

TURUN YLIOPISTO

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

**Vahinkojen lukumäärän arviointi
Poisson-prosessilla**

Sheller Rashid Zadeh Boukani

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2026

Ohjaaja: Jukka Lempa

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Sheller Rashid Zadeh Boukani

Vahinkojen lukumäärän arviointi Poisson-prosessilla

LuK-tutkielma, 19 s.

Matematiikka ja tilastotiede

Kevät 2026

Alkusanat

Tässä kandidaatintutkielmassa käsitellään vahinkojen lukumäärän arviointia vakuutusmatematiikassa. Tutkielman teoreettinen pohja perustuu pääosin Kalle Parvisen Turun yliopiston Riskiteoria-kurssin materiaaleihin [1]. Valittu aihe tarjoaa mahdollisuuden tarkastella, kuinka matemaattisia malleja hyödynnetään käytännön ongelmien ratkaisemisessa. Tarkastelussa yhdistyvät teoreettinen matematiikka, tilastotiede ja todennäköisyyslaskenta sekä niiden käytännön sovellukset vakuutusosalalla.

Työssä perehdytään keskeisiin käsitteisiin, kuten Poisson-jakaumaan, eksponenttijakaumaan ja laskuriprosessiin. Erityisesti keskitytään vahinkojen lukumäärän arvioinnissa käytettävään Poisson-prosessiin ja sen ominaisuuksiin. Tämän perusaiheen syvälinen hallinta antaa pohjan koko riskiteorian ymmärtämiselle.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Todennäköisyysteorian perusteet	2
3	Poisson-jakauma	4
3.1	Binomijakauma ja laskennalliset rajoitteet	4
3.2	Poisson-jakauma binomijakauman approksimaationa	5
3.2.1	Poisson-jakauman määritelmä	5
3.2.2	Poisson-jakauman kertymäfunktio	6
3.2.3	Poisson-jakauman odotusarvo ja varianssi	6
3.2.4	Generoivat funktiot ja momentit	7
4	Vahinkojen määrän arviointi Poisson-prosessin avulla	9
4.1	Eksponenttijakauma: Tapahtumien välinen aika	9
4.2	Laskuriprosessi	10
4.3	Homogeeninen Poisson-prosessi	11
4.3.1	Poisson-prosessin keskeiset oletukset	11
4.3.2	Poisson-prosessin määritelmä	12
4.3.3	Poisson-prosessin keskeiset tunnusluvut	13
4.3.4	Poisson-prosessin ominaisuudet: superpositio ja dekompositio	14
4.4	Poisson-prosessin ehtojen lieventäminen	15
5	Yhteenveto	18

1 Johdanto

Vakuutusmatematiikka on tieteenala, joka mallintaa taloudellisia riskejä matematiikan ja tilastotieteen työkaluilla. Sen keskeisenä tavoitteena on ennakoida vahinkojen esiintymistä ja suuruutta, jotta vakuutusyhtiöt voivat määrittää oikeudenmukaiset vakuutusmaksut.

Alan keskeisiä osa-alueita ovat riskiteoria, tariffiteoria, varaushallinta sekä vakavaraisuuslaskenta. Tässä tutkielmassa perehdytään riskiteoriaan, joka keskittyy vahinkojen lukumäärien ja vakavuuden arviointiin. Vahinkojen tarkka ennustaminen on välttämätöntä vakuutusyhtiön toiminnan kannalta, sillä virheellinen hinnoittelu muodostaa merkittävän taloudellisen riskin: liian alhaiset maksut voivat johtaa tappioihin, kun taas liian kalliit maksut aiheuttavat asiakaskatoa.

Tutkielma aloitetaan kertaamalla todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet. Vahinkojen arviointi alkaa vahinkotiheyden mallintamisella, jossa lasketaan vakuutuskannassa sattuvien vahinkojen todennäköisyyksiä. Mallintamisessa hyödynnetään todennäköisyysjakaumia, joiden avulla voidaan ennakoida mm. kuinka usein vahinkoja keskimäärin tapahtuu ja kuinka paljon niiden määrä voi sattuman vuoksi vaihdella. Luvussa käsiteltävät asiat ovat välttämätöntä pohjatietoa monimutkaisempien mallien ymmärtämiseksi.

Kolmannessa luvussa syvennytään Poisson-jakaumaan, joka muodostaa välttämättömän teoreettisen pohjan vahinkojen lukumäärän mallintamiselle. Jakauman avulla voidaan kuvata yksittäisten vahinkotapahtumien esiintymistä tietyllä aikavälillä, mikä mahdollistaa niiden yhdistämisen jatkuvaksi laskuri-prosessiksi.

Neljännessä luvussa määritellään aluksi vahinkojen välistä aikaa kuvaava eksponenttijakauma. Tämän jälkeen esitetään, kuinka näitä aikavälejä summaava laskuri-prosessi mahdollistaa vahinkojen kertymisen tarkastelun. Lopuksi nämä osat yhdistetään Poisson-prosessiksi, joka tarjoaa työkalun vahinkojen lukumäärän arviointiin.

Poisson-prosessin muodostumisen jälkeen syvennytään sen keskeisiin ominaisuuksiin, kuten superpositioon ja dekompositioon. Vaikka Poisson-prosessi on keskeinen työkalu vakuutusmatematiikassa, sen tärkeimmät oletukset, eli vahinkojen riippumattomuus ja stationaarisuus, eivät useinkaan täyty käytännön sovelluksissa. Luvun lopussa esitellään keinoja, joilla näitä rajoitteita voidaan lieventää muokkaamalla prosessin rakennetta. Epähomogeeninen Poisson-prosessi tarjoaa ratkaisun stationaarisuusoletuksesta luopumiseen, ja sekoitetut Poisson-prosessit esitellään keinona hallita vahinkojen välistä riippuvuutta.

2 Todennäköisysteorian perusteet

Tässä luvussa esitellään todennäköisysteorian käsitteitä ja jakaumia, joita hyödynnetään Poisson-prosessin määrittelyssä. Luvun tulokset esitetään ilman todistuksia, ja niihin voi perehtyä tarkemmin lähdemateriaaleissa [1][2] ja [3].

