohjauksella on iso merkitys tähän valmisteluun liittyvinä resursseina. Jos alkuperäinen kvanttitila on separoituva, on minkä tahansa mittausjärjestelyn virittämä ehdollinen valmistelu sellainen, että lopputila on gaussisten tilojen sekoitus. Lomittuminen mahdollistaa siis ei-klassisen ei-gaussisen lopputilan ja Wignerin funktion negatiivisuuteen tarvitaan lisäksi EPR-ohjattavuutta [102]. Hieman epäintuitiivisesti vaaditaan, että varsinaisen systeemin mittaukset voivat ohjata anturin mittaustuloksia jotta antu-

riin tehdyt mittaukset voivat tuottaa systeemiin Wignerin funktion negatiivisuutta. Wignerin funktion negatiivisuuden tilavuus ei myöskään ole suoraan riippuvainen ohjattavuuden vahvuudesta [64].

Tärkeä esimerkki ovat niin kutsutut lisättyjen ja poistettujen fotonien tilat (engl. *photon-added/subtracted states*) [103–106]. Erityisesti näitä tiloja voidaan valmistella, kun alkutilana on gaussinen tila. Emme käy läpi tällaisen valmistelun kokeellisia toteutuksia läpi tässä tutkielmassa, mutta niistä voi löytää lisää tietoa esimerkiksi lähteistä [107–111]. Tällainen ei-gaussinen tila on siis nimensä mukaisesti jokin mielivaltainen gaussinen tila johon on tehty yksi tai useampi fotonin lisäys- tai poisto-operaatio. Esimerkiksi yhden fotonin tapauksessa, kun alkuperäinen tila on ρ_G , ehdollinen valmistelu on kuvaus

$$\rho_G \mapsto \rho_G^f = \frac{b\rho_G b^\dagger}{K}, \quad (4.15)$$

missä $b \in \{a, a^\dagger\}$ on joko bosoninen lasku- tai nosto-operaattori ja $K = \text{Tr}[b\rho_G b^\dagger]$ on normalisointikerroin. Jatkossa yleinen lisättyjen tai poistettujen fotonien tila ρ_G^f , joka on valmisteltu gaussisesta tilasta ρ_G , on siis

$$\rho_G^f = \frac{1}{K} B \rho_G B^\dagger, \quad K = \text{Tr}[B \rho_G B^\dagger], \quad (4.16)$$

missä operaattori $B = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_m}$ on jokin sarja fotonien lisäyksiä tai poistoja ja $i \in \mathcal{I}$ ovat systeemien moodien nimet. Esittelemme nyt luvun lopuksi kaksi yksinkertaista esimerkkiä yhden fotonin lisäämisestä ja poistamisesta. Esimerkit perustuvat Genonin *et al.* artikkelissa [112] käsiteltyihin tiloihin, mutta emme tee samanlaista oletusta minkään parametrin reaalisuudesta.

Esimerkki 4.1. Tarkastelkaamme koherenttia tilaa johon on lisätty yksi fotoni. Kyseinen tila on muotoa

$$\rho_\alpha^+ = \frac{a^\dagger \rho_\alpha a}{\text{Tr}[a^\dagger \rho_\alpha a]}, \quad (4.17)$$

missä ρ_α on koherentti tila, jonka siirto-operaattorin parametri on $\alpha \in \mathbb{C}$. Normalisointikerroin on helppo laskea sillä se on fotonien lukumäärään liittyvä odotusarvo

$$\text{Tr}[a^\dagger \rho_\alpha a] = \text{Tr}[\rho_\alpha a a^\dagger] = \text{Tr}[\rho_\alpha (a^\dagger a + \mathbf{1})] = |\alpha|^2 + 1. \quad (4.18)$$

Tilan karakterinen funktio on siis

$$\chi_\alpha^+(\beta) = \frac{1}{|\alpha|^2 + 1} \text{Tr}[a^\dagger \rho_\alpha a D_\beta], \quad (4.19)$$

missä jäljen laskemisesta tekee helpompaa tieto siirto-operaattorin toiminnasta

$$D_\alpha^\dagger a^\dagger D_\alpha = a^\dagger + \bar{\alpha}, \quad D_\alpha^\dagger a D_\alpha = a + \alpha, \quad D_\alpha^\dagger D_\beta D_\alpha = D_\beta e^{\frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})}, \quad (4.20)$$

ja saamme tulokseksi

$$\begin{aligned} \chi_\alpha^+(\beta) &= \frac{1}{|\alpha|^2 + 1} \text{Tr}[D_\alpha (a^\dagger + \bar{\alpha}) \rho_0 (a + \alpha) D_\alpha^\dagger D_\beta] \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})}}{|\alpha|^2 + 1} \text{Tr}[(a^\dagger \rho_0 a + a^\dagger \rho_0 \alpha + \bar{\alpha} \rho_0 a + |\alpha|^2 \rho_0) D_\beta]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Lisäksi tiedämme, että siirto-operaattorille pätee kaava [46]

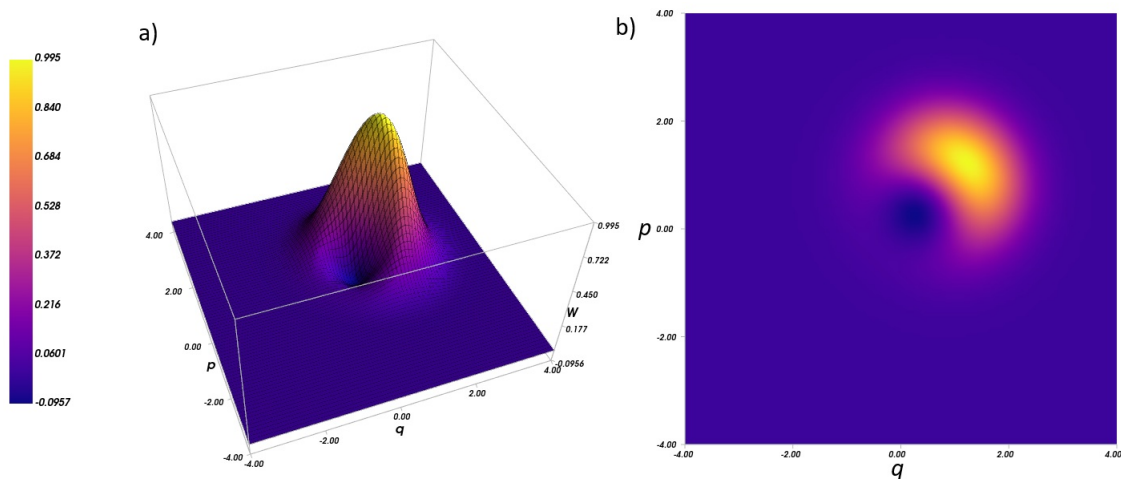
$$\langle s | D_\beta^\dagger | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{s!}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{l=0}^{\min s, n} (-1)^{s-l} \binom{s}{l} \frac{\sqrt{n!}}{(n-l)!} \beta^{s-l} \bar{\beta}^{n-l} \quad (4.22)$$

ja, koska $D_\beta^\dagger = D_{-\beta}$, voimme nyt laskea karakterisen funktion termit

$$\begin{aligned} \text{Tr}[a^\dagger \rho_0 a D_\beta] &= \text{Tr}[|1\rangle\langle 1| D_\beta] = \langle 1 | D_\beta | 1 \rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} (-|\beta|^2 + 1), \\ \text{Tr}[a^\dagger \rho_0 \alpha D_\beta] &= \langle 0 | \alpha D_\beta | 1 \rangle = -\alpha \bar{\beta} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}, \\ \text{Tr}[\bar{\alpha} \rho_0 a D_\beta] &= \langle 1 | \bar{\alpha} D_\beta | 0 \rangle = \bar{\alpha} \beta e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Tämän tilan Wignerin funktio on siis

$$\begin{aligned} W_\alpha^+(\lambda) &= \int_{\mathbb{C}} \chi_\alpha^+(\beta) e^{\lambda \bar{\beta} - \beta \bar{\lambda}} \frac{d^2 \beta}{2\pi^2} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2 + 1} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{\frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})} e^{\lambda \bar{\beta} - \beta \bar{\lambda}} (1 - |\beta|^2 - \alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta + |\alpha|^2) \frac{d^2 \beta}{2\pi^2}, \end{aligned} \quad (4.24)$$



Kuva 5. Esimerkin 4.1 lisätyn fotonin koherentin tilan Wignerin funktion kuvaaja, kun siirto-operaattorin parametrille pätee $\text{Re}(\alpha) = 0.5$ ja $\text{Im}(\alpha) = 0.5$, a) kolmiulotteisena ja b) kaksiulotteisena.

ja merkitsemällä nyt kompleksiparametrit muodossa

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(q' + ip'), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip),$$

ja integroimalla kuten esimerkissä 3.1 saamme lopputulokseksi

$$W_{\alpha}^{+}(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q-x)^2 - (p-y)^2} \left(-1 + 4(q^2 + p^2) - 2(qx + yp) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)}. \quad (4.25)$$

Kuvassa 5 on esitetty tilan Wignerin funktio, kun siirtoparametri on $\text{Re}(\alpha) = 0.5$, $\text{Im}(\alpha) = 0.5$.

Esimerkki 4.2. Tässä esimerkissä käsittelemme puristettua vakuumia, josta on poistettu yksi foton. Tilan tiheysoperaattori on tietenkin

$$\rho_{\gamma}^{-} = \frac{a\rho_{\gamma}a^{\dagger}}{\text{Tr}[a\rho_{\gamma}a^{\dagger}]}, \quad (4.26)$$

missä $\rho_\gamma = S_\gamma \rho_0 S_\gamma^\dagger$ ja $\gamma = |\gamma| e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Normalisointikerroin on nyt

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[a\rho_\gamma a^\dagger] &= \text{Tr}[\rho_0 S_\gamma^\dagger a^\dagger a S_\gamma] \\
&= \text{Tr}[\rho_0 (\cosh^2(2|\gamma|) a^\dagger a + e^{i\varphi} \cosh(2|\gamma|) \sinh(2|\gamma|) a^\dagger a^\dagger \\
&\quad + e^{-i\varphi} \cosh(2|\gamma|) \sinh(2|\gamma|) a a + \sinh^2(2|\gamma|) a a^\dagger)] \\
&= \langle \cosh^2(2|\gamma|) a^\dagger a + \sinh^2(2|\gamma|) (a^\dagger a + \mathbf{1}) \rangle_0 = \sinh^2(2|\gamma|). \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Samoin kuin edeltävässä esimerkissä voimme järjestää operaattorit muotoon

$$\begin{aligned}
a S_\gamma \rho_0 S_\gamma^\dagger a^\dagger &= S_\gamma S_\gamma^\dagger a S_\gamma \rho_0 S_\gamma^\dagger a^\dagger S_\gamma S_\gamma^\dagger \\
&= S_\gamma (\cosh(2|\gamma|) a + e^{i\varphi} \sinh^2(2|\gamma|) a^\dagger) \rho_0 \\
&\quad \times (\cosh^2(2|\gamma|) a^\dagger + e^{-i\varphi} \sinh^2(2|\gamma|) a) S_\gamma^\dagger \\
&= e^{i\varphi} e^{-i\varphi} \sinh^2(2|\gamma|) S_\gamma a^\dagger \rho_0 a S_\gamma^\dagger \tag{4.28}
\end{aligned}$$

