

Myonin anomaalinen magneettinen momentti

Pro gradu
Turun yliopisto
Teoreettinen fysiikka
2023
Santeri Salomaa
Tarkastajat:
dos. Iiro Vilja
dos. Juha-Pekka Pellonpää

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

Salomaa, Santeri: Myonin anomaalinen magneettinen momentti

Pro gradu, 103 s., 29 liites.
Teoreettinen fysiikka
Kesäkuu 2023

Anomaalinen magneettinen momentti on hiukkasen spinin synnyttämän magneettisen dipolimomentin klassisen teorian ennustuksesta eroava osa. Spinin magneettisen momentin suuruutta kuvaa g -tekijä, jonka anomaalinen osa $(g - 2)/2$ saadaan laskettua hyvin tarkkaan hiukkasfysiikan standardimallista. Anomaalinen g -tekijä on peräisin kvanttisilmukkatason korjauksista, jotka aiheutuvat virtuaalisten hiukkasten vuorovaikutuksista. Kokeellisesti g -tekijän arvo mitataan ulkoisessa magneettikentässä, missä g -tekijä on suoraan verrannollinen hiukkasen spin-prekession kulmanopeuteen.

Elektronia noin 207 kertaa massiivisempi myoni on huomattavasti herkempi ei-universaaleille korjaustyypille, joiden suuruus riippuu hiukkasten massasuhteista. Tämän vuoksi standardimallin sisällä häiriöteorian suuren kertaluvun sarjatermit ja hadroniset vuorovaikutukset antavat merkittävän kontribuution myonin anomaaliseen g -tekijään. Tämä yhdistettynä kokeellisten mittausten hyvään tarkkuuteen tekee myonista kiinnostavan tutkimuskohteen.

Myonin $g - 2$ -tutkimus laittaa standardimallin kovalle testille, josta se ei välttämättä selviä yksinään. Tutkimus on paljastanut teorian ja kokeiden välille 4,2:n keskihajonnan statistisen eron, ja tätä mysteeriä kutsutaan myonin $g - 2$ -ongelmaksi. Voi olla, että suurille korjauksille alttiin myonin kokeellisessa mittaustuloksessa näkyy jo 'uuden fysiikan' kontribuutio, joka voidaan selittää vain standardimallia laajentamalla.

Tutkielmassa suoritetaan kokonaisvaltainen meta-analyysi aiheeseen. Painotus on teoreettisessa puolessa ja standardimallin yksityiskohtien tarkastelussa, mutta vertailua varten oleelliset kokeelliset ilmiöt, mittausten menetelmät ja tulokset käsitellään läpi. Liitteissä esitetyillä laskuilla tuetaan aiheen eksplisiittistä käsittelyä. Tutkielman lopussa päädytään tarkastelemaan ratkaisuja, joita etsitään kokeelliselta puolelta, standardimallin sisältä ja teorian laajennuksista.

Asiasanat: myoni, $g - 2$, magneettinen momentti, spin-prekessio, standardimalli, kvanttisähködynamiikka, sähköheikko teoria, hadroniset vuorovaikutukset, hila-QCD, standardimallin laajennukset

Sisällys

Yksiköt ja merkinnät	1
Johdanto	3
1 Magneettinen momentti: Teoria ja työkalut	5
1.1 Klassinen magneettinen momentti	8
1.2 Fermionit ja Diracin teoria	12
1.2.1 Spinorit ja Diracin yhtälö	13
1.2.2 Spinin magneettinen momentti ja $g = 2$ -tulos	15
1.3 Standardimalli	16
1.3.1 Yangin-Millsin mittakenttäteoria	16
1.3.2 Sähköheikko teoria ja Higgsin mekanismi	18
1.3.3 Standardimallin hiukkaset ja vuorovaikutukset	22
1.4 Universaalia kvanttisähködynamiikkaa Feynmanin diagrammeilla	25
1.4.1 Säteilyn korjaustermit ja muototekijät	31
1.4.2 Anomaalinen magneettinen momentti ja Schwingerin korjaus- termi	36
2 Myonin $g - 2$ -ongelma	40
2.1 Miksi juuri myoni on huomion keskipisteenä?	40
2.2 Myonin $g - 2$ standardimallista	41
2.2.1 QED: kvanttisähködynamiikan vuorovaikutukset	44
2.2.2 EW: sähköheikot vuorovaikutukset	54
2.2.3 HVP: hadroninen vakuumpolarisaatio ja hila-QCD	58
2.2.4 HLbL: hadroninen fotonifotoni-sironta	68
2.2.5 Standardimallin myonin $g - 2$ -tulos	72
2.3 Kokeelliset mittaukset	73
2.3.1 Historialliset mittaustulokset	74

2.3.2	Modernit varastorengaskokeet: E821 ja E989	77
2.4	Teorian ja mittausten yhteensopivuus	83
3	Ratkaisut myonin $g - 2$ -ongelmaan	85
3.1	Voiko kokeellinen tulos muuttua?	85
3.2	Voiko standardimallin tulos muuttua?	88
3.3	Ratkaisu standardimallin ulkopuolelta	91
4	Loppupäätelmät ja omat näkemykset	96
	Viitteet	99
A	Minkowskin avaruus ja Lorentzin algebran esitykset	A-1
B	Spinorit spin-ryhmän esitysteoriasta	B-1
C	Kytketyn Diracin yhtälön epärelativistinen raja	C-1
D	Säteilykorjausten epärelativistinen raja	D-1
E	Schwingerin korjaustermin $\frac{\alpha}{2\pi}$ lasku	E-1
F	Larmorin prekessio	F-1
G	Thomasin prekessio	G-1
H	Spin-prekessio varastorengaskokeessa	H-1

Yksiköt ja merkinnät

Tässä tutkielmassa käytetään teoreettisen hiukkasfysiikan tutkimusalalle ominaisia yksiköitä ja merkintöjä. Yksikköjärjestelmänä käytetään luonnollista yksikköjärjestelmää, missä $\hbar = c = 1$. Einsteinin toistuvan indeksin summaussääntö on voimassa. Kreikkalaiset indeksit vastaavat aika(-paikka)-avaruuden koordinaatteja $\mu = 0, 1, 2, 3$, ja latinalaiset indeksit spatiaalisia koordinaatteja (usein $i = 1, 2, 3$). Levi-Civitan symbolien ykkönen asetetaan alaindekseille $\epsilon_{123} = 1 = \epsilon_{0123}$. Tutkielman yleiset merkintätavat on esitetty taulukossa I.

Monistona on Minkowskin neliulotteinen litteä aika-avaruus (\mathbb{M}^4, η) , missä metriselle tensorille $\eta_{\mu\nu}$ käytetään ajanluonteista signatuuria $(+, -, -, -)$. Metrinen tensori määrittelee nelivektoreille pseudosisätulon, jota merkitään $a \cdot b = a_\mu b^\mu$ ja $a^2 = a \cdot a = a_\mu a^\mu$. Minkowskin avaruuden määrittely ja koordinaattimuunnokset on esitetty tarkemmin liitteessä A.

Matriisit ja vektorit lihavoidaan, sekä tensoreiden matriisiesitykset ympäröidään suluilla. Esimerkiksi metriselle tensorille $(\eta_{\mu\nu}) = \boldsymbol{\eta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Poikkeuksina ovat Paulin matriisit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Diracin gammamatriisit γ^μ , sekä niiden avulla määritellyt matriisit. Gammamatriisille käytetään Diracin esitystä

$$\gamma^0 = \sigma^3 \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = i \sigma^2 \otimes \sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Feynmanin yliviivausnotaatio on käytössä, missä yliviivattu tensori kontraktoidaan Diracin gammamatriisien yli, eli $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$. Lisäksi Feynmanin diagrammeja käytetään usein sellaisenaan yhtälöiden sisällä, sillä niitä vastaavat eksplisiittiset Feynmanin säännöistä laskettavat korrelaatiofunktiot tai matriisialkiot.

Taulukko I. Tutkielmassa käytetyt merkintätavat.

Kompleksikonjugaatti	*
Hermiittinen konjugaatti	†
Identiteettimatriisi	1
Määrittely	:=
Identtisesti sama	≡
Asymptoottisesti	~
Likimääräinen arvio	≈
Numeerinen approksimaatio	≈
Isomorfinen	≅
Suoraan verrannollinen	∝
Yhdensuuntainen	
Ortogonaalinen	⊥
Osittaisderivaatta	$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$
Nablaoperaattori	$\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^T$
d'Alembertin operaattori	$\square = \partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$
Nuoliderivaatat	$A \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu B = A \overset{\rightarrow}{\partial}_\mu B - A \overset{\leftarrow}{\partial}_\mu B = A(\partial_\mu B) - (\partial_\mu A)B$
Kommutaattori	$[A, B] = [A, B]_- = AB - BA$
Antikommutaattori	$\{A, B\} = [A, B]_+ = AB + BA.$

Tutkielmassa epäeksaktit tulokset, kuten mittaustulokset ja numeerisen laskennan tulokset, merkitään notaatiolla, missä tuloksen perässä suluisissa oleva luku on epävarmuus viimeisiin merkitseviin numeroihin. Eli

$$1,234(56) = 1,234 \pm 0,056.$$

Oletuksena ilmoitetun epävarmuuden suuruus on yksi keskihajonta.

Johdanto

Magneettinen momentti kuvaa yleisesti kappaleen magneettikentän suuntaa ja voimakkuutta. Magneettisia momenteja on kahta eri tyyppiä, jotka syntyvät joko sähköisten varauksenkuljettajien liikkeestä tai spinistä. Näille saadaan lähes samanlainen matemaattinen muotoilu, mutta oleellisena erona on spinin aiheuttaman magneettisen momentin kerroin, ns. g -tekijä, joka on dimensioton ja yksikötön suure. Hiukkaselle ominainen g -tekijä antaa tarkan testin koko hiukkasfysiikan standardimallille, kun teoreettista ennustusta verrataan hiukkasen spinin prekession mittaustuloksiin.

Jo vuonna 1928 Paul Dirac ennusti [1] relativistisella liikeyhtälöllään elektroneille tuloksen $g = 2$. Elektronin lisäksi Diracin tulos pätee muillekin spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkasille, kuten myonille. Nykyään tätä arvoa kutsutaan klassisen (puutasen) teorian tulokseksi, ja kvanttikenttäteoriasta saadaan laskettua tälle arvolle ns. säteilyn korjauksia kvanttisilmukkatasolta, missä virtuaalisten hiukkasen vuorovaikutukset antavat pienen arvoa $g = 2$ korjaavan kontribuution. Tätä klassisesta g -tekijästä eroavaa osuutta kutsutaan anomaaliseksi g -tekijäksi, ja se määritellään $a := (g - 2)/2$.

Ensimmäisen g -tekijän kvanttimekaanisen korjauksen laski Schwinger vuonna 1948 [2]. Schwingerin ratkaisu antaa korjauksen $g = 2 + \alpha/\pi$, missä α on sähkömagneettinen hienorakennevakio. Tämä korjaus on kvanttisähködynamiikan häiriöteoreettisen sarjan ensimmäisen α -kertaluvun korjaustermi, ja nykypäivänä korjaustermejä on ratkaistu sarjan viidenteen kertalukuun asti [3]. Häiriöteoreettisen sarjan termejä voidaan esittää Feynmanin diagrammeilla, ja niiden lukumäärä kasvaa suuresti jokaisella kertaluvulla. Kvanttisähködynamiikan teoria antaa selvästi suurimman korjauksen elektronin ja myonin g -tekijöille, mutta sähköheikko teoria ja hadroniset vuorovaikutukset antavat myös mitattavan kontribuution.

Leptoneiden (elektroni, myoni ja tau) g -tekijät eroavat toisistaan. Osa korjaustermeistä on kaikille leptoneille universaaleja, mutta erilaisia fermioneita sekaisin

sisältävät diagrammit antavat niiden massasuhteista riippuvia ei-universaaleja korjauksia. Raskaille leptoneille standardimallin häiriöteoreettisten sarjojen korkean kertaluvun diagrammit ja hadroniset vuorovaikutukset antavat merkittävän kontribuution. Leptoneista myoni laittaa standardimallin kovimmalle testille, sillä teoria antaa elektroniin verrattuna suurempia korjaustermejä, mutta tau-leptoniin verrattuna myonin anomaalinen g -tekijä pystytään mittaamaan tarkasti.

Myonin tutkimuksellista kiinnostavuutta lisää se, että standardimallin ennustuksen [4] ja kokeellisen mittaustuloksen [5] välille on havaittu 4,2 keskihajonnan statistinen ero. Standardimallin sisällä vain hadroniset korjaukset sisältävät merkittävän epävarmuuden, joka johtuu niiden ei-häiriöteoreettisesta käsittelystä. Viime vuosina hila-QCD:n numeeriset menetelmät ovat kehittyneet nopeaa vauhtia [6], ja ne tulevat tarjoamaan standardimallin tulokselle uudenlaisen pohjan. Lisäksi Fermilabin 2021 julkaisemaan kokeellisen tuloksen päivitykseen [5] saadaan erilaiseen kokeelliseen menetelmään perustuva ristiintarkistus valmisteilla olevasta Japanin J-PARC E34 -projektista [7, 8] muutaman vuoden kuluttua.

Myoni on suuren massansa vuoksi herkkä standardimallin korjaustermeille, mutta samalla tavalla se on herkkä myös standardimallin laajennuksille, eli ns. 'uudelle fysiikalle'. Voi olla, että nykyisessä kokeellisessä mittaustuloksessa näkyy jo selkeästi standardimallin ulkopuolisen fysiikan kontribuutio. Tämä on yksi realistinen ratkaisuehdotus myonin $g - 2$ -ongelmaan, joita pohditaan tutkielman loppupuolella.

Luvussa 1 rakennetaan teoreettinen pohja anomaalisen magneettisen momentin laskemista varten. Luvussa 2 käsitellään myonin anomaalisen g -tekijän standardimallin laskennallinen tulos sekä varastorengaskokeiden kokeelliset mittaukset, joiden tuloksia verrataan keskenään. Eroavaisuudesta syntyvää ongelmaa ja sen ratkaisuvaihtoehtoja pohditaan luvussa 3, joiden perusteella tehdään loppupäätelmät luvussa 4. Liitteissä esitetyillä laskuilla tuetaan teorian ja kokeellisten menetelmien eksplisiittistä ja matemaattista käsittelyä.

1 Magneettinen momentti: Teoria ja työkalut

Tässä luvussa rakennetaan teoria ja työkalut myöskin magneettisen momentin tarkasteluun. Magneettinen momentti on fysikaaliseen kappaleeseen (hiukkaseen tai isompaan systeemiin) liitettävä suure, joka kuvaa kappaleen luoman magneettikentän suuruutta ja suuntaa. Magneettiselle dipolille magneettisen momentin määritelmä on erityisen hyödyllinen, sillä se määrittää dipolin magneettikentän yksikäsitteisesti. Esitellään tässä luvun alustuksessa lyhyesti teoria, joka johdetaan ja käydään tarkasti läpi aliluvuissa.

Pyörimismäärään \mathbf{L} liitettävä magneettinen momentti syntyy sähkövirran kiertoliikkeestä. Toisentyypinen magneettinen momentti syntyy hiukkasen sisäisestä kvanttiominaisuudesta, spinistä. Yleisesti magneettinen momentti voidaan kirjoittaa [9]

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J}, \quad (1.1)$$

missä γ on gyromagneettinen suhde magneettisen momentin $\boldsymbol{\mu}$ ja kulmaliikemäärän \mathbf{J} välillä. Yleisesti (kokonais)kulmaliikemäärävektori \mathbf{J} voi riippua sekä pyörimismäärästä¹ \mathbf{L} että spin-operaattorista $\mathbf{S} := \frac{1}{2}(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)^T$, jonka komponentit ovat Paulin matriiseja.

Ulkoisessa homogeenisessä magneettikentässä \mathbf{B} kappaleella on sen magneettiseen momenttiin liitettävä potentiaalienergia [10]

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.2)$$

missä minimi ja maksimi ovat suunnissa $\boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{B}$. Liiketyöstä saadaan vääntömomentti

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad (1.3)$$

¹Pyörimismäärällä (engl. angular momentum) \mathbf{L} tarkoitetaan hiukkasten fysikaalisesta liikkeestä johtuvaa kulmaliikemäärää, johon ei kuulu spin mukaan. Pyörimismäärän $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ liikemäärä \mathbf{p} voi olla myös kvantisoitu operaattori $\mathbf{p} = -i\nabla$.

joka aiheuttaa magneettisen momentin prekession minimin ympäri. Tätä kutsutaan Larmorin prekessioksi. Prekessio on verrattavissa hyrrän pyörimismäärän prekessioon gravitaatiokentässä.

Luvun 1.1 virran $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ klassisen magneettisen momentin määritelmästä

$$\boldsymbol{\mu}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(t, \mathbf{x}') d^3x'$$

johdetaan erityisesti magneettiselle dipolille pätevä muoto

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} \mathbf{L},$$

missä q on hiukkasen varaus ja m massa. Pyörimismäärän gyromagneettinen suhde on siten $\gamma = \frac{q}{2m}$.

Massiivisten fermioneiden, joita mallinnetaan Diracin spinorikenttänä ψ , relativistinen liikeyhtälö on kytketty Diracin yhtälö

$$(i\not{D} - m)\psi = 0,$$

missä mittakovariantti derivaatta D_μ pitää sisällään vuorovaikutukset mittakenttien kanssa. Spinin aiheuttamalle magneettiselle momentille saadaan epärelativistisella rajalla spin-operaattoriin verrannollinen muotoilu

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{q}{2m} \mathbf{S}, \tag{1.4}$$

johon Diracin yhtälö antaa $g = 2$. Tämä dimensioton g -tekijä kuvaa eroa pyörimismäärän ja spinin aiheuttaman magneettisen momentin gyromagneettisen suhteen välillä. Diracin yhtälön tulos $g = 2$ kuvaa kuitenkin vain hiukkaselle itselleen ominaista osaa g -tekijästä, ja loppuosa, ns. anomaalinen g -tekijä $a := (g - 2)/2$, saadaan tutkimalla vuorovaikutusta tarkemmin.

Hiukkasvuorovaikutuksien S -matriisien teoria sallii yleisemmän vuorovaikutuksen, joka sisältää ns. virtuaalisia kvanttisilmukkavuorovaikutuksia (engl. virtual

quantum loop interactions) muiden hiukkaskenttien kanssa. Varatun alkeisfermionin, kuten myöskin tai elektronin, vuorovaikutusta ulkoisen sähkömagneettisen kentän kanssa kuuluu tutkia yksittäisen ns. puutason vuorovaikutusristeyksen sijaan S -matriisien teorian yleisenä hiukkasprosessina. Diagrammaattisesti esitetään

$$-ie\gamma^\mu = \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \text{---} \swarrow \quad \searrow \text{---} \\ \text{---} \swarrow \quad \searrow \text{---} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \text{---} \swarrow \quad \searrow \text{---} \\ \text{---} \swarrow \quad \searrow \text{---} \\ \text{1PI} \end{array} = -ie\Gamma^\mu,$$

missä Γ^μ on 1PI-risteysfunktio (engl. one-particle irreducible vertex function). Sama muutos Lagrangen tiheyden puutason vuorovaikutuksesta efektiiviseen Lagrangen tiheyteen on

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}} = -eA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \longrightarrow -eA_\mu \bar{\psi}\Gamma^\mu\psi = \mathcal{L}_{\text{int, eff}}^{\text{QED}}.$$

1PI-risteysfunktio voidaan avata reaalisten säteilymuototekijöiden F_1 ja F_2 hajotelmaksi

$$iT_{fi}^\mu = \begin{array}{c} \text{wavy line } q \\ | \\ \text{---} \swarrow \quad \searrow \text{---} \\ \text{---} \swarrow \quad \searrow \text{---} \\ \text{1PI} \end{array} = -ie\bar{u}(p') \underbrace{\left[\gamma^\mu F_1\left(\frac{q^2}{m^2}\right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \right]}_{=\Gamma^\mu(p',p)} u(p),$$

missä q_ν on virtuaalisen fotonin neliliikemäärä. Epärelativistisella rajalla $\frac{q^2}{m^2} \rightarrow 0$ saadaan

$$a \equiv F_2(0).$$

Hiukkasen anomaalinen g -tekijä saadaan siis selvittämällä muototekijä $F_2(0)$.

Käytännössä selvitys jakaantuu häiriöteorian avulla erityyppisiin diagrammikategorioihin, ja lopulta kaikki hiukkasfysiikan vuorovaikutukset vaikuttavat anomaalisen g -tekijän arvoon. Tämän vuoksi standardimallin teoria käydään läpi. Kaikissa diagrammikategorioissa, paitsi alhaisen energian hadronisissa korjaustermeissä, vuorovaikutus jakaantuu häiriöteoreettisesti erilaisten Feynmanin diagrammien ääret-

tömäksi summaksi. Kvanttisähködynamikka (lyhenne QED, engl. quantum electrodynamics) antaa suurimmat korjaustermit, joista alimman kertaluokan universaalit korjaukset ovat

$$\text{1PI} = \text{tree} + \text{loop} + \mathcal{O}(\alpha^2).$$

Puutason diagrammi antaa Diracin yhtälön tuloksen $g^{[0]} = 2$, ja ensimmäisestä epätriviaalista kvanttisilmukakorjaustermistä saadaan $a^{[1]} = \frac{\alpha}{2\pi}$, joka on nimetty Schwingerin korjaustermiksi. Seuraavissa aliluvuissa käydään läpi tässä lyhyesti esitelty teoria, jonka avulla voidaan alkaa selvittämään myöskin anomaalista g -tekijää.

1.1 Klassinen magneettinen momentti

Tässä luvussa käsitellään klassista sähkömagnetismia, ja määritellään klassinen magneettinen momentti. Luvun lopussa johdetaan tiettyjen oletuksien virtasysteemille, kuten pistemäiselle varatulle hiukkaselle, gyromagneettinen suhde $\gamma = \frac{q}{2m}$.

Klassinen sähkömagnetismi perustuu Maxwellin yhtälöiden dynamiikkaan liitteessä Minkowskin avaruudessa $(\mathbb{M}^4, \eta_{\mu\nu})$. Minkowskin avaruus ja Lorentzin algebran esitykset on määritelty liitteessä A. Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa sähkömagneettisen kenttätensoren avulla

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.5)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (1.6)$$

Ensimmäinen yhtälö (1.5) on kenttätensoren määrittely skalaari- ja vektoripotentiaalista koostuvan nelipotentiaalin $A^\mu := (\phi, \mathbf{A})$ avulla. Tämä vastaa vektorimuotoisten Maxwellin yhtälöiden homogeenista differentiaaliyhtälöparia, ja kenttätensoren komponentit vastaavat sähkö- ja magneettikenttiä $F_{0i} = E^i$ ja $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k$.

Toinen yhtälö (1.6) on sähkömagneettisen kentän liikeyhtälö, joka vastaa vektorimuotoisten Maxwellin yhtälöiden epähomogeenista yhtälöparia. Yhtälössä varaus-
tiheydestä ja virrasta koostuva nelivirta $j^\mu := (\rho, \mathbf{J})$ on tässä yleinen Minkowskin
avaruuden nelivektori². Nelivirran säilyminen $\partial_\mu j^\mu = 0$ nähdään Noetherin teoree-
masta lokaalien symmetrioiden (1.25) avulla, tai lyhyesti liikeyhtälöstä

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \underbrace{F^{\nu\mu}}_{=-F^{\mu\nu}} = -\partial_\nu j^\nu = 0.$$

Kenttätensori (1.5) on invariantti nelipotentialin lokaalissa muunnoksessa

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu \chi(x), \quad (1.7)$$

missä χ on mielivaltainen derivoituva skalaarifunktio $\chi : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Tätä sym-
metriaa kutsutaan mittasymmetriaksi, joka on oleellista lokaalissa Yangin-Millsin
mittakenttäteoriassa, kuten standardimallissa.

Nelipotentialin liikeyhtälöä (1.6) vastaava sähkömagneettisen kentän Lagrangen
tiheys on

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu. \quad (1.8)$$

Ensimmäinen termi antaa vapaan kentän osan ja toinen termi vuorovaikutuksen
nelivirran j^μ kanssa.

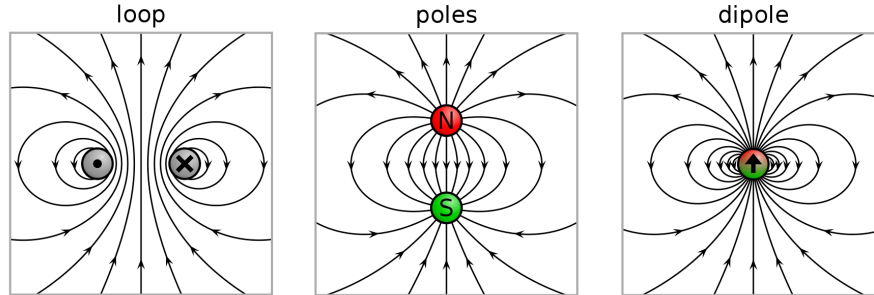
Siirrytään määrittelemään ja tarkastelemaan klassista magneettista momenttia,
joka kuvaa magneettikentän suuntaa ja voimakkuutta. Magneettikentille ei ole ole-
massa lähteitä, magneettisia monopoleja, mikä nähdään vektorimuotoisten Maxwell-
in yhtälöiden epäsymmetriasta

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

²Luvussa 1.2.1 nelivirta määritellään fermioneiden avulla, ja tämä kytkentä luo fermioneiden
vuorovaikutuksen sähkömagneettiseen kentän kanssa.

missä $\mathbf{E} := (E^1, E^2, E^3)^T$ ja $\mathbf{B} := (B^1, B^2, B^3)^T$. Magneettikenttä syntyy sen sijaan sähkövarausten liikkeestä eli virrasta. Kuvassa 1 on esitelty erilaisista systeemeistä syntyvät magneettiset momentit, ja niiden magneettikenttäviivat.



Kuva 1. Magneettikenttä on visualisoitu kenttäviivoilla. Vasemmalla magneettikentän luo sähkövirtasilmukka, keskellä magneettiset monopolit (joita ei ole sähkömagnetismin teoriassa mukana) ja oikealla dipoliesitys, joka saadaan mm. edellisten tapausten raja-arvoista. [Kuvan lähdesivu: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFPt_dipoles_magnetic.svg (9.5.2023)]

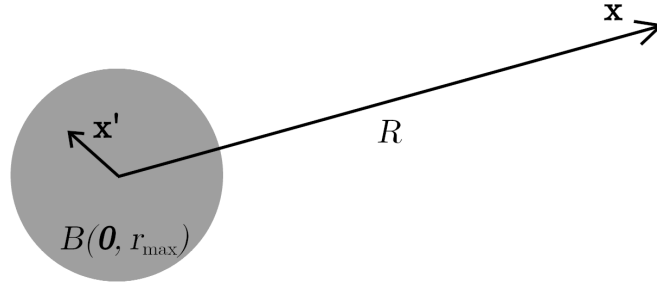
Magneettinen dipoli määritellään sähkömagneettisen kentän dipoliaprossimaatiosta, missä magneettikentän luo pienelle alueelle rajoittunut virtasysteemi. Kuvassa 2 esitetään virtasysteemin dipoliaprossimaatio. Magneettinen dipolimomentivektori määritellään sähkömagneettisen virran $\mathbf{J} := (j^i)$ avulla

$$\boldsymbol{\mu}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(t, \mathbf{x}') d^3 x', \quad (1.9)$$

Määritelmä tulee luonnollisesti esiin liikeyhtälön (1.6) dipoliaprossimaation ratkaisusta, joka käydään seuraavaksi läpi.

Sähkömagneettisen nelipotentiaalin mittasymmetriassa (1.7) voidaan aina valita Lorentzin mitta $\partial_\mu A^\mu = 0$, jolla sähkömagneettisen kentän liikeyhtälö (1.6) saadaan kirjoitettua nelipotentiaalin epähomogeeniseksi aaltoyhtälöksi

$$\square A^\mu = j^\mu. \quad (1.10)$$



Kuva 2. Magneettikentän dipoliapproksimaatiossa nolasta poikkeava virta on palloympäristön $B(\mathbf{0}, r_{\max})$ sisällä, missä pallon koko on pieni havaitsijan etäisyyteen nähden. Pallon voidaan kuvitella pienentyvän, jolloin raja-arvona $r_{\max}/R \rightarrow 0$ virran synnyttämää magneettikenttää kuvaa magneettinen dipolimomenttivektori $\boldsymbol{\mu}$.

Tämän retardoitu³ integraaliratkaisu on [11]

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{j^\mu(t_r, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'. \quad (1.11)$$

Koska magneettikenttä riippuu vain vektoripotentialista, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, rajoitetaan ratkaisu spatiaalikomponenteille

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(t_r, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \quad (1.12)$$

Integrandille (1.12) tehdään Taylorin sarjakehitelmä muuttujan \mathbf{x}' suhteen origon ympärillä. Ottamalla muuttujasta \mathbf{x}' lineaarisesti riippuvat dipolitermit (ns. vektoripotentialin dipolikehitelmä) ja merkitsemällä $R := |\mathbf{x}|$, saadaan [11, 12]

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \sim \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}') \left[\mathbf{J}(t - R, \mathbf{x}') \frac{1}{R^2} + \dot{\mathbf{J}}(t - R, \mathbf{x}') \frac{1}{R} \right] d^3 x'. \quad (1.13)$$

Magneettisen dipolimomentin määritelmän (1.9) avulla vektoripotentiali (1.13) kirjoitetaan

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \sim \frac{\boldsymbol{\mu}(t - R) \times \hat{\mathbf{x}}}{4\pi R^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}(t - R) \times \hat{\mathbf{x}}}{4\pi R}. \quad (1.14)$$

Jos virta on stationaarinen, eli ajasta riippumaton, vektoripotentialin (1.14) toinen termi on nolla, ja

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \sim \frac{\boldsymbol{\mu} \times \hat{\mathbf{x}}}{4\pi R^2}. \quad (1.15)$$

³Retardoitua aikaa $t_r := t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ käytetään äärellisen signaalinopeuden $c = 1$ vuoksi.

Ratkaisuista (1.14) ja (1.15) nähdään, kuinka virran avulla määritelty magneettinen dipolimomenttivektori $\boldsymbol{\mu}$ määrittelee magneettikentän yksikäsitteisesti.

Ratkaistaan seuraavaksi magneettisen momentin $\boldsymbol{\mu}$ ja pyörimismäärävektorin \mathbf{L} relaatio, josta saadaan selvitettyä klassinen gyromagneettinen suhde (1.1). Oletetaan, että nollasta poikkeavissa virran pisteissä on tasainen varausjakauma

$$\rho_{q/m}(\mathbf{x}) = \frac{q}{m}, \text{ kun } \mathbf{x} \in \Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{J}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\},$$

missä q on systeemin kokonaisvaraus ja m kokonaismassa. Virtatiheys voidaan kirjoittaa pisteittäin $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \rho_{q/V}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$, missä $\rho_{q/V} = \frac{dq}{dV}$ varaustiheys infinitesimaalista tilavuusyksikköä kohden ja \mathbf{v} on nopeuskenttä. Nyt magneettisen momentin määritelmästä (1.9) saadaan ketjusäännön avulla [11]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x}' \times \mathbf{v}(\mathbf{x}') \rho_{q/m}(\mathbf{x}') \rho_{m/V}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{q}{2m} \int_{\Omega} \mathbf{x}' \times (\mathbf{v}(\mathbf{x}') dm) \\ &= \frac{q}{2m} \mathbf{L}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

missä $dm = \rho_{m/V}(\mathbf{x}')dV'$ ja \mathbf{L} pyörimismäärä. Tästä nähdään pyörimismäärän gyromagneettinen suhde (1.1) $\gamma = \frac{q}{2m}$.

1.2 Fermionit ja Diracin teoria

Tutkitaan fermioneita eli spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkasia Maxwellin liikeyhtälön (1.6) nelivirran lähteinä. Fermioneiden nollasta poikkeava kvanttiominaisuus, spin, määrittää niille ominaisen magneettisen momentin. Tässä luvussa esitetään spinin ja fermioneiden matemaattinen mallintaminen spinoreiden avulla sekä niiden kytkentä sähkömagneettiseen kenttään.

1.2.1 Spinorit ja Diracin yhtälö

Spin on hiukkasen kvanttiominaisuus, joka määrittää sen ns. sisäisen kulmaliikemäärän. Spinin magneettisen momentin muotoilussa kulmaliikemäärävektori vaihdetaan spin-operaattoriksi \mathbf{S} , joka määritellään tässä luvussa. Spinin aiheuttama magneettinen momentti on tällä vaihdolla operaattori

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{q}{2m} \mathbf{S}, \quad (1.17)$$

joka näkyy Hamiltonin operaattorin potentiaalienergiatermissä

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -g \frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}. \quad (1.18)$$

Spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkasten spin-quanttiluku $s = \frac{1}{2}$, mikä antaa mahdolliset diskreetit mittaustulokset $\pm\frac{1}{2}$ mielivaltaiseen spatiaaliseen suuntaan. Spin-tila voidaan esittää Diracin notaatiolla kiinnittämällä koordinaatisto, ja valitsemalla esimerkiksi z -suunnan ominaiskanta. Tällöin yleinen tila esitetään normitettuna superpositiona

$$|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle_z + \beta |\downarrow\rangle_z, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Vaihtaessa luonnolliseen vektorikantaan

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle_z & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |\downarrow\rangle_z & \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \implies |\psi\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

voidaan spin-suureet $\{S^x, S^y, S^z\}$ esittää Paulin matriiseilla

$$S^i \rightarrow \mathbf{S}^i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^i.$$

Spin-operaattorivektori koostuu näistä komponenteista, ja on siten

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.19)$$

missä $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix}$.

Massiivisia spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkasia mallinnetaan Diracin spinorikenttinä. Diracin spinorit ovat \mathbb{C}^4 vektoriavaruuden alkioita, jotka muuntuvat ortokronologisen Lorentzin

ryhmän kaksinkertaisen peitteen (ns. spin-ryhmän) spin- $\frac{1}{2}$ -esityksen mukaan. Spinorikenttä on spinoreiden kuvaus yli Minkowskin avaruuden. Liitteessä A määritellään Minkowskin avaruus, ja käsitellään Lorentzin ryhmien esitysteoriaa. Liitteessä B tarkastellaan ortokronologisen Lorentzin ryhmän topologiaa, määritellään Lorentzin algebran avulla spin-ryhmä ja sen esitykset, sekä määritellään Weylin- ja Diracin spinorit. [13, 14, 15]

Diracin spinorikentän ψ relativistinen ja vuorovaikutuksista vapaa liikeyhtälö on Diracin yhtälö

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0. \quad (1.20)$$

Yhtälö on Lorentzin invariantti, toisin kuin epärelativistinen Schrödingerin yhtälö. Paul Dirac johti yhtälön vuonna 1928 etsiessään relativistista ja aikaderivaataltaan ensimmäisen kertaluvun liikeyhtälöä Kleinin-Gordonin yhtälöstä [1]. Diracin yhtälö (1.20) on liikeyhtälö, jota vastaa Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi.$$

Lagrangen tiheydellä on selvä globaali U(1) symmetria

$$\psi \rightarrow e^{i\chi} \psi,$$

missä $\chi \in \mathbb{R}$.

Vaativalla globaalien symmetrioiden sijasta vahvempi lokaali symmetria⁴

$$\psi \rightarrow e^{iq\chi(x)} \psi,$$

missä $\chi : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, saadaan kytkettyä fermionit sähkömagneettiseen kenttään. Yhtälöiden derivaatta tulee muuttaa kovariantiksi derivaataksi

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (1.21)$$

⁴Teoriaa, missä lokaaleista symmetrioista saadaan fermioneiden vuorovaikutukset mittakenttien kanssa, kutsutaan yleisesti lokaaliksi Yangin-Millsin mittakenttäteoriaksi. Symmetriaryhmät voivat olla yleisesti epäkommutatiivisia SU(n) Lie-ryhmiä. Teoria käsitellään luvussa 1.3.1.

missä A_μ sähkömagnettiseen vuorovaikutukseen liitettävä mittakenttä eli sähkömagneettinen nelipotentiali⁵. Kytkeyty Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi, \quad (1.22)$$

josta saadaan liikeyhtälöt

$$(i\mathcal{D} - m)\psi = 0 \quad (1.23)$$

$$\square A^\mu = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (1.24)$$

Kytkeyty Lagrangen tiheys on yhteensopiva sähkömagneettisen kentän Lagrangen tiheyden (1.8) kanssa, missä nelivirran $j^\mu = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ luovat nyt varatut fermionit ψ . Kenttien lokaalit mittamuunnokset ovat

$$\begin{cases} \psi \rightarrow e^{iq\chi(x)} \psi, \\ A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu\chi(x). \end{cases} \quad (1.25)$$

1.2.2 Spinin magneettinen momentti ja $g = 2$ -tulos

Kytkeytylle Diracin yhtälölle (1.23) voidaan laskea epärelativistinen raja, missä massa dominoi muita termejä. Tämä muotoillaan Schrödingerin yhtälöllä

$$i\partial_t\psi = H\psi.$$

Diracin yhtälön epärelativistista versiota kutsutaan Paulin yhtälöksi, jonka Hamiltonin operaattori on johdettu kohta kohdalta liitteessä C. Diracin spinoria $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ kuvaava yhtälö redusoituu spin-tilaa kuvaavan kaksikulotteisen spinorin

$$|\varphi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

yhtälöksi. Nollaksi approksimoidut termit ovat

$$\frac{\partial_t\chi_0}{m}, \quad \frac{q\phi}{m}, \quad q^2\mathbf{A}^2$$

⁵Erityisesti toisen kvantisoinnin jälkeen sähkömagneettista nelipotentialia kutsutaan fotonikentäksi.

joilla saadaan Paulin yhtälön Hamiltonin operaattori (josta massatermi on jätetty pois) muotoon [16]

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) + q\phi, \quad (1.26)$$

missä ϕ on skalaaripotentiali. Magneettisen potentiaalienergian termeistä voi suoraan lukea tulokset: pyörimismäärän gyromagneettinen suhde $\gamma = \frac{q}{2m}$ ja spinin magneettiselle momentille $g = 2$.