Todennäköisysteorian peruskäsitteet

Määritelmä 2.1. Kolmikkoa (Ω, \mathcal{F}, P) kutsutaan todennäköisyysvaruudeksi, missä Ω on perusjoukko, \mathcal{F} on tapahtumien kokoelma ja P on todennäköisyysmitta, joka toteuttaa Kolmogorovin aksioomat:

1. $P(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Erillisille tapahtumille $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Määritelmä 2.2. Satunnaismuuttuja X on funktio, joka liittää satunnaiskokeen tulokseen reaalityluvun. Satunnaismuuttujat jaetaan tyypillisesti kolmeen luokkaan:

- Diskreetti satunnaismuuttuja saa arvoja erillisestä joukosta $\{x_1, x_2, \dots\}$. Sen käyttäytymistä kuvaa pistetodennäköisyysfunktio $f(x_i) = P(X = x_i)$, jolle pätee $\sum_i f(x_i) = 1$.
- Jatkuva satunnaismuuttuja voi saada mitä tahansa arvoja tietyltä väliltä, ja sitä kuvataan tiheysfunktiolla $f(x)$. Tällöin todennäköisyys välille $[a, b]$ saadaan integraalina $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$, missä $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.
- Sekajakauma (yhdistelmä) sisältää sekä diskreettejä että jatkuvia piirteitä. Tällöin hyödynnetään Stieltjes-integraalia, joka yhdistää jatkuvan ja diskreetin osan tarkastelun:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx + \sum_i g(x_i) p_i,$$

missä p_i vastaa kertymäfunktion hyppyjä pisteissä x_i :

$$p_i = F(x_i) - \lim_{t \rightarrow x_i^-} F(t) = P(X = x_i).$$

Keskeiset jakaumat ja tunnusluvut

Jakauman keskeisimpiä tunnuslukuja ovat odotusarvo $E(X)$, joka kuvaa keskimääräistä tulosta, ja varianssi $Var(X)$, joka kuvaa arvojen hajontaa.

Määritelmä 2.3. Satunnaismuuttujan X odotusarvo $E(X)$ määritellään diskreetille muuttujalle summana

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

ja jatkuvalla muuttujalle integraalina

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Määritelmä 2.4. Satunnaismuuttujan X varianssi $Var(X)$ kuvaa arvojen hajontaa odotusarvon ympärillä ja se määritellään kaavalla

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Riippumattomuus ja summien jakaumat

Määritelmä 2.5. Satunnaismuuttujien riippumattomuudella tarkoitetaan, ettei toisen muuttujan saama arvo vaikuta toisen muuttujan todennäköisyysjakamaan. Matemaattisesti riippumattomuus määritellään kertymäfunktion tulona $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$, mikä tarkoittaa, että:

- Diskreetissä tapauksessa: $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.
- Jatkuvassa tapauksessa: $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Määritelmä 2.6. Olkoot X ja Y riippumattomia jatkuvia satunnaismuuttujia. Niiden summan $Z = X + Y$ tiheysfunktio $f_Z(z)$ saadaan konvoluutiolla:

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x) dx.$$

3 Poisson-jakauma

Poisson-jakauman kehitti ranskalainen matemaatikko Siméon Denis Poisson (1781–1840) tutkiessaan oikeuslaitoksen ratkaisujen luotettavuutta. Hänen tavoitteenaan oli selvittää matemaattisesti, kuinka monta valamiehistön (*jury*) jäsentä tarvitaan ja millaisella enemmistöllä päätökset tulisi tehdä, jotta virheellisten tuomioiden riski minimoitaisiin.⁽¹⁾[8]

Poisson käytti tutkimuksessaan alun perin binomijakaumaa, joka laskee onnistumisten määriä toistokokeissa, joissa on kaksi mahdollista lopputulosta: onnistuminen tai epäonnistuminen. Tämän avulla hän pyrki laskemaan virheellisten tuomioiden todennäköisyyksiä oikeudenkäynneissä, jotka toimivat kaksiarvoisina tapahtumina eli syytetty todetaan joko syylliseksi tai syyttömäksi.

Haasteeksi muodostuivat oikeudenkäyntien suuri määrä ja yksittäisten virheellisten tuomioiden harvinaisuus, mitkä tekivät binomijakauman laskemisesta sen ajan menetelmillä erittäin työlästä. Tästä syystä Poisson kehitti nimeään kantavan jakauman binomijakauman approksimaatioksi helpottamaan laskentaa. Poisson-jakauma korvaa binomijakauman monimutkaiset kertoimet yhdellä vakioilla, odotusarvolla (λ), mikä tekee harvinaisten tapahtumien ennustamisesta suuressa otoksessa huomattavasti tehokkaampaa.

Tämä luku on laadittu lähteiden [1], [3] ja [4] perusteella. Esitetyt esimerkit on laadittu itse havainnollistamaan käsiteltäviä asioita.

3.1 Binomijakauma ja laskennalliset rajoitteet

Määritelmä 3.1 (Binomijakauma). Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa, merkitään $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Tässä $n \in \mathbb{N}$ on riippumattomien toistokokeiden kokonaismäärä ja $p \in [0, 1]$ on yksittäisen tapahtuman todennäköisyys. Jakauma kuvaa tapahtumien lukumäärää $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ näissä kokeissa. Jakauman pistetodennäköisyysfunktio on

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (1)$$

Esimerkki 3.2 (Risteyksen kolaritiheys binomijakaumalla). Tarkastellaan risteystä, jonka läpi ajaa päivittäin $n = 500\,000$ autoa. Tilastojen perusteella todennäköisyys sille, että yksittäinen auto joutuu onnettomuuteen kyseisessä risteyksessä, on $p = 0,00001$. Olkoon satunnaismuuttuja X päivittäisten kolaritapahtumien määrä.

⁽¹⁾Keskeinen havainto oli, että oikeusturva edellyttäisi suurempaa enemmistöä.

Käytettäessä tarkkaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(500\,000, 0,00001)$, todennäköisyys sille, että päivän aikana tapahtuu täsmälleen k kolaritapahtumaa, lasketaan kaavalla

$$P(X = k) = \binom{500\,000}{k} \cdot 0,00001^k \cdot (1 - 0,00001)^{500\,000-k}. \quad (2)$$

Kuten esimerkistä nähdään, binomijakauman kaava toimii teoriassa aina. Käytännössä näin valtavien kertoimien käsittely on kuitenkin erittäin työlästä ja altistaa laskentavirheille.

3.2 Poisson-jakauma binomijakauman approksimaationa

Vakuutusmatematiikassa vahinkojen lukumäärän arviointiin käytetään Poisson-prosessia, ja tämän prosessin mittarina toimii Poisson-jakauma. Poisson-jakauma on diskreetti todennäköisyysjakauma, joka kuvaa toisistaan riippumattomien tapahtumien lukumäärää kiinteällä aikavälillä.