ja saamme tilan karakteriseksi funktioksi

$$\begin{aligned}
\chi_\gamma^-(\beta) &= \text{Tr}[\rho_\gamma^- D_\beta] = \frac{1}{\sinh^2(2|\gamma|)} \text{Tr}[\sinh^2(2|\gamma|) S_\gamma a^\dagger \rho_0 a S_\gamma^\dagger D_\beta] \\
&= \text{Tr}[|1\rangle\langle 1| S_\gamma^\dagger D_\beta S_\gamma] = \langle 1| S_\gamma^\dagger D_\beta S_\gamma |1\rangle, \tag{4.29}
\end{aligned}$$

missä puristuksen toiminta siirto-operaattoriin antaa tulokseksi uuden siirron

$$S_\gamma^\dagger D_\beta S_\gamma = e^{\beta' a^\dagger - \bar{\beta}' a}, \tag{4.30}$$

jonka parametri β' on

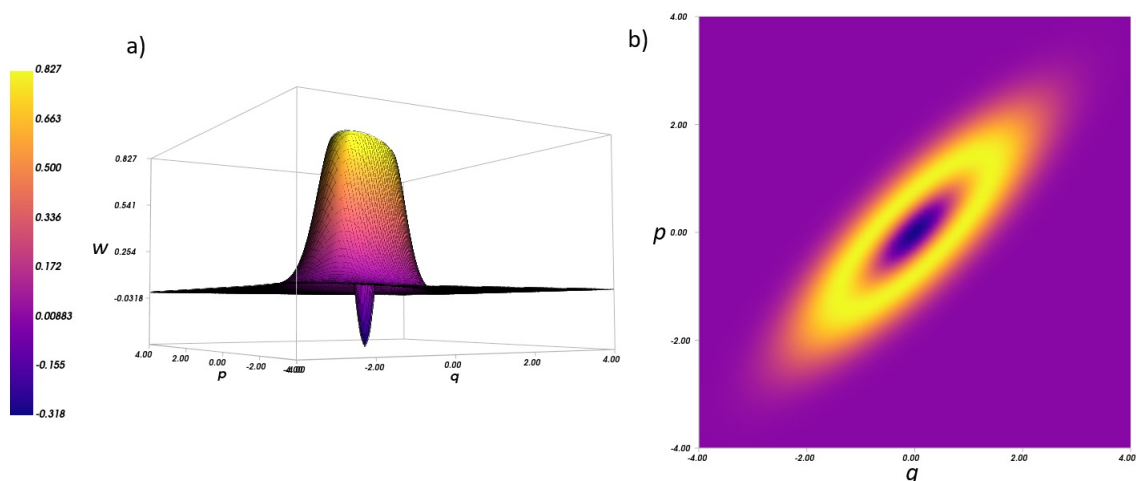
$$\beta' = \beta \cosh(2|\gamma|) - \bar{\beta} e^{i\varphi} \sinh(2|\gamma|). \tag{4.31}$$

Käyttämällä nyt kaavaa 4.22 saamme karakterisen funktion lopulliseksi muodoksi

$$\chi_\gamma^-(\beta) = (1 - |\beta'|^2) e^{-\frac{|\beta'|^2}{2}}. \tag{4.32}$$

Tämän tilan Wignerin funktio on siis

$$W_\gamma^-(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (1 - |\beta'|^2) e^{-\frac{|\beta'|^2}{2}} e^{\lambda \bar{\beta} - \beta \bar{\lambda}} \frac{d^2 \beta}{2\pi^2}, \tag{4.33}$$



Kuva 6. Esimerkin 4.2 poistetun fotonin puristetun tilan Wignerin funktion kuvaaja, kun puristuksen parametrille pätee $|\gamma| = 0.3$ ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a) kolmiulotteisena ja b) kaksiulotteisena.

missä jälleen antamalla kompleksiparametrit faasiavaruuskoordinaattien avulla ja integroimalla saamme tulokseksi

$$W_{\gamma}^{-}(q, p) = \left(4|\lambda'|^2 - 1\right) \frac{1}{\pi} e^{-Aq^2 - Bp^2 + 2Cqp}. \quad (4.34)$$

Yllä olevassa kaavassa kertoimet A , B , ja C ovat samat kuin esimerkissä 3.3 ja

$$|\lambda'|^2 = 2Aq^2 + 2Bp^2 - 4Cqp. \quad (4.35)$$

Tilan Wignerin funktio on esitetty kuvassa 6 tapauksessa $|\gamma| = 0.3$ ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

5 Fotonien lisääminen sekä poistaminen ja Wickin lause

Seuraavaksi tarkastelemme enemmän edeltävässä luvussa esiteltyjä lisättyjen ja poistettujen fotonien tiloja ja niiden mahdollisesti tarjoamaa todellista kvanttietua laskennallisissa ongelmissa. Kuten luvuissa 3 ja 4 kävimme läpi, gaussiset tilat ovat teoriassa tehokkaasti simuloitavissa klassisilla tietokoneilla niiden Wignerin funktion positiivisuuden takia. Keskitymme nyt lisättyjen ja poistettujen fotonien tilo-

jen operaattoreiden momenttien laskemiseen ja mietimme kuinka hankalaa niitä on laskea klassisesti. Aloitamme esittelemällä Wickin todennäköisyyslauseen, joka on merkittävässä osassa momenttien arvojen laskemisessa.

5.1 Wickin todennäköisyyslause

Wickin lause on alunperin bosonisten- ja fermionisten nosto- ja laskuoperaattoreiden tulojen järjestelyyn liittyvä identiteetti, jonka mukaan mielivaltainen tulo voidaan antaa operaattoreiden niin kutsuttujen normaalijärjestettyjen tulojen ja kontraktioiden muodostamien termien summina [113]. Normaalijärjestetyssä tulossa kaikki nosto-operaattorit ovat laskuoperaattoreiden vasemmalla puolella ja merkitsemme sitä

$$:b_1 \dots b_n: .$$

Operaattoreiden kontraktio on skalaaritermi, joka riippuu valitusta viitetilasta. Viitetilan ollessa vakuumitila kontraktio on itseasiassa operaattoreiden momentti ja merkkäämme sitä

$$\underline{b_1 b_2} \equiv \langle b_1 b_2 \rangle .$$

Yllä olevissa merkinnöissä operaattori b voi olla bosoninen nosto- tai laskuoperaattori $b \in \{a, a^\dagger\}$. Wickin lauseen mukaan operaattoreiden tulo voidaan siis ilmaista muodossa

$$\begin{aligned} b_1 \dots b_n = & :b_1 \dots b_n: + \underline{b_1 b_2} :b_3 \dots b_n: + \underline{b_1 b_3} :b_2 \dots b_n: + \underline{b_1 b_4} :b_2 \dots b_n: + \dots \\ & + \underline{b_1 b_2} \underline{b_3 b_4} :b_5 \dots b_n: + \underline{b_1 b_3} \underline{b_2 b_4} :b_5 \dots b_n: + \dots , \end{aligned} \quad (5.1)$$

missä summa käy läpi kaikki kahden, neljän, kuuden, ja niin edelleen, operaattorin kontraktiot. Yhtälö 5.1 antaa kätevän kaavan operaattoreiden momentille vakuumitilassa $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$

$$\langle b_1 \dots b_n \rangle_0 = \sum_{p \in P} \prod_{(i,j) \in p} \langle b_i b_j \rangle_0 , \quad (5.2)$$

sillä selvästi jokaiselle normaalijärjestetylle tulolle

$$\langle :b_1 \dots b_n: \rangle_0 = \text{Tr}[\rho_0 :b_1 \dots b_n:] = \langle 0 | :b_1 \dots b_n: | 0 \rangle = 0,$$

koska laskuoperaattorit annihiloivat vakuumin. Kaavassa 5.2 P on joukko, joka sisältää kaikki indeksien partitioinnit pareihin, p eräs tällainen partitio ja (i, j) partitioon kuuluva pari.

Wickin lauseelle on useita yleistyksiä, mutta tälle tutkielmalle olennainen on Wickin todennäköisyyslause yleisille gaussisille tiloille.

Lause 5.1 (Wickin todennäköisyyslause). *Jos kaikille bosonisille nosto- ja laskuoperaattoreille b pätee*

$$\langle b \rangle_G = \text{Tr}[\rho_G b] = 0,$$

niin operaattoreiden momentit voidaan laskea kaavalla

$$\langle b_1 \dots b_n \rangle_G = \begin{cases} \sum_{p \in P} \prod_{(i,j) \in p} \langle b_i b_j \rangle_G, & l(b_1 \dots b_n) \text{ on parillinen,} \\ 0, & l(b_1 \dots b_n) \text{ on pariton,} \end{cases}$$

missä $l(b_1 \dots b_n)$ on operaattoreiden määrä.

Emme käy lauseen todistusta läpi sen monimutkaisuuden takia, sillä vaikka tulos on jo pitkään tunnettu todennäköisyysteoriassa normaalijakaumaa noudattaville reaaliuuttujille Isserlisin lauseena [114], sen yleistäminen kompleksiparametreihin liittyville ei-kommutoiville operaattoreille on hankalaa. Gaudinin todistus termisille tiloille [115] ja Vaglican *et al.* todistus puristetulle vakuumille [116] käyttävät molemmat hyväksi operaattoreiden kommutaattorin sisäisen derivaatan ominaisuuksia ja muita kommutaatioääntöjä. Esimerkiksi termisen tilan tapauksessa, kun $\rho_{th} = \frac{1}{Z} e^{-\omega a^\dagger a}$, jälleen kerran Lien teorian avuin voidaan laskea

$$\rho_{th}^{-1} a \rho_{th} = e^{-\omega} a, \quad \rho_{th}^{-1} a^\dagger \rho_{th} = e^{\omega} a^\dagger, \quad (5.3)$$

eli nosto- tai laskuoperaattori voidaan siirtää termisen tiheysoperaattorin toiselle puolelle lisäämällä tuloon skalaarikerroin. Tämä johtaa samanlaiseen tapaukseen kuin vakuuutilassa, missä operaattoreiden kontraktio on myös niiden momentti ja induktiolla Wickin todennäköisyyslause voidaan todistaa mielivaltaiselle määrälle operaattoreita. Todistus puristetulle vakuuutilalle etenee kuin termiselle tilalle, mutta kahden operaattorin kontraktion ja momentin yhtäsuuruus riippuu nyt vakuumin annihiloitumisesta [116].

Kohtaamme kuitenkin ongelmia, jos yritämme yleistää lauseen esimerkiksi puristetulle termiselle tilalle käyttäen samoja menetelmiä. Kahden moodin puristusoperaattorin toiminta kuvaa nosto- tai laskuoperaattorin b_i kahden operaattorin summaksi

$$S_\gamma^\dagger b_i S_\gamma = C_1 b_i + C_2 b_j^\dagger, \quad (5.4)$$

missä kertoimet C_1, C_2 ovat verrannollisia hyperbolisiin funktioihin ja niiden tarkat arvot riippuvat siitä onko b_i nosto- vai laskuoperaattori. Näemme heti, että emme voi käyttää termisen tiheysoperaattorin toimintaa apuna sillä nyt

$$(C_1 b_i + C_2 b_j^\dagger) \rho_{th} = \rho_{th} (C_1 b_i e^{\pm\omega_i} + C_2 b_j^\dagger e^{\mp\omega_j}). \quad (5.5)$$

Jotta yhtälön oikealla puolella oleva operaattori olisi edelleen kaavan 5.4 operaattori skalaarilla kerrottuna, tarvittaisiin ehto $\omega_j = -\omega_i$. Ottaen huomioon fotonien lukumäärän odotusarvon, $\bar{n}_i = (e^{\omega_i} - 1)^{-1}$, voimme laskea moodin j kertoimen e^{ω_j} suhteen arvoon \bar{n}_i

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{n}_i} &= e^{\omega_i} - 1 \\ \frac{1}{\bar{n}_i} + 1 &= e^{\omega_i} \\ \left(\frac{1}{\bar{n}_i} + 1 \right)^{-1} &= e^{-\omega_i} = e^{\omega_j}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Moodi j saisi nyt negatiivisen odotusarvon sillä

$$e^{\omega_j} - 1 = \frac{1}{\bar{n}_i^{-1} + 1} - 1 = \frac{1 - \bar{n}_i^{-1} - 1}{\bar{n}_i^{-1} + 1}$$

$$\bar{n}_j = - \left(\frac{\bar{n}_i^{-1}}{\bar{n}_i^{-1} + 1} \right)^{-1} = -(\bar{n}_i + 1), \quad (5.7)$$

mikä ei ole millään tavalla järkevää.