1.3 Standardimalli

Standardimalli on lokaali Yangin-Millsin mittakenttäteoria, ja täten renormalisoituva kvanttikenttäteoria⁶. Siihen kuuluu sähköheikko- ja värijuorovaikutus, joita vastaavat omat mittakentät. Teorian rakentamiseen tarvitsee käsitellä epäkommutatiivinen Yangin-Millsin mittakenttäteoria, sähköheikko vuorovaikutus ja siihen liittyvä Higgsin mekanismi. Värijuorovaikutus on suoraviivaista lisätä mukaan teoriaan. Standardimallin kenttien kvantisointiin käytetään tässä tutkielmassa kanonista kvantisaatiota.

1.3.1 Yangin-Millsin mittakenttäteoria

Luvussa 1.2.1 Diracin liikeyhtälö kytkettiin sähkömagneettiseen kenttään lokaalin $U(1)$ symmetriaryhmän avulla. Yangin-Millsin mittakenttäteoria yleistää tämän menetelmän epäkommutatiiviselle symmetriaryhmälle $SU(n)$. Ryhmän $U(1)$ generaattori on triviaali (varaus q), mutta epäkommutatiivisessa Yangin-Millsin teoriassa termeihin tulee esiin generaattoreiden kommutaatiorelaatiot. Lokaaliin symmetriaan tarvitaan mittakovariantit derivaatat, jotka sisältävät mittakentän vuorovaiku-

⁶Vuonna 1971 't Hooft ja Veltman osoittivat renormalisaatiotekniikan [17] epäkommutatiiviselle Yangin-Millsin mittakenttäteorialle, kun mittabosonit saavat massan Higgsin mekanismin spontaanista symmetriarikosta.

tustermin. Mittakentän kenttätensori saadaan kovarianttien derivaattojen kommutaattorista. [13, 18]

Yangin-Millsin mittakenttäteoriassa fermionikenttä ϕ kytkeytyy mittakenttäbosonin V_μ kanssa, mikä näkyy kovariantin derivaatan vuorovaikutustermistä. Kytkentä saadaan olettamalla Lagrangen tiheyden invarianssi $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ kentän ϕ lokaalille muunnokselle

$$\phi \rightarrow \phi' = U(x)\phi,$$

missä $U : \mathbb{M}^4 \rightarrow \text{SU}(n)$. Ryhmä $\text{SU}(n)$ on Lien ryhmä, jonka alkiot saadaan Lien algebran $\mathfrak{su}(n)$ alkioden eksponentiaalikuvauksena

$$U(x) = e^{i\chi_a(x)T^a},$$

missä $\chi_a(x)$ kertoimet ($a = 1, \dots, n$) ovat aika-avaruuden pisteistä riippuvia funktioita $\chi_a : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Suureet $\{T^a\}_{a=1}^n$ ovat Lien algebran $\mathfrak{su}(n)$ generaattorit. Valitsemalla generaattorimatriisit kiinnitetään Lien algebran (matriisi)esitys.

Lokaalin symmetrian oletuksessa tulee määritellä yleinen mittasymmetrinen kovariantti derivaatta, jolle pätee muuntumissääntö

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = U(x)D_\mu U(x)^{-1}, \quad (1.27)$$

ja täten $D_\mu\phi \rightarrow D'_\mu\phi' = U(x)D_\mu\phi$. Sillä Lagrangen tiheys koostuu vain kentän ϕ lineaarisista termeistä, derivaattojen vaihtaminen kovariantteihin derivaattoihin takaa Lagrangen tiheyden invarianssin, kun siirrytään globaalista symmetriasta lokaaliin.

Yleinen mittasymmetrinen kovariantti derivaatta on

$$D_\mu = \partial_\mu - igV_\mu, \quad (1.28)$$

missä V_μ on mittakenttä ja g on kytkentävakio. Lokaaliin symmetriaan vaihtaessa kenttä ϕ tulee kytkettyä mittakenttään, missä kytkennän vahvuuden määrittää kytkentävakio g . Mittakenttä on esitettävissä generaattoreiden avulla $V_\mu = V_\mu^a T^a$, jolle

ehdosta (1.27) saadaan muuntumissääntö [13]

$$V_\mu \rightarrow V'_\mu = U(x) \left(V_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U(x)^{-1}.$$

Sähkömagneettisessa tapauksessa mittakenttä on nelipotentiali $V_\mu = A_\mu$, generaattori $T = q$ ja kytkentävakio $g = -q$. Tällöin saadaan mittamuunnokset (1.25) ja kovariantti derivaatta (1.21).

Kovarianteille derivaatoille on suoraan laskettavissa kommutaatiorelaatio

$$[D_\mu, D_\nu] \phi = -ig(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - ig[V_\mu, V_\nu]) \phi.$$

Mittakentän kenttätensori määritellään

$$F_{\mu\nu} := -ig[D_\mu, D_\nu],$$

joka yhtyy U(1) symmetriassa sähkömagneettiseen kenttätensoriin (1.5). Mittakentän dynaaminen Lagrangen tiheyden komponentti määritellään

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &:= -\frac{1}{4} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{tr} (T^a T^b) \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

missä generaattoreilta vaadittiin viimeisellä rivillä ortonormaalisuus $\text{tr} (T^i T^j) = \delta^{ij}$.

1.3.2 Sähköheikko teoria ja Higgsin mekanismi

Heikko vuorovaikutus on yksi neljästä ns. fundamentaalisesta vuorovaikutuksesta sähkömagneettisen- ja väri vuorovaikutuksen sekä gravitaation lisäksi. Sen ominainen piirre on kätisyys- eli kiraalisuussymmetrian rikkoutuminen, sillä vain vasenkätiset fermionit vuorovaikuttavat heikolla vuorovaikutuksella. Tässä luvussa esitetään sähköheikko teoria mittasymmetriaryhmän $SU(2)_L \times U(1)_Y$ avulla, joka yhdistää heikon- ja sähkömagneettisen vuorovaikutuksen.

Lyhyen kantaman heikko vuorovaikutus perustuu massiivisiin mittakenttiin W^\pm ja Z^0 . Sähköheikosta teoriasta halutaan renormalisoituvuuden takaamiseksi lokaali Yangin-Millsin mittakenttäteoria [17, 14]. Ongelmana on hiukkasten massojen selittäminen, sillä lokaali mittasymmetria ei salli Lagrangen tiheyteen mittakenttien V^μ massatermejä $m_V V_\mu V^\mu$ eikä standardimallin fermioneiden massatermejä.

Ratkaisuna tähän on Higgsin mekanismi. Hiukkaset kytketään Higgsin skalaarikenttään ϕ , jonka potentiaali $V(\phi)$ on sopivaa muotoa. Higgsin kentän vakuumin ratkaisussa mittasymmetriaryhmä rikkoutuu spontaanisti⁷ $SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\phi_0} U(1)_{EM}$. Higgsin kentän nollasta poikkeava odotusarvo $|\langle\phi_0\rangle| > 0$ tuo symmetrian rikkoutuessa heikon vuorovaikutuksen mittakentille W^\pm ja Z^0 massat jättäen fotonikentän massattomaksi. Samalla myös fermionit saavat massan Yukawan vuorovaikutuksen kautta.

Higgsin mekanismissa Lagrangen tiheyteen liitetään dublettiskalaarikentän dynaaminen termi $|D_\mu\Phi|^2$ mittasymmetriaryhmällä $SU(2) \times U(1)$, jota vastaa mittakentät $W_\mu = W_\mu^i T^i$ ($T^i = \frac{1}{2}\sigma^i$) ja B_μ . Määritelmän (1.28) mukaisesti saadaan

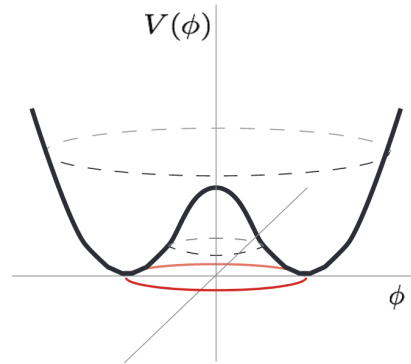
$$D_\mu\Phi = (\partial_\mu - igW_\mu^i T^i - ig'Y(\Phi)B_\mu)\Phi, \quad (1.30)$$

missä Y on hiukkaselle ominainen hypervaraus. Higgsille $Y(\Phi) = \frac{1}{2}$. Higgsin mekanismissa Lagrangen tiheyden potentiaaliksi valitaan ns. meksikolaisen hatun potentiaali

$$V(\Phi) = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \frac{\lambda}{2}(\Phi^\dagger\Phi)^2,$$

missä $\mu^2, \lambda > 0$.

⁷Goldstonen teoreema kertoo, kuinka symmetriarikkoo vastaa massattomat spin-0 hiukkaset. Nämä ei ole kuitenkaan fysikaalisia hiukkasia, ja esimerkiksi Higgsin kentän unitaarisen mitan valinta syö nämä Goldstonen bosonit pois.



Kuva 3. Higgsin kentän meksikolaisen hatun potentiaali kompleksitasossa. Punainen ympyrä on potentiaalin minimi. [Kuvan lähdesivu: http://philsci-archive.pitt.edu/9295/1/Spontaneous_symmetry_breaking_in_the_Higgs_mechanism.pdf (9.5.2023)]

Higgsin kentän odotusarvo, perustila eli vakuumi Φ_0 , sijoittuu potentiaalin minimiympyrälle säteellä

$$v := |\Phi_0| = |\langle \Phi \rangle| = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}}.$$

Higgsin kenttä kirjoitetaan vakuumitilan muutoksena SU(2) dublettina

$$\Phi(x) = e^{i\xi(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix},$$

missä ξ ja H ovat reaalisia funktioita. Unitaarisen mitan lokaali muunnos $\Phi \rightarrow e^{-i\xi(x)}\Phi$ kiertää funktion ξ pois, ja siten poistaa myös epäfysikaaliset Goldstonen bosonit. Muiden mittojen valinnoissa Goldstonen bosonit voivat näkyä virtuaalisina hiukkasina.

Sijoittamalla tämä takaisin dynaamiseen Lagrangen tiheyden termiin $|D_\mu \Phi|^2$, saadaan vakuumitilaa Φ_0 vastaavat mittakenttien massatermit. Yksi generaattoreiden lineaarikombinaatio, ns. varausoperaattori

$$Q := T^3 + Y$$

annihiloi vakuumin, eli $Q\Phi_0 = 0$, missä Higgsin kentälle $Y(\Phi) = \frac{1}{2}$. Symmetriarikossa $U(1)_{\text{EM}}$ mittasymmetriaryhmä säilyy, ja sitä vastaava fotonikenttä $A \equiv \gamma$ pysyy massattomana.

Varausoperaattori Q antaa komponenteittain hiukkasta vastaavan sähkövarauksen ominaisarvona. Operaattori T^3 riippuu Lien ryhmän $SU(2)$ esityksestä. Koska ryhmän dublettiesityksessä $T^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, saa dubletin ensimmäinen komponentti operoinnissa ns. isospin-varauksen $+\frac{1}{2}$ ja toinen komponentti $-\frac{1}{2}$. Triviaaliesityksessä hiukkasen isospin on nolla. Varausoperaattori riippuu myös $U(1)$ esityksen hypervarausgeneraattorista, missä triviaaliesityksessä hypervaraus on nolla. Hiukkasen hypervaraus valitaan luvuksi, missä varausoperaattori antaa hiukkasen fysikaalisen varauksen. Koska varausoperaattori annihiloi Higgsin dubletin, $Q\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_{+H} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, on Higgsin kenttä varaukseton (symmetriarikkoa ennen ja jälkeen, kun dubletin ratkaisun ensimmäinen komponentti valitaan nollassi). [14]

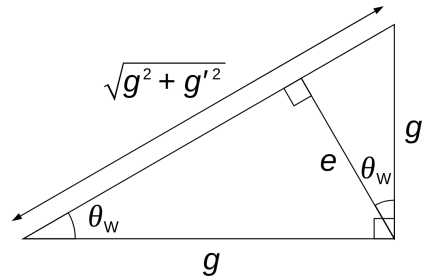
Varaukselliset ja massiiviset vektorikentät W_μ^\pm määritellään kompleksikombinaatioina

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1 \mp iW^2).$$

Symmetriarikossa $SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\Phi_0} U(1)_{\text{EM}}$ sähkömagneettinen fotonikenttä säilyy massattomana, ja loput mittakentät määritellään rotaatiolla

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = R(\theta_W) \begin{pmatrix} B \\ W^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ W^3 \end{pmatrix},$$

missä θ_W on Weinbergin kulma (engl. Weinberg's angle tai weak mixing angle). Kulma riippuu Higgsin kentän kytkentävakiosta g ja g' kuvan 4 mukaisesti. Kytkentävakiot ovat teorian vapaita parametrejä, joihin sijoitetaan kokeellisesti sovitettut arvot.



Kuva 4. Weinbergin kulman riippuvuus kytkentävakiosta g ja g' . [Kuvan lähdesivu: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Weinberg_angle_\(relation_between_coupling_constants\).svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Weinberg_angle_(relation_between_coupling_constants).svg) (9.5.2023)]

1.3.3 Standardimallin hiukkaset ja vuorovaikutukset

Standardimalli on lokaali Yangin-Millsin $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ mittakenttäteoria. Sähköheikon teorian lisäksi mukana on väri vuorovaikutus, jota vastaa symmetriaryhmä $SU(3)$. Standardimalli koostuu Higgsin skalaarikentästä, alkeisfermioneista ja niiden kanssa vuorovaikuttavista Yangin-Millsin mittabosoneista. Kaikki fermionit ovat massiivisia ja niitä kuvaa Diracin spinorit. Fermionit jakautuvat leptoneihin ja kvarkkeihin, joista leptonit eivät vuorovaikuta väri vuorovaikutuksella. Vuorovaikutuksia voidaan eliminoida valitsemalla vuorovaikutusta vastaavalle Lie ryhmän Lie algebralle triviaaliesitys. Fermionin ψ konjugaattispinori $\bar{\psi}$ kuvaa antifermionia, joten antihiukkasten teoria tulee käsiteltyä samalla. Standardimalli esitetään tässä luvussa ennen Higgsin mekanismin spontaania symmetriarikkooa.

Standardimallin mittasymmetriaryhmistä $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ ja $SU(3)_c$ saadaan mittakenttätensorit (ks. luku 1.3.1), jotka nimetään mittakenttien mukaan (esim. $U(1)_Y$ ryhmälle $B_{\mu\nu} := \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$). Mittasymmetriaryhmän kenttätensoreiden mittainvariantit dynaamiset Lagrangen tiheyden termit saadaan määritelmän (1.29) mukaisesti

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\text{tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}). \quad (1.31)$$

Sähköheikko teoria ja Higgsin mekanismi otetaan käyttöön samoin, kuin luvussa

1.3.2. Higgsin kenttä näkyy standardimallissa sen dynaamisella termillä ja meksikolainen hattu -potentiaalilla

$$\mathcal{L}_\Phi = |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi), \quad (1.32)$$

sekä Yukawan vuorovaikutuksella fermioneiden kanssa. Standardimalli esitetään ennen symmetriarikkoa, joten vektoribosonien W^\pm ja Z^0 sekä fermioneiden massat eivät ole separoitu Higgsin vakuumin Φ_0 avulla eksplisiittisesti omiksi massatermeiksi.

Fermionit jaetaan vasen- ja oikeakätisiin projektioihin, sillä heikko vuorovaikutus näkyy vain vasenkätisille hiukkasille. Tämän jälkeen $SU(2)$ ryhmän esitykset valitaan dubletiksi tai triviaaliesitykseksi riippuen kätisyydestä.

Leptonit eivät vuorovaikuta vahvalla vuorovaikutuksella, joten se eliminoidaan esittämällä $SU(3)$ triviaaliesityksellä. Leptoneita on kolme hiukkassukupolvea, ns. makua, kasvavassa massajärjestyksessä: elektroni $e^1 = e$, myoni $e^2 = \mu$ ja tau $e^3 = \tau$. Lisäksi vasenkätiseen dublettiin, elektronille $l_L^1 = (\nu_e)$, kuuluu aina leptonimakua vastaava neutriino. Koska kaikki fermionit ovat massiivisia Diracin spinoreita, on olemassa myös oikeakätinen neutriino. Oikeakätiset neutriinot vuorovaikuttavat vain sähkömagneettisella vuorovaikutuksella, joten ne esitetään $U(1)$ ryhmän singletteinä. Leptoneiden (ja kvarkkien) Lagrangen tiheyden komponentit eroavat vain kytkentävakioissa, joten esitetään tässä vain ensimmäisen sukupolven termit. Leptoneiden mittainvariantit dynaamiset termit ovat

$$\mathcal{L}_{l,\text{dyn}} = i\bar{l}_L \not{D} l_L + i\bar{e}_R \not{D} e_R + i\bar{\nu}_{eR} \not{D} \nu_{eR}. \quad (1.33)$$

Vasenkätiset leptonit l_L ovat ryhmän $SU(2)$ dublettiesitys. Elektronilla (sekä myonilla ja taulla) on sähköinen varaus $q = -e$, joten vasenkätisellä elektroneilla hypervaraus $Y(e_L) = -\frac{1}{2}$ (isospin $T^3 = -\frac{1}{2}$) ja oikeakätisellä $Y(e_R) = -1$ ($T^3 = 0$). Oikeakätinen neutriino on ns. steriili, eikä se vuorovaikuta muiden kenttien kanssa. Toisinsanoen hypervaraus, isospin ja värivaraus ovat nollia. Leptoneiden kovariantit

derivaatat⁸ ovat siten

$$\begin{aligned} D_\mu l_L^i &= (\partial_\mu - igW_\mu^i T^i - ig'Y(l_L)B_\mu)l_L^i \\ D_\mu e_R^i &= (\partial_\mu - ig'Y(e_R)B_\mu)e_R^i \\ D_\mu \nu_R^i &= \partial_\mu \nu_R^i. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Yukawan vuorovaikutus Higgsin mekanismissa (Higgsin kentän separoinnissa $v + H$) antaa hiukkasille massatermit. Oikeakätiselle

$$\mathcal{L}_{l,\text{Yukawa}} = -(h_e \Phi^\dagger \bar{e}_R l_L + h_{\nu_e} \bar{\nu}_{eR} \tilde{\Phi}) + (h.c.), \tag{1.35}$$

missä $\tilde{\Phi}$ on Higgsin kentän dublettiesitys $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$, ja $(h.c.)$ tarkoittaa edellisten termien hermiittistä konjugaattia.

Kvarkkejen dynaamisten- ja vuorovaikutustermien rakentaminen menee vastaavasti, mutta mukana on epätriviaali triplettiesitys $SU(3)$ ryhmälle

$$\mathcal{L}_{Q,\text{dyn}} = i\bar{Q}_L^a (\not{D}Q_L)^a + i\bar{u}_R^a (\not{D}u_R)^a + i\bar{d}_R^a (\not{D}d_R)^a. \tag{1.36}$$

Vasenkätinen kvarkki Q_L^a on $SU(2)_L$ ryhmän up-down-tyyppinen dublettiesitys kolmella eri generaatiolla $Q_L^{1a} = \begin{pmatrix} u_L^a \\ d_L^a \end{pmatrix}$, $Q_L^{2a} = \begin{pmatrix} s_L^a \\ c_L^a \end{pmatrix}$, $Q_L^{3a} = \begin{pmatrix} t_L^a \\ b_L^a \end{pmatrix}$, joissa $SU(3)_c$ ryhmän triplettiesitys näkyy kolmessa eri värikomponentissa $a = 1, 2, 3$. Kovariantit derivaatat ovat vastaavat kuin leptoneilla (1.34), mutta mukana on vuorovaikutus-termi $-ig_c G_\mu^k D^k$, missä $SU(3)_c$ ryhmän generaattorit D^k koostuvat ns. Gell-Mann matriiseista $D^k = \frac{1}{2}\lambda^k$, $k = 1, \dots, 8$ [19]. Yukawan vuorovaikutukset menevät vastaavasti kuin leptoneilla

$$\mathcal{L}_{Q,\text{Yukawa}} = -(h_u \tilde{\Phi}^\dagger \bar{u}_R^a Q_L^a + h_d \Phi^\dagger \bar{d}_R^a Q_L^a) + (h.c.). \tag{1.37}$$

⁸Seuraamalla Yangin-Millsin teoriaa tarkasti, symmetriaryhmää $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ vastaa yleisesti kovariantti derivaatta jokaisen osasyymmetriaryhmän termillä $D_\mu \psi = (\partial_\mu - igW_\mu^i T^i - ig'Y(\psi)B_\mu - ig_c G_\mu^k D^k)\psi$. Termejä kuitenkin eliminoidaan hiukkasesta riippuen valitsemalla algebroiden generaattoreille triviaaliesitys, joten käytännössä on hyvä puhua eri kovarianteista derivaatoista. Generaattoreiden lisäksi kytkentävakiot ovat vapaasti valittavissa hiukkasesta riippuen.

Symmetriarikon standardimalli kvantisoidaan toisella kvantisaatiolla, ja hiukkasprosesseja käsitellään S -matriisien teorialla. Kaikkia standardimallin vuorovaikutuksia paitsi alhaisen energian hadronisia vuorovaikutuksia voidaan käsitellä häiriöteoreettisesti⁹, jolloin saadaan ääretön sarja Feynmanin diagrammeja laskettavaksi. Standardimallin dynaamisten Lagrangen tiheyksien (1.33) ja (1.36) vuorovaikutustermit antavat vuorovaikutusristeykset Feynmanin diagrammeihin. Häiriöteoreettisia korjauksia päästään käsittelemään seuraavassa luvussa.

1.4 Universaalia kvanttisähködynamiikkaa Feynmanin diagrammeilla

Siirrytään tutkimaan kvanttisähködynamiikkaa (lyhennys QED, engl. quantum electrodynamics), johon soveltamalla häiriöteoriaa ja S -matriisien teoriaa päästään tutkimaan leptoneiden kvanttimekaanista vuorovaikutusta fotonin kanssa. Selvitetään leptonin anomaalisen magneettisen momentin laskumenetelmä kvanttisilmukkata-son säteilykorjauksista.

Kvanttisähködynamiikka on Yangin-Millsin mittakenttäteoria symmetriaryhmällä $U(1)$, missä kentät on kvantisoitu. Standardimallin symmetriarikossa fermionit saavat massan Higgsin mekanismin kautta, ja kvanttisähködynamiikan fermioneiden likeyhtälöksi saadaan siten kytketty Diracin yhtälö (1.22). Tässä luvussa käsitellään universaalia kvanttisähködynamiikkaa, missä on vain yksi¹⁰ leptonimaku e (elektroni) ja fotoni γ . Tulokset ja teoria pätevät kaikille leptoneille eli myös myonille.

Kentät kvantisoidaan kanonisesti [16]. Vektorikenttä vaatii kommutaatioehtojen

⁹Kvanttikenttäteorian häiriöteoreettinen käsittely käydään läpi Itzyksonin ja Zuberin kirjassa [16], ja sovellus myonin anomaalisen g -tekijän häiriöteoreettiseen laskemiseen käsitellään Jegerleherin kirjassa [20].

¹⁰Universaalin kvanttisähködynamiikan Feynmanin diagrammit rakennetaan vain yhdestä sähkömagneettisesta verteksistä.

täyttymiseksi Lagrangen tiheyteen lisätermin $\frac{1}{2}\xi^{-1}(\partial \cdot A)$, joka saadaan mittaehdon ($\partial \cdot A = 0$) Lagrangen kertoimien menetelmästä [16]. Käytössä on kvanttimekaniikan vuorovaikutuskuva, joten kentät ovat vapaiden kenttien¹¹ ratkaisuja, ja vuorovaikutus tulee häiriöteoriasta. Lagrangen tiheys on¹² [20]

$$\mathcal{L}^{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\xi^{-1}(\partial_\mu A^\mu) + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (1.38)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\xi^{-1}(\partial_\mu A^\mu) + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi}_{\mathcal{L}_0^{\text{QED}}} - \underbrace{eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}}}, \quad (1.39)$$

missä on leptonille ψ on sijoitettu negatiivinen alkeisvaraus $-e$. Kvanttikenttien liikeyhtälöt ovat

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = e : A_\mu(x)\gamma^\mu\psi(x) : \quad (1.40)$$

$$(\square\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1})\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x) = \underbrace{e : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) :}_{j^\mu(x)}, \quad (1.41)$$

missä $:-$ merkintä tarkoittaa normaali järjestyä.

Siirrytään tutkimaan leptonin kvanttimekaanista vuorovaikutusta fotonin kanssa häiriöteorian avulla [20, 16]. Vuorovaikutusta kuvaa häiriöteoreettiseksi sarjaksi avattava kolmen pisteen korrelaatiofunktio

$$\begin{aligned} G_{\mu,\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) &= \langle 0|T\{A_\mu(x_1)\psi_\alpha(x_2)\bar{\psi}_\beta(x_3)U\}|0\rangle_\otimes = \quad (1.42) \\ &= i \int d^4y \langle 0|T\{A_\mu(x_1)\psi_\alpha(x_2)\bar{\psi}_\beta(x_3)\mathcal{L}_{\text{int}}(y)\}|0\rangle_\otimes + \frac{i^3}{3!} \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \\ &\quad \times \langle 0|T\{A_\mu(x_1)\psi_\alpha(x_2)\bar{\psi}_\beta(x_3)\mathcal{L}_{\text{int}}(y_1)\mathcal{L}_{\text{int}}(y_2)\mathcal{L}_{\text{int}}(y_3)\}|0\rangle_\otimes + \mathcal{O}(e^5), \end{aligned}$$

missä U on vuorovaikutuskuvan aikakehitysoperaattori $U = T \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}})$ ja T aikajärjestysoperaattori. Alamerkintä \otimes tarkoittaa termillä $\langle 0|U|0\rangle$ jakamista, joka

¹¹Vapaiden kenttien ylämerkintä $\phi^{(0)}$ jätetään pois, sillä vuorovaikutuskuvan kentät ovat aina vapaiden kenttien ratkaisuja.

¹²Teoria vaatii lisäksi myös massan ja varauksen renormalisoinnin vastatermit, jotta teoria on äärellinen. Näitä ei ole merkitty tähän Lagrangen tiheyden esitykseen.

jättää jäljelle yhdistetyt diagrammit. Kolmen pisteen korrelaatiofunktion häiriöteoreettisesta sarjasta (1.42) on otettu näkyville termit $p = 0, 1, 2, 3$, ja loput on säilytetty termiin $\mathcal{O}(e^5)$. Kaikki parilliset summatermit $p = 0, 2, 4, \dots$ häviävät, sillä niistä jää jäljelle pariton määrä kenttiä aikajärjestysoperaattorin sisälle, ja Wickin teoreeman mukaisesti parittomat korrelaattorit häviävät. Täten sarjasta jää jäljelle vain joka toinen termi, joista $p = 1$ ja $p = 3$ on kirjoitettu nolasta poikkeavina näkyviin.

Feynmanin diagrammeissa tämä näkyy siten, että ensimmäisessä sarjatermissä on yksi verteksi, ja verteksejä tulee kaksi kerrallaan lisää seuraaviin sarjan kertalukuihin. Ensimmäinen diagrammi on ns. puutason diagrammi, eli diagrammi ilman virtuaalisia hiukkasia. Virtuaaliset hiukkaset ovat diagrammien ei-ulkoisia propaagattoreita, ja ne eivät ole fyysisesti havaittavia hiukkasia.

Alla on esitetty sama kolmen pisteen korrelaatiofunktio (1.42) Feynmanin diagrammien avulla

$$\begin{aligned}
 G_{\mu,\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) = & \text{Diagram 1} \\
 = & \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 + & \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \mathcal{O}(e^5),
 \end{aligned}$$

missä diagrammin raidallinen alue tarkoittaa kaikkien mahdollisten yhdistettyjen diagrammien summaa. Ulkoiset pisteet (x_1, x_2, x_3) on merkitty digrammeissa valkoi-

silla pisteillä. Ensimmäinen diagrammi on puutason diagrammi ja seuraavat neljä ovat topologisesti erilaiset kolmen verteksin korjaustermit.

Diagrammit on hyödyllistä jakaa ns. kokonaisiin propagaattoreihin (engl. full propagator) ja itse vuorovaikussiteiksi korjaaviin ns. 1PI-diagrammeihin (engl. one-particle irreducible), jotka pysyvät yhtenäisenä myös yhden sisäisen viivan katkaisemisen jälkeen. Kolmen pisteen korrelaattorifunktio (1.42) jaetaan [20]

$$G_{\mu,\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|T\{A_\mu^{(0)}(x_1)\psi_\alpha^{(0)}(x_2)\bar{\psi}_\beta^{(0)}(x_3)U\}|0\rangle_\otimes = \quad (1.43)$$

$$\int dx'_1 dx'_2 dx'_3 iD'_{\mu\nu}(x'_1 - x_1) iS'_{F\alpha\alpha'}(x'_2 - x_2) (-ie\Gamma_{\alpha'\beta'}^\nu(x'_1, x'_2, x'_3)) iS'_{F\beta\beta'}(x'_3 - x_3),$$

missä $-ie\Gamma$ on 1PI-verteksifunktio ja loput ovat yläpilkulla merkittyjä kokonaisia propagaattoreita. Jako on diagrammien avulla selvä [16]

$$G_{\mu,\alpha\beta}(x, y, z) = \text{diagram} = \text{diagram},$$

missä 1PI-verteksifunktio

$$-ie\Gamma_{\mu,\alpha\beta} = \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \mathcal{O}(e^5), \quad (1.44)$$

kokonainen fotonipropagaattori

$$iD'_{\mu\nu}(x'_1 - x_1) = \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \mathcal{O}(e^4), \quad (1.45)$$

ja kokonainen spinoripropagaattori

$$iS'_{F\alpha\alpha'}(x'_2 - x_2) = \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \mathcal{O}(e^4). \quad (1.46)$$

Liitetään seuraavaksi korrelaatiofunktiot S -matriisien teorian matriisialkioihin

$$\langle f|S|i\rangle := \langle f, \text{in}|S|i, \text{in}\rangle = \langle f, \text{out}|i, \text{in}\rangle,$$

jotka kuvaavat hiukkasprosessien $i \rightarrow f$ amplitudeja. Hiukkasprosessin sisään ja ulos menevät hiukkaset approksimoidaan liikemäärän ominaistilan vapaina aaltopaketteina kaukana toisistaan asympotoottisilla ajanhetkillä $\pm\infty$.

Hiukkasprosesseja kuvaavat S -matriisin eli sirontamatriisin alkiot liitetään korrelaatiofunktion liikemääräesitykseen LSZ-reduointikaavalla¹³. Esitetään redusointi kolmen pisteen korrelaatiofunktioon (1.42) liittyvään sirontaprosessiin $e^- \gamma \rightarrow e^-$ [16]

$$\begin{aligned} \langle p', \alpha'; \text{out} | p, \alpha; q, \lambda; \text{in} \rangle &= \langle p', \alpha'; \text{out} | a^{(\lambda)}(q)_{\text{in}}^\dagger | p, \alpha; \text{in} \rangle \\ &= i \int d^3 y e^{-iq \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p', \alpha'; \text{out} | \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) A^\mu(y) | p, \alpha; \text{in} \rangle, \end{aligned}$$

missä fotonin luomisoperaattori $a^{(\lambda)}(q)^\dagger$ saatiin kääntämällä fotonikentän Fourierin hajotelma. Spinoreiden liikemäärää merkitään kirjaimella p , spinin määrittävää parametria kirjaimella α , fotoneiden liikemäärää kirjaimella q ja polarisaation määrittävää parametria kirjaimella λ . Käyttämällä nyt fotonikentän liikeyhtälöä (1.41) LSZ-reduoinnin kanssa, saadaan virrasta riippuva termi [16]

$$\langle p', \alpha'; \text{out} | p, \alpha; q, \lambda; \text{in} \rangle = i \int d^4 y e^{-iq \cdot y} \langle p', \alpha'; \text{out} | j^\mu(y) | p, \alpha; \text{in} \rangle \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q). \quad (1.47)$$

Virran aika–paikka-riippuvuus voidaan ottaa ulos sisätulosta operoimalla liikemäärän ominaistiloihin

$$\begin{aligned} & i \int d^4 y e^{-iq \cdot y} \langle p', \alpha'; \text{out} | j^\mu(y) | p, \alpha; \text{in} \rangle \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \\ &= i \int d^4 y e^{-iq \cdot y} \langle p', \alpha'; \text{out} | e^{i\hat{p} \cdot y} j^\mu(0) e^{-i\hat{p} \cdot y} | p, \alpha; \text{in} \rangle \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \\ &= i \int d^4 y e^{-i(q+p-p') \cdot y} \langle p', \alpha'; \text{out} | j^\mu(0) | p, \alpha; \text{in} \rangle \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \\ &= i(2\pi)^4 \delta(p' - p - q) \langle p', \alpha'; \text{out} | j^\mu(0) | p, \alpha; \text{in} \rangle \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Etsitään vielä matriisialkion toinen muotoilu suoralla fotonikentän ja spinori-

¹³LSZ-reduointikaavat (engl. Lehmann-Symanzik-Zimmerman reduction formula) on käsitelty Itzyksonin ja Zuberin kirjassa [16].

kenttien LSZ-redusoinnilla¹⁴

$$\begin{aligned}
\langle p', \beta; \text{out} | p, \alpha; q, \lambda; \text{in} \rangle &= \langle \Omega | b_\beta(p')_{\text{out}} b_\alpha(p)_{\text{in}}^\dagger a^{(\lambda)}(q)_{\text{in}}^\dagger | \Omega \rangle \\
&= \bar{u}_\beta(p') S'_{F\beta\beta'}(p')^{-1} \left(\int d^4x' d^4x d^4y e^{-i(-p' \cdot x' + p \cdot x + q \cdot y)} \right. \\
&\quad \left. \times \langle \Omega | T \{ \psi_{\beta'}(x') \bar{\psi}_{\alpha'}(x) A^\nu(y) \} | \Omega \rangle \right) D'_{\mu\nu}(q)^{-1} S'_{F\alpha\alpha'}(p)^{-1} u_\alpha(p) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \\
&= \bar{u}_\beta(p') \underbrace{S'_{F\alpha\alpha'}(p')^{-1} \tilde{G}'_{\alpha'\beta'}(-p', p, q) D'_{\mu\nu}(q)^{-1} S'_{F\beta\beta'}(p)^{-1}}_{=(2\pi)^4 \delta(p' - p - q) (-ie) \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(p', p, q)} u_\alpha(p) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q), \quad (1.49)
\end{aligned}$$

missä käytettiin korrelaatiofunktion Fourierin muunnosta

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{-i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} G(x_1, \dots, x_n).$$

S -matriisialkion LSZ-redusoinnin viimeisellä rivillä käytettiin kolmen pisteen korrelaatiofunktion diagrammaattista jakoa (1.43). Korrelaatiofunktioista katkeaa kokonaiset ulkoiset propagaattorit käänteispropagaattoreilla, joka projisoi ulkoiset kenttien liikemäärät massakuorelle. Jäljelle jää 1PI-verteksifunktio $-ie\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(p', p, q)$ ja massakuoren ulkoiset kentät.

Määrittellään seuraavaksi liikemäärävaruuden korrelaatiofunktio $G(p_1, \dots, p_n)$:

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta\left(\sum_i p_i\right) G(p_1, \dots, p_n)$$

ottamalla ulos Diracin deltafunktio, sekä sirontaoperaattorin epätriviaali ja aidosti siroava \mathcal{T} -operaattori

$$S = \mathbf{1} + (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) i\mathcal{T},$$

missä Diracin deltafunktion muuttujien $P_f := \sum_f p_f$ ja $P_i := \sum_i p_i$ erotus takaa kokonaisliikemäärän säilymisen. Sijoittamalla nämä yhtälöön (1.49), Diracin deltafunktio yhtyvät funktion \tilde{G} ulostulevien hiukkasten negatiivisten liikemäärien vuoksi. Koska prosessissa $e^- \gamma \rightarrow e^-$ sisään- ja ulos-tila eroavat, triviaali S -matriisialkio

¹⁴Kokonaisten käänteispropagaattoreiden saamiseen tarvitaan varauksen ja massan renormalisaatiota, mikä on käsitelty Srednickin [18] ja Jegerlehnerin [20] kirjoissa.

on nolla, ja prosessia kuvaa yksin \mathcal{T} -matriisialkio. Yhtälöiden (1.48) ja (1.49) avulla saadaan

$$i\langle p', \beta | \mathcal{T} | p, \alpha; q, \lambda \rangle = i\langle p', \alpha'; \text{out} | j^\mu(0) | p, \alpha; \text{in} \rangle \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \quad (1.50)$$

$$= (-ie) \bar{u}_\beta(p') \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(p', p, q) u_\alpha(p) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q), \quad (1.51)$$

missä kokonaisliikemäärän säilymisen nojalla $q = p' - p$. Näin osoitettiin, että \mathcal{T} -matriisialkiot voidaan laskea amputoitujen 1PI-diagrammien avulla, joissa on mukana massakuoren ulkoiset kentät. Seuraavaksi tutkitaan itse 1PI-verteksifunktiota, jolle johdetaan muototekijöihin verrannollinen hajotelma.