3.2.1 Poisson-jakauman määritelmä

Poisson-jakaumalla approksimoidaan binomijakaumaa tilanteissa, joissa toistojen määrä n on suuri ja tapahtuman todennäköisyys p on pieni (yleensä $n \geq 20$ ja $p \leq 0,05$). Tällaisia tilanteita, joissa suuri määrä harvinaisia yksittäisiä tapahtumia muodostaa tilastollisesti ennustettavan tapahtumavirran, kutsutaan harvinaisten tapahtumien laiksi [4].

Määritelmä 3.3 (Poisson-jakauma). Satunnaismuuttuja X noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla $\lambda > 0$, merkitään $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (3)$$

Esimerkki 3.4 (Risteyksen kolaritiheys Poisson-approksimaatiolla). Sovellaan aiemman esimerkin arvoja, joissa autojen määrä $n = 500\,000$ ja onnettomuuden todennäköisyys $p = 0,00001$. Lasketaan odotusarvo $\lambda = n \cdot p = 500\,000 \cdot 0,00001 = 5$. Todennäköisyys sille, että tapahtuu täsmälleen $k = 2$ kolaria, lasketaan seuraavasti:

$$P(X = 2) \approx \frac{e^{-5} 5^2}{2!} \approx 0,0842 \text{ eli } 8,4\%.$$

Esimerkki osoittaa, että Poisson-jakaumalla saadaan harvinaisille tapahtumille suuresta aineistosta selkeä ennustearvo.

3.2.2 Poisson-jakauman kertymäfunktio

Määritelmä 3.5 (Kertymäfunktio). Poisson-jakauman kertymäfunktion avulla voidaan laskea todennäköisyys sille, että tapahtumien määrä on korkeintaan k :

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}. \quad (4)$$

Vastatapahtuman todennäköisyys sille, että tapahtumia on enemmän kuin k , lasketaan komplementtiperiaatteen avulla:

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - F(k). \quad (5)$$

Esimerkki 3.6 (Kolarimäärien todennäköisyysrajat). Hyödynnetään aiempaa esimerkkiä, jossa onnettomuuksien odotusarvo $\lambda = 5$. Lasketaan todennäköisyys sille, että päivän aikana tapahtuu korkeintaan kaksi kolaria ($X \leq 2$):

$$P(X \leq 2) = \frac{e^{-5} 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} 5^2}{2!} \approx 0,0067 + 0,0337 + 0,0842 = 0,1246,$$

vastaavasti todennäköisyys useammalle kuin kahdelle onnettomuudelle on

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,8754.$$

Tämä tarkoittaa, että on noin 12,5 % todennäköisyys sille, että onnettomuuksia tapahtuu päivän aikana korkeintaan kaksi, ja 87,5 % todennäköisyys sille, että niitä tapahtuu enemmän kuin kaksi.

3.2.3 Poisson-jakauman odotusarvo ja varianssi

Poisson-jakaumalle $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ on ominaista, että sen odotusarvo ja varianssi ovat molemmat yhtä suuria kuin intensiteettiparametri λ .

1. Odotusarvon todistus

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \quad (2) \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

⁽²⁾Tässä hyödynnetään eksponenttifunktion Taylor-sarjaa $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. Varianssin todistus Määritetään ensin toinen kertomamomentti $E(X(X-1))$ ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Sijoittamalla tulos varianssin kaavaan⁽⁴⁾:

$$\text{Var}(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda. \tag{8}$$

Esimerkki 3.7 (Tunnuslukujen tulkinta kolaritiheydessä). Jatketaan esimerkkiä, jossa $\lambda = 5$. Jakauman tunnusluvut ovat odotusarvo $E(X) = 5$, varianssi $\text{Var}(X) = 5$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{5} \approx 2,24$.

Näiden arvojen perusteella risteyksessä odotetaan tapahtuvan keskimäärin viisi kolariä päivässä. Varianssi kuvaa sitä, kuinka paljon päivittäiset kolarimäärät hajautuvat keskiarvon ympärille, ja keskihajonta kertoo tyypillisen vaihtelun onnettomuuksien määrässä.

Keskihajonnan mukaan kolarimäärien vaihtelu välillä 3–7 on vielä normaalia satunnaisvaihtelua. Jos määrä nousee tästä selvästi (esim. yli 12 kolariin), se viittaa muutokseen taustatekijöissä, kuten liikennemäärän kasvuun tai tieolosuhteiden heikkenemiseen.

3.2.4 Generoivat funktiot ja momentit

Tilastollisessa mallinnuksessa hyödynnetään usein momentit generoivaa funktiota (MGF) $M_X(t) = E[e^{tX}]$. Poisson-jakaumalle tämä funktio johdetaan as-

⁽³⁾ $E(X(X-1)) = E(X^2 - X)$, eli $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$. Odotusarvon $E(X^2)$ laskeminen suoraan on haastavaa, koska k^2 ei supistu suoraan nimittäjän $k!$ kanssa, mutta $k(k-1)$ supistuu muotoon $1/(k-2)!$.

⁽⁴⁾Hyödynnetään yhteyttä $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$, jolloin $\text{Var}(X) = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$.

keleittain seuraavasti:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}. \end{aligned}$$

Vastaavasti todennäköisyydet generoiva funktio $G_X(s) = E[s^X]$ saa muodon $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$. Generoivien funktioiden avulla origomomentit voidaan laskea suoraan ja helposti derivaattojen avulla. Esimerkiksi odotusarvo saadaan laskemalla funktion ensimmäinen derivaatta kohdassa $t = 0$.

Esimerkki 3.8 (Vakuutuskannan riskien yhdistäminen MGF avulla). Oletetaan, että kaupungissa on viisi risteystä, joiden yksilölliset päivittäiset odotusarvot ovat $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 6$ ja $\lambda_5 = 4$. Kokonaisvahinkomäärän $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ momentit generoiva funktio saadaan yksittäisten funktioiden tulona:

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^5 M_{X_i}(t) = e^{(5+3+2+6+4)(e^t-1)} = e^{20(e^t-1)}. \quad (9)$$

Vaikka kunkin risteuksen kolariodotusarvo on erisuuruinen, riippumattomuusoletuksen nojalla koko kaupungin kolarimäärä noudattaa edelleen Poisson-jakaumaa summan odotusarvolla $\lambda_S = 20$.