Valitettavasti siis fysiikan motivoimaa todistusta Wickin todennäköisyyslauseelle mielivaltaiselle gaussiselle tilalle ei ole helppo tehdä yleistämällä näitä operaattori-formalismissa tehtyjä todistuksia ja kirjallisuuskin usein viittaa vain Wickin alkupe-
räiseen tulokseen. Helpoin todistus lauseelle johtaa ilmeisesti nosto- ja laskuoperaat-
torien differentioivasta toiminnasta tilan Wignerin tai karakteriseen funktioon [117]
Wirtingerin derivaattoina [118–120]. Kirjallisuudesta löytyy myös muita yleistyksiä
reaalimuuttujien tapauksesta kompleksiseen [121] sekä myös muiden algebrallisesti
monimutkaisempien muuttujien momenteille [122], mikä voisi tarjota toisen tavan
todistukselle sillä bosonisilla operaattoreilla on mielenkiintoinen yhteys tietyyntyy-
pisiin faasiavaruuden observaabeleihin [46].

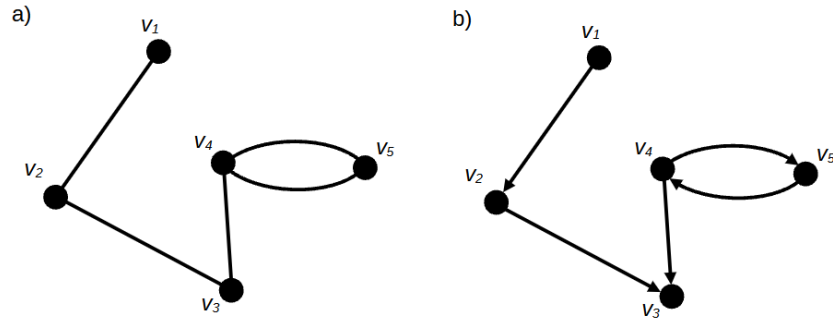
Wickin todennäköisyyslauseen vaatimus $\langle b \rangle_G = 0$ implikoi suoraan, että tilojen
siirto on nolla ($D_\alpha = \mathbb{1}$), sillä

$$D_\alpha^\dagger a_i D_\alpha = a_i + \alpha \Rightarrow \langle D_\alpha^\dagger a_i D_\alpha \rangle_0 = \alpha.$$

Jatkossa puhumme lyhyemmin vain Wickin lauseesta, mutta tarkoitamme lausetta
5.1. Lisäksi emme jatkossa merkitse erikseen alaindeksiä G , vaan oletamme kaikkien
odotusarvojen ja momenttien olevan Wickin lausetta noudattaville gaussisille tiloille.

5.2 Graafiteoria, sovituksset ja hafniani

Wickin lauseen antaman summan termejä voidaan tarkastella tehokkaasti graafiteo-
rian [123, 124] kautta. Matematiikassa graafi on yksinkertaisimmillaan pari (V, E) ,
missä V on joukko solmuja (engl. *vertex*) ja E joukko solmujen pareja (v_i, v_j) . Solmu-
jen v_i ja v_j välillä sanotaan olevan kaari tai linkki (engl. *edge*), jos pari $(v_i, v_j) \in E$.



Kuva 7. Esimerkin 5.1 graafi a) suuntaamattomana ja b) suunnattuna

Graafi voidaan helposti esittää kuvana piirtämällä solmut pisteinä ja linkit niiden välisinä viivoina. Suunnatussa graafissa linkit omaavat myös nimen mukaisesti suunnan. Tässä tapauksessa piirrämme linkit nuolina ja parit (v_i, v_j) ja (v_j, v_i) ovat samojen solmujen välillä olevat, eri suuntiin osoittavat linkit.

Esimerkki 5.1. Olkoon $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ solmujen joukko ja

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_4)\}$$

linkkien joukko. Kuvassa 7 on esitetty graafi (V, E) suuntaamattomana sekä suunnattuna.

Bosonisten operaattoreiden momentit gaussisessa tilassa Wickin lauseen antamana summana voidaan laskea käyttämällä apuna erään graafin täydellisiä sovituksia (engl. *perfect matching*) [125]. Jos laskemme arvoa $\langle b_1 \dots b_n \rangle$ muodostamme suunnatun graafin, joka on yhtenäinen (engl. *fully connected*) eli kaikilla solmuilla on linkki kaikkiin muihin solmuihin. Graafissamme solmut vastaavat momentissa esiintyviä operaattoreita ja linkit operaattoreiden momentteja. Annamme linkille (b_i, b_j) siis painon $\langle b_i b_j \rangle$, missä operaattoreiden järjestys momenttissa säilyy. Täydellinen sovitus on joukko linkkejä, missä jokainen solmu esiintyy jossain linkissä ja ainoastaan kerran koko joukossa. Yksi Wickin lauseen antaman summan termi vastaa siis

yhden täydellisen sovituksen linkkien painojen tuloa ja summa käy läpi kaikki tällaiset sovitukset. Graafin linkkien informaatio voidaan myös esittää niin sanottuna vierusmatriisina A (engl. *adjacency matrix*), missä alkio A_{ij} on nolosta poikkeava kun solmusta b_i on linkki solmuun b_j . Graafia vastaava operaattorimomentti on nyt laskettavissa myös vierusmatriisista sen hafnianilla [126, 127], joka määritellään edellämainitulla tavalla täydellisten sovitusten avulla

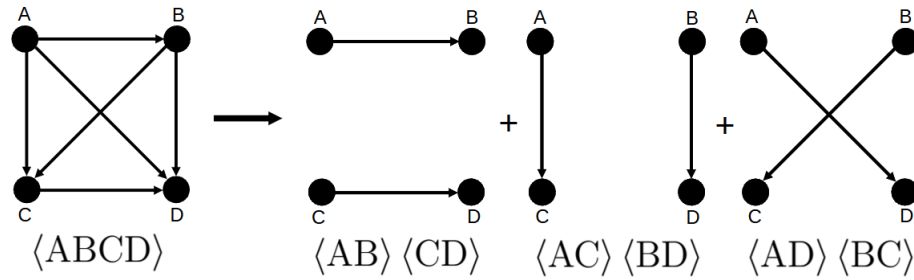
$$haf(A) = \sum_{p \in P} \prod_{(i,j) \in p} \langle b_i b_j \rangle. \quad (5.8)$$

Huomautettakoon, että Wickin lause antaa vastaavasti kaavan myös fermionisille systeemeille milloin termien etumerkki riippuu solmujen indeksien permutaation parillisuudesta. Tässä tapauksessa momentti vastaa vierusmatriisin pfaffiania [128, 129].

Tällaisten momenttien laskeminen on olennaista, koska ensinnäkin lisättyjen ja poistettujen fotonien tilat ovat ehdollisia ja niissä esiintyvä normalisointikerroin on tällainen momentti. Toiseksi kvanttilaskennalliset sovellukset vaativat mittausten tekemistä ja nosto- ja laskuoperaattorit muodostavat kannan systeemin operaattorialgebralle, mikä tarkoittaa kaikkien operaattoreiden olevan annettavissa niiden polynomeina [16, 130, 131]. Hafnianin laskennallinen ongelma tulee esiin sovitusten, eli summan termien, määrässä. Täydellisten sovitusten määrä yhtenäiselle graafille on

$$|P| = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad (5.9)$$

kun momentissa on $2n$ operaattoria [116, 132]. Jo kahdeksalla operaattorilla termejä on 105 ja kymmenellä 945, eli laskun suorittaminen muuttuu erittäin epäkäytännölliseksi, kun haluamme laskea suureiden odotusarvoja tiloille joihin on tehty useita lisäys- tai poisto-operaatioita. Täydellisten sovitusten laskeminen kuuluu $\#P$ -ongelmien luokkaan [132, 133] ja hafnianin parhaiten laskevat algoritmit skaalautuvat eksponentiaalisesti [127, 134]. Esimerkiksi gaussinen bosonien otanta (engl. *gaus-*



Kuva 8. Esimerkin 5.2 graafin täydelliset sovitukset ja niiden antamat termit operaattorimomentin summassa.

sian boson sampling) on kvanttialgoritmi, jolla on mahdollisuus todelliseen kvanttietuun juurikin tällaisissa ongelmissa [135]. Toisaalta erilaiset virhelähteet hankaloittavat tämän edun saavuttamista [136, 137] joten haluamme myös laskea otantaan liittyviä todennäköisyyksiä klassisesti varmistaaksemme algoritmin implementoitavan laitteen toimivuuden [138].

Esimerkki 5.2. Olkoon $\{A, B, C, D\}$ joukko bosonisia operaattoreita, joilla Wickin lause pätee. Saamme niiden momenttia laskettaessa kolme termiä:

$$\langle ABCD \rangle = \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle. \quad (5.10)$$

Laskua vastaava graafi, sen täydelliset sovitukset ja niitä vastaavat termit on esitetty kuvassa 8.

5.3 Sovitusten kombinatoriikasta

Yksi Wickin lauseen antaman summan laskemiseen liittyvistä ongelmista on kaikkien täydellisten sovitusten löytäminen. Tarkastelemassamme tapauksessa tehtävä on sinänsä helpompi sillä graafimme on aina yhtenäinen eli sovitukset vastaavat kaikkia välin $[1, 2n]$ kokonaislukujen suuruusjärjestyksen säilyttäviä parien joukkoja. Periaatteessa voisimme siis laskea nämä operaattoreiden järjestysindeksejä vastaavat lukujoukot etukäteen ja kovakoodata ne osaksi simulaatiotamme. Koska operaatto-

rit ovat luonnollisesti numeroituva joukko niiden järjestyksen suhteen momentissa, myös linkit ovat numeroituvia jollain funktiolla $f : I \times I \rightarrow \mathbb{Z}$ [20], missä I on operaattoreiden järjestyksien joukko. Voimme siis kuvata linkit jonkin vektorin \mathbf{V} alkioiksi, missä $V^\mu = \langle b_i b_j \rangle$ kun $f(i, j) = \mu$. Tällöin esimerkin 5.2 graafi määrittää kuusialkioisen vektorin

$$\mathbf{V} = (\langle AB \rangle \quad \langle AC \rangle \quad \langle AD \rangle \quad \langle BC \rangle \quad \langle BD \rangle \quad \langle CD \rangle)^\top$$

ja sovitukset bilineaarimuodon matriisiin

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sillä nyt

$$\mathbf{V}^\top \mathbf{M} \mathbf{V} = \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle. \quad (5.11)$$

Yleisesti sovitukset määräävät $2n$ -solmuiseksi graafille n -lineaarimuodon

$$M_{i\dots n} = \begin{cases} 1, & \text{kun } (i, \dots, n) \in P, \\ 0, & \text{muutoin,} \end{cases} \quad (5.12)$$

missä P on graafin täydellisten sovitusten joukko, ja linkkien painojen vektori on d -ulotteinen, $d = \sum_{m=1}^{2n} (m-1)$. Esimerkiksi siis kuuden solmun graafilla sovitukset määrittävät seuraavanlaisen multilineaarimuodon