1.4.1 Säteilyn korjaustermit ja muototekijät

Siirrytään tutkimaan leptonin kvanttikenttäteoreettista vuorovaikutusaluetta ulkoisen sähkömagneettisen kentän kanssa. Tässä piilee myös magneettisen momentin g -tekijän anomaalinen osuus. Kvanttikenttäteoreettinen tarkastelu ulkoisessa kentässä tuo 1PI-diagrammien avulla klassisia tuloksia tarkentavia korjaustermejä, joita kutsutaan säteilyn korjaustermeiksi.

Tutkitaan elektronin kvanttisähködynamiikan (1.39) vuorovaikutusta fotonin kanssa, mutta ei kuitenkaan aivan edellä tarkasteltua sirontaprosessia $e^- \gamma \rightarrow e^-$. Ulkoisen sähkömagneettisen kentän ftonia ei laiteta sisään- tai uloshiukkaseksi, sillä fotonin ei tarvitse olla massakuorella $q^2 = 0$, eikä sille määritetä polarisaatiota. Siten se lisätään virtuaalisena hiukkasena, ns. lisäyksenä (engl. insertion), sirontaprosessiin $e^- \rightarrow e^-$. Verrattuna prosessin $e^- \gamma \rightarrow e^-$ \mathcal{T} -matriisialkioon (1.50) ja (1.51), muutos poistaa polarisaatiovektorin termin [20, 16]

$$i\langle p', \beta | \mathcal{T} | p, \alpha; q, \lambda \rangle \longrightarrow i\langle p', \alpha' | j^\mu(0) | p, \alpha \rangle = (-ie) \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p).$$

Tätä kutsutaan silti \mathcal{T} -matriisialkioksi ulkoisen kentän lisäyksestä huolimatta.

Matriisialkoiden Feynmanin diagrammimerkinnöissä, toisin kuin korrelaatiofunktioiden, on merkitystä tuleeko amputoidut ulkoiset jalat vasemmalta (sisääntuleva

hiukkanen), oikealta (ulosmenevä hiukkanen) tai ylhäältä (virtuaalinen lisäyshiukkanen). Merkitään \mathcal{T} -matriisialkiota lyhyesti $\mathcal{T}_{fi} := \langle f|\mathcal{T}|i\rangle$. Saadaan

$$i\mathcal{T}_{fi}^\mu = (-ie)\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p) = \begin{array}{c} \text{1PI} \\ \text{diagram} \end{array} = \begin{array}{c} \text{tree} \\ \text{diagram} \end{array} + \begin{array}{c} \text{loop} \\ \text{diagram} \end{array} + \mathcal{O}(e^5), \quad (1.52)$$

missä $q = p' - p$.

Puutasolla tarkasteltuna

$$i\mathcal{T}_{fi}^{[0]\mu} = (-ie)\bar{u}(p')\Gamma^{[0]\mu}(p', p)u(p) = \begin{array}{c} \text{tree} \\ \text{diagram} \end{array} = (-ie)\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p), \quad (1.53)$$

eli $\Gamma^{[0]\mu} = \gamma^\mu$. Kvanttisähködynamikassa sähkömagneettisia verteksejä $-ie\gamma^\mu$ tulee seuraavan kertaluvun termeihin aina kaksi kerrallaan. Täten $\Gamma^{[1]\mu} \propto e^2$, ja yleisesti $\Gamma^{[n]\mu} \propto \alpha^n$, missä α on sähkömagneettinen hienorakennevakio $\alpha := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi}$.

Kvanttisähködynamikan Feynmanin säännöistä liikemäärävaruudessa, voidaan päätellä yleisesti 1PI-verteksifunktion hajotelma esittämällä se ns. sähkömagneettisten muototekijöiden avulla. 1PI-verteksifunktio koostuu sähkömagneettisen vuorovaikutuksen vertekseistä $-ie\gamma^\mu$ sekä sisäisistä spinori- ja fotonipropagaattoreista. Koska $q = p' - p$, sisäiset propagaattorit muodostuvat termeistä p, p', m . Eli verteksidiagrammit ovat termien p, p', γ^μ, m, e funktioita. Koska kvanttisähködynamikka on kiraalisymmetrinen teoria, matriisista γ^5 riippuvaa termiä ei ole mukana hajotelmassa.

Termin $\bar{u}\Gamma^\mu u$ tulee S -matriisialkioiden Lorentzin invarianssin nojalla muuntua ryhmän $SO^+(1, 3)$ Lorentzin muunnoksessa nelivektorin mukaisesti¹⁵, kuten termin

¹⁵Tarkkaan ottaen gammamatriisit γ^μ eivät ole Lorentzin ryhmän $SO^+(1, 3)$ nelivektoreita vaan Lorentzin skalaareita, sillä $\gamma^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}}) = \gamma^\mu$. Mutta gammamatriisi antispinorin ja spinorin välissä, eli termi $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, muuntuu kuten nelivektori. Sama pätee termille $\bar{u}\Gamma^\mu u$, jonka vasta tässä muodossaan tulee muuntua kuten nelivektori. [21]

$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ tapauksessa. Käyttäen kombinaatioita $p' + p$ ja $p' - p$, nelivektorihaajotelma on [21]

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu A + (p'^\mu + p^\mu) B + (p'^\mu - p^\mu) C. \quad (1.54)$$

Kertoimet A , B ja C tulee olla Lorentzin skalaareita, ja ne voivat riippua liikemäärien p , p' ja gammamatriisien γ^μ kontraktioista:

$$p^2, \quad p'^2, \quad \not{p}, \quad \not{p}', \quad \not{p}\not{p}', \quad \text{ja} \quad p \cdot p'.$$

Spinoreiden liikemäärien neliöt voidaan muuttaa massoiksi, sillä ne ovat massakuorella $p^2 = p'^2 = m^2$, sekä tietysti $\not{p} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta_\mu^\mu = 4 \cdot \mathbf{1}$. Gammamatriisien sisätulot liikemäärien kanssa \not{p} ja \not{p}' muuntuvat kuten nelivektorit, mutta ovat spinoreiden \bar{u} ja u välissä Lorentzin invariantteja. Nämä termit voidaan vaihtaa esitetyksi massan avulla, sillä ne voidaan siirtää oikealle tai vasemmalle gammamatriisien antikommutaattorin avulla, ja Diracin yhtälöstä (1.20) saadaan $\not{p}u(p) = m \cdot u(p)$ sekä $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p') \cdot m$. Ainoa epätriviaali liikemäärästä muodostettu Lorentzin skalaari on siis termi $p' \cdot p$ eli riippuvuus termistä $q^2 = (p' - p)^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$, jolle ei vaadita massakuorta.

Käytetään seuraavaksi Wardin identiteettiä $q_\mu \mathcal{T}_{fi}^\mu = 0$ verteksifunktion hajotelman (1.54) yksinkertaistamiseen. Wardin identiteetti on helppo todistaa nelivirran säilymisen $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ avulla [16]

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p', \alpha' | \partial_\mu j^\mu(x) | p, \alpha \rangle \\ &= \partial_\mu \left(e^{i(p'-p)_\mu x^\mu} \langle p', \alpha' | j^\mu(0) | p, \alpha \rangle \right) \\ &= i \underbrace{(p' - p)_\mu}_{=q_\mu} \langle p', \alpha' | j^\mu(x) | p, \alpha \rangle \\ \stackrel{x=0}{\iff} 0 &= q_\mu \underbrace{i \langle p', \alpha' | j^\mu(0) | p, \alpha \rangle}_{=i\mathcal{T}_{fi}^\mu} \\ &= \bar{u}(p') q_\mu \Gamma^\mu(p', p) u(p). \end{aligned}$$

Sijoittamalla nyt verteksifunktion hajotelma (1.54), saadaan [21]

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u}(p')(p' - p)_\mu \Gamma^\mu(p', p) u(p) \\
&= A\bar{u}(p')(\not{p}' - \not{p})u(p) + B\bar{u}(p')(p'_\mu - p_\mu)(p'^\mu + p^\mu)u(p) \\
&\quad + C\bar{u}(p')(p'_\mu - p_\mu)(p'^\mu - p^\mu)u(p) \\
&= A\bar{u}(p')(\not{p}' - \not{p})u(p) + B\bar{u}(p')(p'^2 - p^2)u(p) + C\bar{u}(p')q^2 u(p) \\
&= \underbrace{A\bar{u}(p')(m - m)u(p)}_{=0} + \underbrace{B\bar{u}(p')(m^2 - m^2)u(p)}_{=0} + Cq^2\bar{u}(p')u(p),
\end{aligned}$$

jonka tulee päteä yleisesti, koska q^2 ei ole massakuorella. Kertoimen C tulee olla nolla. Verteksifunktion hajotelma (1.54) ollaan täten saatu muotoon

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu A + (p' + p)^\mu B. \quad (1.55)$$

Johdetaan seuraavaksi Gordonin identiteetti, jota käytetään verteksifunktion esityksen muokkaamiseen muototekijöiden avulla. Gammamatriisien antikommutaatio-relaatiosta saadaan

$$i\sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)) = \eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu,$$

ja kommutaattorin antisymmetriasta

$$i\sigma^{\mu\nu} = -i\sigma^{\nu\mu} = \gamma^\nu\gamma^\mu - \eta^{\mu\nu}.$$

Sijoittamalla nämä saadaan

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p) &= \bar{u}(p')\left((\gamma^\nu\gamma^\mu - \eta^{\mu\nu})p'_\nu - (\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)p_\nu\right)u(p) \\
&= \bar{u}(p')\left(\not{p}'\gamma^\mu - p'^\mu - p^\mu + \gamma^\mu\not{p}\right)u(p) \\
&= \bar{u}(p')\left(2m\gamma^\mu - (p' + p)^\mu\right)u(p),
\end{aligned}$$

eli Gordonin identiteetti

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left(\frac{(p' + p)^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right)u(p) \quad (1.56)$$

Käyttämällä Gordonin identiteettiä verteksifunktioon (1.54), saadaan lopulta tavoiteltu muototekijöiden hajotelma verteksifunktion matriisialkiolle

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{T}_{fi}^\mu &= \text{diagram} = -ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p) \\
 &= -ie\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu F_1\left(\frac{q^2}{m^2}\right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \right] u(p), \quad (1.57)
 \end{aligned}$$

missä F_1 ja F_2 ovat muototekijät $F_1 = A + 2mB$ ja $F_2 = -2mB$. Ne ovat määritelty reaaliksi ja dimensiottomiksi kertoimiksi, mikä selittää massoilla jakamiset.

Verrataan seuraavaksi miten kvanttimekaniikan häiriöteorian korjaustermit korjaavat klassista kvanttisähködynamiikan vuorovaikutusta. Selvästi klassisella puutasolla muototekijät ovat

$$F_1^{[0]} = 1, \quad F_2^{[0]} = 0, \quad (1.58)$$

mikä vastaa puutason tulosta (1.53) $\Gamma^{[0]\mu} = \gamma^\mu$.

Efektiiviseen Lagrangen tiheyteen on lisätty S -matriisien teorian häiriöteoreettiset korjaustermit. Korjaustermit muuttavat leptoneiden vuorovaikutusverteksiä ulkoisen sähkömagneettisen kentän kanssa

$$-ie\gamma^\mu = \text{diagram} \longrightarrow \text{diagram} = -ie\Gamma^\mu.$$

Lagrangen tiheydessä (1.39) tämä näkyy vuorovaikutusosassa ulkoisen sähkömagneettisen kentän A^μ kanssa

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}} = -eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \longrightarrow -eA_\mu\bar{\psi}\Gamma^\mu\psi = \mathcal{L}_{\text{int, eff}}^{\text{QED}}, \quad (1.59)$$

ja muototekijöiden hajotelmalla (1.57) saadaan

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{int, eff}}^{\text{QED}} &= -eA_\mu\bar{\psi} \left[\gamma^\mu F_1\left(\frac{q^2}{m^2}\right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \right] \psi \\
 &= -eF_1\left(\frac{q^2}{m^2}\right) A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{e}{2m} F_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \bar{\psi}iq_\nu A_\mu\sigma^{\mu\nu}\psi. \quad (1.60)
 \end{aligned}$$

Ensimmäinen muototekijä korjaa kytkennän $A_\mu j^\mu$ voimakkuutta, joka renormalisoidaan fysikaaliseksi alkeisvaraukseksi epärelativistisella rajalla $\frac{q^2}{m^2} \rightarrow 0$, eli $F_1(0) = 1$ [20, 18]. Renormalisointi tekee teoriasta äärellisen ja takaa klassisen teorian epärelativistisella rajalla. Toinen muototekijä on äärellinen häiriöteoreettisen sarjan ensimmäisessä kertaluvussa, mutta massan ja varauksen renormalisointi tulee näkyville seuraavien kertalukujen diagrammeissa.

Selvitetään vielä efektiivinen Lagrangen tiheys (1.60) paikka-avaruudessa muokkaamalla jälkimmäisen termin $iq_\nu A_\mu \sigma^{\mu\nu}$ esitystä

$$\begin{aligned} iq_\nu A_\mu \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} (q_\nu A_\mu \sigma^{\mu\nu} + q_\mu A_\nu \sigma^{\nu\mu}) \\ &= -\frac{1}{2} (iq_\mu A_\nu - iq_\nu A_\mu) \sigma^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \sigma^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

missä toisella rivillä käytettiin matriisikommutaattorin $\sigma^{\mu\nu}$ indeksien antisymmetriaa ja kolmannella rivillä suureen A_μ Fourierin hajotelman muunnosta $q_\mu \rightarrow -i\partial_\mu$. Kvanttisähködynamiikan efektiivinen Lagrangen tiheys on siten

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{QED}} = \mathcal{L}_0^{\text{QED}} + \underbrace{\bar{\psi} \left[-eA_\mu \gamma^\mu F_1 \left(\frac{q^2}{m^2} \right) + \frac{e}{4m} F_2 \left(\frac{q^2}{m^2} \right) F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \psi}_{=\mathcal{L}_{\text{int., eff}}^{\text{QED}}}, \quad (1.61)$$

joka on kvanttisähködynamiikan Lagrangen tiheys (1.39) vuorovaikutuksen korjauksella (1.59).

1.4.2 Anomaalinen magneettinen momentti ja Schwingerin korjaustermi

Spinin aiheuttaman magneettisen momentin g -tekijä on määritelty epärelativistisella rajalla selkeästi Hamiltonin operaattorin potentiaalienergian (1.18) avulla

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -g \frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S},$$

missä \mathbf{B} on ulkoinen magneettinen kenttä ja \mathbf{S} on spin-operaattorivektori (1.19).

Liitteessä C ja luvussa 1.2.2 selvitetiin spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkasten klassinen g -tekijä ulkoiseen sähkömagneettiseen kenttään kytketystä Diracin yhtälöstä (1.23), ja osoitettiin että epärelativistisella rajalla $g = 2$. Kvanttikenttäteoriassa tulee kuitenkin tarkastella vuorovaikutusta S -matriisien teorialla, jossa kvanttisilmukkaefektit korjaavat klassista vuorovaikutusta. Täten tulee tarkastella efektiivistä Lagrangen tiheyttä (1.61), missä vuorovaikutusta käsitellään kvanttimekaanisesti 1PI-verteksifunktion avulla, eli muutoksella (1.59).

Efektiivisestä Lagrangen tiheydestä voidaan laskea efektiivinen Diracin yhtälö ja sen epärelativistinen raja, jolloin saadaan korjattu magneettisen momentin g -tekijä. Epärelativistinen raja on laskettu liitteessä D. Liitteessä approksimoidaan pieniksi energiatermit

$$\frac{q^2}{m^2}, \quad \frac{i\partial_t\chi_0}{2m}, \quad \frac{e\phi}{2m}, \quad F_2(0)\frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad F_2(0)\frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma} \cdot i\mathbf{E},$$

jotka ovat pieniä verrattuna massaan tai sen neliöön. Lisäksi käytetään heikon magneettikentän approksimaatiota $e^2\mathbf{A}^2 \approx 0$ (joka ei vaikuta spinin g -tekijään). Ensimmäinen muototekijä ei saa korjauksia epärelativistisella rajalla, sillä se renormalisoidaan ykköseksi, eli $F_1(0) = 1$ [18]. Hamiltonin operaattoriksi saadaan (D.5)

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{e}{2m}\mathbf{B} \cdot [\mathbf{L} + (2 + 2F_2(0))\mathbf{S}] - e\phi,$$

eli spinin magneettisen momentin g -tekijä on

$$g \equiv 2 + 2F_2(0).$$

Tästä määritellään anomaalisen magneettisen momentin g -tekijä korjauksena Diracin yhtälön $g = 2$ -tulokseen

$$a := \frac{g - 2}{2} \equiv F_2(0). \quad (1.62)$$

Anomaalinen magneettinen momentti on määritelty epärelativistisella rajalla, missä 1PI-verteksidiagrammien (1.57) ftoni laitetaan massakuoren rajalle $q^2 =$

$(p' - p)^2 \rightarrow 0$. Tämä on kuitenkin tavoiteltu suure, sillä epärelativistinen raja on hyvä approksimaatio kokeille, missä mitataan anomaalista magneettista momenttia. Vuorovaikuttavan leptonin relativistinen nopeus ei vaikuta approksimaatioon, sillä g -tekijä lasketaan hiukkasen lepokoordinaatistossa.

Tuloksella $a \equiv F_2(0)$, anomaalisen osan laskeminen on siirretty Feynmanin 1PI-verteksidiagrammien (1.52) laskemiseen ja F_2 osan selvittämiseen muototekijähajotelman (1.57) avulla, missä F_2 laitetaan lopuksi rajalle $q^2 \rightarrow 0$. Diagrammien (1.52) ja muototekijähajotelman (1.57) suhde on

$$i\mathcal{T}_{fi}^\mu = \begin{array}{c} \text{wavy line } q \\ \uparrow \\ \text{circle } 1\text{PI} \\ \swarrow \text{ } p \quad \searrow \text{ } p' \end{array} = -ie\bar{u}(p') \underbrace{\left[\gamma^\mu F_1\left(\frac{q^2}{m^2}\right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \right]}_{=\Gamma^\mu(p',p)} u(p).$$

Kvanttisähködynamikassa diagrammien verteksejä tulee kertaluvun kasvaessa kaksi kerrallaan lisää, eli $\Gamma^{\mu[n]} \propto e^{2n} \propto \alpha^n$, missä e on sähkövaraus ja α hienorakennevakio. Täten anomaalinen g -tekijä voidaan kirjoittaa sarjana

$$a \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F_2^{[n]}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n,$$

missä termit C_n ovat sähkövarauksesta riippumattomia dimensiottomia ja reaalisia lukuja.

Ensimmäinen (triviaali) approksimaatio anomaaliselle g -tekijälle saadaan klassisesta puutason matriisialkiosta

$$i\mathcal{T}_{fi}^{\mu[0]} = \begin{array}{c} \text{wavy line } q \\ \uparrow \\ \text{vertex} \\ \swarrow \text{ } p \quad \searrow \text{ } p' \end{array} = -ie\bar{u}(p')\Gamma^{\mu[0]}(p',p)u(p) = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p),$$

eli $\Gamma^{\mu[0]} = \gamma^\mu$, ja siten $a^{[0]} = F_2^{[0]} = 0$. Diagrammista saatiin siis suoraan klassinen Diracin yhtälön tulos $g^{[0]} = 2$, joka johdettiin liitteessä C.

Seuraavassa kertaluvussa on ensimmäinen epätriviaali korjaus anomaaliselle g -

tekijälle, ja se lasketaan matriisialkiosta

$$i\mathcal{T}_{fi}^{\mu[1]} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ / \quad \backslash \\ \text{---} \end{array} = -ie\bar{u}(p')\Gamma^{\mu[1]}(p', p)u(p). \quad (1.63)$$

Lasku on esitetty kattavasti liitteessä E. Diagrammin integraali on ääretön, mutta renormalistointia ei tarvitse suorittaa, sillä äärellinen muototekijä $F_2^{[1]}$ saadaan eroteltua. Liitteen laskussa käytetään mm. Feynmanin parametrisaatiota ja Wickin rotaatiota, ja lopulta epärelativistisella rajalla $\frac{q^2}{m^2} \rightarrow 0$ saadaan tulos

$$a^{[1]} \equiv F_2^{[1]}(0) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (1.64)$$

missä α on hienorakennevakio¹⁶ $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. Tämä universaali tulos pätee elektronin lisäksi myös myonille ja tauille.

Ei-universaali diagrammi, missä on virtuaalinen toisen maun leptonisilmukka (elektroni ja tau), nähdään jo seuraavassa kertaluvussa α^2 . Tällöin reaaliset muototekijät (ja siten myös anomaalisen momentin korjaustermit) tulevat riippuvaiseksi myös leptoneiden massojen suhteista. Luvussa 2.2.1 tarkastellaan koko kvanttisähködynamiiikan korjauksia kaikilla leptonimauilla.

Anomaalisen magneettisen momentin korjaus $\frac{\alpha}{2\pi}$ on historiallisesti merkittävä kvanttisähködynamiiikan tulos. Ensimmäisenä tuloksen julkisti Schwinger vuonna 1948 [2]. Tämän vuoksi tätä korjaustermiä $\frac{\alpha}{2\pi}$ kutsutaankin Schwingerin korjaustermiksi. Feynman ja Tomonaga kehittivät samaan aikaan kvanttikenttäteoriaa omilla laskumenetelmillään, ja vuonna 1949 Dyson osoitti [22] Schwingerin, Feynmanin ja Tomonagan laskumenetelmät yhteensopiviksi. Suosituimmaksi laskumenetelmäksi jäi Feynmanin diagrammit, jota käytetään myös tässä tutkielmassa. [14]

¹⁶QED:n korjaustermit ovat verrannollisia hienorakennevakioon, joka on kvanttisähködynamiiikan ja stein myös standardimallin vapaa parametri. Aihetta tarkastellaan luvun 2.2.1 lopussa, missä sijoitetaan hienorakennevakion kokeellisesti sovitettu arvo tuloksiin.

2 Myonin $g - 2$ -ongelma

Tässä luvussa selvitetään teoreettisesti hiukkasfysiikan standardimallista myonin anomaalinen g -tekijä $a_\mu := (g - 2)_\mu/2$, jota verrataan kokeellisiin mittauksiin. Standardimallin teoreettisen ennustuksen ja kokeellisen mittaustuloksen välillä on 4,2:n keskihajonnan eroavaisuus. Näin suuri statistinen poikkeama vastaisi todennäköisyyttä $1/75\,000$, jos statistisen virheen oletetaan noudattavan normaalijakaumaa. Tätä kutsutaan myonin $g - 2$ -ongelmaksi.

Myonin anomaalisen g -tekijän tutkimus on kiinnostava, sillä se laittaa standardimallin teorian kovalle koetukselle, josta se ei välttämättä selviä. Käsitellään ensin standardimallin laskennallinen tulos ja sitten kokeelliset mittaukset, joiden tuloksia lopussa verrataan keskenään.

2.1 Miksi juuri myoni on huomion keskipisteenä?

Elektronin g -tekijä on ollut historiallisesti merkittävä tutkimuskohde jo vuodesta 1928 lähtien, kun Diracin yhtälöstä saatiin tulos $g = 2$ [1]. Vuonna 1948 Schwinger [2] laski ensimmäisenä kvanttisähködynamiikan korjauksen (1.64) $a^{[1]} = \frac{\alpha}{2\pi}$. Anomaalista g -tekijää on pystytty tästä lähtien laskemaan yhä tarkemmin kehittämällä laskutekniikoita, supertietokoneiden laskutehoa hyödyntämällä, sekä heikon- ja väri- vuorovaikutuksen teorian avulla. Nykyään elektronin ja erityisesti myonin anomaalisen g -tekijän mittaukset laittavat standardimallin kvanttisilmukkavuorovaikutukset kovalle koetukselle.

Myoni on noin 207 kertaa¹⁷ massiivisempi alkeishiukkanen kuin elektroni, ja on

¹⁷Laskuissa käytetyt leptonien massasuhteet ovat

$$m_\mu/m_e = 206,768\,2827(47) \quad [23],$$

$$m_\mu/m_\tau = 0,059\,4635(40) \quad [24],$$

joilla on analysoitu tämän hetken tarkimmat standardimallin tulokset [4] vuonna 2020.

tämän vuoksi huomattavasti alttiimpi suuren kertaluvun kvanttisilmukkakorjauksille. Myonia kevyemmän virtuaalisen fermionisilmukan sisältävät ns. 'kevyt raskaassa' -diagrammit (engl. light-in-heavy diagrams) tuottavat myonin ja kevyen fermionin massasuhteeseen verrannollisia suuria korjaustermejä. Raskaan myonin teoreettinen arvo suppenee siten häiriöteorian kertaluokissa hitaasti, ja suuren kerranluokan diagrammit näkyvät teoreettisessa ennustuksessa selkeästi. Myonin anomaalinen g -tekijä antaa siis hyvän testin standardimallin toimivuudesta. Lisäksi samasta syystä myoni on huomattavasti alttiimpi standardimallin ulkopuoliselle ns. uudelle fysiikalle.

Kiinnostusta on lähivuosina nostattanut myonin anomaalisen g -tekijän tarkat mittaustulokset, jotka eivät ole sovussa standardimallin ennustuksen kanssa. Brookhavenin 2006 [25] ja ensimmäisten Fermilabin 2021 [5] mittaustulosten ansiosta koekellinen tulos eroaa teoreettisesta ennustuksesta jo 4,2 keskihajontaa. Uusilla koekellisilla mittauksilla ero saattaa lähentyä nopeasti viiden keskihajonnan tieteellisen löydön rajaa.

Leptoneista tau (τ) olisi teorian ja mittausten vertailussa vielä kiinnostavampi kuin myoni, sillä kevyt raskaassa -diagrammien kertoimien massasuhteet tuovat esille vielä merkittävämmän suurien kertalukujen korjaustermejä. Ongelmana mittauksissa on kuitenkin taun hyvin pieni keskimääräinen elinaika¹⁸, ennen kuin se hajoaa muiksi hiukkasiksi. Tällä hetkellä tauille ei ole pystytty suunnittelemaan tarkkoja mittauksia tauille, ja siksi myoni on huomion keskipisteenä. [26]

2.2 Myonin $g - 2$ standardimallista

Tässä luvussa selvitetään nykyisestä hiukkasfysiikan teoriasta eli standardimallista (ks. luku 1.3) myonin anomaalinen g -tekijä $a_\mu = (g - 2)_\mu/2$. Vaikka suurin osa

¹⁸Lepokoordinaatistossa myonin keskimääräinen elinaika on noin $2,2 \mu\text{s}$ ja taun noin $0,29 \text{ ps}$. [26]

korjauksesta tulee yksin kvanttisähködynamika (QED), tarkassa selvityksessä tulee ottaa huomioon kaikki standardimallin hiukkaset ja vuorovaikutukset. Luvussa esitettyihin teoreettisiin tuloksiin käytetään WP-2020 julkaisun [4] kokoamia ja analyysoimia tutkimustuloksia.

Standardimalli on kvantisoitu Yangin-Millsin mittakenttäteoria symmetriaryhmillä $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Sähköheikko ryhmä $SU(2)_L \times U(1)_Y$ jakaantuu spontaanissa symmetriarikossa sähkömagnetismiin ja heikkoon vuorovaikutukseen. Koska leptonit eivät suoraan vuorovaikuta gluoneiden kanssa, väri vuorovaikutus tulee esiin fotonien γ tai massiivisten mittabosoneiden W ja Z kautta. Lisäksi Higgsin bosoni H vuorovaikuttaa kaikkien massiivisten hiukkasten kanssa. Kaikki standardimallin diagrammiverteksit on esitetty kuvassa 5.

Standardimallin anomaalisen g -tekijän korjaustermit jaetaan vuorovaikutuksien mukaan

$$a_\mu^{\text{SM}} = a_\mu^{\text{QED}} + a_\mu^{\text{EW}} + a_\mu^{\text{Had}}. \quad (2.1)$$

Jako korjaustermeihin määritellään seuraavasti: QED:ssä on vain leptonit ja fotoni, EW:ssä on mukana massiivinen mittabosoni W , Z tai H , hadronisissa korjauksissa loput väri vuorovaikutuksen korjaukset, jotka eivät ole EW:ssä.

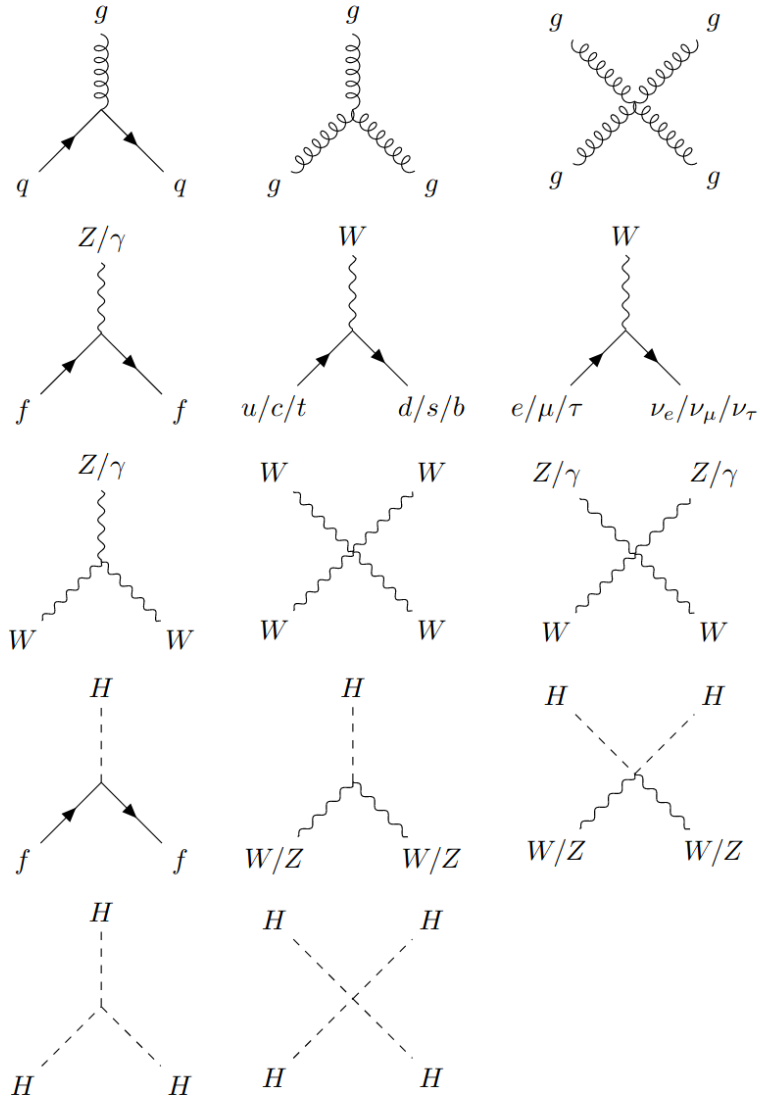
Hadroniset vuorovaikutukset tulevat esiin QED:n häiriöteorian virtuaalisten fotonien kautta. Hadroniset korjaukset jaetaan $\mathcal{O}(\alpha^2)$ vakuumpolarisaatioon (HVP, engl. hadronic vacuum polarisation) ja $\mathcal{O}(\alpha^3)$ fotoni–fotoni-sirontaan (HLbL, engl. hadronic light-by-light)

$$a_\mu^{\text{Had}} = a^{\text{HVP}} + a^{\text{HLbL}}. \quad (2.2)$$

Standardimallin korjaustyyppien jako on täten

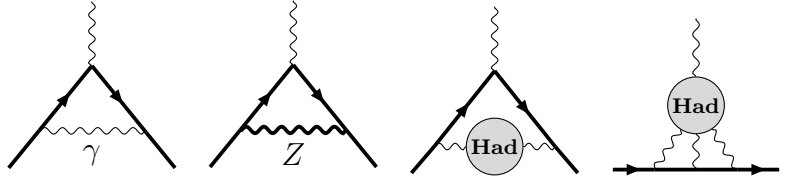
$$a_\mu^{\text{SM}} = a_\mu^{\text{QED}} + a_\mu^{\text{EW}} + a^{\text{HVP}} + a^{\text{HLbL}},$$

joista jokaiselle korjaustyyppille omistetaan tässä luvussa yksi aliluku. Korjaustyypp-



Kuva 5. Häiriöteorian Feynmanin diagrammeissa Lagrangen vuorovaikutustermit vastaavat verteksejä, ja tässä kuvassa on esitetty symmetriarikon standardimallin kaikki vuorovaikutusverteksit. Kuvan esitykseen on valittu unitaarinen mitta, joka eliminoi Goldstonen bosonin G . Gluonit g vuorovaikuttavat itseisvuorovaikutuksen lisäksi vain hiukkasten kanssa, joilla on värivaraus, eli kvarkkien $q = u, c, t, d, s, b$ kanssa. Varattu mittabosoni W muuttaa leptoni- ja kvarkkimakuja, kun taas Z käyttäytyy vertekseissä kuten varattujen fermioneiden f kanssa vuorovaikuttava fotoni γ . Higgsin bosoni vuorovaikuttaa Yukawan vuorovaikutuksen kautta kaikkiin massiivisiin hiukkasiin kuten itseensä. Tämän lisäksi Higgsillä on H^4 vuorovaikutus itsensä kanssa.

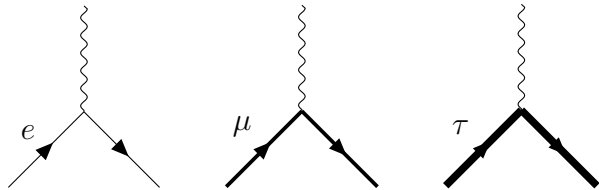
pien alimman kertaluvun diagrammit ovat samassa järjestyksessä



2.2.1 QED: kvanttisähködynamikan vuorovaikutukset

Selvästi suurin osuus leptoneiden anomaalisesta g -tekijästä tulee vuorovaikutuksesta fotonien kanssa eli kvanttisähködynamikan diagrammeista. Tarkastellaan tässä luvussa QED:n korjausta myonin anomaaliseen magneettiseen momenttiin, joka saadaan laskettua suoraviivaisesti häiriöteorian avulla. QED:n korjaustermit on selvitetty häiriöteoreettisen sarjan kertalukuun α^5 asti.

Luvussa 1.4 käsiteltiin universaalia kvanttisähködynamikkaa, missä on vain yksi leptonimaku. Leptoneita on kuitenkin olemassa elektronin (e) lisäksi myös myoni (μ) ja tau (τ), jotka vuorovaikuttavat samalla tavalla fotoneiden kanssa. Täten myös erilaisia diagrammien verteksejä on yhden sijasta kolme¹⁹



Leptonin sähkömagneettista vuorovaikutusta kuvaava universaali ja efektiivinen Lagrangen tiheys on kuvattu yhtälössä (1.61), ja myonille saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int, eff}}^{\text{QED}} &= -eA_\alpha \bar{\psi} \Gamma^\alpha \psi \\ &= \bar{\psi} \left[-eA_\alpha \gamma^\alpha F_1 \left(\frac{q^2}{m_\mu^2}, \frac{m_\mu}{m_e}, \frac{m_\mu}{m_\tau} \right) + \frac{e}{4m_\mu} F_2 \left(\frac{q^2}{m_\mu^2}, \frac{m_\mu}{m_e}, \frac{m_\mu}{m_\tau} \right) F_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \right] \psi, \end{aligned}$$

missä muototekijät riippuvat nyt myös massasuhteesta, koska ei-universaalit diagrammit sisältävät sisäisiä elektroni- tai tau-silmukoita. Anomaalinen momentti

¹⁹Feynmanin diagrammeissa lihavoitua voidaan käyttää hiukkasten massojen korostamiseen, kun halutaan korostaa sen merkitystä laskun tai tuloksen kannalta.

määritellään epärelativistisesti

$$a_{\mu}^{\text{QED}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F_2^{[n]} \left(\frac{q^2}{m_{\mu}^2} \rightarrow 0, \frac{m_{\mu}}{m_e}, \frac{m_{\mu}}{m_{\tau}} \right) \quad (2.3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n. \quad (2.4)$$

Vapaat parametrit ovat leptonien massasuhteet sekä hienorakennevakio α .