Tämä additiivisuusominaisuus mahdollistaa yksittäisten vahinkotapahtumien yhdistämisen yhtenäiseksi vakuutuskannaksi. Sen kautta vakuutusyhtiö voi käsitellä monimutkaisia summajakaumia yksinkertaisten kertolaskujen kautta. Tämä perustuu eksponenttifunktion ominaisuuteen, jossa riippumattomien muutujien summan momentit generoiva funktio saadaan yksittäisten funktioiden tulona: $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

4 Vahinkojen määrän arviointi Poisson-prosessin avulla

Vakuutusmatematiikassa vahinkojen lukumäärän arviointiin käytetään Poisson-prosessia. Sitä voidaan havainnollistaa mekanismina, jossa Poisson-jakauma osoittaa vahinkojen kokonaismäärän tietyllä kiinteällä tarkasteluvälillä. Tämän mekanismin perustana toimii eksponenttijakauma, joka määrittää vahinkojen välisten aikojen pituuden. Poisson-prosessin laskuri-prosessi kirjaa kertyneet tapahtumat ajan funktiona. Mekanismin intensiteetin eli sen, kuinka tiheästi vahinkoja keskimäärin tapahtuu, määrittää parametri λ .

Teoreettisesti Poisson-prosessi on jatkuva-aikainen stokastinen prosessi, jonka riippumattomat ja stationaariset lisäykset määrittävät tietyllä aikavälillä sattuvien tapahtumien lukumäärän todennäköisyysjakauman. Vakuutustoiminnassa nämä lisäykset kuvaavat esimerkiksi tietyn ajanjaksona sattuvien vahinkojen määrää. Tässä luvussa perehdytään ensin eksponenttijakaumaan ja laskuri-prosessiin, minkä jälkeen syvennytään homogeenisen Poisson-prosessin määrittelyyn sekä sen keskeisiin ominaisuuksiin, eli superpositioon ja dekompositioon. Lopuksi käsitellään lyhyesti epähomogeenista Poisson-prosessia ja sekoitettuja Poisson-prosesseja.

Tämän luvun esitys perustuu pääosin Kalle Parvisen [1] riskiteorian kurssimateriaaleihin.

4.1 Eksponenttijakauma: Tapahtumien välinen aika

Poisson-prosessissa tapahtumien välistä odotusaikaa mallinnetaan eksponenttijakaumalla. Mallissa tapahtumien intensiteetti oletetaan vakioksi riippumatta siitä, kuinka kauan edellisestä vahingosta on jo kulunut. Tämän oletuksen mahdollistaa eksponenttijakauman muistittomuusominaisuus, joka tarkoittaa, että tulevan vahingon sattumistodennäköisyys on riippumaton jo kuluneesta odotusajasta:

$$P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t), \quad s, t \geq 0, \quad (10)$$

missä T on vahinkojen välinen aika, s on edellisestä vahingosta jo kulunut aika ja t on tarkasteltava tuleva lisäaika. Eksponenttijakauman ominaisuuksia käsitellään tässä työssä ilman todistuksia; niihin voi perehtyä tarkemmin esimerkiksi lähteessä [9].

Määritelmä 4.1 (Eksponenttijakauma). Satunnaismuuttuja T noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$, merkitään $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, jos sen tiheys-

funktio on muotoa

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Esimerkki 4.2. (Kolareiden esiintymistiheys) Jatketaan luvun 3 esimerkkiä, jossa kolaritiheys on $\lambda = 5$ kolaria vuorokaudessa. Tiheysfunktio $f(t) = 5e^{-5t}$ kuvaa kolarivälien pituuden jakautumista. Mitä suurempi intensiteetti λ on, sitä lyhyempi on keskimääräinen kolariväli.

Määritelmä 4.3 (Eksponenttijakauman kertymäfunktio). Satunnaismuuttuja T noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$, jos sen kertymäfunktio $F(t) = P(T \leq t)$ on muotoa

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Tässä kertymäfunktio ilmaisee todennäköisyyden sille, että tapahtuma sattuu viimeistään ajanhetkellä t .

Esimerkki 4.4. (Risteyksen kolariväli) Lasketaan todennäköisyys sille, että kolarien välinen aika on yli kaksi tuntia, kun $\lambda = 5$. Kun huomioidaan, että kaksi tuntia on $t = 2/24 \approx 0,0833$ vuorokautta, saadaan vastatapahtuman avulla:

$$P(T > 0,0833) = 1 - F(0,0833) = 1 - (1 - e^{-5 \cdot 0,0833}) = e^{-0,4167} \approx 0,6592. \quad (13)$$

Tämä tarkoittaa, että noin 65,9 % todennäköisyydellä kolariväli on pidempi kuin kaksi tuntia.

Lause 4.5 (Eksponenttijakauman tunnusluvut). Eksponenttijakautuneen satunnaismuuttujan T odotusarvo, varianssi ja keskihajonta ovat:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{ja} \quad \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}. \quad (14)$$

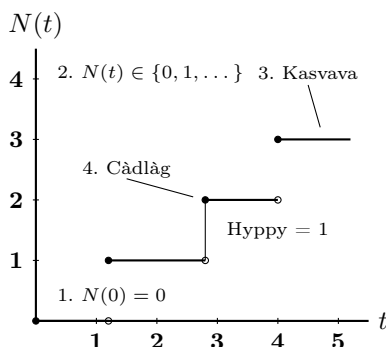
Esimerkki 4.6. Risteyksen keskimääräinen kolariväli ($\lambda = 5$) on $E(T) = 1/5 = 0,2$ vuorokautta eli 4,8 tuntia. Koska odotusarvo ja keskihajonta ovat eksponenttijakaumassa samat, myös kolarivälien hajonta on tässä tapauksessa 4,8 tuntia.

4.2 Laskuriprosessi

Olkoon $N(t)$ ajanhetken t mennessä sattuneiden tapahtumien lukumäärä. Vahinkojen kehitystä ajan funktiona kuvaavaa stokastista prosessia $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ kutsutaan laskuriprosessiksi. Laskuriprosessi on poluiltaan càdlàg (oikealta jatkuva, vasemmalta rajoitettu). Lisäksi prosessin tulee täyttää seuraavat ehdot:

1. Prosessi saa arvon 0 ajanhetkellä 0, eli $N(0) = 0$.

2. Prosessi $N(t)$ on ei-negatiivinen ja kokonaislukuarvoinen, eli $N(t) \in \{0, 1, 2, \dots\}$ kaikilla $t \geq 0$.
3. Prosessi on ajan suhteen kasvava: jos $s < t$, niin $N(s) \leq N(t)$.
4. Prosessin hyppyjen koko on yksi, eli ajanhetkellä t voi sattua korkeintaan yksi vahinko.