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V}) = \sum_{i,j,k} M_{ijk} V^i V^j V^k. \quad (5.13)$$

Tässäkin lähestymistavassa laskun skaalautuvuus aiheuttaa nopeasti ongelmia. Esimerkiksi kahdeksan solmun graafilla on linkkejä 28 ja täydellisiä sovituksia 105. Tämä tarkoittaa kyseisen graafin multilineaarimuodon sisältävän $28^4 = 614656$ alkioita, joista vain 105 on nollassa poikkeavia. Multilineaarimuoto on siis erittäin

harva ja lukujen ero kasvaa räjähdysmäisesti solmujen määrän kasvaessa. Harvoille matriiseille on olemassa niille erityisesti optimoituja algoritmeja [139] ja vastaavia menetelmiä on kehitetty myös isommille tensoreille [140], vaikka ne eivät ole yhtä vakiintuneita. Tällaiset menetelmät perustuvat turhan informaation poistamiseen, mikä tarkoittaa usein vain nolasta poikkeavien alkioiden indeksien enkoodamista mahdollisimman pienellä määrällä tietoa. Alkuperäinen listamme indeksejä, jonka saamme sovituksesta numeroimalla linkit, valmiiksi muistuttaa tällaista menetelmää hyvin paljon. Tällöin voimme etukäteen laskea ja tallentaa tiedon siitä, mitkä linkkeihin liittyvät kahden operaattorin momentit tulee kertoa keskenään saadaksemme Wickin lauseen summan termit. Tästä on hyötyä, kun laskemme kaikki täydelliset sovitukset jollekin suurimmalle määrälle nosto- ja laskuoperaatioita ja käytämme tätä tietoa kaikissa laskuissa. Kuitenkin alkuperäisen gaussisen tilan muuttuessa täytyy useamman, tai kaikkien, linkkien arvot laskea uudestaan ja siis myös jokainen kertolasku ja lopullinen summa.

Esimerkki 5.3. Olkoon ennalta määrättyä suurinta määrää operaatioita vastaavassa graafissa $2n$ solmua. Haluamme laskea nyt jonkin pienemmän operaattorimomentin arvon esimerkiksi $2m = 2n - 2l$ operaattorille. Jätämme laskuista pois siis $2l$ solmua vastaavaa operaattoria. Jos olemme laskeneet ennalta tiedon koko graafin täydellisistä sovituksista, voimme käyttää sitä laskemaan myös pienempää momenttia vastaavan aligraafin hafnianin. Eräs helppo tapa tehdä näin on asettaa linkin arvoksi nolla, jos se yhdistää pois jätettävän ja sisällytettävän solmun, sillä tämä nolaa kaikki sovitukset jotka eivät oikeasti ole mahdollisia. Jos taas linkki yhdistää kaksi pois jätettävää solmua annetaan sen arvoksi

$$\left(\frac{2^l l!}{(2l)!} \right)^{\frac{1}{l}}, \quad (5.14)$$

sillä jokainen halutun aligraafin sovitus esiintyy yhdessä jokaisen pois jätettävien solmujen aligraafin sovituksen kanssa, jotka tietenkin sisältävät l linkkiä.

Useimmiten, ellei aina, tapauksissa joista olemme kiinnostuneet momentissa esiintyvät operaattorit eivät ole kaikki keskenään erilaisia. Ehdollisesti valmistellun ei-gaussisen tilan ρ_G^f normalisointikerroin sisältää suoritettut fotonien lisäykset ja poistot ”sanassa” $B = b_1 \dots b_n$ ja sen adjungaatin B^\dagger sillä

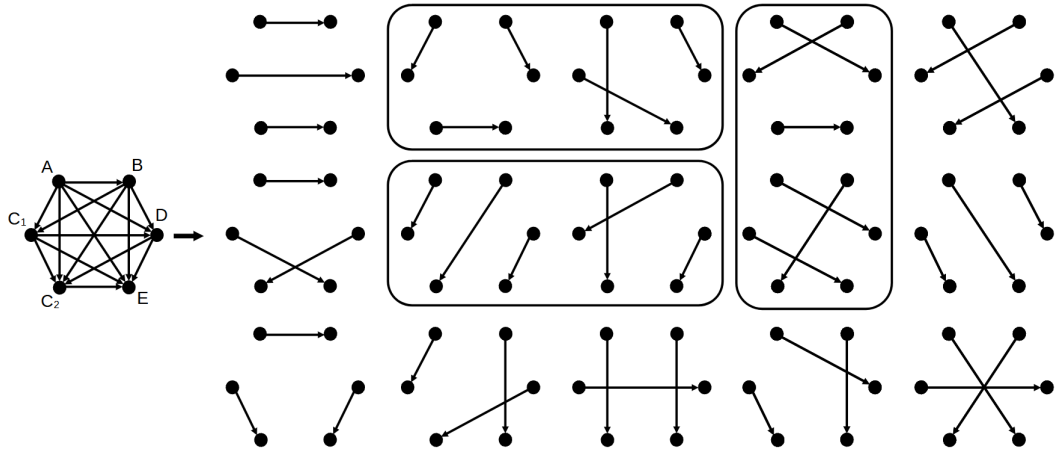
$$\rho_G^f = \frac{B\rho_G B^\dagger}{\text{Tr}[B\rho_G B^\dagger]} = \frac{B\rho_G B^\dagger}{\text{Tr}[\rho_G B^\dagger B]}. \quad (5.15)$$

Lisäksi saatamme haluta tehdä useita lisäyksiä tai poistoja samaan moodiin, mikä tarkoittaa momentin sisältävän saman operaattorin useammin kuin kerran. Tämä tarkoittaa, että graafissamme saattaa olla linkkejä joiden paino on sama, mikä taas voi johtaa graafin hafnianin sisältävän useita samanarvoisia termejä. Jos saamme selvitettyä kuinka monta kertaa mikäkin termi esiintyy laskussa, voimme seuraavalla kerralla ohittaa jokaisen termin erikseen laskemisen ja laskea vain uniikit termit.

Esimerkki 5.4. Laskemme momentin $\langle ABC_1 DC_2 E \rangle$ termit, missä $C_1 = C_2$. Kuu- den solmun graafilla sovituksia, ja siten myös summan termejä, $|P| = \frac{(2 \cdot 3)!}{2^3 3!} = 15$ kappaletta. Kiinnittämällä mielivaltaisen linkin löydämme kaikki termit joissa sen paino esiintyy tutkimalla jäljelle jäävää aligraafia. Toistuvat linkkien painot riippuvat toistuvista operaattoreista ja niiden paikasta järjestyksessä. Tälle momentille saamme termit

$$\begin{aligned} \langle ABC_1 DC_2 E \rangle = & \langle AB \rangle \langle C_1 D \rangle \langle C_2 E \rangle + \langle AB \rangle \langle C_1 E \rangle \langle DC_2 \rangle + \langle AB \rangle \langle C_1 C_2 \rangle \langle DE \rangle \\ & + \langle AC_1 \rangle \langle BD \rangle \langle C_2 E \rangle + \langle AC_1 \rangle \langle BC_2 \rangle \langle DE \rangle + \langle AC_1 \rangle \langle BE \rangle \langle DC_2 \rangle \\ & + \langle AD \rangle \langle BC_1 \rangle \langle C_2 E \rangle + \langle AD \rangle \langle BC_2 \rangle \langle C_1 E \rangle + \langle AD \rangle \langle BE \rangle \langle C_1 C_2 \rangle \\ & + \langle AC_2 \rangle \langle BC_1 \rangle \langle DE \rangle + \langle AC_2 \rangle \langle BD \rangle \langle C_1 E \rangle + \langle AC_2 \rangle \langle BE \rangle \langle C_1 D \rangle \\ & + \langle AE \rangle \langle BC_1 \rangle \langle DC_2 \rangle + \langle AE \rangle \langle BD \rangle \langle C_1 C_2 \rangle + \langle AE \rangle \langle BC_2 \rangle \langle C_1 D \rangle. \end{aligned}$$

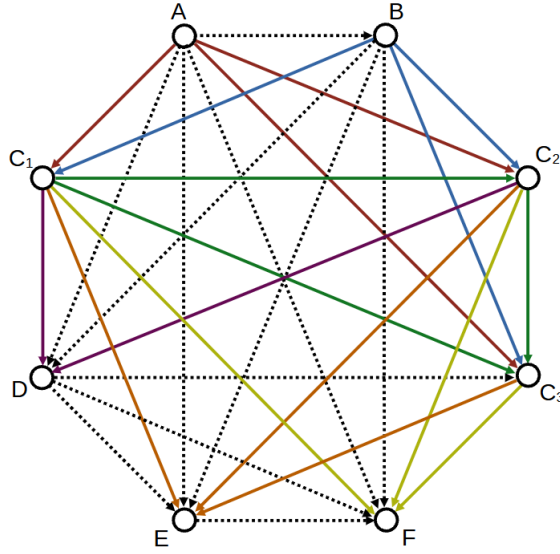
Näemme summan sisältävän 12 uniikkia termiä, kolme termiä siis esiintyy kahdesti. Laskua vastaava graafi ja sen täydelliset sovitukset on esitetty kuvassa 9, missä sovitukset joita vastaavat termit ovat samat on ympäröity.



Kuva 9. Esimerkin 5.4 graafin täydelliset sovitukset. Sovitukset, joiden termin arvo Wickin lauseen summassa on sama, on ympäröity.

Yleisesti termien multiplisiteetit voidaan selvittää tarkastelemalla toistuvien, ja niiden välissä olevien, operaattoreiden välisiä linkkejä sillä nämä ovat sellaisia joiden paino voi olla uniikki. Jos toistuvia operaattoreita ”sidotaan” näihin linkkeihin, ei pareja permutoimalla voida tuottaa toista termiä jolla olisi sama arvo. Edeltävässä esimerkissä tämä tarkoittaa siis operaattoreita $\{C_1, D, C_2\}$ ja niiden linkkejä, jotka vastaavat painoja $\{\langle C_1C_2 \rangle, \langle C_1D \rangle, \langle DC_2 \rangle\}$. Yhden tällaisen linkin kiinnittäminen jättää jäljelle neljän solmun aligraafin joilla on kolme täydellistä sovitusta, eli yhteensä saamme yhdeksän uniikkia termiä. Lopuissa sovituksissa on linkkejä joiden paino ei ole uniikki. Nämä ovat linkkejä operaattoreihin, jotka ovat samalla puolella molempia toistuvia operaattoreita. Tässä tapauksessa uniikkeihin termeihin johtavat linkit eivät voi esiintyä samaan aikaan sovituksissa, mutta tämä ei ole sääntö. Yleisesti täytyy siis tarkastella vastaavalla tavalla kaikki eri tavat kiinnittää eri määriä toistuvia solmuja linkkeihin joiden paino ei toistu.

Esimerkki 5.5. Tarkastelemme tapausta $\langle ABC_1C_2DC_3EF \rangle$. Tätä momenttia vastaava graafi on esitetty kuvassa 10, missä värejä on käytetty merkitsemään linkkejä joiden paino on sama. Näemme kuvasta, että linkeillä on kolmesti esiintyviä painoja ja eräs paino, joka esiintyy kahdesti. Sovitusten määritelmästä tiedämme, että termi



Kuva 10. Kahdeksan solmun graafi, jota vastaavassa operaattorimomentissa on kolme toistuvaa operaattoria. Linkit joiden paino on sama on väritetty samalla värillä ja linkit joiden paino ei toistu on merkitty katkoviivalla kuvan lukemisen helpottamiseksi.

voi sisältää vain yhden tiettyä väriä olevan linkin. Jos jokin termi sisältää esimerkiksi sinisen, punaisen ja keltaisen linkin painon, esiintyy se $3! = 6$ kertaa summassa. Tämä johtuu siitä, että näin monella tavalla voidaan tämän väriset linkin valita sovitukseen jättäen jäljelle sama aligraafi.