QED:n käsittelyä selkeyttää diagrammien eksplisiittinen jako leptonimakujen sekoittumisen mukaan

$$a_{\mu}^{\text{QED}} = A_1 + A_2(m_{\mu}/m_e) + A_2(m_{\mu}/m_{\tau}) + A_3(m_{\mu}/m_e, m_{\mu}/m_{\tau}). \quad (2.5)$$

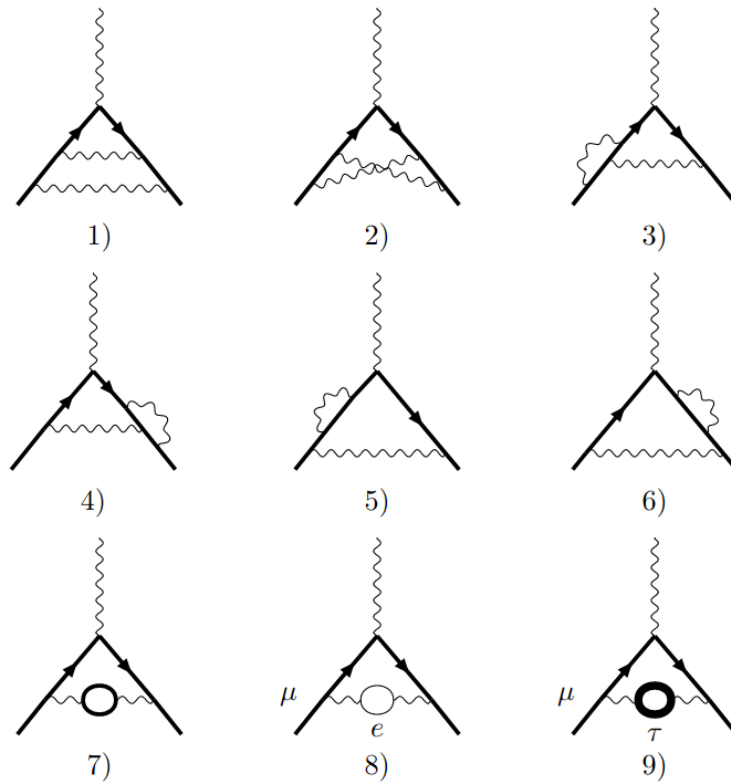
Funktio A_1 sisältää vain yhden leptonimaun, ja on oleellisesti universaali eli sama kaikille leptoneille, funktion A_2 diagrammit sisältävät myonin lisäksi joko elektroni- tai tau-silmukoita (eli kevyt raskaassa tai raskas kevyessä -termejä), ja funktion A_3 diagrammit sisältävät sekä elektroni- että tau-silmukoita. Häiriöteoreettinen sarja kertalukuun α^5 saakka on

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^{[1]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + A_1^{[2]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_1^{[3]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_1^{[4]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_1^{[5]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 \\ A_2 &= A_2^{[2]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_2^{[3]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_2^{[4]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_2^{[5]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 \\ A_3 &= A_3^{[3]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_3^{[4]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_3^{[5]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5. \end{aligned}$$

Toisen rivin $A_2^{[n]}$ funktiot saavat eri arvot massasuhteen sijoituksen jälkeen riippuen onko toinen leptoni e vai τ , joista molemmat tulee käydä läpi (2.5) mukaisesti. Yhdistämällä funktioiden jako (2.5) anomaalisen g -tekijän määritelmään (2.4), saadaan α^n -kertalukua vastaava kerroin $C_n = A_1^{[n]} + A_2^{[n]} \left(\frac{m_{\mu}}{m_e} \right) + A_2^{[n]} \left(\frac{m_{\mu}}{m_{\tau}} \right) + A_3^{[n]} \left(\frac{m_{\mu}}{m_e}, \frac{m_{\mu}}{m_{\tau}} \right)$.

Luvussa 1.4.2 selvitettiin ja liitteessä E laskettiin QED:n ensimmäisen kertaluvun korjaustermi, jota kutsutaan Schwingerin korjaustermiksi. Koska korjaustermi on universaali, se pätee myös myonille

$$i\mathcal{T}_{fi}^{\mu[1]} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \quad \longrightarrow \quad a_{\mu}^{\text{QED}[1]} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$



Kuva 6. Kaikki kertaluvun α^2 QED-diagrammit. Seitsemän ensimmäistä diagrammia ovat universaaleja, ja kaksi viimeistä ovat ei-universaaleja, joissa leptonimaut sekoittuvat. Leptoniviivojen paksuuksilla on korostettu leptonien massaeroja. Diagrammi 8 on häiriöteoreettisen sarjan ensimmäinen kevyt raskaassa -diagrammi, joka antaa massasuhteesta m_μ/m_e riippuvan suuren kontribuution myonin anomaaliseen g -tekijään.

Edellä mainitun jaon mukaisesti tulos kirjoitetaan $a_\mu^{\text{QED}[1]} = A_1^{[1]} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)$.

Eroavaisuudet eri leptonien anomaalisen g -tekijän arvossa tulevat esille jo seuraavassa häiriöteoreettisen sarjan kertaluvussa, missä esiintyy kaksi ei-universaalia diagrammia. Kaikki toisen kertaluvun α^2 diagrammit on esitetty kuvassa 6. On huomioitavaa, että α^2 -kertaluvun fotoni–fotoni-sironnan diagrammit kumoavat toisensa

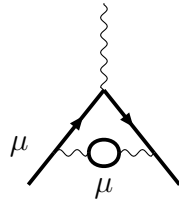
The equation shows two Feynman diagrams for photon-photon scattering at order α^2 . Each diagram has two incoming wavy photon lines at the bottom and two outgoing wavy photon lines at the top. The diagrams are connected by a plus sign and followed by an equals sign and zero, indicating they cancel each other out.

Furryn teoreeman²⁰ nojalla, kun suljetussa fermionisilmukassa on pariton määrä fotoniverteksejä. Fotoni–fotoni-sirontadiagrammit tulee täten huomioida vasta ker-
taluvusta α^3 eteenpäin, kun fotoni–fotoni-sironnan leptonisilmukassa on parillinen
määrä fotoniverteksejä.

Kuvan 6 kahden virtuaalisen fotonin universaaleista diagrammeista 1–6 saadaan
korjaus [27]

$$A_{1,[1-6]}^{[2]} = -\frac{279}{144} + \frac{5\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4}\zeta(3) = -0,344\dots$$

Viimeiset kolme diagrammia ovat leptonisilmukalla korjaavia virtuaalisen fotonin
vakuumpolarisaatiodiagrammeja (lyhenne VP). Näistä vain myonisilmukan korjaus
on universaali [27]



$$A_{1,VP}^{[2]}(m_\mu/m_\mu = 1) = \frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} = 0,015\dots$$

²⁰Furryn teoreema on helppo todistaa unitaarisen varauskonjugaatiomatriisiin C avulla (ks. liite
B), käyttäen relaatioita $CS_F(x, y)C^\dagger = S_F^T(y, x)$ ja $C\gamma_\mu C^\dagger = -\gamma_\mu^T$. Olkoon diagrammissa on
fermionisilmukka n :llä sähkömagneettisella verteksillä, jolloin jäljen syklistyydellä ja transpoosin
jäljen symmetrialla saadaan

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\gamma_{\mu_1} S_F(x_1, x_2) \cdots \gamma_{\mu_n} S_F(x_n, x_1)] \\ &= \text{Tr}[C\gamma_{\mu_1} C^\dagger C S_F(x_1, x_2) C^\dagger \cdots C\gamma_{\mu_n} C^\dagger C S_F(x_n, x_1) C^\dagger] \\ &= (-1)^n \text{Tr}[\gamma_{\mu_1}^T S_F^T(x_2, x_1) \cdots \gamma_{\mu_n}^T S_F^T(x_1, x_n)] \\ &= (-1)^n \text{Tr}[(S_F(x_1, x_n) \gamma_{\mu_n} \cdots S_F(x_2, x_1) \gamma_{\mu_1})^T] \\ &= (-1)^n \text{Tr}[\gamma_{\mu_1} S_F(x_1, x_n) \gamma_{\mu_n} \cdots S_F(x_2, x_1)] \end{aligned}$$

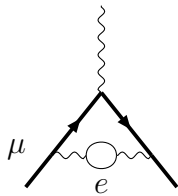
$$\Leftrightarrow \text{Diagram 1} = (-1)^n \times \text{Diagram 2},$$

missä diagrammien merkintä \cdots tarkoittaa kuvion jatkumista n :nteen verteksiin asti.

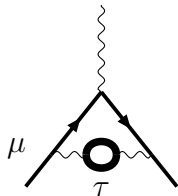
Toisen kertaluvun universaalin $A_1^{[2]}$ osuuden selvitti analyttisesti ensimmäisenä Petermann [28] ja Sommerfield [29] vuonna 1957

$$A_1^{[2]} = \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4} \zeta(3) = -0,328\,478\,965\,579\dots$$

Ei-universaalit termit $A_2^{[2]}$ ja $A_3^{[2]}$ pystytään esittämään massarelaatioiden $1/x = m_\mu/m_l$ ($l = e, \tau$) analyttisinä funktioina käyttäen yhden silmukan renormalisoituja fotonin propagaattoreita [20]. Analyttiset tulokset laski ensimmäisenä Elend vuonna 1966 [30]. Teorian tarkastelun vuoksi kiinnostavia ovat numeeriset tulokset massasuhteen asymptoottisena ($x \sim 0$ elektronille ja $1/x \sim 0$ taulle) sarjana [4]



$$A_2^{[2]}(m_\mu/m_e) = \frac{1}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{26}{36} + \mathcal{O}\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) = 1,094\,258\,3093(76),$$



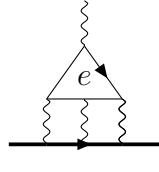
$$A_2^{[2]}(m_\mu/m_\tau) = \frac{1}{45} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} \ln \frac{m_\tau}{m_\mu}\right) = 0,000\,078\,076(11),$$

missä epävarmuus tulee massasuhteiden epävarmuuksista, jotka ovat teorian vapaita parametreja, jotka saadaan kokeellisten mittausten perusteella. Yllä esitetyistä tuloksista huomataan, kuinka kevyt raskaassa -silmukat ovat suuria verrattuna raskas-kevyessä silmukoihin. Yhdessä α^2 -diagrammien tulokset ovat [4]

$$\begin{cases} A_1^{[2]} & = -0,328\,478\,965\,579\dots \\ A_2^{[2]}(m_\mu/m_e) & = 1,094\,258\,3093(76) \\ A_2^{[2]}(m_\mu/m_\tau) & = 0,000\,078\,076(11) \\ a_\mu^{\text{QED}[2]} & = 0,765\,857\,420(13) \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Kertaluvun α^3 universaalit diagrammit (72 kpl) on esitetty kuvassa (7), ja niiden analyttinen ratkaisu selvitettiin loppuun vuonna 1996, kun Remiddi *et al.*

ratkaisivat viimeiset puuttuvat osat²¹ [31, 4]. Merkittävimmät diagrammit ovat ei-universaalit fotonifotoni-sironnan kevyt raskaassa -diagrammit, eli kuvan 7 diagrammit 1–6 elektronisilmukalla, mistä saadaan termin m_e/m_μ suhteen asymptootinen sarja ja tulos [27]



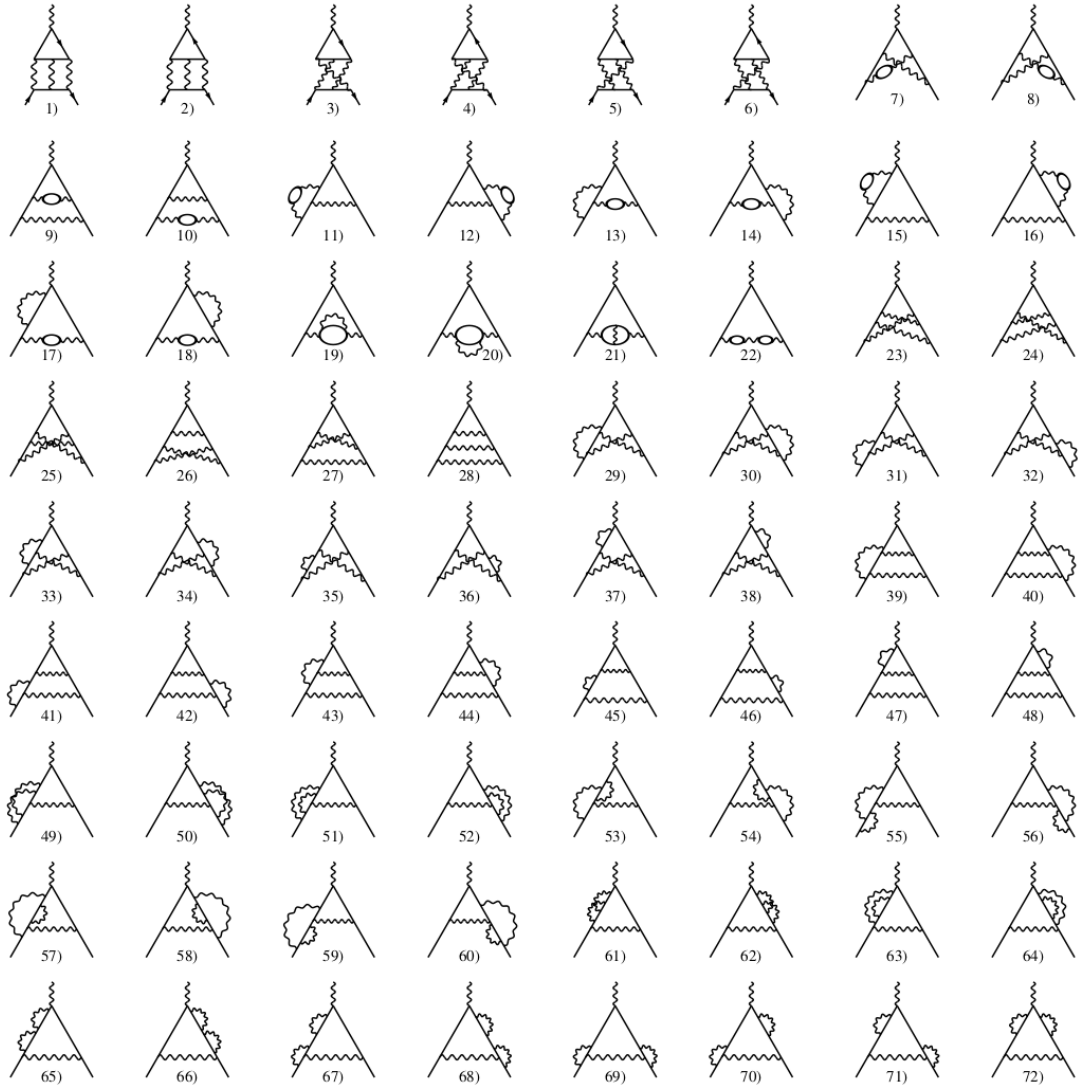
$$\begin{aligned}
 A_{2,LbL,e}^{[3]}(m_\mu/m_e) &= \frac{2}{3}\pi^2 \ln \frac{m_\mu}{m_e} + \frac{59}{270}\pi^4 - 3\zeta(3) - \frac{10}{3}\pi^2 + \frac{2}{3} \\
 &+ \mathcal{O}\left(\frac{m_e}{m_\mu} \ln \frac{m_\mu}{m_e}\right) \\
 &= 20,947\,924\,89(16).
 \end{aligned}$$

Funktioon A_3 vaikuttaa vain kuvan 7 diagrammi 22, joka on ainoa kahden leptonisilmukan α^3 -diagrammi. Kolmannen kertaluvun tulokset ovat yhdessä [31, 4]

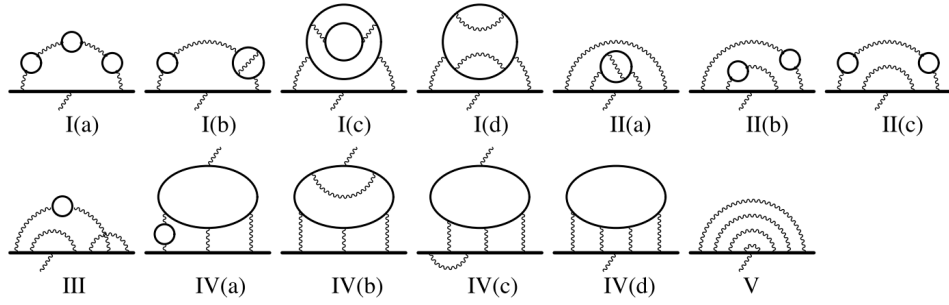
$$\left\{ \begin{array}{ll}
 A_1^{[3]} & = 1,181\,241\,456\,587\dots \\
 A_2^{[3]}(m_\mu/m_e) & = 22,868\,379\,98(20) \\
 A_2^{[3]}(m_\mu/m_\tau) & = 0,000\,360\,671(94) \\
 A_3^{[3]}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) & = 0,000\,527\,738(75) \\
 a_\mu^{\text{QED}[3]} & = 24,050\,509\,85(23) \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3.
 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Kertaluvun α^4 universaaleja diagrammeja on yhteensä 891, joista 373:lla diagrammilla on leptonisilmukka ja 518:sta diagrammilla vain virtuaalisia fotoneita. Diagrammit voidaan ryhmitellä kuvan 8 mukaisesti. Kertalukua ei ole ratkaistu analyyttisesti täysin, mutta Laporta julkaisi vuonna 2017 muutamia integraaleja vajaan analyyttisen tuloksen [32] universaalille osalle, josta saadaan tulos 1100:n numeron tarkkuudella.

²¹Viimeinen analyyttinen ongelma liittyi kuvan 7 diagrammiin 25, missä kolme fotonia menee ristiin [27, 31].



Kuva 7. Kaikki kertaluvun α^3 universaalit QED-diagrammit. Diagrammit 1–6 ovat fotoni–fotoni-sirontaa ja 7–22 diagrammit ovat vakuumpolarisaatiodiagrammeja, joista diagrammista 22 saa A_3 termin. Loput 23–72 ovat diagrammeja ilman leptonisilmukoita. [20]



Kuva 8. Kertaluvun α^4 QED-diagrammit (891 kpl) on hyödyllistä luokitella alla oleviin luokkiin, ja tarkastella niitä erikseen [4].

Kertaluvun α^4 suurimmat korjaukset tulevat kuvan 8 luokan IV(a) diagrammeista elektronisilmukoilla. Korjaukset saavat kaksi suurta logaritmista kevyt raskaassa -kerrointa sekä fotonifotoni-sironnan elektronisilmukasta että kevyt raskaassa -vakuumipolarisaatiokorjauksesta. Massasuhteen termit A_2 ja A_3 ovat suurimmaksi osaksi laskettu Feynmanin integraalien numeerisilla menetelmillä²², joka tuo tähän kertalukuun numeerista epävarmuutta (sen sijaan että funktiot olisi selvitetty analyyttisesti). Tulokset ovat yhdessä

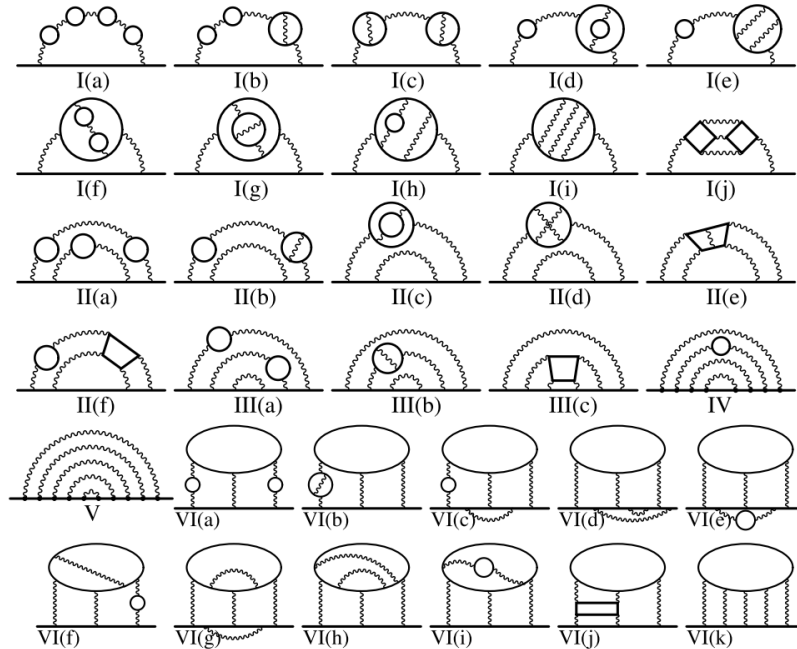
$$\begin{cases}
 A_1^{[4]} & = -1,912\,245\,764\,926\dots \\
 A_2^{[4]}(m_\mu/m_e) & = 132,6852(60) \\
 A_2^{[4]}(m_\mu/m_\tau) & = 0,042\,4941(53) \\
 A_3^{[4]}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) & = 0,062\,722(10) \\
 a_\mu^{\text{QED}[4]} & = 130,8782(60) \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4.
 \end{cases} \quad (2.8)$$

Viidennen kertaluvun universaaleja diagrammeja on yhteensä 12 672, ja ne on luokiteltu kuvassa 9. Aoyama *et al.* selvittivät universaalien osan $A_1^{[5]}$ numeerisesti vuosien 2018–2019 julkaisuissa [34, 3]. Vaikka numeerinen epävarmuus on suuri, kerroin $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5$ laittaa absoluuttisen epävarmuuden hyvin pieneksi verrattuna esimer-

²²Integraalien numeeriset approksimaatiot suoritetaan Lepagen VEGAS-algoritmia [33] käyttäen, joka selvittää Monte Carlo -integraalista suurimmat termit.

kiksi kokeelliseen mittaustarkkuuteen. Korjaustermien suuruuksissa fotonifotoni-sironnan kevyt raskaassa -termit dominoivat jälleen, ja tulokset ovat yhdessä [4]

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^{[5]} = 6,737(159) \\ A_2^{[5]}(m_\mu/m_e) = 742,32(86) \\ A_2^{[5]}(m_\mu/m_\tau) = -0,0656(45) \\ A_3^{[5]}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) = 2,011(10) \\ a_\mu^{\text{QED}[5]} = 751,0(9) \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5. \end{array} \right. \quad (2.9)$$



Kuva 9. Kertaluvun α^5 QED-diagrammit (12 672 kpl) luokiteltuna. Merkittävin luokka on IV(a) kevyt raskaassa -diagrammit, missä fotonifotoni-sirontaa on korjattu vakuumpolarisaatiolla. Suurimmat kertoimen $A_2^{[5]}(m_\mu/m_e)$ antavat diagrammiluokat VI(a): 629,141(12), VI(b): 181,1285(51) ja III(a): 109,116(33). [35]

Kevyt raskaassa -termi $A_2^{[n]}(m_\mu/m_e)$ dominoi ja kasvaa jokaisella α :n kertaluvulla, mutta sarja suppenee kuitenkin nopeasti kertaluvun kertoimen α^n mukana [4]. Tämän termin sisällä dominoivin diagrammityyppi on fotonifotoni-sironta, missä on mukana vakuumpolarisaatiokorjauksia. Sarjassa seuraavan kertaluvun α^6 mer-

kittävin diagrammi on edellisen kertaluvun kuvan 9 VI(a) diagrammin kaltainen, missä kaikki kolme fotonipropagaattoria on korjattu vakuumpolarisaatiolla. Tämän suuruus arvioidaan aiempien kertalukujen tulosten avulla [35, 4]

$$A_2^{[6]}(m_\mu/m_e) \sim A_{2,\text{LbL}}^{[3]}(m_\mu/m_e) \times \left(\frac{2}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{5}{9} \right)^3 \times 10 \approx 5400$$

$$\implies A_2^{[6]}(m_\mu/m_e) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^6 \approx 0,08 \times 10^{-11}.$$

Kertaluvun kokonaisarvio pyöristetään ylöspäin, eli $a_\mu^{\text{QED}[6]} \lesssim 0,1 \times 10^{-11}$ [35]. Kuu-
dennen kertaluvun tulos otetaan kuitenkin mukaan vain epävarmuusarvion vuoksi, jolloin $a_\mu^{\text{QED}[6]} = 0,0(1) \times 10^{-11}$.

Tuloksiin tulee vielä sijoittaa vapaa parametri hienorakennevakio α , joka saadaan kokeellisesta sovituksesta. Tämän hetken tarkin sovitus saadaan cesium-atomin (Cs) energiatilojen hienorakennejakautumisesta, joka mitattiin vuonna 2018 [36]

$$\alpha^{-1}(\text{Cs}) = 137,035\,999\,046(27). \quad (2.10)$$

Tämä tulos on linjassa aiemman rubium-atomin (Rb) mittausten [37] kanssa. Historiallisesti tarkin tapa selvittää α on ollut elektronin $g - 2$ -mittauksista. Nykypäivän elektronin anomaalisen g -tekijän mittaustuloksista saadaan sovitettua [3]

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137,035\,999\,1496(13)(14)(300), \quad (2.11)$$

missä ensimmäinen epävarmuus tulee kertaluvun α^5 numeerisesta laskusta, toinen hadronisesta laskusta ja kolmas itse mittauksesta.

Myonin $g - 2$ -ongelman kannalta ei ole merkityksellistä, kumpi mittauksen sovitus hienorakennevakiolle valitaan, mutta cesium-atomin mittausten sovitus on perustellumpi valinta. Tämä johtuu paremman tarkkuuden lisäksi siitä, että a_e mitaus vastaa hyvin tarkkaan a_μ mittausta, ja siten korreloi myonin tulosten kanssa vahvasti. QED:n tulokset eri hienorakennevakioiden arvoilla ovat [3, 35]

$$a_\mu^{\text{QED}}(\alpha(\text{Cs})) = 116\,584\,718,931(7)(17)(6)(100)(23)[104] \times 10^{-11} \quad (2.12)$$

$$a_\mu^{\text{QED}}(\alpha(a_e)) = 116\,584\,718,842(7)(17)(6)(100)(28)[106] \times 10^{-11}, \quad (2.13)$$

missä on listattu suurimmat epävarmuuden aiheuttajat: taun massa m_τ , kertalukujen α^4 ja α^5 numeerinen epävarmuus, kertaluvun α^6 arvio, hienorakennevakio α sekä näiden summan kvadratuuri. Ero tuloksien (2.12) ja (2.13) välillä on $0,09 \times 10^{-11}$, joka on standardimallin kokonaisvirheeseen ja kokelliseen tarkkuuteen nähden niin pieni, että näistä voitaisiin valita kumpi tahansa. Valitaan kuitenkin $a_\mu^{\text{QED}}(\alpha(\text{Cs}))$ eli (2.10) yllä mainittujen syiden vuoksi. Taulukossa II on esitetty QED-tarkastelu α -kertalukujen mukaan.

Taulukko II. QED:n korjaukset α -kertalukujen mukaan hienorakennevakion $\alpha(\text{Cs})$ ja $\alpha(a_e)$ sijoituksilla. Lopussa on QED:n kokonaistulokset eli kertalukujen 1–6 summat (2.12) ja (2.13). [4]

n	C_n	$a_\mu^{\text{QED}[n]}(\alpha(\text{Cs})) \times 10^{11}$	$a_\mu^{\text{QED}[n]}(\alpha(a_e)) \times 10^{11}$
1	0,5	116 140 973,321(23)	116 140 973,233(28)
2	0,765 857 420(13)	413 217,6258(70)	413 217,6252(70)
3	24,050 509 85(23)	30 141,90233(33)	30 141,90226(33)
4	130,8782(60)	381,004(17)	381,004(17)
5	751,0(9)	5,0783(59)	5,0783(59)
6	(~ 5400)	0,0(1)	0,0(1)
1–6	-	116 584 718,931[104]	116 584 718,842[106]

2.2.2 EW: sähköheikot vuorovaikutukset

Sähköheikot vuorovaikutukset jaotellaan diagrammeihin, jotka eivät ole aidosti vain QED- ja hadronisia diagrammeja, vaan sisältävät ainakin yhden Z , W tai Higgsin (H) bosonin. Sähköheikot verteksit nähdään luvun alussa esitetystä kuvasta 5.

Sähköheikkojen (EW) diagrammien vaikutus myonin anomaaliseen g -tekijään on laskettu verteksiin toiseen kertalukuun asti, ja arvioitu siitä ylöspäin. Ei-hadronisia vuorovaikutuksia on suoraviivaista laskea häiriöteoreettisesti Feynmanin diagrammeilla, ja hadronisten vuorovaikutusten laskentamenetelmiä käsitellään seuraavas-

sa aliluvussa 2.2.3. EW-korjaustermejä on pystytty laskemaan siitä lähtien, kun t'Hoofts renormalisoi sähköheikon teorian 1971 [17]. Ensimmäiset korjaustermien tulokset julkaistiin vuonna 1972 [38, 39, 40]. Nykyiset menetelmät perustuvat 2003 julkaisuun Czarnecki *et al.* [41]. Higgsin bosonin massa oli tällöin vielä tuntematon parametri, joka saatiin selvitettyä Cernin LHC:n ATLAS ja CMS -kokeissa vuosina 2011–2013. Higgsin massa voitiin sijoittaa myonin anomaalisen g -tekijän yhtälöihin, joiden tuloksia analysoitiin 2013 vuoden julkaisussa Gnendiger *et al.* [42].

Sähköheikot bosonit W , Z ja H ovat kaikki hyvin massiivisia myoniin verrattuna [26]

$$m_\mu = 0,105\,658\,3755(23) \text{ GeV},$$

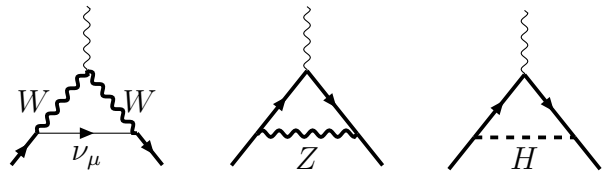
$$m_W = 80,377(12) \text{ GeV},$$

$$m_Z = 91,1876(21) \text{ GeV},$$

$$m_H = 125,25(17) \text{ GeV},$$

ja raskas-kevyessä diagrammit saavat pienen massasuhteen kertoimen $m_\mu/m_{(W/Z/H)}$. Täten sähköheikot diagrammit korjaavat vain vähän myonin vuorovaikusta ulkoisen fotonin kanssa.

Yhden silmukan diagrammit ovat unitarisessa mitassa²³



²³Unitarisessa mitassa laskeminen tuottaa käytännön hankaluuksia renormalisoinnin kanssa. Täten on hyödyllistä käyttää laskuissa mittoja, jotka saadaan renormalisoitua pienemmällä vai- valla. Muiden mittojen valinnat tuottavat ei-fysikaalisia haamuhiukkasia diagrammeihin, kuten Goldstonen bosonin ja Faddeevin-Popovin haamuja. [41, 27, 4]

joista saadaan [27]

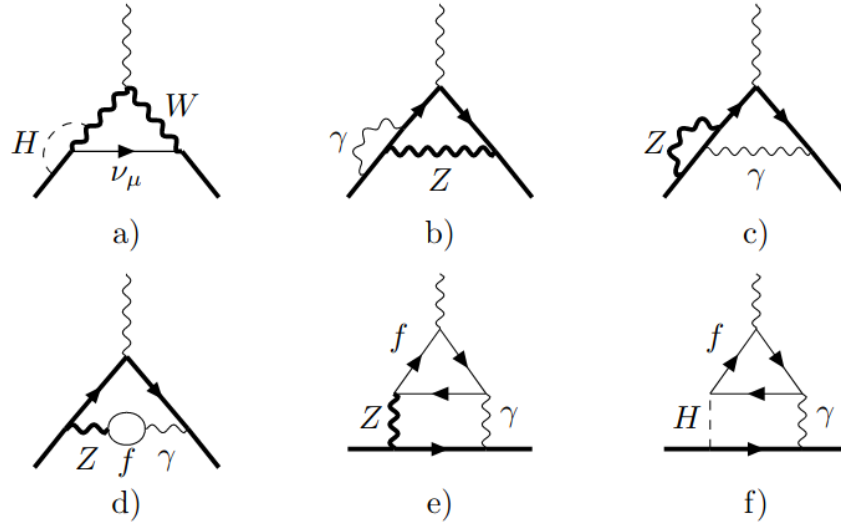
$$\begin{aligned} a_\mu^{\text{EW}[1]}(W) &= \frac{G_F m_\mu^2}{\sqrt{2} 8\pi^2} \frac{10}{3} &&= 388,70(0) \times 10^{-11}, \\ a_\mu^{\text{EW}[1]}(Z) &= \frac{G_F m_\mu^2}{\sqrt{2} 8\pi^2} \left[-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}(1 - 4s_W^2)^2 \right] &&= -193,89(2) \times 10^{-11}, \\ a_\mu^{\text{EW}[1]}(H) &\sim \frac{G_F m_\mu^2}{\sqrt{2} 8\pi^2} \frac{m_\mu^2}{m_H^2} \ln \frac{m_H^2}{m_\mu^2} &&\lesssim 0,005 \times 10^{-11}, \end{aligned}$$

missä $G_F = \frac{\sqrt{2} g_W^2}{8 m_W^2} \sim \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}m_W^2 s_W^2} \approx 1,116 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ on Fermin vakio, $s_W^2 = \sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \approx 0,223$ on Weinbergin kulmasta riippuva heikko sekotusparametri, joka määritellään massakuoren renormalisoidulla arvolla. Higgsin bosonin diagrammin vaikutus jää muiden korjausten virherajojen sisään, sillä kaksi Higgsin bosonien Yukawan vuorovaikutusta antavat pienen kertoimen m_μ^2/m_H^2 . Yhdessä sähköheikko yhden silmukan tulos on [41, 42, 4]

$$a_\mu^{\text{EW}[1]} = \underbrace{\frac{G_F m_\mu^2}{\sqrt{2} 8\pi^2}}_{\approx 10^{-9}} \left[\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \underbrace{(1 - 4s_W^2)^2}_{\approx 10^{-2}} + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{m_W^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{m_H^2}\right) \right] = 194,79(1) \times 10^{-11}. \quad (2.14)$$

Suurin epätarkkuus yhden silmukan tulokseen tulee parametrin s_W^2 , eli massasuhteen m_W^2/m_Z^2 , epävarmuudesta. Edessä oleva kerroin on pieni, sillä se on $\propto \alpha(m_\mu^2/m_W^2) \approx 10^{-8}$.

Kahden silmukan tulos on selvitetty hyvin tarkkaan, ja eri tyyppisiä diagrammeja on esitetty kuvassa 10. Koska sähköheikko teoria ei ole invariantti varauskonjugoinnin suhteen, Furryn teoreema ei päde W ja Z bosoneille. Täten diagrammit kuten kuvan (e) $\gamma\gamma Z$ -sironna ja (f) $\gamma\gamma H$ -sironna tulee ottaa huomioon. Kiinnostavia diagrammeja ovat $\gamma - Z$ sekoituksen diagrammit, kuten kuvan b–e diagrammit, jotka saavat suuren suuren logaritmisen $\ln(m_Z/m_\mu)$ tai $\ln(m_Z/m_f)$ kertoimen. Leptonisilmukoiden lisäksi tulee huomioida kvarkkien hadroniset vuorovaikutukset, joita



Kuva 10. Muutamia kiinnostavia kahden silmukan diagrammiesimerkkejä, joihin viitataan tekstissä. Fermionisilmukat voivat olla hadronisia.

tarkastellaan häiriöteoreettisesti ja ei-häiriöteoreettisesti²⁴ eri menetelmillä lähteissä [41, 42, 27, 4].

Kahden silmukan lasku jaetaan ensin bosonisiin ja fermionisilmukan sisältäviin osiin

$$a_{\mu}^{\text{EW}[2]} = a_{\mu;\text{bos}}^{\text{EW}[2]} + a_{\mu;\text{ferm}}^{\text{EW}[2]}.$$

Fermionisilmukan osa jaetaan edelleen

$$a_{\mu;\text{ferm}}^{\text{EW}[2]} = a_{\mu}^{\text{EW}[2]}(e, \mu, u, c, d, s) + a_{\mu}^{\text{EW}[2]}(\tau, t, b) + a_{\mu;\text{f-muut}, H}^{\text{EW}[2]} + a_{\mu;\text{f-muut}, \text{ei } H}^{\text{EW}[2]}$$

missä kaksi ensimmäistä ovat kuvan 10 (e) mukaiset $\gamma\gamma Z$ -diagrammit kevyillä ja raskailla fermionisilmukoilla, ja kaksi viimeistä ovat muut (d) ja (f) mukaiset fermionisilmukan diagrammit joko Higgsin bosonilla tai ilman. Kaikki kahden silmukan

²⁴Hadronisten korjausten ei-häiriöteoreettisia laskumenetelmiä käsitellään seuraavissa aliluvuissa 2.2.3 ja 2.2.4. Hadroniset korjaukset, jotka sisältävät W , Z tai H bosonin, ovat pieniä muihin hadronisiin korjauksiin verrattuna.

tulokset yhdessä ovat [41, 42, 4]

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\mu;\text{bos}}^{\text{EW}[2]} = -19,96(1) \times 10^{-11}, \\ a_{\mu}^{\text{EW}[2]}(e, \mu, u, c, d, s) = -6,91(20)(30) \times 10^{-11}, \\ a_{\mu}^{\text{EW}[2]}(\tau, t, b) = -8,21(10) \times 10^{-11}, \\ a_{\mu;\text{f-muut}, H}^{\text{EW}[2]} = -1,51(1) \times 10^{-11} \\ a_{\mu;\text{f-muut}, \text{ei } H}^{\text{EW}[2]} = -4,64(10) \times 10^{-11}. \end{array} \right.$$

Kolmen silmukan ja sitä seuraavien korjausten vaikutusta on arvioitu pieneksi [41, 42, 4]

$$a_{\mu}^{\text{EW}[\geq 3]} = 0(0,20) \times 10^{-11}.$$

Kokonaisuudessaan sähköheikko osuus anomaaliseen g -tekijään on täten [42, 4, 26]

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{\text{EW}} &= a_{\mu}^{\text{EW}[1]} + a_{\mu}^{\text{EW}[2]} + a_{\mu}^{\text{EW}[\geq 3]} \\ &= 153,6(1,0) \times 10^{-11}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Viimeaikainen vuoden 2018 kokonainen kahden silmukan numeerinen selvitys [43]

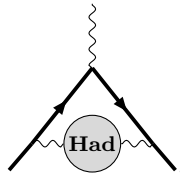
$a_{\mu}^{\text{EW}} = 152,9(1,0) \times 10^{-11}$ vahvistaa tuloksen (2.15) jätään sen virherajojen sisäpuolelle.