Kuva 1: Laskuriprosessin polku ja sen keskeiset ehdot.

Vakioisella intensiteetillä λ toimivaa laskuriprosessia kutsutaan homogeeniseksi Poisson-prosessiksi. Seuraavaksi tarkastellaan tämän prosessin määritelmää sekä sen keskeisiä ominaisuuksia.

4.3 Homogeeninen Poisson-prosessi

Tässä alaluvussa käsitellään homogeenista Poisson-prosessia. Se on laskuriprosessi, joka kuvaa satunnaista mutta keskimäärin tasaista tapahtumien virtaa vakioisella intensiteetillä λ . Prosessin tyypilliset riippumattomat ja stationaariset lisäykset mahdollistavat vahinkojen lukumäärän tehokkaan mallintamisen. Jatkossa homogeeniseen Poisson-prosessiin viitataan lyhyemmin termillä Poisson-prosessi. Tämän luvun materiaalina on käytetty pääosin lähteitä [1] ja [10].

4.3.1 Poisson-prosessin keskeiset oletukset

Ennen Poisson-prosessin määrittelyä esitetään aikavälin muutoksiin liittyvä merkintä sekä prosessin keskeiset oletukset. Prosessin ominaisuuksien ja tunnuslukkujen johtamiset löytyvät Parvisen luentomonisteesta [1, s. 12–14].

Merkintä 4.7. Olkoon $N: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio. Tällöin kaikilla $0 \leq s < t < \infty$ käytetään merkintää

$$N(s, t] = N(t) - N(s),$$

joka ilmoittaa funktion N muutoksen eli lisäyksen tarkasteltavalla välillä.

Esimerkki 4.8. Olkoon $N(t)$ kolarimäärä tietyssä risteyksessä hetkeen t mennessä. Jos $s =$ klo 6.00 ja $t =$ klo 12.00, niin $N(s, t] = N(12) - N(6)$ laskee risteyksessä klo 6.00–12.00 välisenä aikana tapahtuneet kolarit.

Määritelmä 4.9 (Riippumattomat lisäykset). Laskuriprosessilla $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ on riippumattomat lisäykset, jos erillisillä aikaväleillä sattuvien tapahtumien lukumäärät ovat toisistaan riippumattomia. Toisin sanoen, jos $0 \leq t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq \dots \leq t_n < s_n$, niin lisäykset

$$N(t_1, s_1], N(t_2, s_2], \dots, N(t_n, s_n]$$

ovat toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia kaikilla $n = 1, 2, \dots$

Esimerkki 4.10. Tarkastellaan risteyksen kolarimäärää saman päivän aikana kahdella erillisellä aikavälillä: aamulla klo 8.00–9.00 ja iltapäivällä klo 15.00–16.00. Riippumattomien lisäysten nojalla satunnaismuuttujat $N(8, 9]$ ja $N(15, 16]$ ovat toisistaan riippumattomia, jolloin pätee:

$$\mathbb{P}(N(8, 9] = 2 \text{ ja } N(15, 16] = 1) = \mathbb{P}(N(8, 9] = 2) \cdot \mathbb{P}(N(15, 16] = 1).$$

Määritelmä 4.11 (Stationaariset lisäykset). Laskuriprosessin lisäykset ovat stationaariset, jos millä tahansa aikavälillä sattuvien tapahtumien lukumäärän jakauma riippuu vain välin pituudesta. Tällöin kaikilla $s, t \geq 0$ lisäykset $N(0, t]$ ja $N(s, s + t]$ ovat samoin jakautuneita.

Esimerkki 4.12. Tarkastellaan kolarimäärää kahtena eri päivänä klo 11.00–12.00. Ensimmäisenä päivänä aikaväli on $(11, 12]$ ja seuraavana päivänä (eli 11 + 24 ja 12 + 24 tuntia aloituksesta) $(35, 36]$. Koska molempien välien pituus on $t = 1$ tunti, stationaarisuuden nojalla lisäykset ovat samoin jakautuneita kuin ensimmäinen tunti $N(0, 1]$. Tällöin kaikilla mahdollisilla kolarien lukumäärillä $k = 0, 1, 2, \dots$ pätee:

$$\mathbb{P}(N(11, 12] = k) = \mathbb{P}(N(35, 36] = k) = \mathbb{P}(N(0, 1] = k).$$

4.3.2 Poisson-prosessin määritelmä

Poisson-prosessi tarjoaa työkaluja vahinkojen lukumäärän arviointiin yhdistämällä Poisson-jakauman, eksponenttijakauman ja laskuriprosessin ominaisuudet.

Määritelmä 4.13 (Poisson-prosessi). Laskuriprosessi $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi nopeudella (intensiteetillä) $\lambda > 0$, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. $N(0) = 0$.
2. Prosessilla on stationaariset ja riippumattomat lisäykset.
3. Millä tahansa aikavälillä $(s, t]$ tapahtuva lisäys noudattaa Poisson-jakaumaa. Tällöin todennäköisyys sille, että aikavälillä tapahtuu täsmälleen k tapahtumaa, lasketaan kaavalla:

$$\mathbb{P}(N(s, t] = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Kun tarkastelu aloitetaan ajanhetkestä $s = 0$, hetkeen t mennessä tapahtuneiden tapahtumien todennäköisyysjakaumaksi saadaan:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (15)$$

missä yhtälö ilmoittaa todennäköisyyden sille, että ajanhetkeen t mennessä on sattunut täsmälleen k tapahtumaa.

4.3.3 Poisson-prosessin keskeiset tunnusluvut

Poisson-prosessin keskeiset tunnusluvut perustuvat suoraan Poisson-jakauman ominaisuuksiin. Ne kuvaavat, miten tapahtumien odotusarvo ja hajonta kehittyvät ajan kuluessa.

Määritelmä 4.14 (Poisson-prosessin keskeiset tunnusluvut). Poisson-prosessin $N(t)$ keskeiset tunnusluvut tarkasteltavalla aikavälillä $(0, t]$ ovat:

$$\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t, \quad \text{Var}(N(t)) = \lambda t \quad \text{ja} \quad \sigma(N(t)) = \sqrt{\lambda t}. \quad (16)$$

Huomaa, että nämä tunnusluvut ovat Poisson-jakauman tunnuslukuja sillä erolla, että ne riippuvat suoraan aikavälin pituudesta t .