Tämä ongelma muistuttaa hyvin paljon useita graafiteoriassa tutkittuja ongelmia, jotka liittyvät graafien nimeämisiin (engl. *labelling*) ja niistä johtuviin symmetriarikkoihin [141–143]. Jokaiselle graafin solmulle annetaan siis jokin ”nimi”, joka usein on kokonaisluku ja silloin kyseessä on siis kuvaus $\varphi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$. Käsittelemässämme tapauksessa nimeäminen tapahtuu luonnollisesti solmuja vastaavien operaattoreiden mukaan. Graafin linkeille voidaan tietenkin myös antaa nimet ja helppoin tapa on muodostaa ne alku- ja päätesolmun nimien parina [144, 145]. Jos nyt jollain graafin automorfismeihin kuuluvalla solmujen permutaatiolla σ on olemassa edes yksi solmu v_i jolla $\phi(v_i) \neq \phi(\sigma(v_i))$, ajatellaan nimeämisen rikkovan graafin

symmetria. Tämän ollessa voimassa kaikille graafin automorfismeille sanotaan nimeämisen olevan r -erottava (engl. *r-distinguishing*) [141]. Voimme nyt muotoilla Wickin lauseen uniikkien termien etsimisen uudelleen näiden käsitteiden avulla. Haluamme tietää kuinka monta linkkien nimet säilyttävää permutaatiota on olemassa jokaista täydellistä sovitusta kohden. Tällöin löydämme uniikkien termien määrän sekä jokaisen termin multiplisiteetin. Valitettavasti kirjallisuus keskittyy enemmän r -erottavien nimeämisten etsimiseen yksittäisten nimeämisten ominaisuuksien tutkimisen sijaan ja erityisesti linkkien nimeämistä on tutkittu selvästi vähemmän. Nämä seikat tekevät tästäkin lähestymistavasta hankalan, mutta aiheeseen liittyvä algoritmikka voisi silti olla avuksi yhdistettäessä muihin olemassa oleviin menetelmiin. Tämän selvittäminen on kuitenkin tämän tutkielman laajuuden ulkopuolella.

5.4 Moodien väliset korrelaatiot ja linkkien painot

Luvussa 3 käsitelimme jatkuvien muuttujien kvanttisysteemejä faasiavaruusformalismiin näkökulmasta. Tähän liittyi olennaisella tavalla faasiavaruuden symplektinen rakenne ja näimme, miten systeemin dynamiikkaan liittyvän ryhmän operaattorit toimivat vakuumi- ja termisiin tiloihin. Näitä käyttämällä saimme muodostettua yleiset gaussiset tilat ja Lien teorian kautta saimme BCH-kaavat, joiden avulla voitiin laskea ryhmän toiminta yleisiin operaattoreihin. Näitä työkaluja käyttämällä saamme siis selvitettyä operaattorimomenttia vastaavan graafin linkkien painot sillä

$$\langle b_i b_j \rangle_G = \text{Tr}[\rho_G b_i b_j] = \text{Tr}[G \rho_{th} G^\dagger b_i b_j] = \text{Tr}[\rho_{th} G^\dagger b_i G G^\dagger b_j G]. \quad (5.16)$$

Yleiset kahden moodin puristukset ja -rotaatiot (eli säteenjakamisoperaatiot) toimivat bosonisiin laskuoperaattoreihin siis seuraavalla tavalla

$$S_\gamma = \exp\left[\gamma a_i^\dagger a_j^\dagger - \bar{\gamma} a_j a_i\right], \quad S_\gamma^\dagger a_i S_\gamma = a_i \cosh(|\gamma|) + a_j^\dagger \frac{\gamma}{|\gamma|} \sinh(|\gamma|), \quad (5.17)$$

$$R_\theta = \exp\left[\theta a_i^\dagger a_j - \bar{\theta} a_j^\dagger a_i\right], \quad R_\theta^\dagger a_i R_\theta = a_i \cos(|\theta|) + a_j \frac{\theta}{|\theta|} \sin(|\theta|). \quad (5.18)$$

Toiminta nosto-operaattoreihin saadaan tietenkin hermiittisenä konjugaattina. Kuten aikaisemminkin oletamme edelleen, että kaikilla moodeilla $D_\alpha = \mathbf{1}$, jotta voimme käyttää Wickin lausetta.

Tarkastelemme aluksi sellaista gaussista tilaa, jossa on vain yhden moodin puristuksia ja rotaatioita. Käyttämällä BCH-kaavoja saamme helposti laskettua esimerkiksi painon

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle = \text{Tr} & \left[\rho_{th} e^{-i\theta_i} \left(\cosh(2|\gamma_i|) a_i + \frac{\gamma_i}{|\gamma_i|} \sinh(2|\gamma_i|) a_i^\dagger \right) \right. \\ & \left. \times e^{-i\theta_j} \left(\cosh(2|\gamma_j|) a_j + \frac{\gamma_j}{|\gamma_j|} \sinh(2|\gamma_j|) a_j^\dagger \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Näemme suoraan, että itseasiassa $\langle a_i a_j \rangle = 0$ ja näin käy kaikille kahden eri moodin operaattorin momentille. Tällöin voimme käytännössä poistaa kaikki kyseiset linkit graafistamme sillä kaikissa sovituksissa, joissa näitä linkkejä esiintyy, termin arvo on myös nolla. Alkutilan ollessa tällainen gaussinen tila, jakautuu mielivaltaista operaattorimomenttia vastaava graafi moodeittain erillisiin komponentteihin. Nyt graafin vierusmatriisi voidaan vapaasti järjestää diagonaaliblokkimuotoon, eli $A = \bigoplus A_i$, missä \bigoplus on suora summa kaikkien moodien yli. Hafnianilla on ominaisuus

$$\text{haf}\left(\bigoplus_i A_i\right) = \prod_i \text{haf}(A_i), \quad (5.20)$$

mikä tarkoittaa että tällaisessa tapauksessa voimme rinnakkaistaa moodien sovituksen laskemisen. Lisäksi, jos moodin operaattorit ovat normaali- tai antinormaalijärjestetty saamme Isserlisiin artikkelista [114] kahden muuttujan momenteille kaavan

$$\langle A^n B^n \rangle = \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n}{2j} \phi(2j) \phi(2n-2j) \langle AA \rangle^j \langle BB \rangle^j \langle AB \rangle^{n-2j} (1 - \langle AB \rangle^2)^j, \quad (5.21)$$

missä $\phi(2j) = \prod_{m=1}^j (2m-1)$. Koska nyt $A^\dagger = B$, näemme myös kaikkien kompleksilukujen vaihekertoimien katoavan jokaisesta termistä, mikä tarkoittaa momenttien riippuvan vain gaussisten operaattoreiden parametrien itseisarvoista.

Alkuperäisen gaussisen tilan ollessa separoituva tiedämme siis operaattorimomenttien laskujen yksinkertaistuvan huomattavasti. Valitettavasti tiedämme myös

luvun 4 perusteella, että tällaisia tiloja käyttämällä ei ole mahdollista saavuttaa todellista kvanttietua laskennallisissa ongelmissa. Tarvitsemme EPR-ohjattavuutta moodien välille ennen fotonien lisäämistä tai poistamista, mikä tarkoittaa kahden moodin puristuksia ja säteenjakajia. Tällaisissa tiloissa moodien väliset momentit eivät välttämättä häviä ja parhaimmillaan graafimme säilyy täysin yhtenäisenä, kun moodien välisiä kvanttikorrelaatioita on tarpeeksi.

Esimerkki 5.6. Tarkastellaan fotonien lukumäärän odotusarvoa helppossa kahden lisätyn tai poistetun fotonin tilan tapauksessa. Olkoon $\rho_G = G\rho_{th}G^\dagger$ jokin usean moodin gaussinen tila ja $\{b_i, b_j\}$ moodien i ja j nosto- tai laskuoperaattoreita. Ehdollisesti valmisteltu ei-gaussinen tilamme on nyt

$$\rho_G^f = \frac{b_i b_j \rho_G b_j^\dagger b_i^\dagger}{K}, \quad (5.22)$$

missä normalisointikerroin $K = \text{Tr}[b_i b_j \rho_G b_j^\dagger b_i^\dagger] = \langle b_j^\dagger b_i^\dagger b_i b_j \rangle_G$. Oletamme, että alkuperäinen gaussinen tila on sellainen ettei minkään kahden moodin operaattoreiden momentti saa arvoa nolla ja voimme laskea kertoimen K käyttämällä Wickin lausetta

$$\langle b_j^\dagger b_i^\dagger b_i b_j \rangle_G = \langle b_j^\dagger b_i^\dagger \rangle \langle b_i b_j \rangle + \langle b_j^\dagger b_i \rangle \langle b_i^\dagger b_j \rangle + \langle b_j^\dagger b_j \rangle \langle b_i^\dagger b_i \rangle. \quad (5.23)$$

Olkoon $n_k = a_k^\dagger a_k$ jonkin kolmannen moodin lukumääräoperaattori. Tämän suureen odotusarvo ei-gaussisessa tilassa on

$$\begin{aligned} \langle n_k \rangle_f &= \text{Tr}[\rho_G^f n_k] = \text{Tr}[\rho_G b_j^\dagger b_i^\dagger a_k^\dagger a_k b_i b_j] = \langle b_j^\dagger b_i^\dagger a_k^\dagger a_k b_i b_j \rangle \\ &= \langle b_j^\dagger a_k^\dagger \rangle \langle b_i^\dagger a_k b_i b_j \rangle + \langle b_i^\dagger a_k^\dagger \rangle \langle b_j^\dagger a_k b_i b_j \rangle + \underbrace{\langle a_k^\dagger a_k \rangle \langle b_j^\dagger b_i^\dagger b_i b_j \rangle}_{=K} \\ &\quad + \langle a_k^\dagger b_i \rangle \langle b_j^\dagger b_i^\dagger a_k b_j \rangle + \langle a_k^\dagger b_j \rangle \langle b_j^\dagger b_i^\dagger a_k b_i \rangle. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Tässä olemme käyttäneet Wickin lausetta ensin operaattorin (solmun) a_k^\dagger kontraktioihin (linkkeihin). Näemme yhden termeistä sisältävän jo aikaisemmin lasketun ei-gaussisen tilan kertoimen K . On tilanteita joissa voimme saada toisenkin tällaisen

termin nimittäin

$$\begin{aligned} \langle a_k^\dagger b_i \rangle \langle b_j^\dagger b_i^\dagger a_k b_j \rangle &= \langle b_i^\dagger b_i \rangle \langle b_j^\dagger b_i^\dagger b_i b_j \rangle \text{ tai} \\ \langle b_i^\dagger a_k^\dagger \rangle \langle b_j^\dagger a_k b_i b_j \rangle &= \langle b_i^\dagger b_i^\dagger \rangle \langle b_j^\dagger b_i^\dagger b_i b_j \rangle, \end{aligned}$$

kun mitattava suuremme on sellaista muotoa, jossa $a_k = b_i$ tai $a_k = b_i^\dagger$.

Kun teemme mittauksia samaan moodiin kuin mihin olemme viimeksi tehneet fotonien lisäyksiä tai poistoja, voimme saada operaattorimomenttiin termejä joissa ei-gaussisen tilan normalisointikerroin on merkittävässä osassa. Kuitenkin jos tilanne on kuten esimerkissä 5.6 eli viimeinen nosto- tai laskuoperaattori esiintyy vain kerran saamme vain kaksi tällaista termiä. Jos samaa operaatiota on tehty viimeiseksi n kertaa saamme $n + 1$ termiä, joissa on kerroin K . Mitä yleisemmän fotonien poistojen ja lisäysten määrän sekä monimutkaisemman mitattavan suureen valitsemme, muuttuu tällaisten termien etsiminen aikaisemmin käsitellyksi uniikkien termien löytämisen ongelmaksi.