2.2.3 HVP: hadroninen vakuumpolarisaatio ja hila-QCD

Luvun 2.2 alussa esiteltiin lyhyesti kvarkkien ja gluonien hadroniset vuorovaikutukset ja niiden jako vakuumpolarisaation ja fotonifotoni-sirontaan (2.2)

$$a_{\mu}^{\text{Had}} = a_{\mu}^{\text{HVP}} + a_{\mu}^{\text{HLbL}}.$$

Tässä luvussa keskitytään hadroniseen vakuumpolarisaatioon (lyhenne HVP), joka on jo alustavasti QED:n häiriöteoreettisen sarjan kertalukua α^2



$$(2.16)$$

Hadroninen vakuumpolarisaatio korjaa yli kymmenkertaisesti anomaalista g -tekijää verrattuna sähköheikkoihin korjauksiin. Se on myös suurin epävarmuuden aiheuttaja standardimallin ennustuksessa.

Ongelmana kvarkkien ja gluonien häiriöteoreettisessa käsittelyssä on kvarkkien ns. asymptotinen vapaus, jonka vuoksi häiriöteoreettinen sarja ei suppene yleisesti. Kvarkit eivät ole värivarauksensa vuoksi vapaita hiukkasia, ja ne muodostavat yhdessä sidottuina tiloina huomattavasti massiivisempia hadroneita verrattuna vain niiden lepomassojen summiin. Tämä ylimääräinen massa tulee hadronin muodostavien kvarkkien värivuorovaikutuksen sidosenergiasta. Lisäksi kvarkkien kytkentävakio $\alpha_s(s)$ kasvaa suureksi pienillä energioilla $E = \sqrt{s}$. Täten häiriöteoreettinen QCD (lyhenne pQCD, engl. perturbative quantum chromodynamics) ei suppene alle noin 2 GeV energioilla. Myonin $g - 2$ -laskuun ei vaikuta juurikaan baryonit (kuten protonit ja neutronit) suuren massan vuoksi, vaan suurin osa hadronisista korjauksista tulee mesoneista, jotka ovat hadronisia bosoneita.

Myonin hadronisiin $g-2$ -korjauksiin tarvitaan toki myös pienen energian QCD:ta, mistä itseasiassa tulee suurin osa korjauksesta. Koska häiriöteoreettinen tarkastelu ei toimi, käytetään semifenomenologista menetelmää²⁵. Tässä vakuumpolarisaatiodiagrammin (2.16) renormalisoitu kokonainen fotonipropagaattori avataan ja rajoitetaan hadronisiin vuorovaikutuksiin dispertiorelaation ja optisen teoreemaan avulla. Näiden avulla korjaus on suhteutetaan elektronin ja positronin annihilaation vaikutusalan kokeelliseen dataan. Menetelmä kehitettiin ennen nykyistä kvarkkimallia jo 1960-luvun lopussa [44, 45, 46].

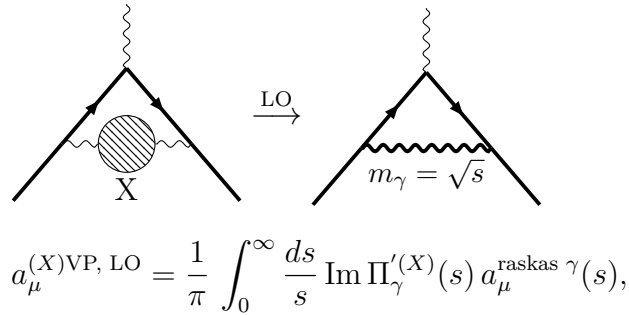
Tarkastellaan vakuumpolarisaation fotonin renormalisoidun kokonaisen propagaattorin (1.45) itseisenergiaa $\Pi'_{\gamma, \text{ren}}$. Itseisenergia on analyyttinen funktio, joten se

²⁵Toinen menetelmä on hila-QCD, jota käsitellään luvun lopussa.

toteuttaa dispersiorelaation²⁶ [27]

$$-\frac{\Pi'_{\gamma, \text{ren}}(k^2)}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im} \Pi'_\gamma(s) \frac{1}{k^2 - s}. \quad (2.17)$$

Dispersiorelaatiolla (2.17) pystytään selvittämään melko suoraviivaisesti alimman kertaluvun (lyhenne LO, engl. leading order) vakuumpolarisaatiokorjaus. Liikemäärästä k riippuva osa on vain viimeinen termi $\frac{1}{k^2 - s}$, joka antaa fotonipropaattorille massan \sqrt{s} . Saadaan [27]



$$a_\mu^{(X)\text{VP, LO}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im} \Pi'_\gamma(s) a_\mu^{\text{raskas } \gamma}(s),$$

missä raskaan fotonin korjaustermin lasku seuraa liitteen E Schwingerin korjaustermin laskua

$$a_\mu^{\text{raskas } \gamma}(s) = \frac{\alpha}{\pi} K_\mu(s) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (s/m_\mu^2)(1-x)}. \quad (2.18)$$

Funktiota $K_\mu(s)$ kutsutaan QED:n kernelifunktioksi, ja selvästi $K_\mu(s=0) = \frac{1}{2}$ tulos vastaa Schwingerin korjaustermin tulosta. Alimman asteen vakuumpolarisaatiokorjaus voidaan kirjoittaa yleisesti [27]

$$a_\mu^{(X)\text{VP, LO}} = \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im} \Pi'_\gamma(s) K_\mu(s)$$

ilman, että korjaukseen X olisi käytetty häiriöteoriaa.

QED:ssa häiriöteorian avulla $\text{Im} \Pi'_\gamma(s)$ on melko suoraviivaista johtaa leptonisilmukan analyttiseksi tulokseksi [27]. Pienen energian hadronisissa vuorovaikutuksissa käytetään unitaarisuudesta seuraavaa optista teoreemaa, joka liittää propagaattorin imaginääriosan e^+e^- -annihilaation paljaaseen vaikutusalaan (engl. bare

²⁶Dispersiorelaation fotonin itseisenergian imaginaarinen osa $\text{Im} \Pi'_\gamma(s)$ on merkitty ilman renormalisointia, sillä renormalisointi vaikuttaa vain itseisenergian reaaliseen osaan.

cross section) σ^0 [27]. Suhdefunktion $R(s)$ määrittelyllä

$$R(s) := \sigma_{\text{tot}}^0(e^+e^- \rightarrow \text{mitä tahansa}) \Big/ \frac{4\pi\alpha^2}{3s},$$

optinen teoreema voidaan kirjoittaa

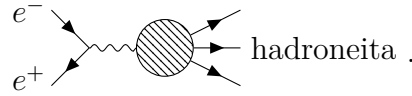
$$\text{Im } \Pi'_\gamma(s) = \frac{\alpha}{3} R(s).$$

Suhdefunktion energia \sqrt{s} vastaa hiukkasprosessin massakeskipisteen energiatasoa.

Rajoittamalla annihilaation vaikutusala hadronisiin lopputuotteisiin, saadaan rajoitettua vakuumpolarisaatio hadronisiin korjauksiin

$$R_{\text{had}}(s) = \sigma^0(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadronit}) \Big/ \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

Leptoneista hadroneihin päästään vain virtuaalisen fotonin kautta, joten verteksi $e^+e^- \rightarrow \gamma^*$ on aina mukana. Eli mukana on aina kaksi QED:n verteksiä



Yhdessä kaikki hadroniset vakuumpolarisaatiokorjaukset ovat [27, 4, 26]

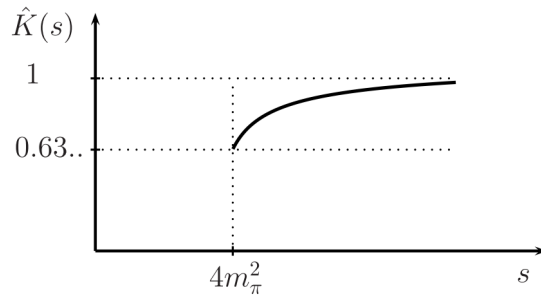
$$a_\mu^{\text{HVP, LO}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left[\int_{m_{\pi^0}^2}^{E_{\text{cut}}^2} \frac{ds}{s} R_{\text{had}}^{\text{data}}(s) K(s) + \int_{E_{\text{cut}}^2}^{\infty} \frac{ds}{s} R_{\text{had}}^{\text{pQCD}}(s) K(s) \right], \quad (2.19)$$

missä integraaleja kutsutaan dispersiointegraaleiksi. Korjaukset on jaettu pienen energian kokeellisen vaikutusalueen menetelmään ja häiriöteoreettiseen pQCD menetelmään. Pienen energian skaala alkaa kevyimmästä kanavasta $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ ja loppuu noin $E_{\text{cut}} \simeq 2$ GeV energiaan, mistä häiriöteoreettinen pQCD tarkastelu voi jatkaa. Kernelifunktion integraali (2.18) voidaan ratkaista analyttisesti²⁷ muotoon

$$K(s) = \frac{x^2}{2}(2 - x^2) + \frac{(1 + x^2)(1 + x)^2}{x^2} \left(\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{1 + x}{1 - x} x^2 \ln x,$$

²⁷Kyseinen analyttinen ratkaisu pätee, kun $s > m_\mu^2$. Myoneille ja elektroneille muoto siten pätee koko integroimisvälillä $m_\pi^2 < s < E_{\text{cut}}$, koska $m_e^2 < m_\mu^2 < m_\pi^2 < s$.

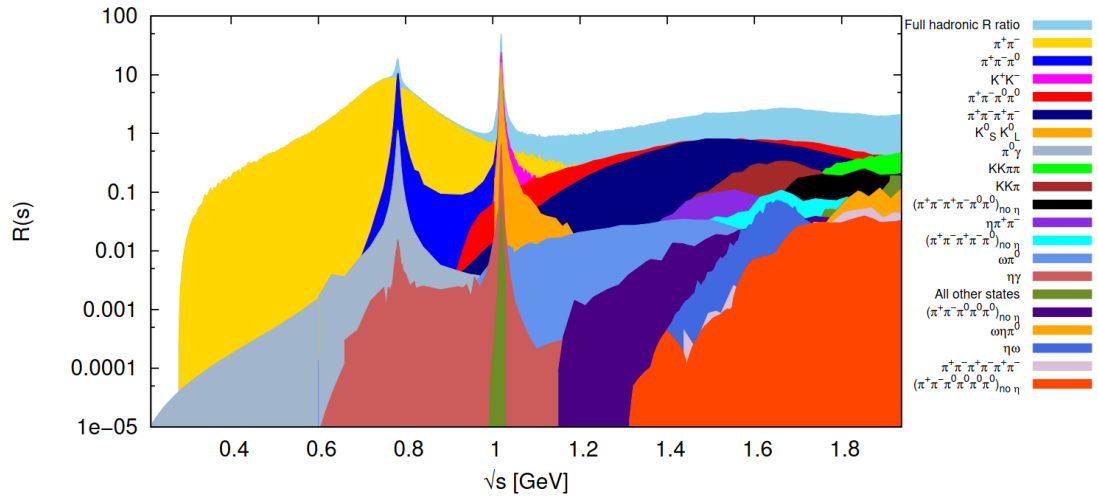
missä $x = \frac{1-\beta_\mu}{1+\beta_\mu}$ ja $\beta_\mu = \sqrt{1 - 4m_\mu^2/s}$. Kernelifunktio voidaan esittää myös muodossa $\hat{K}(s) = \frac{3s}{m_\mu^2} K(s)$, joka on hitaasti kasvava aidosti monotoninen funktio oleellisesta $\pi\pi$ -kanavasta alkaen. Funktion \hat{K} kuvaaja on esitetty kuvassa 11.



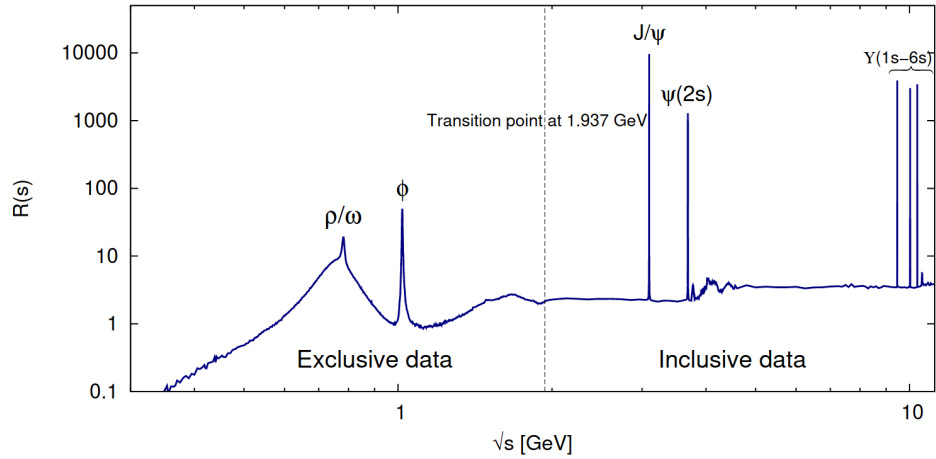
Kuva 11. Kernelifunktion \hat{K} aidosti kasvava asymptoottinen kuvaaja $\pi\pi$ -kanavasta alkaen. [27].

Painokertoimena toimivalla kernelifunktiolla \hat{K} on hyvä tarkastella dispersiointegraalin (2.19) integrandia, joka muuttuu $\propto 1/s^2$. Pienet energiat täten vahvistuvat $1/E^4$ kertoimella. Suhdefunktion R vaikutusalan lopputuotteet määrittävät kanavan, joka saa suuria arvoja uusien komposiittihadroneiden energiaskaaloilla. Tällöin virtuaalinen propagaattori saa suuria arvoja, ja ilmiötä kutsutaan resonanssiksi. Pienien energioiden resonanssit antavat siten suurimmat korjaukset. Suurin osa hadronisesta korjauksesta, noin 70 %, saadaan toiseksi kevyimmästä kanavasta $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, jolla on resonanssi $\pi^-\pi^+ \rightarrow \rho^0$ kohdassa $m_{\rho^0} \approx 0,77$ GeV. Saman energian alueella $m_\omega \approx 0,78$ GeV on myös mesonin ω resonanssi. Hieman ylempänä 1 GeV alueella on mesonin ϕ resonanssi.

Suhdefunktio $R(s)$ energian \sqrt{s} funktiona on esitelty kuvissa 12 ja 13. Ensimmäisessä näistä kanavia on tarkasteltu erikseen, missä näkee selvästi (keltaisen) kanavan $\pi^+\pi^-$ dominoinnin pienillä energioilla. Toisessa kanavien vaikutus on laskettu yhteen, ja siihen on merkitty resonanssihuippuja vastaavat komposiittihiukkaset. Lisäksi siinä on käytetty logaritmista energian akselia, jotta pQCD energioiden resonanssit näkyvät myös kuvaajassa.



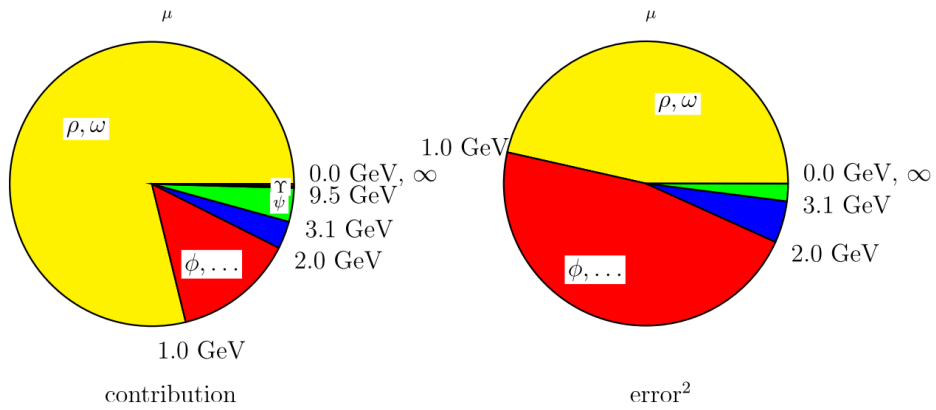
Kuva 12. Suhdefunktion $R(s)$ logaritmiset kuvaajat eri hadronisilla kanavilla pienen energian $m_{\pi^0} < \sqrt{s} < E_{cut}$ funktiona. Resonanssienergiat erottuvat kuvaajista piikkeinä, joista ensimmäinen vastaa ρ/ω mesoneita ja toinen ϕ mesonia. [47]



Kuva 13. Suhdefunktion $R(s)$ logaritminen kuvaaja logaritmisella energia-akselilla $m_{\pi} < \sqrt{s} < 10$ GeV. Resonanssienergioita vastaavat hiukkaset on nimetty, ja E_{cut} raja näkyy katkoviivalla. [47]

Pienten energioiden menetelmä perustuu siis kokeellisen vaikutusalan $e^+e^- \rightarrow$ hadronit -dataa hyödyntävään semifenomenologiseen menetelmään. Tähän oli hyvä keskittyä, sillä menetelmä eroaa häiriöteoreettisesta tarkastelusta, ja kuten edellä perusteltiin, suurin korjaus tulee pieniltä energioilta.

Energiatason 2 GeV jälkeen pQCD korjaa anomaalista g -tekijää yhtälön (2.19) mukaisesti. Lasku etenee samoin kuin häiriöteoreettisessä QED:ssa ja suhdefunktio $R(s)$ saadaan laskettua Feynmanin diagrammien avulla häiriöteoreettisesti. Kuten kuvassa 13 on esitetty $R(s)$ saa piikit seuraavien komposiittihadronien massojen kohdilla. Suhdefunktio ei kuitenkaan kasva merkittävästi ja siten integrandi (2.19) pienenee nopeasti $\propto 1/s^2$. Resonanssialueita vastaavien korjausten ja epävarmuuksien suuruudet on esitetty kuvassa 14.



Kuva 14. Eri resonanssien vertailua niiden a_μ^{HVP} korjausten (vasemmalla) ja epävarmuuksien (oikealla) suuruuksissa. [27]

Alimmasta (LO) kertaluvusta on suoraviivaista yleistää seuraavaan diagrammien kertalukuun NLO (engl. next-leading-order) ja sitä seuraavaan kertalukuun NNLO (engl. next-to-next-leading-order) häiriöteorian avulla. Vuoden 2020 Aoyama *et al.* julkaisu WP-2020 [4] yhdisti suuren määrän tutkimustuloksia ja arvio epävarmuudet

[4, 26]

$$\begin{cases} a_{\mu}^{\text{HVP, LO}} & = 6931(40) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\text{HVP, NLO}} & = -98,3(7) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\text{HVP, NNLO}} & = 12,4(1) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\text{HVP}} & = 6845(40) \times 10^{-11}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Epävarmuus tulee suurimmaksi osaksi systemaattisesta epävarmuudesta, mikä tulee vaikutusalan $e^+e^- \rightarrow$ hadronit -datasta. Kuten oikeanpuoleisesta kuvasta 14 nähdään, suurin epävarmuus tulee pienien energioiden resonanssien alueelta.

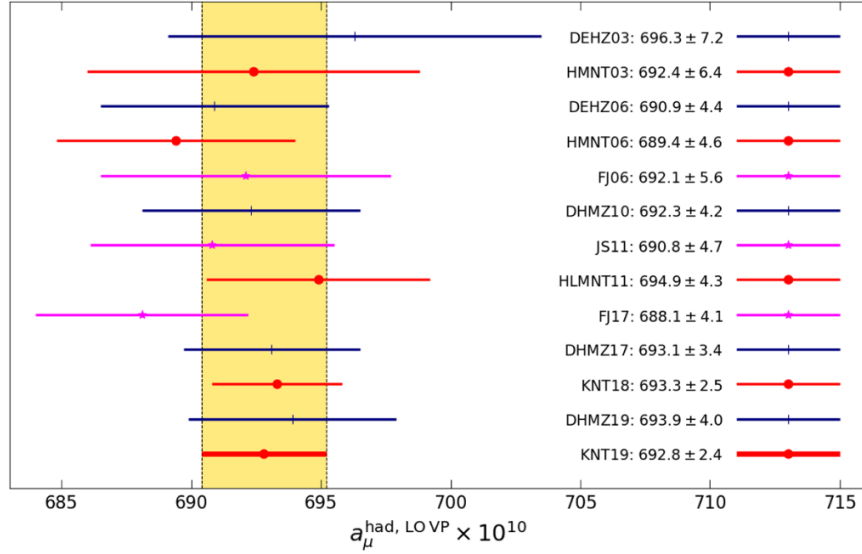
Monet tutkimusryhmät ovat saaneet yksin tarkempia tuloksia tällä fenomenologisella $e^+e^- \rightarrow$ hadronit -menetelmällä. Nämä kaikki samalla menetelmällä tehdyt tutkimukset ovat kuitenkin sopusoinnussa keskenään, kuten kuvasta 15 huomataan. Huomionarvoinen maininta on Keshavarzi *et al.* tekemä julkaisu [48] vuodelta 2020, missä alimman kertaluvun epävarmuus saatiin hyvin alhaiseksi. Tätä tutkimustulosta kutsutaan kirjottajien sukunimien ja tutkimusvuoden mukaan KNT-2019 [48]

$$a_{\mu}^{\text{HVP, LO}}(\text{KNT-2019}) = 6928(24) \times 10^{-11}. \quad (2.21)$$

Alimman kertaluvun semifenomenologisia $e^+e^- \rightarrow$ hadronit -tutkimustuloksia on verrattu kuvassa 15.

Edellä käsitelty semifenomenologinen menetelmä on saanut rinnalleen kilpailevan modernin menetelmän, joka voi mullistaa koko myonin $g - 2$ -ongelman. Hadronisia vakuumpolarisaatiokorjauksia on tutkittu viimeisen kymmenen vuoden sisällä aina menestyksekkäämmin laittamalla QCD:n teoria aika-avaruuden hilaan (lyhenne hila-QCD, engl. lattice QCD). Hilassa monet integraalit muuttuvat summiksi ja derivaatat erotusosamäärän matriiseiksi. Näin analyttiset ongelmat saadaan muutettua numeeriksi ja laskennalliksi ongelmiksi.

Hila-QCD:n leptoneiden vakuumpolarisaation korjaukset suoritetaan korrelaatiofunktioiden painotettuna integraalina yli Euklidisen avaruuden. Menetelmät ja



Kuva 15. Alimman kertaluvun semifenomenologisen $e^+e^- \rightarrow$ hadronit -vaikutusalan menetelmän vakuumpolarisaatiokorjausten vertailua kronologisessa järjestyksessä. Alimpana on KNT-2019 tutkimuksen [48] tulos (2.21), joihin muita tuloksia verrataan keltasella alueella. [48]

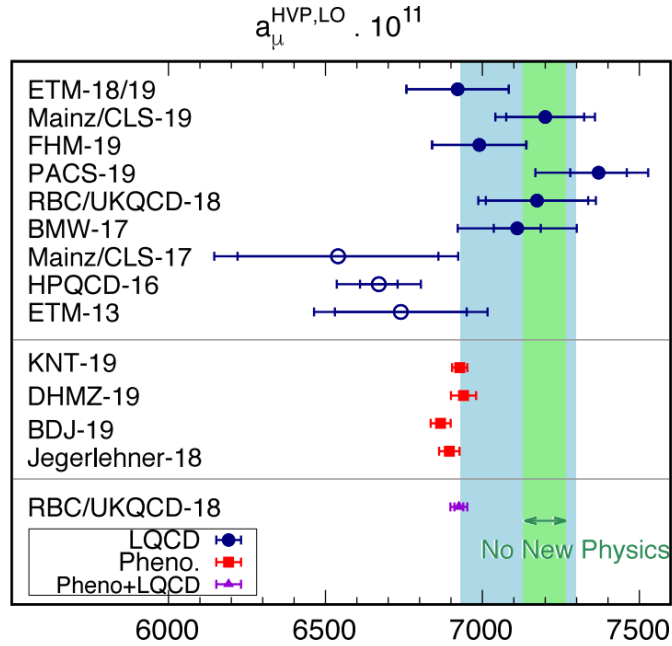
optimoinnit on selvitetty auki julkaisussa [4], eikä niitä käydä läpi tässä tutkielmassa. Hila-QCD:n antamien tulosten epätarkkuudet ovat vielä huomattavasti suurempia kuin semifenomenologisella menetelmän, mutta nykyään tulokset ovat kuitenkin jo verrattavissa. Epävarmuudet ja virheet ovat myös kovassa laskussa laskentatehon ja optimointien kehittyessä.

Hila-QCD on erityisen kiinnostava ja ajankohtainen tutkimuskohde myonin $g - 2$ -ongelmassa. Menetelmä ei tarvitse kokeellista vaikutusalan dataa, vaan se perustuu suoraan QCD:n teoriaan. WP-2020:n julkaisussa tehtiin meta-analyysi hila-QCD:n tuloksille vastaavasti kuin semifenomenologisillekin menetelmille ja tulokselle (2.20). Analyysissä otettiin huomioon kuvassa 16 esitetyt tummansinisellä värillä täytetyt tutkimukset [49, 50, 51, 52, 53, 54], joiden keskiarvoksi ja epävarmuudeksi arvioitiin [4]

$$a_\mu^{\text{HVP, LO}}(\text{hila-QCD, WP-2020}) = 7116(184) \times 10^{-11}. \quad (2.22)$$

Suuri epävarmuus johtuu suureksi osaksi siitä, että eri menetelmillä tehdyt julkaisut

eivät ole tuottaneet sopuisia tuloksia.



Kuva 16. Alimman kertaluvun $a_\mu^{\text{HVP, LO}}$ vertailua vuoteen 2020 mennessä [4]. Punaisella merkityt vastaavat semifenomenologisia tuloksia ja siniset hila-QCD tuloksia. Vaaleansininen alue on täytettyjen sinisten pisteiden [49, 50, 51, 52, 53, 54] hila-QCD-keskiarvon yhden keskihajonnan epävarmuusväli, joka on laskettu WP-2020 julkaisussa [4], ja esitetty yhtälössä (2.22). Ei-täytetyt siniset pisteet on arvioitu vanhentuneiksi tutkimustuloksiksi, jotka eivät ole enää merkittäviä. Vihreällä alueella teoreettinen tulos vastaa kokeellisia mittauksia [25] (ennen Fermilabin uusimpia vuoden 2021 tarkennuksia [5]). Kaaviossa ei ole mukana viimeisimpiä hila-QCD:n tuloksia, kuten BMW-2021 [6] ja LM-2020 [55].

Kiinnostavaa on, että hila-QCD:n korjaukset tuottavat pääasiassa suurempia korjauksia kuin semifenomenologinen menetelmä, mikä nähdään vertaamalla meta-artikkelin WP-2020 [4] tuloksia (2.20) ja (2.22)

$$a_\mu^{\text{HVP, LO}}(\text{fenom.}) = 6931(40) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{HVP, LO}}(\text{hila-QCD}) = 7116(184) \times 10^{-11}.$$

Tämä suurempi vakuumpolarisaatiokorjaus tuo teoreettisen- ja kokeellisen tuloksen eroa pienemmäksi.

Hila-QCD kehittyi kovaa vauhtia joka vuosi ja nähtäväksi jäi, mitä tuloksia se antaa myonin $g - 2$ -ongelmaan liittyen. Yksi uusi mainittavan arvoinen julkaisu, joka ei kerennyt WP-2020 meta-analyysiin [4], on BMW-2021 [6], joka arvioi hila-QCD mallillansa $a_\mu^{\text{HVP, LO}}$ korjauksen hyvin tarkasti

$$a_\mu^{\text{HVP, LO}}(\text{hila-QCD, BMW-2021}) = 7075(55) \times 10^{-11}. \quad (2.23)$$

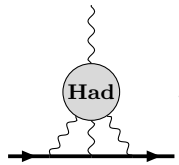
Hilamallia voidaan kuitenkin parantaa vielä monella tavalla. Spatiaalista hilavakiota pienentäessä ja hilaa kasvattamalla tulokset tarkentuvat ja raja-arvoilla päästään standardimalliin. Tämä vaatii toki enemmän lasketatehoa ja mallin optimointia. Tulevat hila-QCD:n tulokset lähemmäksi semifenomenologista tulosta tai kokeellista tulosta, ongelmaksi jää kuitenkin, mistä erot johtuvat. Näitä ongelmia pohditaan lisää luvussa 3.2, missä hila-QCD:ta pohditaan myonin $g - 2$ -ongelman ratkaisijana.

2.2.4 HLbL: hadroninen fotonifotoni-sironta

Keskitytään tässä luvussa hadronisten korjausten

$$a_\mu^{\text{Had}} = a_\mu^{\text{HVP}} + a_\mu^{\text{HLbL}}$$

jälkimmäiseen termiin eli fotonifotoni-sirontaan (lyhenne HLbL, engl. hadronic light-by-light interaction), joiden diagrammit ovat muotoa



Yllä oleva diagrammi on Furryn teoreeman (ks. sivu 47) mukaisesti alimman kertaluvun fotonifotoni-sirontan diagrammi, ja se tuottaa jo alustavasti $\mathcal{O}(\alpha^3)$ kertaluvun korjauksia. Kuitenkin, kuten jo QED-korjausten luvussa huomattiin, fotonifotoni-sironta voi tuottaa silti hyvin suuria korjaustermejä.

Fotoni–fotoni-sironta aiheuttaa myonin anomaaliseen g -tekjään standardimallin laskussa toiseksi suurimman epävarmuuden, heti hadronisen vakuumpolarisaation (HVP) jälkeen. Korjausten absoluuttinen epävarmuus, ja siten kiinnostavuus myonin $g - 2$ -ongelman kannalta, ei ole kuitenkaan samaa luokkaa kuin hadronisen vakuumpolarisaation tapauksessa, joten käsittely pidetään lyhempanä.

Samoin kuin hadronisessa vakuumpolarisaatiossa, väri vuorovaikutuksen häiriöteoria ei suppene alhaisilla energioilla. Monimutkaistavana erona edelliseen lukuun on kuitenkin se, että fotoni–fotoni-sironnan korjaukset tapahtuvat kahden fotonin sijaan neljän pisteen sironnan korrelaatiofunktiolla. Alhaisen energian QCD:n efektiivinen teoria on kiraalinen häiriöteoria²⁸ (lyhenne ChPT, engl. chiral perturbation theory), missä vuorovaikutuksien kiraalisymmetria on rikkoutunut spontaanisti. Fotoni–fotoni-sironnan korjauksia laskettaessa paljon tutkittu malli on ns. vektorimesonidominanssilla laajennettu kiraalisen häiriteorian malli RLA²⁹ (engl. Resonance Lagrangian Approach), missä alhaisen energian sarjakehitelmästä alkeishiukkasten vuorovaikutuksiin on otettu mukaan resonansseja dominoivia vektorimesoneita. Aloitetaan tarkastelemalla tätä mallia, ja siirrytään vähitellen nykyisiin tarkennuksiin ja menetelmiin.

Tarkasteltavana on siis fotoni–fotoni-sironnan neljän pisteen hadroninen korrelaatiofunktio $\Pi_{\mu\nu\alpha\beta}$, joka vastaa hiukkasprosesseja $\gamma\gamma \rightarrow \text{hadronit} \rightarrow \gamma\gamma$. Korrelaatiofunktion kolme neljästä fotonijalasta ovat virtuaalisia fotoneita, ja ne integroidaan yli neliliikemääräavaruuksien. RLA-malliin kuuluu yksittäisiä efektiivisiä kiraalisuussymmetriaa rikkovia γ^5 kytkennän vuorovaikutusverteksensä, esimerkiksi $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0$. Näitä on kuitenkin prosesseissa $\gamma\gamma \rightarrow \text{hadronit} \rightarrow \gamma\gamma$ aina parillinen määrä, joten vektorimesoneiden dominanssista huolimatta QCD:sta ja QED:sta koostuvat hadroniset korjaukset säilyttävät silti kiraalisuussymmetriansa. [27]

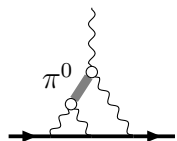
²⁸Kiraalista häiriöteoriaa käsitellään Leutwylerin kirjassa [56].

²⁹RLA-teoriaa käsitellään julkaisuissa Ecker *et al.* [57, 58, 59], ja sitä sovelletaan myonin anomaalisen g -tekijän laskemiseen Jegerlehnerin julkaisussa [27].

Suurimmat korjaustermit saadaan energia-alueelta 100 – 1000 MeV, joissa resonioivat pseudoskalaarit π^0 ($m_{\pi^0} \approx 135$ MeV), η ($m_{\eta} \approx 548$ MeV) ja η' ($m_{\eta'} \approx 958$ MeV) [26]. Myoniin ($m_{\mu} \approx 106$ MeV) verrattuna massiiviset η ja η' korjaavat suuresti. Näitä vuorovaikutuksia kuvaa RLA-teorian Wessin-Zuminon-Wittenin efektiivinen Lagrangen tiheys [27]

$$L_{\text{WZW}} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{N_c}{12F_{\pi}} \left(\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_8 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\eta_0 \right) \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

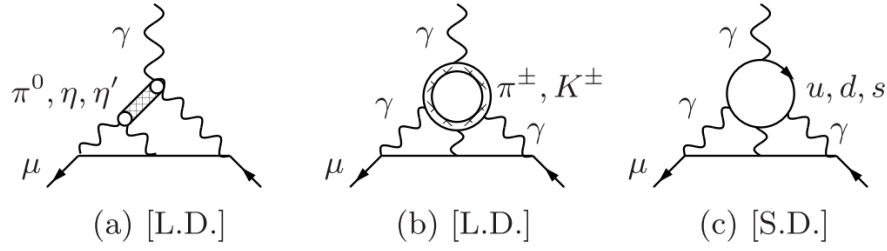
joka on liikemäärän $O(p^4)$ sarjakehitelmä QCD:n teoriasta. Lagrangen tiheydessä termi N_c kuvaa Yangin-Millsin symmetriaryhmän $SU(N_c)$ esityksen astetta (kvarkeille $N_c = 3$), $F_{\pi} = 92,4$ MeV on pionin hajoamisvakio ja pseudoskalaarit η_8 ja η_0 sekoittuvat fysikaalisiksi tiloiksi η ja η' . Suurin yksittäinen korjaus tulee alimman kertaluvun π^0 -diagrammista [27]



$$a^{[3]\text{HLbL}}(\pi^0) = \left[\frac{N_c^2}{48\pi^2} \frac{m_{\mu}^2}{F_{\pi}^2} \ln^2 \frac{\Lambda}{m_{\mu}} + \dots \right] \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3.$$

Kuten yllä olevasta energian ylärajasta Λ riippuvasta termistä huomataan, kiraalinen häiriöteoria ei ole renormalisoituva teoria. Täten korjaustermi jää riippumaan energian ylärajasta Λ . Tämä on yksi oleellinen epävarmuuden aiheuttaja RLA-teoriassa.

Hadronisten fotonifotoni-sironnan erilaisten korjaustermien laskeminen jaetaan moneen eri osaan, joita lasketaan eri malleilla. Alhaisen energian ja pitkien välimatkojen vuorovaikutuksien mallina käytetään edellä kuvailtua kiraalista häiriöteoriaa ChPT. Riittävän suurilla energioilla (yleensä rajana Λ käytetään arvoa väliltä 1 – 2 GeV) ja lyhyillä välimatkoilla voidaan käyttää väri vuorovaikutuksen asympotoottisen vapauden vuoksi häiriöteoriaa [27, 4]. Edellä mainittujen pseudoskalaarien π^0 , η ja η' lisäksi suuria korjauksia aiheuttavat myös muut pionit, K -silmukat lyhyen spatiaalisen etäisyyden u , d ja s kvarkkien silmukat. Oleellisimmat alimman kertaluvun diagrammit on esitetty kuvassa 17, ja korjaustermien suuruudet taulukossa III.