Esimerkki 4.15 (Risteyksen kolarimäärät ja tunnusluvut). Tarkastellaan risteystä, jonka kolarointensiteetti on $\lambda = 5$ kolaria vuorokaudessa. Haluamme tutkia kolarimäärää aikavälillä klo 6.00–12.00. Muutetaan aluksi kuuden tunnin jakso samaan aikayksikköön kuin intensiteetti, jolloin tarkasteltavan aikavälin $(s, t] = (6/24, 12/24]$ pituudeksi saadaan:

$$t = \frac{12 - 6}{24} = \frac{6}{24} = 0,25 \text{ vuorokautta.}$$

Odotettu kolarimäärä $N(t)$ tälle jaksolle on:

$$\mathbb{E}(N(0,25)) = 5 \cdot 0,25 = \mu = 1,25 \text{ kolaria.}$$

Vastaava keskihajonta on $\sigma = \sqrt{1,25} \approx 1,12$. Keskihajonnan mukainen vaihteluväli $\mu \pm \sigma$ on $[0,13, 2,37]$. Tämän perusteella 0, 1 tai 2 kolaria ovat odotettavia ja mahdollisia tuloksia. Tätä suuremmat kolarimäärät, kuten 4 kolaria tai enemmän, ovat epätodennäköisiä poikkeustapauksia.

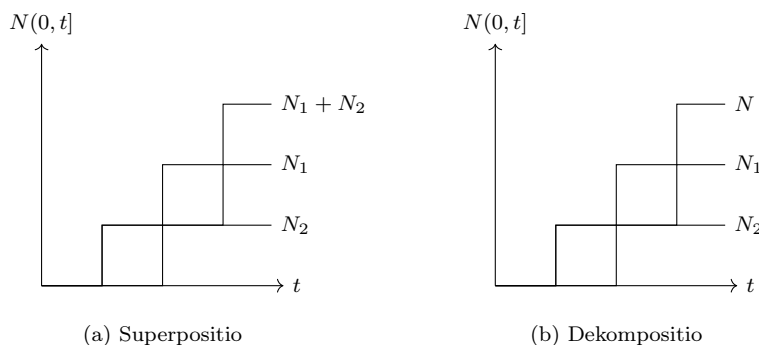
Voimme osoittaa tämän laskemalla yksittäiset todennäköisyydet Poisson-prosessin kaavalla $\mathbb{P}(N(t) = k)$ aikavälille pituudeltaan $t = 0,25$:

- $\mathbb{P}(N(0,25) = 0) = \frac{1,25^0}{0!} e^{-1,25} \approx 0,2865$
- $\mathbb{P}(N(0,25) = 1) = \frac{1,25^1}{1!} e^{-1,25} \approx 0,3581$
- $\mathbb{P}(N(0,25) = 2) = \frac{1,25^2}{2!} e^{-1,25} \approx 0,2238$
- $\mathbb{P}(N(0,25) = 3) = \frac{1,25^3}{3!} e^{-1,25} \approx 0,0933$
- $\mathbb{P}(N(0,25) = 4) = \frac{1,25^4}{4!} e^{-1,25} \approx 0,0292$

Esimerkissä nähdään, kuinka Poisson-prosessi sitoo kolarimäärän ja ajan yhteen kaavalla $\mu = \lambda t$. Prosessimalli selittää, miksi odotusarvo on ajan funktio, joka kasvaa lineaarisesti ajan kuluessa.

4.3.4 Poisson-prosessin ominaisuudet: superpositio ja dekompositio

Poisson-prosessin keskeisimmät ominaisuudet ovat yhdistäminen (superpositio) ja osiin jakaminen (dekompositio). Superposition avulla esimerkiksi kaupungin eri risteysten kolarit voidaan yhdistää yhdeksi kokonaisprosessiksi, kun taas dekomposition avulla vahingot voidaan jakaa esimerkiksi vakaviin ja lieviin vahinkoihin (ks. Kuva 2). Tässä aliluvussa esitellään nämä ominaisuudet ilman todistuksia. Yksityiskohtaisiin todistuksiin voi perehtyä Kalle Parvisen luentomonisteesta.[1]



Kuva 2: Poisson-prosessin perusominaisuudet: (a) Superpositiossa kaksi prosessia lasketaan yhteen. (b) Dekompositiossa yksi prosessi jaetaan kahteen osaan.

Lause 4.16 (Superpositio). Olkoon $\{N_i(t) \mid t \geq 0\}$ joukko riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä λ_i , missä $i = 1, \dots, r$. Näiden prosessien summa

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \dots + N_r(t) \quad (17)$$

on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i$.

Esimerkki 4.17 (Kolarisumman superpositio). Tarkastellaan viittä risteystä, joiden kolaritiheydet vuorokaudessa ovat $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 6$ ja $\lambda_5 = 4$. Superposition nojalla kolarimäärä koko kaupungin risteyksissä noudattaa Poisson-prosessia $S(t)$ intensiteetillä

$$\lambda = 5 + 3 + 2 + 6 + 4 = 20.$$

Todennäköisyys, että kaupungin risteyksissä sattuu klo 6–12 välisenä aikana ($t = 0,25$) yhteensä täsmälleen 5 kolaria, on

$$\mathbb{P}(S(0,25) = 5) = \frac{(20 \cdot 0,25)^5}{5!} e^{-20 \cdot 0,25} = \frac{5^5}{5!} e^{-5} \approx 0,1755.$$

Lause 4.18 (Dekompositio). Olkoon $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ Poisson-prosessi intensiteetillä λ . Jos prosessin tapahtumat luokitellaan toisistaan riippumattomasti luokkiin $i = 1, \dots, r$ todennäköisyyksillä p_i ($\sum p_i = 1$), niin syntyvät osaprosessit $\{N_i(t)\}$ ovat toisistaan riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä λp_i .

Esimerkki 4.19 (Risteysvahinkojen ositus). Jatketaan risteysesimerkkiä, jossa $\lambda = 5$. Jaetaan kolarit pieniin vahinkoihin ($p_1 = 0,95$) ja vakaviin vahinkoihin ($p_2 = 0,05$). Lauseen nojalla osaprosessit ovat riippumattomia ja niiden intensiteetit ovat:

- $\lambda_1 = 5 \cdot 0,95 = 4,75$ vahinkoa vuorokaudessa.
- $\lambda_2 = 5 \cdot 0,05 = 0,25$ vahinkoa vuorokaudessa.