6 Yhteenveto

Tässä jatkuvien suureiden kvanttisysteemejä käsittelevässä tutkielmassa olemme tarkastelleet ehdollisesti valmisteltujen ei-gaussisten tilojen operaattorimomentteihin liittyvää kombinatoriikkaa ja samalla tehneet melko laajan kirjallisuuskatsauksen jatkuvien suureiden systeemien teoriaan. Näimme miten lisättyjen ja poistettujen fotonien tilat liittyvät olennaisella tavalla joihinkin graafiteorian ongelmiin Wickin todennäköisyyslauseen kautta ja olemme myös pyrkineet painottamaan matemaattisia seikkoja, jotka jäävät kirjallisuudessa usein pienempään osaan niiden tärkeydestä tai hyödyllisyydestä huolimatta.

Tutkielman aluksi kertosimme kvanttiteorian perusteet lähtien liikkeelle sen postulaateista. Erityisen tärkeitä ovat yleisten kvanttitilojen määritelmä tiheysoperaattoreina ja fysikaalisesti järkevät prosessit operaatioiden ja kanavien muodossa. Ope-

raatio kuvaa kvanttitalan alinormalisoitujen tilojen joukkoon ja kanava taas on jäljen säilyttävä operaatio, joka silloin siis kuvaa kvanttitalan aina toiseksi tilaksi. Mielenkiintoinen erityistapaus operaatioista on mittausjärjestelyjen virittämät instrumentit, jotka antavat probabilistisen tavan kuvata kvanttitalan toiseksi tilaksi suorittamalla mittaus jollekin anturisysteemin observaabelille. Toisessa luvussa esitimme yksinkertaisen esimerkin diskreetistä kvanttisysteemistä, minkä jälkeen keskityimme täysin tutkielman pääaiheeseen eli ääretönulotteisiin ja jatkuviin systeemeihin. Vaikka moni kvanttietokone perustuu diskreetteihin systeemeihin myös jatkuvilla systeemeillä on mahdollisuus tarjota niille ominaisia etuja laskennallisissa tehtävissä.

Luvussa kolme Lien algebroiden ja ryhmien teorian avulla määrittelimme bosoniselle systeemille gaussisten tilojen joukon. Kuten mainitsimme, Lien teorian kautta voidaan todistaa näillä tiloilla olevan symplektisen moniston rakenne ja tätä kautta muotoilimme bosonisille kvanttiloille esityksen faasiavaruudessa. Gaussisten tilojen erityisasema tulee hyvin esiin tässä formalismissa, sillä niiden faasiavaruusobservaabeleiden odotusarvojen vektorit ja kovarianssimatriisit karakterisoivat ne täysin. Lisäksi niiden Wignerin kvasijakaumafunktio saa kaikkialla positiivisia arvoja. Faasiavaruusformalismiin vahvuuden esittelemiseksi kävimme läpi esimerkit Wignerin funktion johtamisesta yksinkertaisimmille gaussisille tiloille. Gaussiset kanavat ovat myös hyvin siististi käyttäytyviä ja Blochin-Messiahin hajotelma näyttää, että mielivaltainen symplektinen muunnos faasiavaruudessa voidaan toteuttaa kvanttipiirinä vain kahdenlaisilla porteilla. Matemaattisen helppouden lisäksi gaussiset tilat ja -kanavat ovat myös helposti kokeellisesti toteutettavissa. Jouduimme kuitenkin valitettavasti toteamaan ettei näillä tiloilla ja kanavilla voida toteuttaa universaalia kvanttilaskentaa ja niiden olevan teoriassa tehokkaasti klassisesti simuloitavissa.

Ei-gaussisten tilojen tutkimuksella ei ole yhtä pitkää historiaa kuin gaussisilla tiloilla joten niiden matemaattinen esitys ei myöskään ole yhtä täydellinen. Ominai-

suudet kuten tilan tähtiaste tai Wignerin funktion negatiivisuus ovat eräitä tapoja määrittää kuinka ei-gaussinen tila on, vaikka niilläkin on rajansa. Ei-gaussisten tilojen luokittelusta tekee hankalampaa niiden monimuotoisuus. Tutkielmassa keskityimme tarkastelemaan tiloja, jotka voidaan valmistella probabilistisesti gaussisista tiloista, sillä deterministiset menetelmät ovat vielä toistaiseksi hyvin vaikeita toteuttaa. Eräs tällainen valmistelu on ehdollinen fotonien poistaminen tai lisääminen gaussisiin tiloihin, missä on jo kokeellisesti saavutettu tiloja joilla on Wignerin funktion negatiivisuutta. Kun alkuperäiseen gaussiseen tilaan ei ole tehty siirto-operaatiota, voidaan siihen soveltaa Wickin todennäköisyyslausetta.

Wickin lause antaa hajotelman usean operaattorin momentille, kun jokaisen operaattorin ensimmäinen momentti, eli odotusarvo, on nolla. Lauseen todistaminen yleisimmässä tilassa on hankalaa joten emme ole suorittaneet sitä tutkielmassa, mutta olemme pyrkineet antamaan aiheeseen liittyen laajemmat lähteet kuin kirjallisuudessa yleensä. Monet teoreettisenkin fysiikan tekstit tyytyvät viittaamaan joko vain Wickin alkuperäiseen artikkeliin tai joihinkin osittaisiin yleistyksiin, mutta toistaiseksi tutkielman kirjoittaja ei ole löytänyt täysin tyhjentävää lähdettä, joka todistaisi lauseen kvanttimekaanisille observaabeleille kaikkein yleisimmälle gaussiselle tilalle. Skalaarimuuttujille lause on tunnettu jo pidempään Isserlisiin lauseena ja sekin on yleistetty kompleksisille muuttujille, mutta huomattavasti pienempi määrä kirjallisuutta ottaa huomioon tapaukset joissa muuttujat ovat kompleksisia ja eivät kommutoi. Wickin lause antaa usean operaattorin momentille hajotelman kahden operaattorin momenttien tulojen summana. Tällaisten momenttien laskemisen motivaationa on ehdollisen tilan normalisointikertoimen ja suureiden odotusarvojen laskeminen.

Tämä momentteihin liittyvä hajotelma voidaan ilmaista kätevästi graafiteorian avulla. Operaattorimomentille voidaan piirtää graafi, jossa jokaista solmua vastaa yksi momentissa esiintyvä operaattori ja graafin linkit vastaavat kahden operaattorin

momentteja. Wickin lauseen hajotelma vastaa tämän graafin vierusmatriisin hafniana, jonka termien määrä kasvaa erittäin nopeasti solmujen määrän suhteen, sillä jokaista termiä vastaa yksi graafin täydellinen sovitus. Hafnianin laskemisen hankaluus on hyvin tunnettu ongelma ja tähän perustuu esimerkiksi gaussisen bosonien otannan etu kvanttialgoritmina. Operaattorimomenttien laskeminen on siis tarpeen jotta voimme tarkistaa kvanttialgoritmin toteuttavan laitteiden toimivuuden, mutta toisaalta tehokas klassinen laskeminen myös heikentää algoritmin mahdollista kvanttietua.

Tarkastelimme sovitusten kombinatoriikkaa eri tavoilla tarkoituksena selvittää onko hafniani helpompi laskea tietylle joukolle operaattoreita, jos vaihdamme alkuperäistä gaussista tilaa. Eräs lähestymistapa oli huomioda, että hafniani voidaan määritellä multilineaarimuotona vektorille, jonka alkiot ovat kahden operaattorin momentit. Tämä multilineaarimuoto voitaisiin esittää tensorina, mutta sen alkioiden määrä kasvaisi vielä nopeammin kuin täydellisten sovitusten määrä ja tensori olisi myös erittäin harva. Harvoille tensoreille on olemassa optimoituja menetelmiä, mutta emme todennäköisesti hyötyisi niistä suuresti, sillä hafniana vastaava tensori kertoisi meille vain mitkä alkiot tulee kertoa keskenään. Jokainen kahden operaattorin momentti, tulo ja summa täytyisi aina laskea uudestaan, kun gaussista tilaa muutettaisiin. Huomasimme, että lisättyjen ja poistettujen fotonien tiloille on olemassa siisti kaava, kun alkuperäisessä tilassa ei ollut yhtään kahden moodin puristuksia tai säteenjakamisia. Tämä kuitenkin tarkoittaisi ettei tilassa olisi ollenkaan lomittumista, joka on yksi kvanttietuun tarvittavista resursseista.

Lisättyjen ja poistettujen fotonien tilojen momenteissa esiintyy usein sama operaattori moneen kertaan, sillä haluamme tehdä useamman operaation samaan moodiin tai mitata jotain suuretta ei-gaussisessa moodissa. Tämä tarkoittaa, että Wickin lauseen summassa voi esiintyä sama termi useaan kertaan ja voimme mahdollisesti laskea vastaavan graafin hafnianin nopeammin, jos tiedämme entuudesta mikä on

jokaisen termin multiplisiteetti. Kysymykseen uniikkien termien määrästä ei kuitenkaan löytynyt suoraa vastausta, mutta tarkastelimme miten tämä voidaan laskea tutkimalla toistuviin operaattoreihin liittyvien solmujen aligraafeja. Löysimme myös yhteyden uniikkien termien ja graafien nimeämisten ongelmien välillä. Tarkempi käsittely tästä näkökulmasta ei valitettavasti ollut mahdollista tässä tutkielmassa, mutta aiheeseen liittyvät menetelmät voisivat tulevaisuudessa auttaa parantamaan hafnianin laskevia algoritmejä tunnistamalla jo laskettujen sovitusten termit. Toisaalta bosonien otantaa on jo käytetty muihinkin graafiteorian ongelmiin [146] joten graafien nimeämiset voisivat olla mahdollinen kohde fotonien lisäämiseen ja poistamiseen perustuville kvanttialgoritmeille.

Tutkielman aikana olemme perehtyneet jatkuvien suureiden kvanttisysteemien teoriaan ja tarkastelleet myös useita esimerkkejä. Esitellyt matemaattiset työkalut ovat toivottavasti antaneet lukijalle hyvyn tarkastella ja tutkia kyseisiä systeemejä ja ymmärtää myös niiden soveltamista kvantti-informaatiossa. Operaattoreiden momentteja voitaisiin käsitellä myös geometrisesta näkökulmasta, mitä emme tehneet ollenkaan tässä tutkielmassa. Esimerkiksi tarkasteltujen ehdollisten tilojen normalisointikerroin muistuttaa Hilbert-Schmidt sisätuloa, jossa kvanttitila on kuin eräänlainen metriikka, vaikka nosto- ja laskuoperaattorit eivät olekaan rajoitettuja operaattoreita. Eräs mahdollisuus olisi tutkia onko tapoja analyttisesti approksimoida momentteja tehokkaasti, kun esimerkiksi otetaan huomioon todellisten mitattavien observaabeleiden epätarkkuus. Lisäksi Lien teoriaa sovelletaan laajemmin fysiikassa kuvaamaan monenlaisia systeemejä ja niiden symmetrioita, mutta myös jatkuvien suureiden kvanttilaskennassa käytettävä stabilisaattoreiden ja nolaaajien formalismi [54] voitaisiin muotoilla näiden algebroiden ja ryhmien avulla. Tämä nostaa esiin kysymyksen siitä miten kvanttiteoriassa esiintyvien yleisempien algebrallisten rakenteiden esitysteoriaa voitaisiin mahdollisesti soveltaa kvanttialgoritmien kehittämisessä.