Kuva 17. Hadronisen fotonifotoni-sironnan oleelliset alimman kertaluvun diagrammit. Diagrammit (a) ja (b) ovat kiraalisen häiriöteorian alhaisen energian $p \leq \Lambda$ ja suuren välimatkan L.D. (engl. long distance) korjausdiagrammeja, kun taas diagrammi (c) on lyhyen välimatkan, $p \geq \Lambda$, häiriöteoreettinen korjausdiagrammi. [27].

Ongelmana täysin teoreettisissa efektiivisissä malleissa on se, että mallien approksimaatiot ja monen mallin yhdistäminen luovat suuren epävarmuuden anomaalisen g -korjauksen suuruuteen. Vuodesta 2014 lähtien kokeelliseen dataan ja dispersiorelaatioon perustuvat menetelmät ovat tarkentaneet tuloksia huomattavasti [4]. Uudet tarkentavat menetelmät perustuvat vakuumpolarisaatiokorjausten kaltaisesti dispersiorelaatioon ja kokeelliseen dataan. RLA-teoriaa on verrattu nykyisiin fenomenologialla tarkennettuihin tuloksiin taulukossa III.

Koska taulukossa III esiintyvä fenomenologinen tulos $a_\mu^{\text{HLbL}} = 92(19)$ on suhteellisesti hyvin epävarma tulos verrattuna vakuumpolarisaation korjaukseen, on hila-QCD ja sen tulokset fotonifotoni-sironnassa hyödyllisiä. Nykyään standardimallin fotonifotoni-sironnan anomaalisen g -tekijän korjaus perustuu metajulkaisun WP-2020 [4] analyysiin, missä yhdistetään fenomenologinen alimman kertaluvun tulos, seuraavien kertalukujen arvio ja hila-QCD:n tulos [60]. Tulokset ovat [4]

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_\mu^{\text{HLbL}}(\text{fenom.}) & = 92(19) \times 10^{-11} \\ a_\mu^{\text{HLbL, NLO}}(\text{fenom.}) & = 2(1) \times 10^{-11} \\ a_\mu^{\text{HLbL}}(\text{hila-QCD, } uds) & = 79(35) \times 10^{-11} \\ a_\mu^{\text{HLbL}}(\text{yhdessä}) & = 92(18) \times 10^{-11}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Taulukko III. Fotoni–fotoni-sironnan korjaustuloksien vertailu. Vasemmalla on vuoden 2009 RLA-teorialla lasketut tulokset [27], ja oikealla vuoden 2020 meta-analyysin [4] tulokset, missä tuloksia on tarkennettu fenomenologialla. Kaikki arvot on annettu yksiköissä 10^{-11} .

Korjaustermit	N/JN-2009 [27]	WP-2020 [4]
π^0, η, η -silmukat	99(16)	93,8(4,0)
π, K -silmukat	−19(13)	−16,4(2)
S -aallon $\pi\pi$ -uudelleensironta	−7(2)	−8(1)
skalaarit ja tensorit	-	−1(3)
akσιαaliset vektorit	22(5)	6(6)
u, d ja s -silmukat	21(3)	15(10)
c -silmukka	-	3(1)
yhteensä	116(39)	92(19)

2.2.5 Standardimallin myonin $g - 2$ -tulos

Luvun alussa standardimallin myonin anomaalisen g -tekijän korjaustermit jaettiin neljään eri kategoriaan: kvanttisähködynamiikan (QED) diagrammit, sähköheikon (EW) bosonin (W, Z tai H) sisältävät diagrammit, hadroninen vakuumpolarisaatio (HVP) ja hadroninen fotoni–fotoni-sironta (HLbL). Yhdistämällä tulokset (2.12), (2.15), (2.20) ja (2.24) saadaan myonin standardimallin $g - 2$ -tulos [4]

$$\begin{cases}
 a_{\mu}^{\text{QED}} &= 116\,584\,718,931(104) \times 10^{-11} \\
 a_{\mu}^{\text{EW}} &= 153,6(1,0) \times 10^{-11} \\
 a_{\mu}^{\text{HVP}} &= 6845(40) \times 10^{-11} \\
 a_{\mu}^{\text{HLbL}} &= 92(18) \times 10^{-11} \\
 a_{\mu}^{\text{SM}} &= a_{\mu}^{\text{QED}} + a_{\mu}^{\text{EW}} + a_{\mu}^{\text{HVP}} + a_{\mu}^{\text{HLbL}} \\
 &= 116\,591\,810(43) \times 10^{-11} \quad (0,37 \text{ ppm}).
 \end{cases} \quad (2.25)$$

Kvanttisähködynamiikan korjaus on suurin, sekä se on absoluuttisesti ja suhteel-

lisesti tarkin tulos. Toiseksi suurin korjaus tulee hadronisesta vakuumpolarisaatiosta, missä absoluuttinen epävarmuus on suurin. Tämän vuoksi hadroninen vakuumpolarisaatio ja erityisesti sen alimman kertaluvun korjaus on myonin $g - 2$ -ongelman kannalta erityisen kiinnostava. Sähköheikko korjaus saatiin Higgsin bosonin massan mittausten jälkeen selvitettyä tarkasti. Hadroninen fotonifotoni-sironta tiedetään suhteellisesti epävarmasti, mutta fotonifotoni-sironta on $\propto \alpha^3$, joka tuo korjauksen absoluuttista epävarmuutta pienemmäksi. Myonin $g - 2$ -ongelman kannalta mielenkiintoisimmat teoreettiset tutkimuskohteet ovat alhaisen energian ja alimman kertaluvun hadroniset korjaukset, joita pyritään laskemaan monilla uusilla menetelmillä, kuten hila-QCD:n avulla.

2.3 Kokeelliset mittaukset

Myonin suhteellisen pitkä keskimääräinen elinaika $2,2 \mu\text{s}$ mahdollistaa magneettisen momentin tarkan mittauksen verrattuna leptoniin tau, jonka keskimääräinen elinaika on vain $0,29 \text{ ps}$ [26]. Tässä luvussa esitellään lyhyesti historialliset sekä nykyaikaiset mittaukset. Käsittelyssä pääpaino on mittaustaitteistojen yksityiskohtien sijaan anomaalisen g -tekijän mittausten menetelmän teoriassa ja tulosten tarkastelussa.

Kaikki myonin g -tekijän mittausten menetelmät perustuvat pioneiden π^- tai π^+ tuottamiseen, jotka hajoavat heikon vuorovaikutuksen kautta (ns. heikko hajoaminen) myoneiksi

$$\pi^\mp \rightarrow \mu^\mp + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu), \quad (2.26)$$

joiden spin on korkeasti polarisoitunut myoneiden liikemäärän suuntaan. Myoneille aiheutetaan homogeenisen magneettikentän avulla spin-vektoria kääntävä g -tekijään verrannollinen Larmorin prekession kulmanopeuteen (F.2)

$$\boldsymbol{\omega}_L = -g \frac{q}{2m} \mathbf{B},$$

joka on johdettu liitteessä F. Homogeenisessa magneettikentässä varatut myonit saavat Lorentzin voimalain mukaisen kiertoliikkeen. Tällöin hiukkasen lepokoordinaatisto liikkuu laboratoriokoordinaateissa nopeudella ja kiihtyvyydellä $\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{v}}$, ja erityisen suhteellisuusteorian mukaisesti tämä koordinaatisto kiertyy ajassa. Tätä koordinaatistojen kiertymistä ajassa kutsutaan Thomasin prekessioksi, jonka kulmanopeus on (G.2)

$$\boldsymbol{\omega}_T = \left(\frac{\gamma - 1}{v^2} \right) \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v},$$

ja se on käsitelty ja johdettu liitteessä G. Thomasin prekessio on huomioitava relativistisilla nopeuksilla.

Myonit (μ^- tai μ^+) hajoavat lopulta heikon vuorovaikutuksen kautta elektroneiksi

$$\mu^\mp \rightarrow e^\mp + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \bar{\nu}_e(\nu_e), \quad (2.27)$$

ja elektronit, joihin on tallentunut myoneiden spin-vektorin suunta hajoamishetkellä, mitataan kalorimetri-ilmaisimilla. Spinin suunnan mittauksesta selviää spinprekession kulmanopeus ja siten anomaalinen g -tekijä. Moderneihin kokeellisiin menetelmiin ja niiden yksityiskohtiin mennään aliluvussa 2.3.2.

2.3.1 Historialliset mittaustulokset

Myonin löydettiin ensimmäisen kerran kosmisten säteiden tutkimuksessa 1936 [61], ja sen olemassaolo vahvistettiin sumukammiokokeessa [62] vuonna 1937. Sen havaittiin olevan varattu hiukkanen, joka on massaltaan elektronin ja protonin väliltä.

Kun myonin g -tekijän ensimmäisiä alkeellisia mittauksia tehtiin Nevisin syklotronilla vuosina 1957–1960 [63, 64], myoni oli vielä hyvin tuntematon hiukkanen. Vuoden 1957 julkaisussa [63] havaittiin myonin hajoamisen rikkovan kiraalista symmetriaa, ja myonin μ^+ g -tekijälle saatiin Diracin yhtälön $g = 2$ -tuloksen kanssa

yhtäpitävä mitta

$$g_\mu = 2,00 \pm 0,10.$$

Vuonna 1960 Nevisin syklotronilla [64] mitattiin tarkempi tulos

$$a_\mu = 0,00122(8),$$

jota tarkennettiin Cernin ensimmäisillä mittauksilla vuonna 1961 [65]

$$a_\mu = 0,001145(22).$$

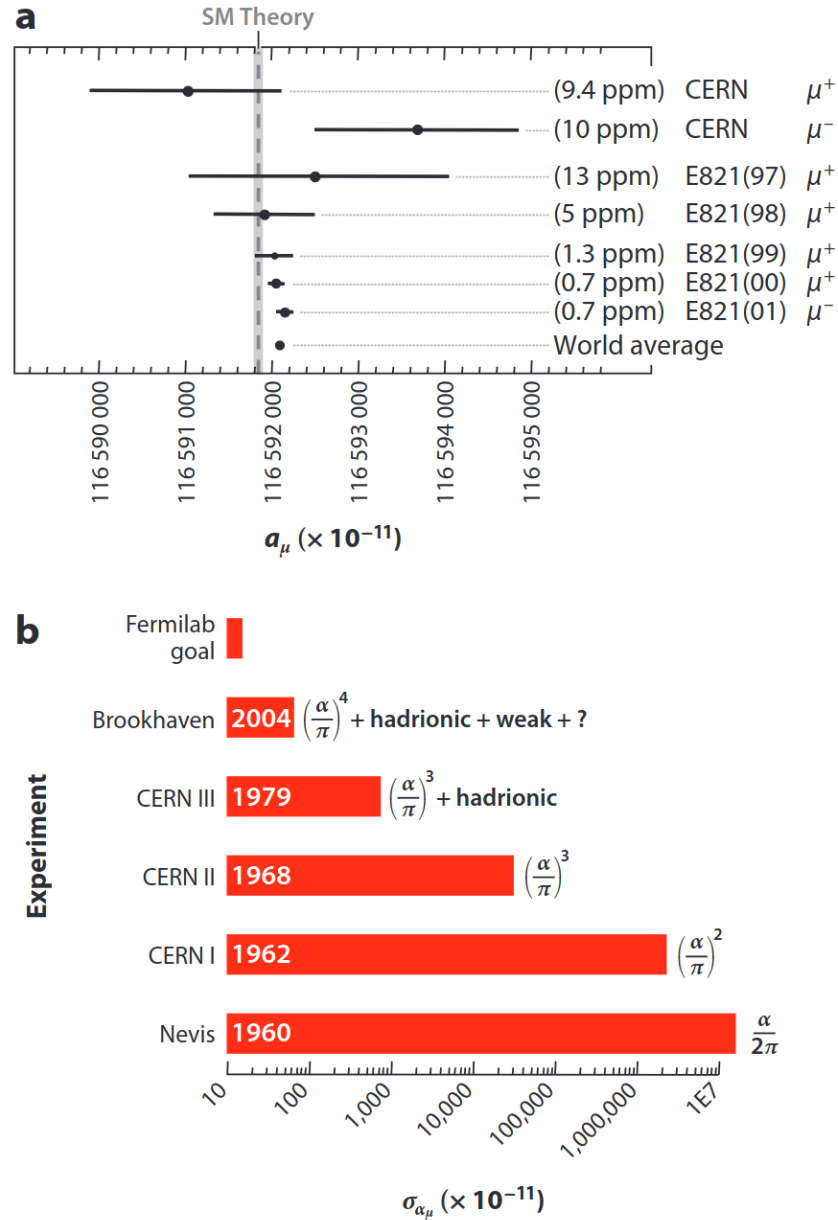
Koska nämä tulokset sopivat yhteen elektronin ensimmäisen (Schwingerin) korjaustermin $a_\mu \sim \frac{\alpha}{2\pi} = 0,00116\dots$ kanssa, pääteltiin myonin käyttäytyvän kuten raskas elektroni.

Vuosina 1961–1979 Cernissä tehtiin kolme myonin g -tekijän mittaushanketta [65, 66, 67], joita on analysoitu vuoden 1981 yhteenvetöjulkaisussa [68]. Koemethodien kehittyessä synkrotroneista siirryttiin magneettisiin varastorenkaisiin, johon pionit ohjattiin. Lisäksi hiukkasten ratoja varastorenkaassa alettiin vertikaalisesti keskittämään sähkökenttien avulla, jota tehdään edelleen nykypäivän kokeissa [69]. Kolmannessa mittaushanketissa vuonna 1979 julkaistiin tulokset [67, 68]

$$a_{\mu^+} = 0,00116\,5911(11)$$

$$a_{\mu^-} = 0,00116\,5937(12),$$

jotka vastaavat mittaustarkkuudeltaan QED:n $\mathcal{O}(\alpha^3)$ korjaustermejä ja alimman kertaluokan hadronisia vakuumpolarisaatiokorjauksia. Cernin mittausten jälkeen merkittävimpiä tutkimushanketta ovat olleet Brookhaven National Laboratoryn E821 [25], sekä Fermilab National Accelerator Laboratoryn E989 [5], joihin paneudutaan seuraavassa aliluvussa. Kuvassa 18 on vertailtu anomaalisen g -tekijän kokeellisten tulosten historiallista kehitystä.



Kuva 18. Ylemmässä kuvassa on anomaalisen g -tekijän mittausten tarkentumista Cernin kolmannessa mittausprojektissa [67] ja Brookhavenin E821-projektissa [25], joita on teoreettiseen arvoon. Alemmassa kuvassa on verrattu mittaustulosten varianssin pienenemistä Nevisin laboratorion toisesta mittauksesta [64] alkaen. Tarkkuuksia on verrattu teoreettisten korjaustermien suuruuksiin. Kaaviot ovat vuoden 2012 julkaisusta [70].

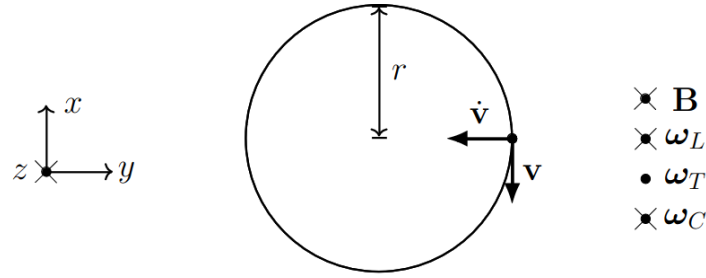
2.3.2 Modernit varastorengaskokeet: E821 ja E989

Myonin anomaalisen g -tekijän moderneihin kokeellisiin mittausprojekteihin laskeetaan Brookhavenin E821-projekti ja Fermilabin E989-projekti, sillä näihin mittauksiin perustuu nykyinen tarkin kokeellinen tulos. Brookhavenissa tehtiin viisi eri mittausta vuosina 1997–2001, ja lopullisen analyysin tulokset julkaistiin vuonna 2006 [25]. Fermilabin tutkimusprojekti on vielä käynnissä, ja vuonna 2021 julkaistiin ensimmäiset mittaustulokset [5].

Brookhavenin ja Fermilabin projektit vastaavat mittausmenetelmältään Cernin viimeisiä varastorengaskokeita. Uusi projekti on siis aina vain parantanut ja tarkentanut samaa menetelmää mittauslaitteistoihin liittyvillä parannuksilla. Lyhyesti kerrottuna Brookhavenin projektiin valmistettiin parempi varastorengas, ja Fermilabin hiukkaskiihdyttimellä saatiin intensiivisempi myonisäde. Käydään ensin läpi yleisesti varastorengaskokkeisiin perustuva mittausmenetelmä, jonka jälkeen mennään tarkemmin yksittäisiin projekteihin ja niiden parannuksiin.

Kuten luvun alussa mainittiin, kaikki myonin anomaalisen g -tekijän mittaukset, myös modernit varastorengaskokeet, perustuvat mitattavaan ilmiöön, missä homogeenisessa magneettikentässä varattujen spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkasten spin-vektori lähtee prekessoimaan g -tekijään verrannollisella Larmorin prekession kulmanopeudella (F.2) (ks. liite F). Varastorengassa myonit kokevat homogeenisen magneettikentän kuvan 19 systeemin mukaisesti. Lorentzin voima aiheuttaa liikkuvien varattujen hiukkasten ympyräliikkeen, jonka rata keskitetään vertikaalisesti sähkökentän avulla [69]. Thomasin prekession kulmanopeus (G.2) (ks. liite G) on helppo selvittää ympyräliikkeessä liikkuvalla hiukkasella.

Kuvan 19 varastorengassysteemin hiukkasen ympyräliikkeen kulmanopeus ω_C , Larmorin prekession kulmanopeus ω_L ja Thomasin prekession kulmanopeus ω_T on selvitetty liitteessä H: *Spin-prekessio varastorengaskokeessa*. Oleellinen tarkasteleva suure on laboratoriokoordinaatiston spin-prekession kulmanopeuden $\omega_S = \omega_L + \omega_T$



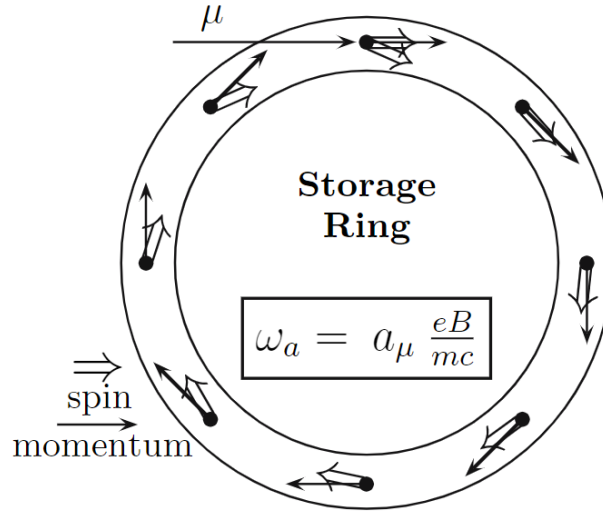
Kuva 19. Varastorengaskoe, jota käytetään myonin spin-prekession ja siten anomaalisen g -tekijän mittaukseen. Ristillä merkityt vektorit ovat positiivisen z -akselin suuntaan. Kuvassa magneettikentän suunta on valittu siten, että varaus $q = -e$ varastoituu ympyräliikkeeseen renkaaseen.

erotus ympyräliikkeen kulmanopeudesta ω_C . Vaikka kaikki kulmanopeudet yksitään riippuvat magneettikentän lisäksi sähkökentästä³⁰, valitsemalla myonille sopiva tangenttinopeus (ns. taikaliikemäärä), saadaan sähkökenttätermin $\propto \mathbf{v} \times \mathbf{E}$ riippuvuus katoamaan liitteessä H johdetun yhtälön (H.7) mukaisesti [71, 69, 5]

$$\begin{aligned} \omega_a &:= \omega_S - \omega_C \\ &= -\frac{q}{m} \left[a_\mu \mathbf{B} - \left(a_\mu + \frac{1}{1 - \gamma^2} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right]^{p \approx 3,09 \text{ GeV}} \\ &\simeq -a_\mu \frac{q}{m} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Taikaliikemäärän valinnalla $p_{\text{magic}} \approx 3,09 \text{ GeV}$ ($\gamma_{\text{magic}} \approx 29,3$) hiukkasen tangenttinopeus noin 99,94 % valonnopeudesta, ja relativistisen Thomasin prekessio on jo merkittävä. Erotus on suoraan verrannollinen anomaaliseen g -tekijään (eikä g -tekijään kuten Larmorin prekession kulmanopeus). Jos anomaalinen g -tekijä olisi tasan nolla Diracin yhtälön mukaisesti, spin-vektori ja liikemäärävektori prekessoisivat samalla taajuudella. Kuvassa 20 on esitetty mittausten menetelmä spin- ja liikemäärävektoreiden suuntien vertailuna. Tulokseen (H.7) viitataan usein vuoden 1959

³⁰Myös Larmorin prekession kulmanopeus jää riippumaan sähkökentästä, koska hiukkanen kokee laboratoriokoordinaatiston sähkökentän lepokoordinaatistossaan osittain magneettikenttänä Lorentzin muunnosten mukaisesti.



Kuva 20. Myonisäde on aluksi hyvin spin-polarisoitunut liikemäärän suuntaisesti. Taikaliikemäärällä $p_{\text{magic}} \approx 3,09$ GeV myoneiden spin-prekession ja ympyräliikkeen kulmanopeuksien erotus $\omega_a = \omega_S - \omega_C$ on suoraan verrannollinen myonin anomaaliseen g -tekijään a_μ . [20]

artikkelin [71] avulla, eikä laskua esitetä eksplisiittisesti. Liitteen H lasku vahvistaa tuloksen (H.7).

Ongelmana yhtälössä (H.7) $\omega_a \simeq -a \frac{q}{m} \mathbf{B}$ on magneettikentän \mathbf{B} ja suhteen q/m tarkka selvitys. Nämä ongelmat ratkaistaan kartoittamalla laboratorikoordinaatistossa varastorenkaan sisäinen magneettikenttä tekemällä protoneiden magneettisen resonanssin NMR-mittaus (engl. nuclear magnetic resonance) varastorenkaassa. Varastorengaskokeissa mitataan lopulta suhdetta ω_p/ω_a , missä protonin Larmorin prekession kulmanopeus (F.2)

$$\omega_p = \omega_L(\text{protoni}) = g_p \frac{e}{2m_p} \mathbf{B} \quad (2.28)$$

kartoitetaan NMR-mittauksella samassa magneettikentässä, missä mitataan myonin (μ^+ tai μ^-) suhteellisen spin-prekession kulmanopeutta ω_a . Määritellään yhtälöiden

(H.7) ja (2.28) avulla suureet

$$\begin{cases} \omega_a := |\boldsymbol{\omega}_a| = a_\mu \frac{e}{m_\mu} |\mathbf{B}| \\ \omega_p := |\boldsymbol{\omega}_p| = g_p \frac{e}{2m_p} |\mathbf{B}| \end{cases} \implies \mathcal{R} := \omega_a / \omega_p = \frac{2m_p}{g_p m_\mu} a_\mu,$$

$$\begin{cases} \gamma_{\mu^+} = g_\mu \frac{e}{2m_\mu} \\ \gamma_p = g_p \frac{e}{2m_p} \end{cases} \implies \lambda_+ := \gamma_{\mu^+} / \gamma_p = \frac{2m_p}{g_p m_\mu} (1 + a_\mu),$$

missä symbolilla γ tarkoitetaan hiukkasen spinin magneettisen momentin gyromagneettista suhdetta (1.4). Näiden avulla saadaan kokeellisten mittausten kannalta oleellinen yhtälö [69]

$$a_\mu = \frac{a_\mu}{(1 + a_\mu) - a_\mu} = \frac{\frac{2m_p}{g_p m_\mu} a_\mu}{\frac{2m_p}{g_p m_\mu} (1 + a_\mu) - \frac{2m_p}{g_p m_\mu} a_\mu} = \frac{\mathcal{R}}{\lambda_+ - \mathcal{R}}, \quad (2.29)$$

missä suhde \mathcal{R} saadaan mitattua varastorengaskokeella, ja suhde λ_+ on selvitetty hyvin tarkkaan myoniumatomin³¹ μ^+e^- hyperhienorakennemittausten avulla [72]. Kun yhtälöä (2.29) käytetään myoneille μ^+ ja μ^- , oletetaan standardimallin CPT -invarianssi, josta saadaan $a_{\mu^+} = a_{\mu^-}$ ja $|\lambda_+| = |\lambda_-|$. Täten varastorengaskokeiden mittaustulosten \mathcal{R}_{μ^+} ja \mathcal{R}_{μ^-} vertailu antaa myös CPT -testin teorialle.

Cernin kolmannessa projektissa [67], Brookhavenin E821-projektissa [25] ja Fermilabin E989 [5] projektissa mittausslaitteiston yksityiskohdat eroavat, mitkä vaikuttavat kokeellisen tuloksen tarkkuuteen. Verrataan ensin parannuksia Cernin projektista Brookhavenin projektiin ja sitten Brookhavenin projektista Fermilabin projektiin.

Kaikissa mittauksissa kiihdytetään ensin protoneita hiukkaskiihdyttimessä. Protonisuihku osuu kohtioon (engl. target), mistä syntyy pioneita taikaliikemäärällä $p_{\text{magic}} \approx 3,09$ GeV. Nämä hajoavat liikemäärän suuntaan vahvasti spin-polarisoi-tuneiksi myoneiksi hajoamisprosessin (2.26) mukaisesti. Cernin projektissa pionit vapautuivat varastorengaaseen, mutta Brookhavenin (ja Fermilabin) kokeessa oli

³¹Myoniumatomi μ^+e^- on vetyatomin kaltainen sidottu tila, missä atomin ytimen tilalla on antimyoni μ^+ .

erillinen pioneiden hajoamiskanava kuvan 21 mukaisesti, ja vasta myonit ohjattiin varastorenkaaseen.

Kuvassa 22 on esitetty Brookhavenin ja Fermilabin mittauslaitteistojen havainnollistus, joka keskittyy varastorenkaaseen. Brookhavenin projektia varten valmistettiin laadukas noin 15 m halkaisijan varastorengas, jossa on hyvin uniformisen magneettikentän tuottava suprajohtava, $B \simeq 1,45$ T, sähkömagneetti. [69]

Brookhavenin vuosien 1997–2001 μ^- ja μ^+ mittauksista tehdyn ja vuonna 2006 julkaistun loppuanalyysin [25] tulos myonin anomaaliselle g -tekijälle oli

$$a_{\mu}^{\text{E821}} = 116\,592\,080(63) \times 10^{-11} \quad (0,54 \text{ ppm}). \quad (2.30)$$

Brookhavenin E821-projektin mittauksissa nähtiin ensimmäisen kerran, että teorian ja kokeellisten mittausten välillä on merkittävä ero.

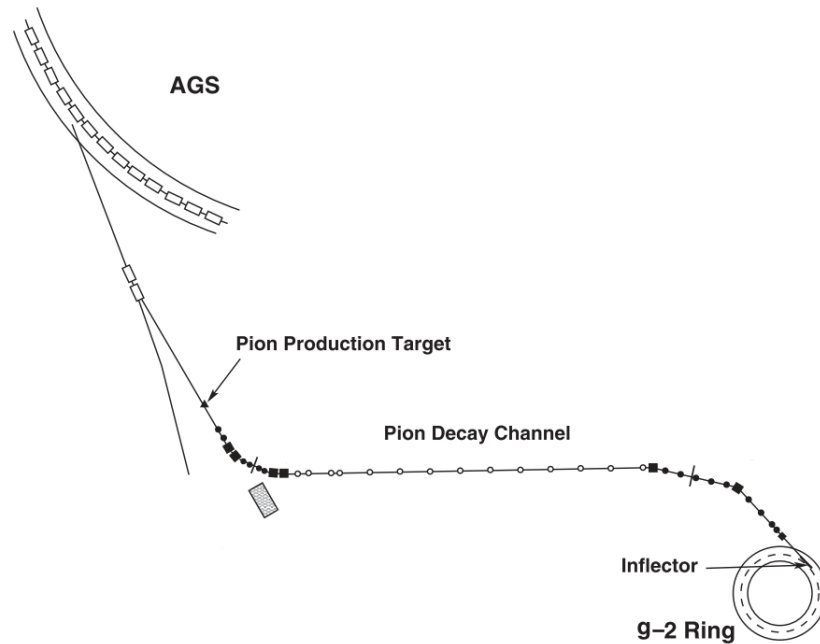
Fermilab osti ja kuljetti yli tuhat kilometriä laboratorioonsa Brookhavenin laboratorion varastorenkaan. Fermilabin mittauksissa käytetään siis täsmälleen samaa varastorengasta. Fermilabin E989-projektin oleellisimpia parannuksia E821-projektiin verrattuna on mm. intensiivisempi myonisuihku paremman kiihdytinjärjestelmän vuoksi. Varastorenkaan sisäisestä magneettikentästä on tehty 2,5 kertaa uniformimpi ja koko mittausjärjestelmää on parannettu monelta osin [69, 5]. Fermilabin ensimmäisessä myonin μ^+ mittauserästä julkistettiin vuonna 2021 tulos [5]

$$a_{\mu}^{\text{E989}} = 116\,592\,040(54) \times 10^{-11} \quad (0,46 \text{ ppm}). \quad (2.31)$$

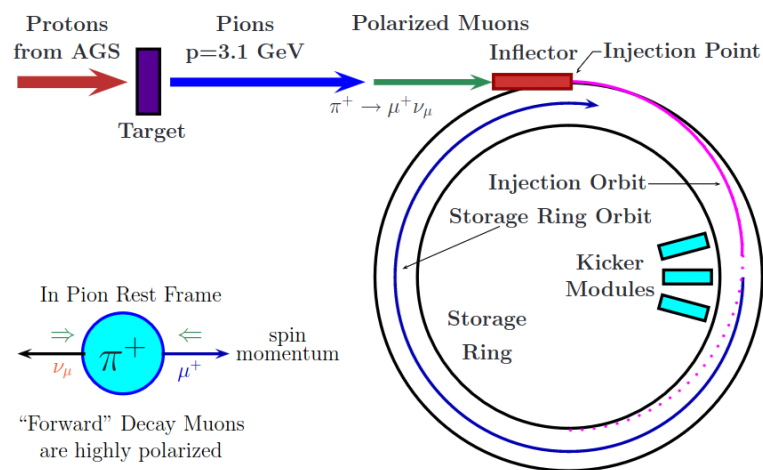
Yhdistämällä tämä tulos E821 tuloksen (2.30) kanssa, saadaan nykyinen ja tarkin kokeellinen tulos

$$a_{\mu}^{\text{E989+E821}} = 116\,592\,061(41) \times 10^{-11} \quad (0,35 \text{ ppm}). \quad (2.32)$$

Statistinen epävarmuus on tuloksissa huomattavasti suurempi kuin systemaattinen epävarmuus.



Kuva 21. Brookhavenin mittausjärjestelmä, missä vuorottelevan gradientin synkrotronilla (lyhenne AGS, engl. Alternating Gradient Synchrotron) kiihdytetyt protonit osuvat pioneita tuottavaan kohtioon. Pionit hajoavat kanavassa myoneiksi, jotka ohjataan varastorenkaaseen. [25]



Kuva 22. Brookhavenin laboratorion ja Fermilabin kokeiden mittauslaitteisto, missä taikaliikemäärän $p_{\text{magic}} \approx 3,09$ GeV pioneista hajonneet korkeasti liikemäärän suuntaan spin-polarisoituneet myonit kulkevat magneettiseen varastorenkaaseen. Varastorenkaassa myonit ohjataan sähkökenttien avulla stabiileille kiertoradoille, missä ne hajoavat lopulta elektroneiksi. [27]

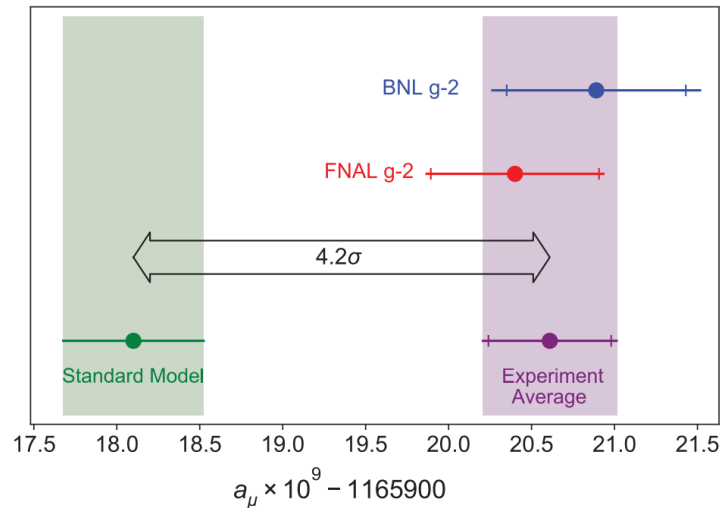
2.4 Teorian ja mittausten yhteensopivuus

Kootaan ja verrataan myonin anomaalisen g -tekijän nykyisiä teoreettisia ja kokeellisia tuloksia. Luvussa 2.2.5 koottiin yhteen standardimallista selvitetty tulos (2.25)

$$a_{\mu}^{\text{SM}} = 116\,591\,810(43) \times 10^{-11} \quad (0,37 \text{ ppm}),$$

joka pohjautuu WP-2020 meta-analyysiin [4]. Edellisessä luvussa selvitettiin Brookhavenin E821-projektin [25] mittausten ja Fermilabin E989-projektin ensimmäisten mittausten [5] perusteella kokeellinen yhteistulos (2.32) [5]

$$a_{\mu}^{\text{exp}} = a_{\mu}^{\text{E989+E821}} = 116\,592\,061(41) \times 10^{-11} \quad (0,35 \text{ ppm}).$$



Kuva 23. Myonin anomaalisen g -tekijän kokeellisten ja teoreettisen arvojen vertailu. Kokeelliset tulokset ylhäältä alas: Brookhavenin (BNL) E821 kokeellinen tulos (2.30), Fermilabin (FNAL) ensimmäinen tulos (2.31) ja näiden yhteistulos (2.32). Standardimallin tuloksena käytetään meta-analyysin WP-2020 tulosta (2.25). [5]

Teoreettinen tulos (2.25) ja kokeellinen tulos (2.32) eroavat toisistaan [5]

$$\Delta a_{\mu} := a_{\mu}^{\text{exp}} - a_{\mu}^{\text{SM}} = 251(59) \times 10^{-11}, \quad (2.33)$$

joka vastaa 4,2 keskihajonnan statistista eroavaisuutta. Kuten jo luvun alussa mainittiin, näin suuri statistinen poikkeama vastaisi todennäköisyyttä $1/75\,000$ olettaessa statistisen virheen noudattavan normaalijakaumaa. Tämä on myonin $g - 2$

-ongelma, jota on havainnollistettu kuvassa 23. Ero on niin suuri, että kokeita ja laskuja tarkentamalla viiden keskihajonnan rajapyykki, jota pidetään virallisena rajana tieteellisessä löydössä, voi tulla nopeasti vastaan. Tarkastelussa tulee kuitenkin muistaa, että sekä teoreettinen että kokeellinen arvo voivat muuttua merkittävästi muista syistä. Näitä syitä ja ratkaisuja myonin $g - 2$ -ongelmaan tarkastellaan seuraavassa luvussa.

3 Ratkaisut myonin $g - 2$ -ongelmaan

Tässä luvussa pohditaan erilaisia ratkaisuja luvussa 2.4 tarkasteltuun myonin $g - 2$ -ongelmaan, missä nykyinen teoreettinen ennustus (2.25) [4] ja kokeellinen mittaus-tulos (2.32) [5] eroavat toisistaan 4,2 keskihajontaa (2.33)

$$\Delta a_\mu := a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = 251(59) \times 10^{-11}.$$

Ratkaisuja ongelmaan lähdetään tarkastelemaan ensin kokeista, sitten standardimallin teoriasta ja lopuksi standardimallin ulkopuolelta.

3.1 Voiko kokeellinen tulos muuttua?

Nykyinen myonin anomaalisen g -tekijän mittaus perustuu Brookhavenin ja Fermilabin varastorengaskokeiden mittauksien yhteisanalyysin tulokseen (2.32) [5]

$$a_\mu^{\text{exp}} = 116\,592\,061(41) \times 10^{-11} \quad (0,35 \text{ ppm}).$$

Tarkastellaan tässä luvussa eri tapoja ja todennäköisyyksiä, että kokeellisen arvo muuttuisi merkittävästi kohti teoreettista arvoa. Toisin sanoen: voiko nykyisen kokeellisen arvon virheellisyys olla ratkaisu myonin $g - 2$ -ongelmaan? Aloitetaan tarkastelemalla nykyistä varastorengasmenetelmää, josta siirrytään tarkastelemaan tulevaisuuden projekteihin. Kiinnostavin on valmisteluvaiheessa oleva Japanin J-PARC mittausprojekti E34 [8].

Kuten jo luvussa 2.3 ja liitteessä H käsiteltiin, kaikki myonin nykyiset kokeelliset $g - 2$ -tulokset perustuvat korkean energian ($p_{\text{magic}} \approx 3,09 \text{ GeV}$) myoneiden spin-prekession mittaamiseen varastorengaskokeessa. Fermilabin projekti tarkensi Brookhavenin mittauksia, mutta mittausmenetelmä on sama, jopa täsmälleen samaa varastorengasta myöten. Kokeelliseen tulokseen on hyvä saada varmistus erityyppisestä mittauksesta, mikä saadaan J-PARC E34 -projektin myötä. Käydään lyhyesti läpi nykyiset mittausmenetelmät, ja se miten J-PARC E34 eroaa näistä.