Todennäköisyys sille, että vuorokaudessa ($t = 1$) sattuu täsmälleen 2 pientä ja 1 vakava vahinko, on:

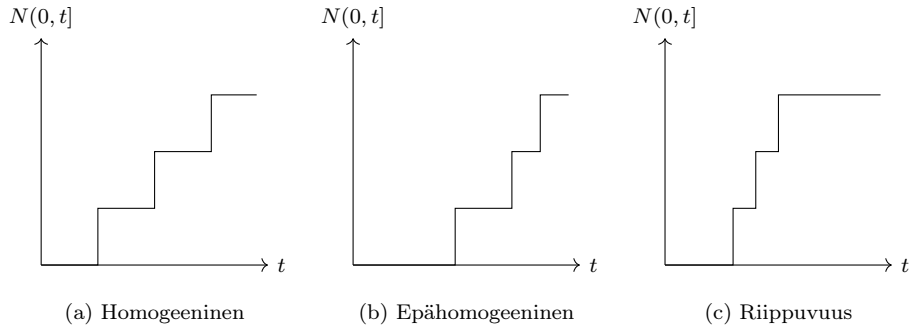
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1(1) = 2 \cap N_2(1) = 1) &= \mathbb{P}(N_1(1) = 2) \cdot \mathbb{P}(N_2(1) = 1) \\ &= \frac{4,75^2}{2!} e^{-4,75} \cdot \frac{0,25^1}{1!} e^{-0,25} \\ &\approx 0,0981 \cdot 0,1947 \approx 0,0191. \end{aligned}$$

4.4 Poisson-prosessin ehtojen lieventäminen

Aikaisemmin tutustuttiin Poisson-prosessin keskeisiin oletuksiin eli stationaarisuuteen ja lisäysten riippumattomuuteen. Vakuutustoiminnan kannalta nämä

oletukset ovat usein liian tiukkoja ja epärealistisia (ks. Kuva 3a). Tätä havainnollistavat muun muassa seuraavat esimerkit:

- Vuorokausivaihtelu (epähomogeenisuus): Liikennemäärät ja onnettomuusriskit vaihtelevat jatkuvasti, kuten vilkkaan aamuruuhkan ja hiljaisen yöajan välillä. Tällöin riskitaso eli intensiteetti $\lambda(t)$ ei pysy vakiona, mikä rikkoo stationaarisuuden (ks. Kuva 3b).
- Sääolosuhteet (riippuvuus): Ennalta-arvaamaton liukastumiskeli kasvattaa kolaririskiä samanaikaisesti kaikilla tienkäyttäjillä. Tämä rikkoo riippumattomuusoletuksen, sillä vahingot kasautuvat samalle lyhyelle ajanjaksolle (ks. Kuva 3c).



Kuva 3: Poisson-prosessin vertailu: (a) Homogeeninen malli ja tasainen vahinkotahti. (b) Vuorokausivaihtelu rikkoo stationaarisuuden, eli kolaririski vaihtelee eri aikavälien välillä. (c) Ennalta-arvaamaton liukastumiskeli aiheuttaa vahinkojen kasautumisen tiettyyn aikaväliin.

Tässä aliluvussa, joka pohjautuu Parvisen luentomonisteeseen [1, s. 16–21], tarkastelemme menetelmiä, joiden avulla näitä rajoittavia oletuksia voidaan lieventää. Esityksessä keskitytään käytännön ratkaisumalleihin matemaattisten lauseiden todistamisen sijaan.

Määritelmä 4.20 (Epähomogeeninen Poisson-prosessi). Oletetaan, että laskuriprosessilla on riippumattomat lisäykset, mutta sen intensiteetti eli riskitaso vaihtelee ajan kuluessa. Tällöin kyseessä on epähomogeeninen Poisson-prosessi $\{N(t) \mid t > 0\}$, jossa aikavälillä $(s, s + t]$ sattuvien vahinkojen lukumäärä noudattaa Poisson-jakaumaa [1, s. 16]:

$$N(s + t) - N(s) \sim \text{Po} \left(\int_s^{s+t} \lambda(u) du \right), \quad (18)$$

missä $\lambda(u) \geq 0$ on ajan mukana muuttuva intensiteettifunktio. Intensiteetin vaihtelun vuoksi prosessilla ei ole stationaarisia lisäyksiä, mutta erillisillä aikaväleillä sattuvien vahinkojen lukumäärät ovat edelleen toisistaan riippumattomia.

Esimerkki 4.21 (Epähomogeeninen malli risteyksessä). Tarkastellaan vilkasta risteystä, jonka kolarimäärät noudattavat epähomogeenista Poisson-prosessia $\{N(t) \mid t > 0\}$. Oletetaan, että aamuruuhkassa klo 7.00–9.00 kolariintensiteetti on $\lambda(u) = 1,5$ kolaria tunnissa. Määritetään kolarimäärän jakauma aikavälille $(7, 9]$ laskemalla intensiteettifunktion integraali:

$$\int_7^9 \lambda(u) du = \int_7^9 1,5 du = 1,5 \cdot (9 - 7) = 3,$$

jolloin määritelmän mukaisesti aamuruuhkan kolarimäärä noudattaa Poisson-jakaumaa:

$$N(9) - N(7) \sim \text{Po}(3).$$

Tämä tarkoittaa, että kahden tunnin aamuruuhkan aikana risteysten odotettu kolarimäärä eli kokonaisintensiteetti on tasan 3.

Kuten edellä havaitaan, epähomogeenisessa Poisson-prosessissa riippumattomien lisäysten ehto pätee edelleen, mutta stationaarisuus- eli vakiointensiteettioletuksesta luovutaan. Seuraavaksi tutustutaan sekoitettuun Poisson-malliin, jossa laskuriprosessin erillisten aikavälien lisäykset ovat keskenään riippuvaisia, koska niitä yhdistää sama satunnainen taustatekijä.

Määritelmä 4.22 (Sekoitettu Poisson-jakauma diskreetissä ajassa). Oletetaan, että satunnaisen taustatekijän vuoksi vahinkojen lukumäärien erilliset aikavälien lisäykset ovat toisistaan riippuvaisia. Tilanne mallinnetaan Poisson-parametrilla $\Lambda = \lambda \mathbf{q}$ [1, s. 17]. Tässä $\lambda > 0$ on keskimääräinen riski. Satunnaiselle sekoitusmuuttujalle $\mathbf{q} > 0$ pätee $\mathbb{E}[\mathbf{q}] = 1$, ja sen kertymäfunktio on $H(x) = \mathbb{P}(\mathbf{q} \leq x)$.