Viitteet

- [1] T. Heinosaari ja M. Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement*, 1. painos (Cambridge University Press, 2012).
- [2] P. Busch, P. Lahti, J.-P. Pellonpää ja K. Ylinen, *Quantum Measurement*, 1. painos (Springer International Publishing, 2016).
- [3] M. A. Nielsen ja I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information: 10th anniversary edition* (Cambridge University Press, 2012).
- [4] M. Ozawa, *Mathematical foundations of quantum information: Measurement and foundations*, 2014.
- [5] M. Fréchet, CR Acad. Sci. Paris **144**, 1414 (1907).
- [6] F. Riesz, CR Acad. Sci. Paris **149**, 974 (1909).
- [7] P. Busch, Physical Review D **33**, 2253 (1986).
- [8] G. Adesso, T. R. Bromley ja M. Cianciaruso, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **49**, 473001 (2016).
- [9] K. Kraus, Annals of Physics **64**, 311 (1971).
- [10] W. F. Stinespring, Proceedings of the American Mathematical Society **6**, 211 (1955).
- [11] M. Naimark, Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya **4**, 277 (1940).
- [12] R. Beneduci, Journal of Physics: Conference Series **1638**, 012006 (2020).
- [13] M. Ozawa, Journal of Mathematical Physics **25**, 79 (1984).
- [14] M. Ozawa, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **21**, (1985).
- [15] O. Ezzratty, The European Physical Journal A **59**, 94 (2023).
- [16] P. Stornati, A. Acin, U. Chabaud, A. Dauphin, V. Parigi ja F. Centrone, Physical Review Research **6**, 043212 (2024).
- [17] S. Abel, M. Spannowsky ja S. Williams, Physical Review A **110**, 012607 (2024).
- [18] S. Abel, M. Spannowsky ja S. Williams, Physical Review A **112**, 012614 (2025).
- [19] T. Heindel, J.-H. Kim, N. Gregersen, A. Rastelli ja S. Reitzenstein, Advances in Optics and Photonics **15**, 613 (2023).
- [20] J. R. Munkres, *Topology*, 2. painos (Prentice Hall, 2000).

- [21] N. Dunford ja J. T. Schwartz, *Linear operators. Part 1, General theory* (Interscience New York, 1958).
- [22] K. R. Davidson, *C*-algebras by example* (American Mathematical Soc., 1996).
- [23] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications* (John Wiley & Sons, 1991).
- [24] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, 4. painos (Clarendon Pr. Oxford, 1959).
- [25] J.-P. Pellonpää, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 465303 (2009).
- [26] C. Carmeli, T. Heinonen ja A. Toigo, *Journal of Mathematical Physics* **45**, 2526 (2004).
- [27] G. Burkard, T. D. Ladd, A. Pan, J. M. Nichol ja J. R. Petta, *Rev. Mod. Phys.* **95**, 025003 (2023).
- [28] S. A. Moses, C. H. Baldwin, M. S. Allman, R. Ancona, L. Ascarrunz, C. Barnes, J. Bartolotta, B. Bjork, P. Blanchard, M. Bohn *et al.*, *Physical Review X* **13**, 041052 (2023).
- [29] R. T. Thew, K. Nemoto, A. G. White ja W. J. Munro, *Phys. Rev. A* **66**, 012303 (2002).
- [30] Z. Gedik, I. A. Silva, B. Çakmak, G. Karpat, E. L. G. Vidoto, D. O. Soares-Pinto, E. R. deAzevedo ja F. F. Fanchini, *Scientific reports* **5**, 14671 (2015).
- [31] M. de Oliveira, S. Subramanian, L. Mendes ja M.-H. Hsieh, *Nature Communications* **16**, 3559 (2025).
- [32] Y. Chi, J. Huang, Z. Zhang, J. Mao, Z. Zhou, X. Chen, C. Zhai, J. Bao, T. Dai, H. Yuan *et al.*, *Nature communications* **13**, 1166 (2022).
- [33] A. Macridin, A. C. Li ja P. Spentzouris, *Physical Review A* **109**, 032419 (2024).
- [34] H. Goldstein, C. Poole ja J. Safko, *Classical mechanics*, 3. painos (Addison-Wesley San Francisco, 2002).
- [35] M. Sulin, kandidaatin tutkielma, Turun Yliopisto, Matemaattisluonnontieteellinen tiedekunta, 2024.
- [36] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [37] W. Fulton ja J. Harris, *Representation theory: a first course* (Springer Science & Business Media, 2013).

- [38] W.-M. Zhang, R. Gilmore ja D. H. Feng, *Reviews of Modern Physics* **62**, 867 (1990).
- [39] H. F. Baker, *Proceedings of the London Mathematical Society* **2**, 24 (1905).
- [40] J. Oteo, *Journal of mathematical physics* **32**, 419 (1991).
- [41] G. Cassinelli, E. Vito, A. Levrero ja P. J. Lahti, *The Theory of Symmetry Actions in Quantum Mechanics: with an application to the Galilei group* (Springer Science & Business Media, 2004).
- [42] E. Onofri, *Journal of Mathematical Physics* **16**, 1087 (1975).
- [43] G. Adesso, S. Ragy ja A. R. Lee, *Open Systems & Information Dynamics* **21**, 1440001 (2014).
- [44] A. Serafini, *Quantum continuous variables: a primer of theoretical methods*, 2. painos (CRC press, 2023).
- [45] C. R. Putnam, *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [46] P. Lahti, J.-P. Pellonpää ja K. Ylinen, *Journal of Mathematical Physics* **40**, 2181 (1999).
- [47] L. Cohen, *Journal of Mathematical Physics* **7**, 781 (1966).
- [48] C. Brif ja A. Mann, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **31**, L9 (1998).
- [49] U. Leonhardt ja H. Paul, *Physical Review A* **48**, 4598 (1993).
- [50] P. Lahti, J.-P. Pellonpää ja J. Schultz, *Journal of Modern Optics* **57**, 1171 (2010).
- [51] K. Banaszek, C. Radzewicz, K. Wódkiewicz ja J. Krasinski, *Physical Review A* **60**, 674 (1999).
- [52] K. Husimi, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series* **22**, 264 (1940).
- [53] E. Wigner, *Physical review* **40**, 749 (1932).
- [54] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. García-Patrón, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro ja S. Lloyd, *Reviews of Modern Physics* **84**, 621 (2012).
- [55] P. Busch, *International Journal of Theoretical Physics* **24**, 63 (1985).
- [56] T. Heinosaari, *Physical Review A* **93**, 042118 (2016).
- [57] E. Ercolessi, G. Marmo, G. Morandi ja N. Mukunda, *Journal of Physics: Conference Series* **87**, 012010 (2007).

- [58] R. L. Hudson, Reports on Mathematical Physics **6**, 249 (1974).
- [59] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, 3. painos (McGraw-Hill New York, 1979).
- [60] P. Busch, T. Heinonen ja P. Lahti, Physics reports **452**, 155 (2007).
- [61] R. Simon, N. Mukunda ja B. Dutta, Physical Review A **49**, 1567 (1994).
- [62] H. P. Robertson, Physical Review **34**, 163 (1929).
- [63] Arvind, B. Dutta, N. Mukunda ja R. Simon, Pramana **45**, 471 (1995).
- [64] M. Walschaers, PRX quantum **2**, 030204 (2021).
- [65] T. Heinosaari, A. S. Holevo ja M. M. Wolf, Quantum Information & Computation **10**, 619 (2010).
- [66] J. Williamson, American journal of mathematics **58**, 141 (1936).
- [67] M. Houde, W. McCutcheon ja N. Quesada, Canadian Journal of Physics **102**, 497 (2024).
- [68] C. Bloch ja A. Messiah, Nuclear Physics **39**, 95 (1962).
- [69] S. L. Braunstein, Physical Review A **71**, 055801 (2005).
- [70] G. Cariolaro ja G. Pierobon, Physical Review A **93**, 062115 (2016).
- [71] C. Sparaciari, S. Olivares ja M. G. Paris, Physical Review A **93**, 023810 (2016).
- [72] C. Weedbrook, S. Pirandola ja T. C. Ralph, Physical Review A **86**, 022318 (2012).
- [73] J. Nokkala, R. Martínez-Peña, G. L. Giorgi, V. Parigi, M. C. Soriano ja R. Zambrini, Communications Physics **4**, 53 (2021).
- [74] J. Niset, J. Fiurášek ja N. J. Cerf, Physical review letters **102**, 120501 (2009).
- [75] J. Eisert, S. Scheel ja M. B. Plenio, Physical review letters **89**, 137903 (2002).
- [76] M. M. Wolf, G. Giedke ja J. I. Cirac, Physical review letters **96**, 080502 (2006).
- [77] G. Adesso ja F. Illuminati, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **40**, 7821 (2007).
- [78] X. C. Kolesnikow, R. W. Bomantara, A. C. Doherty ja A. L. Grimsmo, Physical Review Letters **132**, 130605 (2024).
- [79] M. G. Genoni, M. G. Paris ja K. Banaszek, Physical Review A **76**, 042327 (2007).
- [80] J. S. Ivan, M. S. Kumar ja R. Simon, Quantum information processing **11**, 853 (2012).

- [81] F. Albarelli, M. G. Genoni, M. G. Paris ja A. Ferraro, *Physical Review A* **98**, 052350 (2018).
- [82] P. Marian ja T. A. Marian, *Physical Review A* **88**, 012322 (2013).
- [83] F. Soto ja P. Claverie, *Journal of Mathematical Physics* **24**, 97 (1983).
- [84] U. Chabaud, D. Markham ja F. Grosshans, *Physical Review Letters* **124**, 063605 (2020).
- [85] U. Chabaud, G. Roeland, M. Walschaers, F. Grosshans, V. Parigi, D. Markham ja N. Treps, *PRX Quantum* **2**, 020333 (2021).
- [86] U. Chabaud, G. Ferrini, F. Grosshans ja D. Markham, *Physical Review Research* **3**, 033018 (2021).
- [87] E. Chitambar ja G. Gour, *Reviews of modern physics* **91**, 025001 (2019).
- [88] R. Uola, T. Kraft, J. Shang, X.-D. Yu ja O. Gühne, *Physical review letters* **122**, 130404 (2019).
- [89] V. Upreti ja U. Chabaud, arXiv preprint arXiv:2502.07670 (2025).
- [90] W. K. Wootters, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **356**, 1717 (1998).
- [91] Z.-W. Liu ja A. Winter, *PRX Quantum* **3**, 020333 (2022).
- [92] A. Streltsov, G. Adesso ja M. B. Plenio, *Reviews of Modern Physics* **89**, 041003 (2017).
- [93] A. Mari ja J. Eisert, *Physical Review Letters* **109**, 230503 (2012).
- [94] S. D. Bartlett, B. C. Sanders, S. L. Braunstein ja K. Nemoto, *Physical Review Letters* **88**, 097904 (2002).
- [95] F. Albarelli, M. G. Genoni, M. G. Paris ja A. Ferraro, *Physical Review A* **98**, 052350 (2018).
- [96] D. J. Saunders, S. J. Jones, H. M. Wiseman ja G. J. Pryde, *Nature Physics* **6**, 845 (2010).
- [97] N. Budinger, A. Furusawa ja P. van Loock, *Physical Review Research* **6**, 023332 (2024).
- [98] K. Marshall, R. Pooser, G. Siopsis ja C. Weedbrook, *Physical Review A* **91**, 032321 (2015).
- [99] R. Yanagimoto, T. Onodera, E. Ng, L. G. Wright, P. L. McMahon ja H. Mabuchi, *Physical Review Letters* **124**, 240503 (2020).