Kerrataan ensin lyhyesti nykyinen kokeellinen menetelmä. Fermilabin ja Brookhavenin mittauksissa myonisäteen rata keskitetään sähkökentän avulla, ja sähkökentästä riippuva termi kumotaan nolaksi taikaliikemäärän $p_{\text{magic}} \approx 3,09 \text{ GeV}$ avulla (H.7)

$$\boldsymbol{\omega}_a = -\frac{q}{m} \left[a_\mu \mathbf{B} - \underbrace{\left(a_\mu + \frac{1}{1 - \gamma^2} \right)}_{=0} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right]^{p \approx 3,09 \text{ GeV}}.$$

Magneettikenttä kartoitetaan noin huoneenlämpöisen veden protoneiden magneettisella resonanssimittauksella (NMR-mittaus, engl. nuclear magnetic resonance), ja myonin $g - 2$ -tulos saadaan yhtälöstä (2.29)

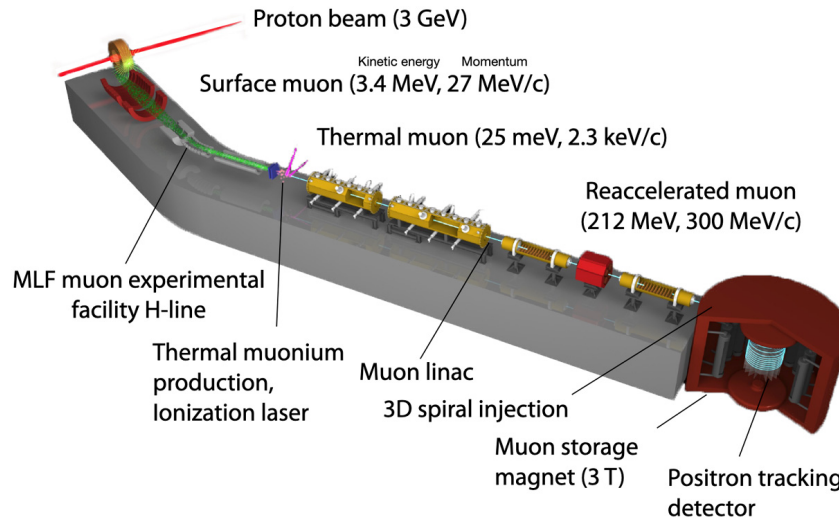
$$a_\mu = \frac{\omega_a/\omega_p}{\gamma_{\mu^+}/\gamma_p - \omega_a/\omega_p} = \frac{\mathcal{R}}{\lambda_+ - \mathcal{R}}.$$

Tästä nähdään, kuinka toinen osa kokeellisen tuloksen palapeliä on myonin μ^+ ja protonin p gyromagneettisten suhteiden suhde γ_{μ^+}/γ_p , joka saadaan myoniumatomien μ^+e^- hyperhienorakennemittauksista [72].

Japanin J-PARC E34 -projekti tuo uusia tekniikoita peliin. Koe suoritetaan huomattavasti alhaisemmilla liikemäärillä ja ilman sähkökentillä keskittämistä, mutta mittaustarkkuuden arvioidaan olevan nykyisten kokeiden luokkaa [7]. Mittauslaitteisto on esitetty kuvassa 24. Laitteistossa muodostetaan myonisäteen avulla myoniumatomeita, jotka ionisoidaan laserin avulla takaisin myoneiksi, keskitetään, ja kiihdytetään uudestaan varastorengasta varten. Myoniumatomeista hajonneita myoneita kutsutaan ultrakylmiksi, sillä niiden liikemäärä on vain 2,3 keV. Myonikiihdytin [73] on lineaarinen kiihdytin, missä myonit kiihdytetään 300 MeV liikemäärään. Suurta taikaliikemäärää $p_{\text{magic}} \approx 3,09 \text{ GeV}$ ei vaadita, koska varastorengasta ei ole keskittävää sähkökenttää. Prekessioyhtälöksi (H.7) saadaan nyt

$$\boldsymbol{\omega}_a = -\frac{q}{m} \left[a_\mu \mathbf{B} - \underbrace{\left(a_\mu + \frac{1}{1 - \gamma^2} \right)}_{=0} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right].$$

Myonit spin-pekessoivat vahvassa ($B \simeq 3 \text{ T}$) ja pienessä (70 cm halkaisijan) varastomagneetissa, jonka koko mahdollistaa uniformimman magneettikentän. Myonit hajoavat positroneiksi, joita pystytään jäljittämään, ja joiden spin mitataan. [7, 8]



Kuva 24. J-PARC E34 -projektin mittausrakenteisto. Ensin hiukkaskiihdyttimen protonit törmäytetään grafiittikohtioon, josta saadaan myonisäde. Myonit törmäytetään seuraavaksi myoniumatomeita muodostavaan kohtioon. Atomit ionisoidaan laserin avulla takaisin myoneiksi, jotka keskitetään, kiihdytetään ja ohjataan varastorenkaaseen. [7]

Sen lisäksi, että J-PARC tuo uudenlaisen mittausten menetelmän myonin anomaliselle g -tekijälle, projektiin kuuluu myös muita tärkeitä myonin ominaisuuksien mittaustuloksia. Myonin $g - 2$ -tuloksen kannalta yksi oleellinen koe on myoniumatomien spektrin hyperhienorakenteen mittaaminen [74]. Tämän avulla saadaan tarkistettua kokeelliseen tulokseen (2.29) tarvittava suhdeluku $\lambda_+ = \gamma_{\mu^+}/\gamma_p$. Ensimmäiset mittaukset [75] ovat vahvistaneet nykyisessä myonin kokeellisessä $g - 2$ -tuloksessa käytetyn mittaustuloksen [72], mutta mittauksia jatketaan ja tarkennetaan edelleen. Lisäksi J-PARC E34 -projektiin kuuluu myös isona osana myonin sähköisen dipolimomentin³² mittaaminen tarkemmin kuin koskaan aikaisemmin [7], ja tämän tuloksen avulla voitaisiin saada oleellista vihjettä standardimallin ulkopuolisesta fysiikasta.

³²Sähköinen dipolimomentti (lyhenne EDM, engl. electric dipole moment) on tähän mennessä oletettu nolaksi. Jos tätä oletusta ei tehdä, taikaliikemäärällä saadaan liitteen H yhtälöä (H.7) yleisempi prekessio [76, 7]

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{diff}} = -\frac{q}{m} \left[a_{\mu} \mathbf{B} + \frac{\eta}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] = \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_{\text{EDM}},$$

Voiko siis kokeellinen tulos muuttua merkittävästi kohti teoreettista arvoa, ja olla näin ratkaisu myonin $g - 2$ -ongelmaan? Fermilabin uusilla mittauksilla kokeellinen tulos todennäköisesti vain tarkentuu ja tilastollinen eroavaisuus vain kasvaa kohti viittä keskihajontaa. Näistä mittauksista tuskin löytyy ratkaisua ongelmaan, ellei menetelmästä löydetä yllättävää kokeellista virhettä. J-PARC E34 -projekti kuitenkin tuo kiinnostavaa näkökulmaa uudella mittaussuunnitelmallaan, ja sen tulokset tulevat olemaan erittäin kiinnostavia. Tällä hetkellä myonin kokeellinen $g - 2$ -arvo on vakaalla pohjalla, mutta J-PARC tekee tärkeän ristiintarkistuksen tulokselle. Projekti on tällä hetkellä kuitenkin vasta valmisteluvaiheessa [7]. Datankeruu on suunniteltu aloitettavaksi vuonna 2025, ja ensimmäisiä tuloksia suunnitellaan julkistettavaksi vuonna 2027 [7].

3.2 Voiko standardimallin tulos muuttua?

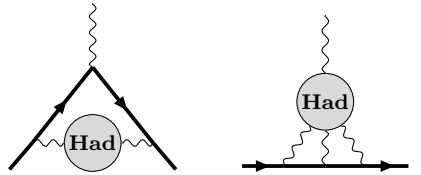
Nykyinen myonin anomaalisen g -tekijän standardimallin tulos perustuu meta-analyysin WP-2020 [4] tulokseen (2.25)

$$\begin{cases} a_{\mu}^{\text{QED}} &= 116\,584\,718,931(104) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\text{EW}} &= 153,6(1,0) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\text{HVP}} &= 6845(40) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\text{HLbL}} &= 92(18) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\text{SM}} &= a_{\mu}^{\text{QED}} + a_{\mu}^{\text{EW}} + a_{\mu}^{\text{HVP}} + a_{\mu}^{\text{HLbL}} \\ &= 116\,591\,810(43) \times 10^{-11} \quad (0,37 \text{ ppm}), \end{cases}$$

jonka korjaukset käsiteltiin erikseen luvussa 2.2, ja koottiin yhteen luvussa 2.2.5. Päinvastoin kuin edellisessä luvussa, tässä luvussa tarkastellaan eri tapoja ja todennäköisyyksiä, että standardimallista laskettu teoreettinen arvo muuttuisi merkittävästi. Lisätermi ω_{EDM} on ortogonaalinen magneettiseen spin-prekessioon ω_a nähden, ja siten kääntää tätä prekessioakselia.

kittävästi kohti kokeellista arvoa. Toisin sanoen: onko myonin anomaalinen g -tekijä askettu standardimallista väärin tai puutteellisesti, ja olisiko tässä ratkaisu myonin $g - 2$ -ongelmaan?

Koska QED ja EW korjaukset on laskettu hyvin tarkkaan, ainoa spekulointi kohde standardimallin sisällä on hadroniset vuorovaikutukset HVP ja HLbL, joiden diagrammit ovat



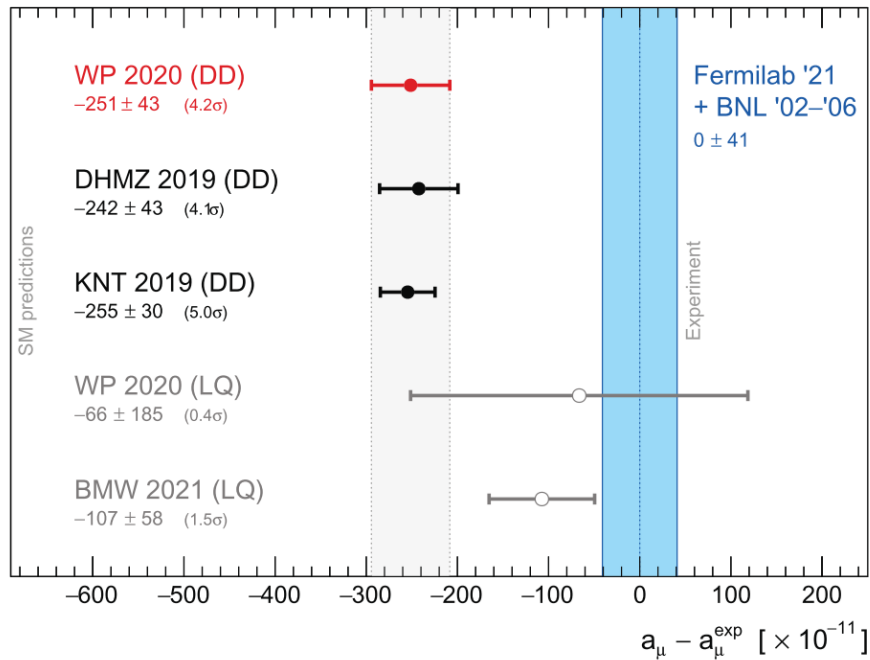
Erityisesti viimeisimmät hila-QCD:n tulokset herättävät huomion, sillä ne eivät tunnu olevan aivan sopusoinnussa perinteisten semifenomenologisten menetelmien tulosten kanssa.

Kuten luvussa 2.2.3 käsiteltiin, standardimallin suurin absoluuttinen epävarmuus tulee hadronisen vakuumpolarisaation korjauksen a_μ^{HVP} alimman kertaluokan diagrammityyppistä $a_\mu^{\text{HVP, LO}}$. Perinteinen ja nykyäänkin vielä selvästi tarkimpia tuloksia tuottava semifenomenologinen laskumenetelmä nojaa tuloksensa annihilaation $e^+e^- \rightarrow$ hadronit -vaikutusalan dataan, mistä saadaan (2.20)

$$a_\mu^{\text{HVP, LO}}(\text{fenom.}, \text{WP-2020}) = 6931(40) \times 10^{-11}.$$

Tämä on osa WP-2020 analyysin tulosta (2.25), ja kuvasta 15 nähdään, kuinka tämän menetelmän tulokset ovat keskenään hyvässä linjassa.

Kilpaileva laskentamenetelmä on luvussa 2.2.3 käsitelty hila-QCD, missä korjaus lasketaan suoraan teoriasta numeerisesti laittamalla aika- ja paikka-avaruus diskreettiin hilaan. Kattava semifenomenologisten ja hila-QCD:n $a_\mu^{\text{HVP, LO}}$ korjauksen vertailu esitettiin kuvan 16 kaaviossa, mutta hyvä yhteenveto viimeisimmistä tuloksista on esitetty Particle Data Groupin vuoden 2022 julkaisun [26] kuvan 25 kaaviossa. Kaaviossa näkyy WP-2020 meta-analyysin tulokset molemmille menetelmille, sekä yksittäisten tarkimpien tutkimuksien tulokset.



Kuva 25. Vertailukaavio $a_\mu^{\text{HVP, LO}}$ korjauksille, joita on verrattu Fermilabin kokeelliseen tulokseen (2.32) [5]. Ylin tulos on WP-2020 kokeelliseen $e^+e^- \rightarrow$ hadronit-dataan perustuvan (lyhenne DD = data driven) analyysin tulos (2.25) [4], johon on otettu huomioon mm. kaavion tutkimukset DHMZ-2019 [77] ja KNT-2019 (2.21) [48]. Näitä on verrattu WP-2020 analyysin hila-QCD:n (lyhenne LQ = lattice QCD) tulokseen (2.22) [4], sekä tämän hetken tarkimpaan yksittäiseen hila-QCD:n tulokseen BMW-2021 (2.23) [6]. [26]

Hila-QCD:n korjaustulokset antavat huomattavasti pienempiä eroavaisuuksia kokeellisen $g - 2$ -tuloksen kanssa, ja näin ongelma teorian ja mittausten eroavaisuuksissa ei näytä niin suurelta. Esimerkiksi käytettäessä $a_\mu^{\text{HVP, LO}}$ korjaukselle WP-2020 tuloksen (2.20) sijasta hila-QCD:n tulosta (2.23) [6]

$$a_\mu^{\text{HVP, LO}}(\text{hila-QCD, BMW-2021}) = 7075(55) \times 10^{-11},$$

saataisiin teorian ja kokeiden statistiseksi eroavaisuuseksi 4,2:n keskihajonnan sijasta vain 1,5 keskihajontaa.

Ennenkuin aletaan julistamaan kuitenkaan hila-QCD:n läpimurtoa, tulee huomioida muutama tärkeä asia. Ensinnäkin: vaikka hila-QCD on viimeisen kymmenen vuoden aikana kehittynyt merkittäväksi laskentamenetelmäksi $a_\mu^{\text{HVP, LO}}$ korjauksissa,

on se vielä hyvin epätarkka. Suuret epävarmuudet antavat pienen statistisen eron kokeelliseen mittaustulokseen (2.32) verrattuna. Toisekseen: eri hila-QCD-tutkimusten tulokset eivät ole johdonmukaisia keskenään. Tämä nähdään vertaamalla viimeaikaisten hila-QCD:n tulosten kuvan 16 kaavioita semifenomenologisten tulosten kuvan 15 kaavioon. Tuloksen näkyvät hyvin myös tämän luvun kuvan 25 yhteenvetokaaviossa, missä WP-2020 hila-QCD-tutkimusten yhteistuloksella on hyvin suuri epävarmuus, ja näin vain 0,4:n keskihajonnan eroavaisuus kokeelliseen tulokseen.

Vaikka hila-QCD:n tutkimustulokset ovat jo kiinnostavia, lisää tutkimuksia tarvitaan. Riippumatta vastauksesta, on kiinnostavaa seurata, mihin hila-QCD:n tulokset suppenevat tulevaisuudessa, kun menetelmää kehitetään mm. hilavakiota pienentämällä ja laskentatehoa kasvattamalla. Jos hila-QCD:n tulokset ratkaisevat myonin $g - 2$ -ongelman menemällä linjaan kokeellisen tuloksen kanssa, jää selvitettäväksi mysteeri, miksi semifenomenologiset tulokset eroavat näistä tuloksista. Toinen vaihtoehto on, että hila-QCD suppenee linjaan muiden teoreettisten menetelmien tulosten kanssa. Tällöin teorian tulokset olisivat johdonmukaisia, mutta silloin olisi vielä selkeämpää, ettei standardimalli ratkaise yksin myonin $g - 2$ -ongelmaa.

3.3 Ratkaisu standardimallin ulkopuolelta

Kuten edellisessä luvussa pohdittiin, standardimallin sisältä ei välttämättä löydy ratkaisua myonin anomaalisen g -tekijän ongelmaan. Kokeellisen tuloksen ja standardimallin ennustuksen välillä on 4,2:n keskihajonnan ero, ja tutkimusten edetessä statistinen ero saattaa vain kasvaa. Myoni on massansa vuoksi hyvin herkkä myös uudelle fysiikalle samoin kun se on herkkä standardimallin korkean kertaluvun korjauksillekin. Myonin $g - 2$ -ongelma on siis hyvin kiinnostava tutkimuskohde hypotettisille hiukkasille ja teorioille, joita ei ole pystytty vielä vahvistamaan. Tässä luvussa tarkastellaan muutamia eri laajennuksia standardimallille, joista voisi löytyä ratkaisu myonin $g - 2$ -ongelmaan.

Lakaistaan ensin pois alta ilmiselvä ratkaisvaihtoehto nykyisen fysiikan teorian sisältä, mutta standardimallin ulkopuolelta: Entä jos maapallon gravitaatiopotentiaali vaikuttaa myonin $g - 2$ -mittaustulokseen? Standardimallihan on rakennettu erityisen suhteellisuusteorian litteään aika-avaruuteen, eikä se ota huomioon yleisen suhteellisuusteorian ilmiöitä. Lyhyesti sanottuna ratkaisu tähän kysymykseen saadaan yleisen suhteellisuusteorian Einsteinin ekvivalenssiperiaatteesta. Visser [78] ja Nikolic [79] osoittivat ettei anomaalisen magneettisen magneettisen momentin mitaus voi riippua gravitaatiopotentiaalista. Tämä kumoo ratkaisuvaihtoehdon, jossa klassinen yleinen suhteellisuusteoria voisi antaa tarvittavan kontribuution myonin $g - 2$ -tulokselle.

Kiinnostava tutkimuskohde voisi olla kaarevien avaruuksien kvanttikenttäteoreettiset korjaustermit myonin anomaaliseen g -tekijään, joista saadaan mm. hiukastuottoa korjaustermeihin. Tällaista analyysiä ei tiedettävästi ole suoritettu. Kaarevan avaruuden kvanttikenttäteoreettiset efektit ovat kuitenkin näkyviä vasta hyvin kaarevassa ja dynaamisessa metriikassa, joten ratkaisua myonin $g - 2$ -ongelmaan nämä tuskin tuovat. Täten loppuluvussa keskitytään ns. uuden fysiikan ratkaisuihin standardimallin ja yleisen suhteellisuusteorian ulkopuolelta.

Uuden fysiikan teorian tulee sopia yhteen voimassa olevan fysiikaalisen teorian ja tulosten kanssa. Tämä antaa muutamia rajoituksia teorian laajennuksille. Luvun 1.4.2 mukaisesti leptoneiden anomaalinen magneettinen momentti saadaan kvanttisilmukoilla korjatun fotonivuorovaikutuksen efektiivisen Lagrangen tiheyden (1.61) termistä

$$\underbrace{\frac{e}{4m} F_2 \left(\frac{g^2}{m^2} \right)}_{\text{kytkentävakio}} \underbrace{\bar{\psi} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \psi}_{\text{kytkentä}},$$

missä $a_\mu \equiv F_2(0)$. Koska magneettisen dipolimomentin kytkennän dimensio on 5 ja kytkentävakion dimensio negatiivinen, anomaaliseen g -tekijään vaikuttavan laajennuksen on tultava puutason sijaan kvanttisilmukatasolta, jotta kvanttikenttäteoria renormalisoituu [80, 20]. Tyypilliset standardimallin laajennukset ennustavat

uusia hiukkasia, joiden virtuaaliset vuorovaikutukset kvanttisilmukkatasolla antaisivat puuttuvan kontribuution $\Delta a_\mu = 251(59) \times 10^{-11}$.

Tutkituimmat ratkaisut standardimallin ulkopuolelta ovat supersymmetriset teorit³³ (lyhenne SUSY), missä jokaiselle alkeishiukkaselle oletetaan puolen spinin päässä oleva ns. superpari (eli fermioneille supersymmetrinen bosoni ja päinvastoin), niin että Lagrangen tiheydestä tulee symmetrinen superparien välille. Laajennuksena standardimallille supersymmetriset teorit olettavat ainakin kaksinkertaisen määrän alkeishiukkasia, sillä standardimallissa ei ole sellaisenaan supersymmetrisiä hiukkaspereja.

Supersymmetrisiä teorioita motivoi mm. hierarkiaongelman³⁴ ratkaiseminen, sähköheikon ja vahvan vuorovaikutuksen yhdistyminen korkealla energialla ja pimeän aineen ongelman ratkaiseminen. Lisäksi supersymmetristä teoriaa motivoi matemaattisesti mittakenttäteorian selkeät symmetriaryhmät ja symmetria fermioneiden bosoneiden liikeyhtälöiden välillä.

Vuoden 2001 julkaisussa Czarnecki *et al.* [80] esitellään yleinen myonin anomaalisen g -tekijän supersymmetrinen kontribuutio

$$a_\mu^{\text{SUSY}} \sim \pm 130 \times 10^{-11} \cdot \left(\frac{100 \text{ GeV}}{m_{\text{SUSY}}} \right)^2 \tan \beta,$$

missä m_{SUSY} kuvaa supersymmetristen hiukkasten massaskaalaa, kerroin $\tan \beta \simeq 3\text{--}40$ riippuu Higgsin vakuumin odotusarvoista ja ± 1 vastaa supersymmetrisen Lagrangen tiheyden μ -termin etumerkkiä. Massavälillä 100–500 GeV olevat supersymmetriset hiukkaset voisivat tuoda ratkaisun myonin anomaalisen g -tekijän puuttuvaan osaan $\Delta a_\mu = 251(59) \times 10^{-11}$ [26].

Massaskaalan 100–500 GeV supersymmetriset hiukkaset tulisi olla suoraan ha-

³³Supersymmetrisiä mittakenttäteorioita käsitellään kirjassa [81] ja supersymmetrisiä hiukkasfysiikan malleja kirjoissa [82, 83, 84].

³⁴Hiukkasfysiikan hierarkiaongelma liittyy Higgsin massan säteilykorjausten sarjan suppenemiseen ja kysymykseen, miksi heikko vuorovaikutus on noin 10^{24} kertaa vahvempi kuin gravitaatio. Hierarkiaongelma ja sen supersymmetrinen ratkaisu esitellään kirjassa [84].

vaittavissa CERNin LHC-kokeissa [26], mutta niitä ei ole löytynyt. Itseasiassa yhtäkään supersymmetristä hiukkasta ei ole pystytty vahvistamaan LHC-kokeissa [85, 86], joissa niitä odotettiin havaittavan. Tässä piilee supersymmetrian suuri kääntöpuoli. Havaintojen puutteessa supersymmetriset teoriat sisältävät suuren määrän hypoteettisia hiukkasia. Occamin partaveitsen periaatteen mukaisesti hyvä tieteellinen teoria ei oleta ylimääräisiä oletuksia, ja siten havaintojen puutteessa supersymmetriset teoriat ovat poistuneet vähitellen muodista.

Toinen paljon tutkittu ratkaisuehdotus myonin $g - 2$ -ongelmaan standardimallin laajenuksena on kevyt, varaukseton ja hyvin heikosti vuorovaikuttava spin-1-vektori-bosoni, ns. pimeä fotoni³⁵ (engl. dark photon³⁶). Suurin motivaattori pimeän fotonin teorialle tulee astrofysikaaliselta ja kosmologian puolelta pimeän aineen selittäjänä, mutta se voisi samalla olla selitys puuttuvalle myonin $g - 2$ -kontribuutiolle. Yksinkertaisimmassa mallissa [92, 87, 88] pimeä fotoni laajentaa standardimallia lisäämällä Yangin-Millsin mittakenttäteorian symmetriaryhmään toisen $U(1)$ ryhmän, joka sekoittuu sähköheikkoon teoriaan. Tällöin saadaan kokonaisuudessaan symmetriaryhmä $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$. Laajennuksen symmetriarikko sähköheikkoihin bosoneihin menee muuten vastaavasti kuin luvussa 1.3.2, mutta nyt mukana on myös symmetriarikossa pienen massan saava pimeä fotoni.

Pimeän fotonin tulee olla hyvin kevyt ja heikosti kytketty, sillä sen vaikutusta ei havaita monissa mittaustuloksissa, kuten neutriinon sirontaprosessissa [87]. Se vuorovaikuttaa fotonin tavoin varattujen hiukkasten kanssa symmetriarikosta ja mitta-bosonien sekoittumisesta saatavalla kytkentävakiolla, jota merkitään $\varepsilon \cdot e$, ja antaa myonin g -tekijälle korjaustermin [87, 89]

$$a_{\mu}^{\text{pimeä fotoni}} = \frac{\alpha}{2\pi} \varepsilon^2 F\left(\frac{m_V}{m_{\mu}}\right),$$

³⁵Pimeän fotonin teoriaa ja sen vaikutusta myonin anomaaliseen g -tekijään on analysoitu vuoden 2009–2011 julkaisuissa [87, 88, 89], sekä meta-analyyseissä [90, 91].

³⁶Pimeälle fotonille on myös muita englanninkielisiä nimityksiä kuten secluded, heavy, para-, hidden photon tai U-boson.

missä m_V on pimeän fotonin massa ja $F(x) = \int_0^1 2z(1 - z^2)/[(1 - z)^2 + x^2z] dz$. Parametreillä $\varepsilon \simeq 1-2 \times 10^{-3}$ ja $m_V \simeq 10-100$ MeV pimeä fotoni antaisi riittävän suuren kontribuution myonin $g - 2$ -ongelman ratkaisemiseen vaikuttamatta muihin mittaustuloksiin kuten elektronin g -tekijään [88, 26].

Pimeää ftonia on etsitty paljon ja kokeelliset mittaukset ovat kumonnet vähitellen yksinkertaisimman pimeän fotonin teorian, missä se kytkeytyy varattuihin hiukkasiin yhtä vahvasti ja hajooa pääasiassa e^+e^- -pareiksi [93] tai näkymättömiksi ns. pimeiksi hiukkasiksi [94, 95], jotka selittäisivät puuttuvan hajoamisprosessin energian [26]. Vaikka yksinkertaisimmasta mallista ei ole löytynyt mitään signaalia, pimeä fotoni esiintyy monimutkaisemmissa usean uusien hiukkasten malleissa³⁷ mukana, joita motivoi pimeän aineen selittäminen. Pimeän fotonin ja muiden pimeiden hiukkasten etsintä siis jatkuu, mutta teoria ei ole signaalin puutoksen vuoksi enää niin suuressa muodissa. Samoin kuin supersymmetrisissä teorioissa, hypoteettisten hiukkasten oletaminen ja niiden signaalien puuttuminen kokeissa ei ole hyvä yhdistelmä tieteelliselle teorialle.

Mainitaan vielä lopuksi ratkaisuehdotus, joka laajentaa standardimallia kevyillä skalaari- tai pseudoskalaarihiukkasilla. Julkaisussa [97] tutkitaan kahden Higgsin dubletin mallia (lyhenne 2HDM, engl. two-Higgs doublet model) ja siitä lasketta- vien ylimääräisten korjaustermien kontribuution suuruutta myonin anomaaliseen g -tekijään. 2HDM ennustaa mm. varattuja Higgsin bosoneita, joista tulisi löytyä kokeellinen signaali CERNin LHC-kokeissa. Julkaisussa [98] ratkaistaan yleisellä tasolla, että standardimalliin lisättävästä pseudoskalaarista voitaisiin saada juuri sopivan suuruinen kontribuutio myonin $g - 2$ -ongelmaan. Nämäkin mallit tarvitsivat kokeellisen signaalin ylimääräisten skalaari- tai pseudoskalaarien olemassaolosta, ja esimerkiksi CMS-kokeissa ei ole löydetty signaalia 2HDM-malliin [99, 100, 101].

³⁷Pimeiden hiukkasten malleja käsittelee laajasti vuoden 2016 meta-analyysi [96].

4 Loppupäätelmät ja omat näkemykset

Myonin anomaalinen magneettinen momentti on ollut jo vuosikymmeniä yksi hiukkasfysiikan kiinnostavimpia tutkimusaiheita. Anomaalinen g -tekijä saadaan lasketua hiukkasfysiikan teorian kvanttisilmukkakorjauksista, joihin vaikuttavat kaikki standardimallin hiukkaset ja vuorovaikutukset. Myonin anomaalinen g -tekijä on kova testi koko standardimallin teorialle, ja nykyisessä kokeellisessa mittaustuloksessa saattaa näkyä jo vihjeitä uudesta fysiikasta eli nykyisen teorian laajennusteorioista.

Tässä tutkielmassa on analysoitu tämän hetken tilannetta myonin $g-2$ -ongelmaan liittyen. Painotus on ollut teoreettisessa puolessa ja erityisesti standardimallin tarkan selvityksen analysoinnissa. Oleellisten teoreettisten ja kokeellisten tulosten tueksi esitettiin liitteissä laskuja, jotka suurelta osin pohjautuivat omiin itsenäisiin laskumenetelmiin. Lopuksi pohdittiin erilaisia ratkaisuja ongelmaan kokeelliselta puolelta sekä standardimallin teorian sisältä ja sen laajennuksista. Tässä luvussa tarkastellaan ongelman nykypäiväistä tilannetta sekä omia näkemyksiäni ongelman ratkaisua koskien.

Myonin $g - 2$ -ongelma perustuu standardimallin ennustuksen ja kokeellisten mittausten 4,2:n keskihajonnan statistiseen eroavaisuuteen. Eroavaisuus pohjautuu vuoden 2020 standardimallin meta-analyysiin [4] ja vuoden 2021 Fermilabin julkaisuun [5], jossa päivitettiin Brookhavenin aiempaa mittaustulosta [25].

Kokeelliset mittaustulokset perustuvat Brookhavenissa ja Fermilabissa tehtyihin varastorengaskokeisiin E821 [25] ja E989 [5], missä mitataan korkean liikemäärän 3,1 GeV myoneiden spin-prekessiota homogeenisessa magneettikentässä. Koska näiden kokeiden mittausten menetelmät ovat hyvin samanlaiset keskenään, ei ole yllättävää, että myös tulokset korreloivat. Fermilabin tulevaisuudessa julkaisemat mittaustulokset todennäköisesti vain tarkentavat nykyistä tulosta, enkä usko uusien mittausten tuovan avainta ongelman ratkaisemiseen.

Suurin kritiikki kokeelliseen tulokseen onkin juuri se, että riittävän tarkat mit-

taukset on tehty vain yhdellä ja samalla mittausmenetelmällä ja energiaskaalalla. Tällä ei pitäisi tietenkään olla tuloksen kannalta merkitystä, ja todennäköinen kokeellinen vahvistus saadaan valmisteilla olevasta Japanin J-PARC E34 -projektista [7, 8]. Projektissa mitataan matalamman liike-energian myoneita ja käytetään uusia mittaustekniikoita. Mittaustarkkuus tulee olemaan Fermilabin ja Brookhavenin luokkaa, ja ensimmäisiä tuloksia odotetaan julkaistavaksi vuonna 2027. Eri menetelmällä saatavat kokeelliset tulokset tulevat olemaan hyvin kiinnostavia, vaikka ei ole syytä olettaa, että ne eroaisivat nykyisestä mittausravosta.

Standardimallissa kvanttisähködynamikan ja sähköheikot korjaukset on selvitetty hyvin tarkkaan sekä absoluuttisesti että suhteellisesti. Näiden rinnalla hadroniset korjaukset jättävät vielä spekuloitavaa. Perinteiset semifinomenologian e^+e^- annihilaatiodataan perustuvat tulokset antavat vielä tarkempia tuloksia kuin väkisin numeerisesti lasketut hila-QCD:n tulokset. Yllättävää on kuitenkin, että nopeasti kehittyvä ja tarkentuva hila-QCD näyttää antavan tuloksia, jotka ovat huomattavasti lähempänä kokeellista mittaustulosta [6]. Hila-QCD:n kehittyessä onkin kiinnostava seurata mitä arvoa tulokset lähestyvät. Vaikka hila-QCD jäisi linjaan kokeellisten tulosten kanssa, jäisi standardimalliin silti ratkaistavaksi mysteeri, miksi semifinomenologinen tulos eroaa hila-QCD:sta. Tämänkaltainen ongelman eristäminen voisi antaa tärkeää vihjettä standardimallin ulkopuolisesta fysiikasta, ja siksi on kiinnostavaa seurata hila-QCD:n kehittymistä.

Suuren massansa vuoksi myoni on herkkä standardimallin laajennuksille ja uudelle fysiikalle. Koska myonin anomaalisen g -tekijän mittaus on niin tarkka ja standardimallin ennustuksen erovaisuus niin suuri, uskottavin selitys ongelmaan tuntuu olevan uuden fysiikan kontribuutio standardimallin ulkopuolelta. Lähdin tekemään tätä tutkielmaa siinä uskossa, että kokeelliselta tai teoreettiselta puolelta löytyisi jotain suurempaa epävarmuutta, jos tarpeeksi tarkasti tutkisi ongelmaa. Tämän vuoksi rajasin tutkielmani pääaiheen standardimallin korjausten ja kokeellisen me-

netelmän meta-analyysiin. Nyt tuntuu kuitenkin, että selkein ratkaisu ongelmaan on standardimallin ulkopuolinen fysiikka. Kokeisiin näyttää olevan uskomisen, ja kuten mainittu, hila-QCD:n tulokset eivät ongelman korjatessa selitä semifenomenologisia tuloksia, vaikka mallin kehityksestä saattaa olla suuri apu. Lisäksi standardimallin epäpätevyys selittää mm. pimeää ainetta antaa uskoa uusista alkeishiukkasista, jotka voisivat antaa tarvittavan kontribuution myonin anomaaliselle g -tekijälle.

Standardimallin laajennuksista supersymmetria, pimeä fotoni ja Higgsin sektorin laajennukset ovat olleet tutkituimpia kohteita myonin $g - 2$ -ongelman ratkaisuun. Kaikkien teorioiden heikkouksina on kuitenkin yksinkertaisimpien mallien kokeellisen signaalin puute. Ennustettuja uusia hiukkasia ei ole löytynyt ennustetuilta energiaskaaloilta, joten malleja on jouduttu monimutkaistamaan. Mielestäni mikään näistä ratkaisuista ei vaikuta nykypäivän kokeellisen datan perusteella houkuttevalta ehdokkaalta.

Myonin anomaalinen g -tekijä antaa hyvän testin monille standardimallin laajennuksille. Mallien hypoteettisten hiukkasten tulee olla sopivalla energiaskaalalla, jotta ne ratkaisisivat myonin $g - 2$ -ongelman olemalla samanaikaisesti linjassa toimivien fysikaalisten tulosten kanssa. Tätä energiaskaalaa voidaan sitten tutkia, jos ennustetuista hiukkasista löytyisi signaalia. Lisäksi tulevaisuuden hila-QCD:n korjausten vertailusta ja J-PARC E34 -projektista saatetaan saada oleellista vihjettä, miten standardimallia tulisi laajentaa.

Viitteet

- [1] P. Dirac, Proceedings of the Royal Society of London. Series A **117**, 610 (1928).
- [2] J. Schwinger, Physical Review **73**, 416 (1948).
- [3] T. Aoyama *et al.*, Atoms **19**, 1 (2019).
- [4] T. Aoyama *et al.*, Physics Reports **887**, 1 (2020).
- [5] B. Abi *et al.*, Physical Review Letters **126**, 141801 (2021).
- [6] S. Borsanyi *et al.*, Nature **593**, 51 (2021).
- [7] M. Abe *et al.*, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2019**, (2019).
- [8] H. Iinuma, Journal of Physics: Conference Series **295**, 012032 (2011).
- [9] W. Demtröder, *Atoms, Molecules and Photons, Graduate Texts in Physics* (Springer Berlin Heidelberg, 2018).
- [10] M. Kirill ja V. Arkady, *Theory of the Muon Anomalous Magnetic Moment* (Springer, 2006).
- [11] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3 ed. (J. Wiley & Sons Inc, 1999).
- [12] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4 ed. (Pearson Education, 2013).
- [13] M. Nakahara, *Geometry, Physics and Topology* (IOP Publishing, 2003).
- [14] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press, 2014).
- [15] S. Weinberg, *Cambridge University Press* (Cambridge University Press, 1995), Vol. 1.
- [16] J.-B. Zuber ja C. Itzykson, *Quantum Field Theory* (Dover Publications Inc, 2005).
- [17] G. 't Hooft, Nuclear Physics B **35**, 167 (1971).
- [18] M. Srednicki, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 2006).