Kun sekoitusmuuttujan arvo \mathbf{q} on annettu, vahinkojen lukumäärä N noudattaa Poisson-jakaumaa:

$$\mathbb{P}(N = k \mid \mathbf{q}) = \frac{(\lambda \mathbf{q})^k}{k!} e^{-\lambda \mathbf{q}}. \quad (19)$$

Tällöin sekoitetun Poisson-muuttujan N jakautumafunktioksi saadaan:

$$p_k = \mathbb{P}(N = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dH(x). \quad (20)$$

Esimerkki 4.23 (Sekoitettu malli ja sääolosuhteet samassa risteyksessä). Tarkastellaan risteystä, jonka keskimääräinen riskitaso on $\lambda = 5$ kolaria vuorokaudessa. Oletetaan, että kuivia päiviä vuodessa on 78 % ja liukkaista 22 %, ja liukkaan kelin riski on nelinkertainen kuivaan verrattuna.

Koska painotetun keskiarvon täytyy olla yksi ($0,78q_{\text{kuiva}} + 0,22q_{\text{liukas}} = 1$), tällöin suhteelliset riskit ovat $q_{\text{kuiva}} \approx 0,602$ ja $q_{\text{liukas}} \approx 2,410$. Saadaan, että onnettomuusriski $\Lambda = \lambda \mathbf{q}$ vaihtelee sään mukaan:

- Kuivalla säällä: $\Lambda = 5 \cdot 0,602 \approx 3,01$ kolaria vuorokaudessa,
- Liukkaalla kelillä: $\Lambda = 5 \cdot 2,410 \approx 12,05$ kolaria vuorokaudessa.

5 Yhteenveto

Vahinkojen lukumäärän tarkka arviointi on vakuutusyhtiön riskienhallinnan ja hinnoittelun perusta. Binomijakauma sopii yksittäisiin tapahtumiin, mutta suurissa vakuutuskannoissa sen käyttö on liian työlästä. Harvinaisten tapahtumien lain mukaan vahingot mallinnetaan tehokkaammin diskreetillä Poisson-jakaumalla, jolla lasketaan tapahtumien lukumäärä kiinteällä aikavälillä. Se vastaa esimerkiksi kysymykseen: ”Kuinka monta kolaria vakuutuskannassa sattuu tulevan vuoden aikana?”

Koska vahingot sattuvat jatkuvassa ajassa, Poisson-jakaumalla yksin ei voida mallintaa ilmiön ajallista kehitystä, vaan siihen yhdistetään eksponenttijakauma. Tämä muistitoton jakauma mittaa kahden peräkkäisen tapahtuman välistä aikaa ja vastaa kysymykseen: ”Kuinka pitkä aika kuluu seuraavan kolarin sattumiseen?” Jatkuva-aikaiseen mallinnukseen käytetään Poisson-prosessia, joka sitoo vahinkomäärän ja ajan yhteen vakiointensiteettiparametrin (λ) avulla. Se vastaa kysymykseen: ”Montako kolaria vakuutusyhtiölle ilmoitetaan ajanhetken t mennessä?”

Poisson-prosessin perusominaisuudet, superpositio ja dekompositio, ovat käytännöllisiä työkaluja vakuutuskannan hallinnassa. Superposition avulla erilliset riskikohteet voidaan yhdistää yhdeksi kokonaisprosessiksi. Dekompositiossa kokonaisprosessi puolestaan jaetaan osaprosesseihin esimerkiksi vahingon vakavuuden tai tyyppin mukaan, mikä helpottaa riskien täsmällistä hinnoittelua.

Homogeeninen Poisson-prosessi luo pohjan hinnoittelulle. Sen oletukset vakioista vahinkotodennäköisyydestä ja tapahtumien riippumattomuudesta ovat kuitenkin usein epärealistisia. Todellisuudessa riskitaso muuttuu jatkuvasti esimerkiksi sääolosuhteiden, teknologisen kehityksen ja vuorokausivaihteluiden vuoksi.

Näitä rajoituksia voidaan lieventää joustavammilla menetelmillä. Epähomogeeninen Poisson-prosessi huomioi ajalliset vaihtelut korvaamalla vakiointensiteetin ajan funktiolla $\lambda(t)$. Sekoitettut prosessit taas sallivat riskitason satunnaisvaihtelun, mikä ottaa huomioon kohteiden väliset erot. Nämä laajennukset tekevät malleista käytännöllisiä työkaluja vakuutusyhtiön päätöksenteon tueksi.

Viitteet

- [1] Parvinen, K. (2022). *Riskiteoria*. Luentomoniste, Turun yliopisto.
- [2] Hyvönen, S., Lauha, V. & Tolonen, H. (2018). *Todennäköisyyslaskenta I*.
- [3] Pesonen, H. *TILM3553 Todennäköisyyslaskennan peruskurssi*. Luentomoniste.
https://hpesonen.github.io/assets/lecture_materials/TILM3553.pdf
- [4] Leskelä, L. (2018). *Stokastiikka ja tilastollinen ajattelu*. Aalto-yliopisto.
https://math.aalto.fi/~lleskela/papers/Leskela_2018-01-03_Stokastiikka_ja_tilastollinen_ajattelu.pdf
- [5] Aalto-yliopisto. Tietoliikennetekniikan laitos. *Poisson-prosessi*.
<https://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/poisson.pdf>
- [6] Hirvensalo, M. (2021). *Insinöörimatematiikka 3*. Luentomoniste, Turun yliopisto.
<https://users.utu.fi/mikhirve/ins2122/Ins3/Luentoruudut310.pdf>
- [7] Helsingin teknillinen korkeakoulu. (2007). *S-72.1110 Digitaalinen viestintätekniikka, Luento 10: Poisson-prosessi*. Luentomoniste.
http://www.comlab.hut.fi/studies/1110/luennot/S-72.1110_2007_Luento10.pdf
- [8] Sheynin, O. (2019). *S. D. Poisson, Researches into the Probabilities of Judgements in Criminal and Civil Cases*. s. 4–5 ja 118–121. <https://arxiv.org/pdf/1902.02782>
- [9] Soch, J., Petrykowski, K. ja Faulkenberry, T. J. (2026). *The Book of Statistical Proofs*. <https://statproofbook.github.io/I/ToC#Poisson%20distribution>
- [10] Aalto-yliopisto, Netlab. *S-38.3143 Jonoteoria: Poisson-prosessi*. <https://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/poisson.pdf>