- [100] N. C. Menicucci, P. Van Loock, M. Gu, C. Weedbrook, . f. T. C. Ralph ja M. A. Nielsen, *Physical review letters* **97**, 110501 (2006).
- [101] F. Arzani, N. Treps ja G. Ferrini, *Physical Review A* **95**, 052352 (2017).
- [102] M. Walschaers, V. Parigi ja N. Treps, *PRX Quantum* **1**, 020305 (2020).
- [103] S. M. Barnett, G. Ferenczi, C. R. Gilson ja F. C. Speirits, *Physical Review A* **98**, 013809 (2018).
- [104] C. Navarrete-Benlloch, R. García-Patrón, J. H. Shapiro ja N. J. Cerf, *Physical Review A* **86**, 012328 (2012).
- [105] A. Hertz ja S. De Bièvre, *Physical Review A* **107**, 043713 (2023).
- [106] M. Walschaers, C. Fabre, V. Parigi ja N. Treps, *Physical Review A* **96**, 053835 (2017).
- [107] J. Wenger, R. Tualle-Brouri ja P. Grangier, *Physical review letters* **92**, 153601 (2004).
- [108] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat ja P. Grangier, *Science* **312**, 83 (2006).
- [109] K. Wakui, H. Takahashi, A. Furusawa ja M. Sasaki, *Optics Express* **15**, 3568 (2007).
- [110] A. Zavatta, S. Viciani ja M. Bellini, *science* **306**, 660 (2004).
- [111] V. Parigi, A. Zavatta, M. Kim ja M. Bellini, *Science* **317**, 1890 (2007).
- [112] M. G. Genoni, M. L. Palma, T. Tufarelli, S. Olivares, M. Kim ja M. G. Paris, *Physical Review A* **87**, 062104 (2013).
- [113] G.-C. Wick, *Physical review* **80**, 268 (1950).
- [114] L. Isserlis, *Biometrika* **12**, 134 (1918).
- [115] M. Gaudin, *Nuclear Physics* **15**, 89 (1960).
- [116] A. Vaglica, C. Leonardi ja G. Vetri, *Journal of Modern Optics* **37**, 1487 (1990).
- [117] G. Agarwal ja E. Wolf, *Physical Review D* **2**, 2206 (1970).
- [118] S. Campese, arXiv preprint arXiv:1511.00547 (2015).
- [119] C. Fassino, G. Pistone ja M. P. Rogantin, *Mathematics* **7**, 263 (2019).
- [120] A. Barvinok, *Foundations of Computational Mathematics* **7**, 229 (2007).
- [121] S. Janson, *Gaussian Hilbert Spaces* (Cambridge university press, 1997).

- [122] S. Janson ja S. Kaijser, *Higher moments of Banach space valued random variables* (American Mathematical Society, 2015).
- [123] R. Diestel, *Graph theory*, 5. painos (Springer Berlin, Heidelberg, 2017).
- [124] M. Newman, *Networks*, 2. painos (Oxford University Press, 2018).
- [125] M. Walschaers, B. Sundar, N. Treps, L. D. Carr ja V. Parigi, *Quantum Science and Technology* **8**, 035009 (2023).
- [126] E. R. Caianiello, *Il Nuovo Cimento (1943-1954)* **10**, 1634 (1953).
- [127] Y. Cardin ja N. Quesada, *Quantum* **8**, 1521 (2024).
- [128] E. Caianiello ja S. Fubini, *Il Nuovo Cimento (1943-1954)* **9**, 1218 (1952).
- [129] E. H. Lieb, *Journal of Combinatorial Theory* **5**, 313 (1968).
- [130] T. Hartung ja K. Jansen, *Journal of Mathematical Physics* **60**, (2019).
- [131] R. R. S. Cantuba, *Letters in Mathematical Physics* **110**, 2639 (2020).
- [132] V. V. Kocharovskiy, V. V. Kocharovskiy ja S. V. Tarasov, *Linear Algebra and its Applications* **651**, 144 (2022).
- [133] L. G. Valiant, *Theoretical computer science* **8**, 189 (1979).
- [134] A. Björklund, B. Gupt ja N. Quesada, *ACM J. Exp. Algorithmics* **24**, (2019).
- [135] R. Kruse, C. S. Hamilton, L. Sansoni, S. Barkhofen, C. Silberhorn ja I. Jex, *Physical Review A* **100**, 032326 (2019).
- [136] J. F. Bulmer *et al.*, *Science Advances* **8**, eabl9236 (2022).
- [137] C. Oh, M. Liu, Y. Alexeev, B. Fefferman ja L. Jiang, *Nature Physics* **20**, 1461 (2024).
- [138] M. C. Tichy, K. Mayer, A. Buchleitner ja K. Mølmer, *Physical Review Letters* **113**, 020502 (2014).
- [139] U. W. Pooch ja A. Nieder, *ACM Computing Surveys* **5**, 109 (1973).
- [140] M. Baskaran, B. Meister, N. Vasilache ja R. Lethin, kirjassa *2012 IEEE Conference on High Performance Extreme Computing* (IEEE, 2012), s. 1–6.
- [141] M. O. Albertson ja K. L. Collins, *Electronic Journal of Combinatorics* R18 (1996).
- [142] C. Ji, arXiv preprint arXiv:1808.01074 (2018).
- [143] M. J. Heule, *Mathematics in Computer Science* **13**, 533 (2019).

- [144] J. Araújo, N. Cohen, F. Giroire ja F. Havet, *Discrete Applied Mathematics* **160**, 2502 (2012).
- [145] J. Monnot, *Information Processing Letters* **96**, 81 (2005).
- [146] Y.-H. Deng *et al.*, *Physical Review Letters* **130**, 190601 (2023).
- [147] C. R. Harris *et al.*, *Nature* **585**, 357 (2020).
- [148] P. Ramachandran ja G. Varoquaux, *Computing in Science & Engineering* **13**, 40 (2011).

A Wignerin funktioiden kuvaajien piirtäminen

Luvuissa 3 ja 4 nähdyt kuvaajat erilaisille Wignerin funktioille luotiin Python ohjelmointikielellä käyttämällä NumPy- ja Mayavi-kirjastoja [147, 148]. Alla koodi, joka määrittelee kaikki esimerkeissä esiintyneet Wignerin funktiot.

```
import numpy as np

def vac_wig(x, y): # vakuumin Wignerin funktio
    return np.exp(-np.pow(x,2) -np.pow(y,2)) / np.pi

def term_wig(x, y): # terminen tila
    kerroin_A = 3/5
    return kerroin_A*np.exp(-kerroin_A*np.pow(x,2) -kerroin_A*np.pow(
        y,2)) / np.pi

def koh_wig(x, y): # koherentti tila
    siirto_param = np.sqrt(2)*0.5 # esimerkin siirtoparametrin arvo
    return np.exp(-np.pow(x-siirto_param,2) -np.pow(y-siirto_param,2)
        ) / np.pi

def pur_wig(x, y): # puristettu tila
    gamma_iv = 0.3 # puristusparametrin itseisarvo
    puristus_vaihe = np.pi/2 # puristusparametrin vaihe
    kerroin_B = np.cosh(4*gamma_iv) -np.cos(puristus_vaihe)*np.sinh
        (4*gamma_iv)
    kerroin_C = np.cosh(4*gamma_iv) +np.cos(puristus_vaihe)*np.sinh
        (4*gamma_iv)
    kerroin_D = np.sin(puristus_vaihe)*np.sinh(4*gamma_iv)
    return np.exp(-kerroin_B*np.pow(x,2) -kerroin_C*np.pow(y,2) +
        kerroin_D*2*x*y) / np.pi

def pac_wig(x, y): # koherentti tila plus yksi fotoni
    siirto_param = np.sqrt(2)*0.5
    kerroin_E = -1 +4*(np.pow(x,2) +np.pow(y,2)) -2*(siirto_param*x +
        siirto_param*y) +1/2 *(np.pow(siidto_param,2) +np.pow(
        siirto_param,2))
    kerroin_F = 1/(1 +1/2 *(np.pow(siidto_param,2) +np.pow(
        siirto_param,2))) # normalisointikerroin
    return kerroin_E*np.exp(-np.pow(x-siidto_param,2) -np.pow(y-
        siirto_param,2)) / np.pi *kerroin_F

def pss_wig(x, y): # puristettu tila poistetulla fotonilla
    gamma_iv = 0.3
    puristus_theta = np.pi/2
    kerroin_G = np.cosh(4*gamma_iv) -np.cos(puristus_theta)*np.sinh
```

```

(4*gamma_iv)
kerroin_H = np.cosh(4*gamma_iv) + np.cos(puristus_theta)*np.sinh
(4*gamma_iv)
kerroin_I = np.sin(puristus_theta)*np.sinh(4*gamma_iv)
kerroin_J = 4*(2*kerroin_G*np.pow(x,2) + 2*kerroin_H*np.pow(y,2)
-4*kerroin_I*x*y)-1
return kerroin_J*np.exp(-kerroin_G*np.pow(x,2) -kerroin_H*np.pow(
y,2) +kerroin_I*2*x*y) / np.pi

```

Mayavi-kirjasto piirtää määrätyn kuvaajan interaktiivisessa sovellusikkunassa, missä käyttäjä voi muokata kuvakulmaa ja tallentaa kuvan. Alla esimerkki koodista, jolla luotiin koherentin tilan 3d- ja 2d-kuvaajat (Kuva 3).

```

import numpy as np
from mayavi import mlab

x, y = np.mgrid[-4:4.1:0.1, -4:4.1:0.1] # luo parit (x,y)
wigner = koh_wig(x, y) # lasketaan Wignerin funktion arvo

# 3D-kuvaaja
mlab.figure(1, fgcolor=(0,0,0), bgcolor=(1,1,1), size=(800,600))
mlab.clf()
jakauma = mlab.surf(x, y, wigner, warp_scale="auto", colormap="plasma")
# kuvaaja itse
ruudukko = mlab.surf(x, y, wigner, color=(0,0,0), representation="
wireframe", warp_scale="auto", opacity=0.2) # kuvaajien ruudukko
luodaan erikseen
mlab.outline(jakauma, color=(.7, .7, .7))
ax = mlab.axes(jakauma, color=(.7, .7, .7),
               ranges=(-4, 4, -4, 4, 0, 0.318), xlabel='q', ylabel='p',
               xlabel='W', nb_labels=5,
               x_axis_visibility=True, z_axis_visibility=True,
               y_axis_visibility=True)
ax.axes.font_factor = 1.0
mlab.colorbar(orientation="vertical")
mlab.view(azimuth=225, distance=220) # asetetaan kamera ennalta
haluttuun paikkaan
mlab.move(right=-10, up=-10)
mlab.show()

# 2D-kuvaaja
mlab.figure(1, fgcolor=(0,0,0), bgcolor=(1,1,1), size=(600,620))
mlab.clf()
wigner = koh_wig(x, y)
jakauma = mlab.imshow(x, y, wigner, colormap="plasma")
ax = mlab.axes(jakauma, color=(.7, .7, .7), ranges=[-4,4,-4,4,0,0]),

```

```
        xlabel='q', ylabel='', zlabel='',
        nb_labels=5,
        x_axis_visibility=True, y_axis_visibility=True)
ax.axes.font_factor = 1.1
mlab.view(azimuth=0, elevation=0) # asetetaan kamera katsomaan kuvaa
    suoraan alas ja keskelle
mlab.move(right=-0.35, up=-0.2)
mlab.show()
```

B Tekoälyn käyttö tutkielmassa

Tämän tutkielman sisällön luomiseen ei ole käytetty tekoälytyökaluja.