- [19] M. Gell-Mann, *Physical Review* **125**, 1067 (1962).
- [20] F. Jegerlehner, *The Anomalous Magnetic Moment of the Muon* (Springer, 2008).
- [21] M. E. Peskin ja S. Daniel V, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995).
- [22] F. J. Dyson, *Physical Review* **75**, 1736 (1949).
- [23] P. J. Mohr *et al.*, *Reviews of Modern Physics* **88**, 1 (2016).
- [24] M. Tanabashi *et al.*, *Physical Review D* **98**, 30001 (2018).
- [25] G. W. Bennett *et al.*, *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* **73**, 1 (2006).
- [26] R. L. Workman *et al.*, *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2022**, (2022).
- [27] F. Jegerlehner ja A. Nyffeler, *Physics Reports* **477**, 1 (2009).
- [28] A. Petermann, *Nuclear Physics* **5**, 677 (1958).
- [29] C. M. Sommerfield, *Annals of Physics* **5**, 26 (1958).
- [30] H. H. Elend, *Physics Letters* **20**, 682 (1966).
- [31] S. Laporta ja E. Remiddi, *Physics Letters B* **379**, 283 (1996).
- [32] S. Laporta, *Physics Letters B* **772**, 232 (2017).
- [33] G. Peter Lepage, *Journal of Computational Physics* **27**, 192 (1978).
- [34] T. Aoyama *et al.*, *Physical Review D* **97**, 036001 (2018).
- [35] T. Aoyama *et al.*, *Physical Review Letters* **109**, 12 (2012).
- [36] R. H. Parker *et al.*, *Science* **360**, 191 (2018).
- [37] R. Bouchedira *et al.*, *Physical Review Letters* **106**, 7 (2011).
- [38] R. Jackiw ja S. Weinberg, *Physical Review D* **5**, 2396 (1972).
- [39] I. Bars ja M. Yoshimura, *Physical Review D* **6**, 374 (1972).
- [40] K. Fujikawa *et al.*, *Physical Review D* **6**, 2923 (1972).

- [41] A. Czarnecki *et al.*, Physical Review D **67**, 073006 (2003).
- [42] C. Gnendiger *et al.*, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **88**, 1 (2013).
- [43] T. Ishikawa *et al.*, Physical Review D **99**, 073004 (2018).
- [44] S. J. Brodsky ja E. De Rafael, Physical Review **168**, 1620 (1968).
- [45] B. E. Lautrup ja E. de Rafael, Physical Review **174**, 1835 (1968).
- [46] M. Gourdin ja E. De Rafael, Nuclear Physics B **10**, 667 (1969).
- [47] A. Keshavarzi *et al.*, Physical Review D **97**, 1 (2018).
- [48] A. Keshavarzi *et al.*, Physical Review D **101**, 14029 (2020).
- [49] D. Giusti ja S. Simula, Proceedings of Science **363**, 0 (2019).
- [50] A. Gérardin *et al.*, (2019).
- [51] C. T. H. Davies *et al.*, Physical Review D **101**, 1 (2019).
- [52] E. Shintani ja Y. Kuramashi, Physical Review D **100**, 034517 (2019).
- [53] T. Blum *et al.*, (2018).
- [54] S. Borsanyi *et al.*, Physical Review Letters **121**, 1 (2018).
- [55] C. Lehner ja A. S. Meyer, Physical Review D **101**, (2020).
- [56] H. Leutwyler, Scholarpedia **7**, 8708 (2012).
- [57] G. Ecker *et al.*, Nuclear Physics B **321**, 311 (1989).
- [58] G. Ecker *et al.*, Physics Letters B **223**, 425 (1989).
- [59] G. Ecker *et al.*, Physics Letters B **237**, 481 (1990).
- [60] T. Blum *et al.*, Physical Review Letters **124**, 1 (2020).
- [61] C. D. Anderson ja S. H. Neddermeyer, Physical Review **50**, 263 (1936).
- [62] J. Street ja E. Stevenson, Physical Review **52**, 1003 (1937).
- [63] R. L. Garwin *et al.*, Physical Review **105**, 1415 (1957).
- [64] R. L. Garwin *et al.*, Physical Review **118**, 271 (1960).

- [65] G. Charpak *et al.*, Physical Review Letters **6**, 128 (1961).
- [66] J. Bailey *et al.*, Physics Letters B **28**, 287 (1968).
- [67] J. Bailey *et al.*, Nuclear Physics, Section B **150**, 1 (1979).
- [68] F. Combley *et al.*, Physics Reports **68**, 93 (1981).
- [69] J. Grange *et al.*, (2015).
- [70] J. P. Miller *et al.*, Annual Review of Nuclear and Particle Science **62**, 237 (2012).
- [71] V. Bargmann *et al.*, Physical Review Letters **2**, 435 (1959).
- [72] M. Boshier *et al.*, kirjassa *1998 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest (Cat. No.98CH36254)* (IEEE, 1998), pp. 4–5.
- [73] M. Otani, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2022**, 1 (2022).
- [74] K. Shimomura *et al.*, AIP Conference Proceedings **1382**, 245 (2011).
- [75] S. Kanda *et al.*, Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics **815**, 136154 (2021).
- [76] A. Keshavarzi *et al.*, Nuclear Physics B **975**, 115675 (2022).
- [77] M. Davier *et al.*, European Physical Journal C **80**, (2020).
- [78] M. Visser, (2018).
- [79] H. Nikolic, (2018).
- [80] A. Czarnecki ja W. J. Marciano, Physical Review D **64**, 1 (2001).
- [81] E. D'Hoker ja D. Z. Freedman, 3 (2002).
- [82] S. Ferrara *et al.*, kirjassa *Unification of the Fundamental Particle Interactions*, toimittanut S. Ferrara *et al.* (Springer US, 1980).
- [83] S. P. Martin, Perspectives On Supersymmetry Ii 1 (1997).
- [84] I. J. R. Aitchison, (2005).
- [85] ATLAS Collaboration, (2023).
- [86] CMS Collaboration, (2023).

- [87] P. Fayet, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **75**, 1 (2007).
- [88] M. Pospelov, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **80**, (2009).
- [89] D. Tucker-Smith ja I. Yavin, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology **83**, (2011).
- [90] R. Essig *et al.*, (2013).
- [91] F. Curciarello, EPJ Web of Conferences **118**, 01008 (2016).
- [92] B. Holdom, Physics Letters B **166**, 196 (1986).
- [93] J. R. Batley *et al.*, Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics **746**, 178 (2015).
- [94] J. P. Lees *et al.*, (2017).
- [95] Y. M. Andreev *et al.*, Physical Review Letters **126**, (2021).
- [96] J. Alexander *et al.*, (2016).
- [97] K. Cheung *et al.*, (2001).
- [98] D. Chang *et al.*, (2000).
- [99] S. Laurila, PoS **CHARGED201**, 008 (2017).
- [100] S. Laurila, PoS **ICHEP2018**, 155 (2019).
- [101] CMS Collaboration, (2019).
- [102] P. Lewulis ja A. Dragan, American Journal of Physics **87**, 674 (2019).
- [103] L. H. Thomas, Nature **117**, 514 (1926).

A Minkowskin avaruus ja Lorentzin algebran esitykset

Minkowskin avaruus on litteä neliulotteinen aika–(paikka-)avaruus. Käydään ensin läpi Minkowskin avaruuden määrittely ja erityiseen suhteellisuusteoriaan liittyvät koordinaattimuunnokset. Tämän jälkeen määritellään erilaiset Lorentzin ryhmät ja niiden Lorentzin algebra. Lorentzin ryhmä on Lien ryhmä ja Lorentzin algebra tästä vastaava Lien algebra. Generaattoreiden valinta määrää Lorentzin algebran esityksen, jonka eksponentiaalikuvaus Lien ryhmä määrää esityksen muunnoksen koordinaattimuunnoksessa.

Minkowskin avaruus (\mathbb{M}^4, η) on neliulotteinen aika(–paikka-)avaruuden pisteistä koostuva affiini avaruus $\mathbb{M}^4(\cong \mathbb{R}^4)$ varustettuna pseudo-Riemannin metriikalla

$$(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Koordinaatiston kiinnittämisen jälkeen Minkowskin avaruuden tapahtumat³⁸ esitetään reaalisina nelivektoreina $m \in \mathbb{R}^4$, joille metriikka määrittelee pseudosisätulon³⁹

$$\eta(a, b) = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{b}, \quad (\text{A.1})$$

mikä määrittelee aika-avaruuden pseudoetäisyyden

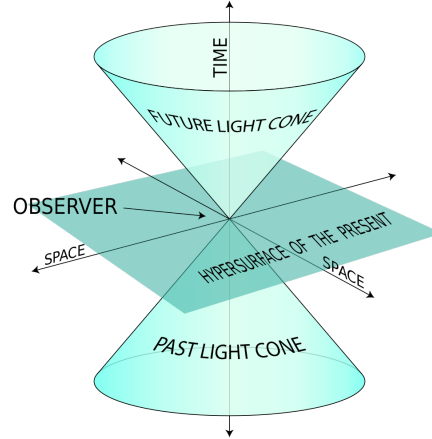
$$-\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} (a^\mu - b^\mu) (a^\nu - b^\nu), \quad (\text{A.2})$$

sekä nelivektorin pseudonormin

$$\|a\|^2 = a^2 = \eta(a, a) = a^\mu a_\mu = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{a}. \quad (\text{A.3})$$

³⁸Minkowskin avaruuden pisteitä kutsutaan fysikaalisesti usein tapahtumiksi, sillä ne ovat ajan ja paikan koordinaatteja.

³⁹Määrittely ei täytä sisätulon ei-negatiivisuusehtoa.



Kuva 26. Pisteiden valonluonteiset etäisyydet $\Delta s^2 = 0$ muodostavat ympyräkartion, ns. valokartion, pinnat tulevaisuuteen ja menneisyyteen. Massiivinen kappale kulkee aidosti valoa hitaammin ja piirtää paikanluonteisen maailmanviivan. [Kuvan lähde-sivu: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:World_line.svg (9.5.2023)]

Koordinaattimuunnokset

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{\Lambda x}.$$

muuttavat Minkowskin avaruuden pisteiden nelivektoriesityksen komponenttejen arvoja. Muunnokset, jotka eivät muuta vektoreiden normeja muodostavat isometria-ryhmän, ns. kokonaisen Lorentzin ryhmän

$$O(1, 3) = \{ \mathbf{\Lambda} \in GL(4, \mathbb{R}) : \|\mathbf{\Lambda x}\| = \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \} \quad (\text{A.4})$$

Normin säilymisen ehto voidaan kirjoittaa matriisi- tai tensorikomponenttiehtona

$$\|\mathbf{\Lambda x}\| = \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \iff \mathbf{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\eta} \iff \Lambda^\beta{}_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\nu = \eta_{\mu\nu}.$$

Huomaa, että pseudonormin (A.3) lisäksi aika-avaruuden etäisyys (A.2) on invariantti muunnosten (A.4) suhteen. Fysikaalisiin koordinaatistonmuunnoksiin voidaan rajata ajan suunnan- ja kätisyyden säilyminen, jolloin jäljelle jää boostit ja spatiaalisen avaruuden rotaatiot. Tämä on tärkeä aliryhmä, ns. aito ortokronologinen Lorentzin ryhmä

$$SO^+(1, 3) = \{ \mathbf{\Lambda} \in O(1, 3) : \det(\mathbf{\Lambda}) = 1, \Lambda^0{}_0 > 0 \}, \quad (\text{A.5})$$

joka määrittää havaitsijoiden koordinaattimuunnokset (translaatiot lisäämällä saataisiin Poincarén ryhmä). Kokonaisen Lorentzin ryhmän (A.4) saa lisäämällä tähän ajan- ja paikan peilaukset

$$T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad P = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Aito ortokronologinen Lorentzin ryhmä (A.5) koostuu spatiaalisen avaruuden rotaatioista ja boosteista. Koordinaattimuunnosta vastaava matriisi $\Lambda \in \text{SO}^+(1, 3)$ voidaan esittää eksponentiaalimuodossa

$$\Lambda = \exp(i\theta_i \mathbf{J}^i + i\beta_j \mathbf{K}^j), \quad \theta_i, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.6})$$

missä \mathbf{J} ovat spatiaalisen avaruuden rotaatiogeneraattorit

$$\mathbf{J}^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

ja \mathbf{K} boostigeneraattorit

$$\mathbf{K}^1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^2 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

missä merkitsemättömät matriisielementit ovat nollia. Lorentzin muunnoksen määrittävät kuusi reaalilukuparametria θ_i ja β_i . Eksponentiaaliesitys (A.6) voidaan myös kirjoittaa

$$\Lambda_V = \exp(i\theta_{\mu\nu} V^{\mu\nu}), \quad (\text{A.9})$$

missä on määritelty [14]

$$(V^{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{K}^1 & \mathbf{K}^2 & \mathbf{K}^3 \\ -\mathbf{K}^1 & 0 & \mathbf{J}^3 & -\mathbf{J}^2 \\ -\mathbf{K}^2 & -\mathbf{J}^3 & 0 & \mathbf{J}^1 \\ -\mathbf{K}^3 & \mathbf{J}^2 & -\mathbf{J}^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorentzin muunnoksen määrittävät parametrit θ_i ja β_i on koottu antisymmetrisen matriisin $\theta_{\mu\nu}$ komponentteihin.

Generaattoreiden \mathbf{J} ja \mathbf{K} (tai ekvivalentisti $V^{\mu\nu}$) komponenttien kommutaatiorelaatiot

$$\begin{cases} [\mathbf{J}^i, \mathbf{J}^j] = i\epsilon_{ijk} \mathbf{J}^k, \\ [\mathbf{J}^i, \mathbf{K}^j] = i\epsilon_{ijk} \mathbf{K}^k, \\ [\mathbf{K}^i, \mathbf{K}^j] = -i\epsilon_{ijk} \mathbf{J}^k \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$$\iff [V^{\mu\nu}, V^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\nu\alpha}V^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha}V^{\nu\beta} - \eta^{\nu\beta}V^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\beta}V^{\nu\alpha}) \quad (\text{A.11})$$

määrittävät Lien algebran, ns. Lorentzin algebran $\mathfrak{so}(1, 3)$, struktuurin, missä rotaatiot \mathbf{J}^i muodostavat alialgebran $\mathfrak{so}(3)$. [14]

Lien algebralle on olemassa erilaisia esityksiä, eli generaattoreille \mathbf{J} ja \mathbf{K} erilaisia matriisivalintoja. Esitysten tulee toteuttaa kommutaatiorelaatiot (A.10). Lorentzin skalaareille generaattoreiksi valitaan triviaaliesitys $\mathbf{J} = \mathbf{K} = 0$ ja Lorentzin nelivektoreille fundamentaaliesitys (A.7) ja (A.8), mikä tuottaa eksponentiaalikuvausryhmän $SO^+(1, 3)$. Yleisesti n -asteen tensorin esitys on n -asteen tensoritulo fundamentaalista esityksestä.

Spinorit kuvaavat fermioneiden muuntumista Lorentzin muunnoksessa, ja ne ovat Lorentzin algebran spin-ryhmän ns. $\text{spin-}\frac{1}{2}$ esityksiä. Liitteessä B käsitellään spin-ryhmät ja niiden esitykset, joiden avulla määritellään spinorit ja spinorikentät.

B Spinorit spin-ryhmän esitysteoriasta

Spin- $\frac{1}{2}$ -alkeishiukkasia, fermioneita, kuvataan standardimallissa Diracin spinorikenttinä. Spinorit ovat spin-ryhmän eli ortokronologisen Lorentzin ryhmän kaksinkertaisen peitteen spin- $\frac{1}{2}$ -esityksiä, ja spinorikentät ovat spinoreiden kuvauksia yli Minkowskin avaruuden. Lorentzin muunnosten Lien ryhmä $SO^+(1,3)$ ei ole yhdesti yhtenäinen, vaan moniston suljetut polut jakaantuvat kahteen eri homotopialuokkaan. Spin-ryhmä on sen sijaan yhdesti yhtenäinen, ja erottelee Lorentzin muunnokseen kulkevat eri homotopialuokan polut kahdeksi eri alkioksi. Tämä näkyy spin- $\frac{1}{2}$ -esityksen alkioiden etumerkissä, ja näin spinorit eroavat oleellisesti vektoreista ja tensoreista. [15, 14, 13]

Tässä liitteessä määritellään spin-ryhmä ja sen spin- $\frac{1}{2}$ -esitykset, joiden avulla määritellään Weylin- ja Diracin spinorit. Spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkasia mallintava spinoreiden struktuuri esitetään gammamatriisien avulla.

Aloitetaan määrittelemällä spin-ryhmä, joka on ryhmän $SO^+(1,3)$ kaksinkertainen peite. Liitteessä A määritelty Lorentzin algebra $\mathfrak{so}(1,3)$ kompleksifoidaan eli vaihdetaan algebran skalaarikunta kompleksiseksi. Kompleksifioitua algebraa merkitään ylämerkinnällä $\mathfrak{so}^{\mathbb{C}}(1,3)$, ja sen kannaksi valitaan

$$\mathbf{J}_+ := \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{J}_- := \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}).$$

Algebraa $\mathfrak{so}^{\mathbb{C}}(1,3)$ kutsutaan spin-algebraksi, ja sen rakenteen määrittelee relaatiot

$$[\mathbf{J}_+^i, \mathbf{J}_+^j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_+^k$$

$$[\mathbf{J}_-^i, \mathbf{J}_-^j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_-^k$$

$$[\mathbf{J}_+^i, \mathbf{J}_-^j] = 0,$$

jotka selkeästi redusoituvat kahdeksi kommutoivaksi rotaatioalgebraksi $\mathfrak{so}^{\mathbb{C}}(3) \cong$

$\mathfrak{su}^{\mathbb{C}}(2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Saatiin osoitettua, että

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}^{\mathbb{C}}(1, 3) &\cong \mathfrak{su}^{\mathbb{C}}(2) \oplus \mathfrak{su}^{\mathbb{C}}(2) \\ &\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus i \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ &\cong \mathfrak{sl}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Lien algebran $\mathfrak{sl}^{\mathbb{C}}(2, \mathbb{C})$ eksponentiaalikuvausten Lien ryhmä $SL(2, \mathbb{C})$ on Lorentzin ryhmän $SO^+(1, 3)$ yhdesti yhtenäinen spin-ryhmä ja universaali kaksinkertainen peite. Kuvaus Lorentzin muunnoksille $\varphi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^+(1, 3)$ on siis 2 : 1 -kuvaus, missä $\ker \varphi = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$. Spin-ryhmän alkion etumerkki pitää informaation homotopialuokasta. [15]

Fysikaalinen hiukkanen kuvataan vektoriavaruuden alkiona, johon Lorentzin ryhmän esitys operoi Lorentzin muunnoksessa. Spinori on spin-ryhmän alkio, ja spinorikenttä on spinoreiden kuvaus yli Minkowskin avaruuden. Lorentzin ryhmän esitys valitaan hiukkasen ominaisuuksien (kuten spinin) ja symmetrioiden mukaan. Sähköisesti varattu fermioni on kompleksifoidun spin-ryhmän alkio. Varatun spinorikentän esitys saa jokaiselle aika-avaruuden pisteelle kompleksisen vaiheen $U(1)$ ryhmältä. [15]

Lorentzin algebran spin-esitykset nimetään irredusoituvien $\mathfrak{su}(2)$ matriisiesitysten mukaan puolilukuvälein j esityksen dimension $2j+1$ mukaan. Eli $\mathfrak{su}^{\mathbb{C}}(2) \oplus \mathfrak{su}^{\mathbb{C}}(2)$ esitys nimetään parilla (A, B) , ja esityksen dimensio (ja vapausasteiden lukumäärä) on $(2A+1)(2B+1)$. [14]

Spatiaalisen avaruuden rotaatiogeneraattorit ovat $\mathbf{J} = \mathbf{J}_+ + \mathbf{J}_-$. Rotaatioryhmä $SO(3)$ on Lorentzin ryhmän aliryhmä, ja siten esitys (A, B) generoi rotaatioalgebralle ns. spin-esityksiä, $j = A + B, A + B - 1, \dots, |A - B|$. Puolilukuesitykset vastaavat fermioneita ja kokonaislukuesitykset bosoneita. Spinoriavaruus ovat kompleksinen vektoriavaruus varustettuna spin-ryhmän spin- $\frac{1}{2}$ -esityksellä.

Kaksiulotteisia spin- $\frac{1}{2}$ -esityksiä ($j = \frac{1}{2}$) on kaksi: $(\frac{1}{2}, 0)$ ja $(0, \frac{1}{2})$. Näitä kutsutaan vasen- ja oikeakätisiksi Weylin spinoreiksi ψ_L ja ψ_R . Vasenkätiseen esitykseen

$(\frac{1}{2}, 0)$ valitaan Paulin matriisit $\mathbf{J}_- = \boldsymbol{\sigma}$ ja triviaaliesitys $\mathbf{J}_+ = 0$ (ja päinvastoin oikeakätiselle esitykselle). Nämä vastaavat rotaatio- ja boostigeneraattoreita

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, 0\right) : \quad \mathbf{J} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{K} = +\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) : \quad \mathbf{J} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{K} = -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Weylin spinori ei kuitenkaan mallinna standardimallin fermioneita, sillä se ei ole symmetrinen spatiaalisen käisyyspeilauksen kanssa, vaan saadaan $\mathbf{J}_+ \leftrightarrow \mathbf{J}_-$. Weylin spinorille ei pystytä myöskään määrittelemään ns. Diracin massaa. Weylin spinori kuvaa siis vain massatonta ja yksikätistä hiukkasta. Yhdistäessä erikätiset Weylin spinoriesitykset bispinoriksi saadaan Diracin spinori, jonka esitys on $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$. Diracin spinoreita käytetään mallintamaan massiivisia fermioneita.

Rakennetaan Diracin spinoreiden esityksen struktuuri ns. gammamatriiseilla γ^μ , jotka ovat joukko 4x4 matriiseja ominaisuuksilla

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i.$$

Gammamatriisit generoivat Diracin algebran, joka on yksi Cliffordin algebran erikoistapaus. Gammamatriisit ja niiden tulot muodostavat kannan neliulotteisille neliömatrisille $\mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$. Niille on eri matriisiesityksiä, joista tässä tutkielmassa käytetään Diracin esitystä

$$\begin{cases} \gamma^0 &= \sigma^3 \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^i &= i \sigma^2 \otimes \sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (\text{B.2})$$

Määritellään muut tarpeelliset matriisit: Diracin matriisi

$$\gamma^5 := i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3,$$

missä merkitään $\gamma_5 = \gamma^5$, varauskonjugaatiomatriisi

$$C \gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \xrightarrow{\text{Diracin esitys}} C = -i \sigma^3 \otimes \sigma^2 = i \gamma^2 \gamma^0, \quad (\text{B.3})$$

ja blokkimatriisi $(\sigma^{\mu\nu})$, jonka komponentit $\sigma^{\mu\nu}$ ovat 4x4 matriiseja

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Diracin spinorin spin-algebran $\mathfrak{so}^{\mathbb{C}}(1, 3)$ esitykseen $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$ valitaan generaattorimatriisi

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu}, \quad (\text{B.4})$$

joka toteuttaa Lien algebran struktuurin (A.11). Spinoreihin operoivat ryhmän alkiot ovat siis

$$\mathbf{\Lambda}_{\frac{1}{2}}(\theta) = \exp(i\theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}), \quad (\text{B.5})$$

missä antisymmetrisen tensorin kuusi vapaata komponenttia $\theta_{\mu\nu}$ määrittävät muunnoksen, kuten vektoriesityksessä (A.9).

Esitys on neliulotteinen, joten myös Diracin spinoreilla on neljä komponenttia

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4,$$

jotka muuntuvat esityksen (B.5) mukaan

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathbf{\Lambda}_{\frac{1}{2}} \psi.$$

Diracin spinoreiden esitys ei ole unitaarinen, sillä yleisesti $\mathbf{\Lambda}_{\frac{1}{2}}^\dagger \neq \mathbf{\Lambda}_{\frac{1}{2}}^{-1}$. Kuitenkin gammamatriisien ominaisuuksien nojalla on suoraviivaista osoittaa, että $\mathbf{\Lambda}_{\frac{1}{2}}^{-1} = (\gamma^0 \mathbf{\Lambda}_{\frac{1}{2}} \gamma^0)^\dagger$. Täten spinorin ψ luonnollinen konjugaattispinori on

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0,$$

joka muuntuu

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} \mathbf{\Lambda}_{\frac{1}{2}}^{-1},$$

ja tulo $\bar{\psi}\psi$ Lorentzin invariantti.

C Kytketyn Diracin yhtälön epärelativistinen raja

Johdetaan sähkömagneettiseen kenttään kytketystä Diracin yhtälöstä

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu + qA_\mu) - m) \psi = 0$$

epärelativistinen Schrödingerin yhtälö

$$i\partial_t \psi = H\psi$$

Hamiltonin operaattorilla

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) + q\phi,$$

missä liikemääräoperaattori $\mathbf{p} = -i\nabla$ ja ϕ skalaaripotentiali. Yhtälö pitää sisällään magneettisen momentin potentiaalitermin tulokset: pyörimismäärän gyromagneettinen suhde $\gamma = \frac{q}{2m}$ ja $g = 2$, jotka tulee johdettua matkan varrella.

Aloitetaan kirjoittamalla sähkömagneettiseen kenttään kytketty Diracin yhtälö

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m) \psi = 0$$

Schrödingerin yhtälön muodossa (missä Diracin yhtälö on kerrottu vasemmalla termillä γ^0)

$$i\partial_t \psi = (\gamma^0 \gamma^i \Pi_i + q A_0 + m\gamma^0) \psi,$$

missä $\Pi_i := (p_i - q A_i)$ ja $p_i = i\partial_i$. Hamiltonin operaattori on siten

$$\begin{aligned} H &= -\gamma^0 \gamma^i \Pi_i + q A_0 + m\gamma^0 \\ &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{\Pi} + q\phi + m\gamma^0, \end{aligned} \tag{C.1}$$

missä $\alpha^i := \gamma^0 \gamma^i$ ja sisätulona Euklidinen pistetulo $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{\Pi} = \alpha^i \Pi^i = -\alpha^i \Pi_i$.

Gammamatriisien Diracin esityksessä (ks. Liite B) saadaan yhtälössä esiintyville matriiseille esitykset

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \sigma^3 \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \alpha^i &= (\sigma^3 \otimes \mathbf{1})(i\sigma^2 \otimes \sigma^i) = \sigma^1 \otimes \sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä, sekä kirjoittamalla Diracin spinori Weylin spinoreiden suorana summana $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ saadaan Hamiltonin (C.1) Schrödingerin yhtälölle matriisiesitys

$$\begin{aligned}i\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} i\partial_t \varphi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \chi + q\phi \varphi + m \varphi \\ i\partial_t \chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \varphi + q\phi \chi - m \chi. \end{cases}\end{aligned}$$

Diracin yhtälö saatiin purettua kahdeksi toisiinsa kytketyksi osittaisdifferentiaaliyhtälöksi 2-ulotteisille spinoreille.

Tehdään seuraavaksi epärelativistiset approksimaatiot, jolloin spinori χ saadaan annettua φ spinorin avulla. Näin ratkaisun vapausasteet puolittuu neljästä kahteen. Epärelativistisessä approksimaatiossa massa m dominoi kineettistä- ja sähkömagneettista potentiaalienergiaa. Valmistellaan approksimointi massan separoivalla sijoituksella

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

jolla saadaan

$$\begin{aligned}i\partial_t \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ -2\chi_0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} i\partial_t \varphi_0 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \chi_0 + q\phi \varphi_0 \\ i\partial_t \chi_0 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \varphi_0 + q\phi \chi_0 - 2m \chi_0. \end{cases} \quad (\text{C.3})\end{aligned}$$

Tehdään approksimaatiot alempaan yhtälöön. Massan dominoidessa kineettistä energiaa χ_0 muuttuu ajassa hitaasti verrattuna massan suuruuteen

$$|\partial_t \chi_0| \ll m.$$

Massan oletetaan dominoivan myös skalaaripotentialin energiaa, eli

$$|q\phi| \ll m.$$

Näillä approksimaatioilla saadaan ratkaisu yhtälöparin (C.3) χ_0 muuttujalle φ_0 avulla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \varphi_0 + (q\phi - 2m) \chi_0 &= i\partial_t \chi_0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi}}{2m} \varphi_0 + \left[\underbrace{\left(\frac{q\phi}{2m} \right)}_{\approx 0} - 1 \right] \chi_0 &= \underbrace{\left(\frac{i\partial_t \chi_0}{2m} \right)}_{\approx 0} \\ \longrightarrow \chi_0 &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi}}{2m} \varphi_0. \end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön (C.3), saadaan ns. Paulin yhtälö Hamiltonin operaattorilla

$$\begin{aligned} i\partial_t \varphi_0 &= \left(\frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi})^2 + q\phi \right) \varphi_0 \\ \implies H &= \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}))^2 + q\phi \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Tätä saadaan kuitenkin muokattua vielä selkeämpään muotoon. Paulin matriiseille on suoraviivaista laskea kommutaatiorelaatioista identiteetti

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{C.5})$$

mielivaltaisille 2x1 vektoreille \mathbf{a}, \mathbf{b} . Täten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}))^2 &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{i}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot ((i\nabla + q\mathbf{A}) \times (i\nabla + q\mathbf{A})) \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla). \end{aligned}$$

Hamiltonin operaattori operoi kuitenkin spinoriin, ja

$$\nabla \times (\mathbf{A}\phi_0) + \mathbf{A} \times (\nabla\phi_0) = (\nabla \times \mathbf{A})\phi_0,$$

missä $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Nyt Paulin yhtälön Hamiltonin operaattori (C.4) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + q\phi \\ &= \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + q\phi. \end{aligned}$$

Tämä on yksi muotoilu Paulin yhtälön Hamiltonin operaattorille, missä $g = 2$ on jo näkyvillä. Mennään vielä hieman pidemmälle approksimaatioissa, jolloin saadaan haluttu heikoin magneettisen kentän Paulin yhtälölle. Käytetään vektoripotentiaalille ns. symmetristä mitta [16]

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x}, \quad (\text{C.6})$$

jonka mittaehto täyttyy aina, kun

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x} \right) = \mathbf{B} + \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{B}}_{=0} = \mathbf{B}.$$

Oletetaan homogeeninen magneettikenttä, jolloin symmetrisen mitta (C.6) voidaan käyttää. Heikon kentän approksimaatioissa $q^2 \mathbf{A}^2 \approx 0$, jolloin symmetrisellä mitalla ja skalaarikolmitulon syklisyydellä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2 &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}^2 - q \mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{x}) + \underbrace{q^2 \mathbf{A}^2}_{\approx 0} \right) \\ &\approx \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}, \end{aligned}$$

missä $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Hamiltonin operaattori on nyt kokonaisuudessaan

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) + q\phi,$$

missä pyörimismäärän gyromagneettinen suhde $\gamma = \frac{q}{2m}$ ja $g = 2$ ovat selkeästi havaittavissa. Tulos on Paulin yhtälö epärelativistisilla ja heikon sähkömagneettisen kentän approksimaatioilla

$$\begin{aligned} \frac{i\partial_t \chi_0}{2m} &\approx 0 \\ \frac{q\phi}{2m} &\approx 0 \\ q^2 \mathbf{A}^2 &\approx 0, \end{aligned}$$

mistä massatermi on jätetty pois (sijoituksesta (C.2) johtuen). Schrödingerin yhtälön

$$i \partial_t \varphi_0 = H \varphi_0$$

spinoritilan φ_0 kaksi vapausastetta kuvaavat binääristä spin-tilaa.

D Säteilikorjausten epärelativistinen raja

Epärelativisesti määritellyn magneettisen momentin g -tekijä muuttuu, kun otetaan huomioon ulkoisen sähkömagneettisen kentän kvanttitekaaniset S -matriisien teorian korjaustermit. Johdetaan tälle efektiiviselle Diracin yhtälölle, missä on mukana risteysfunktion (1.57) korjaustermit, epärelativistinen raja. Efektiivinen Diracin yhtälö on

$$\left(i\gamma^\mu \left[\partial_\mu - \underbrace{F_1(0)}_{=1} eA_\mu \right] + F_2(0) \frac{e}{4m} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} - m \right) \psi = 0 \quad (\text{D.1})$$

saadaan efektiivisestä Lagrangen tiheydestä (1.61). Dimensiottomat ja reaaliset muototekijät $F_1(\frac{q^2}{m^2})$ ja $F_2(\frac{q^2}{m^2})$ on laitettu tässä jo valmiiksi epärelativistiselle rajalle $\frac{q^2}{m^2} \rightarrow 0$. Muototekijä F_1 renormalisoidaan $F_1(0) = 1$, jotta klassinen teoria saavutetaan $(p' - p)^\mu \rightarrow 0$ rajalla (Pidetään laskussa kuitenkin muoto $F_1(0)$, jotta nähdään samalla miten termi korjaisi klassista teoriaa.) Efektiivisen Diracin yhtälön epärelativistisen rajan johtaminen mukailee liitettä C, missä johdettiin raja samalle likeyhtälölle ilman korjaustermejä. Tarkasteltava Schrödingerin yhtälö on

$$i\partial_t \psi = \left(-i\gamma^0 \gamma^i (\partial_i - ieF_1(0)A_i) + m\gamma^0 - F_2(0) \frac{e}{4m} \gamma^0 F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) \psi. \quad (\text{D.2})$$

Lasketaan ensin viimeinen korjaustermi sähkökenttien $E^i = F_{0i}$ ja magneettikenttien $B^k = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{ij}$ avulla käyttäen gammamatriiseille Diracin esitystä (B.2). Saadaan

$$-F_2(0) \frac{e}{4m} \gamma^0 F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -F_2(0) \frac{e}{4m} \gamma^0 (2F_{0i} \sigma^{0i} + F_{ij} \sigma^{ij}),$$

missä termistä $F_{ij} \sigma^{ij}$ jää jäljelle vain indeksit $i \neq j$ (muut ovat nollia). Diracin esityksellä matriisille $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ saadaan

$$\begin{cases} \sigma^{0i} &= i\sigma^1 \otimes \sigma^i = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^{ij} &= \epsilon_{ijk}(\mathbf{1} \otimes \sigma^k) = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \end{cases}$$

joista alempaan on käytetty Paulin matriisien tulotentiteettiä $\sigma^i \sigma^j \stackrel{i \neq j}{=} i \epsilon_{ijk} \sigma^k$.

Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}
-F_2(0) \frac{e}{4m} \gamma^0 F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} &= -F_2(0) \frac{e}{4m} (\sigma^3 \otimes \mathbf{1}) (2i E^i (\sigma^1 \otimes \sigma^i) - \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} B^k (\mathbf{1} \otimes \sigma^l)) \\
&= F_2(0) \frac{e}{2m} ((\sigma^2 \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}) + (\sigma^3 \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B})) \\
&= F_2(0) \frac{e}{2m} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} & -i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \\ i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Nyt mukaillemalla liitteen C laskua, ja sijoittamalla $\psi = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}$ Schrödingerin yhtälöön (D.2) saadaan yhtälöparin (C.3) sijaan

$$\begin{cases} i\partial_t \varphi_0 = \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}} - F_2(0) \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot i\mathbf{E} \right) \chi_0 + (-eF_1(0)\phi + F_2(0) \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) \varphi_0, \\ i\partial_t \chi_0 = \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}} + F_2(0) \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot i\mathbf{E} \right) \varphi_0 + (-eF_1(0)\phi - F_2(0) \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + 2m) \chi_0 \end{cases}, \tag{D.4}$$

missä merkitään

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}} := \mathbf{p} + eF_1(0)\mathbf{A} = -i\nabla + eF_1(0)\mathbf{A}.$$

Jakamalla jälkimmäinen yhtälöistä (D.4) termillä $2m$ ja käyttämällä epärelativista massan dominoivaa approksimaatiota

$$\frac{i\partial_t \chi_0}{2m} \approx 0, \quad \frac{e\phi}{2m} \approx 0, \quad F_2(0) \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \approx 0, \quad F_2(0) \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot i\mathbf{E} \approx 0,$$

saadaan

$$\chi_0 \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}}{2m} \varphi_0.$$

Nyt sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön (D.4), saadaan Hamiltonin operaattori

$$\begin{aligned}
i\partial_t \varphi_0 &= \left(\frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}})^2 - \underbrace{F_2(0) \frac{e}{4m^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot i\mathbf{E})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}})}_{\approx 0} - eF_1(0)\phi + F_2(0) \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right) \varphi_0 \\
\implies H &= \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}})^2 - eF_1(0)\phi + F_2(0) \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B},
\end{aligned}$$

joka vastaa Paulin yhtälöä (C.4) korjaustermeillä.

Tästä eteenpäin yhtälöiden johtaminen etenee samalla tavalla kuin liitteessä C. Käyttäen Paulin matriisien identiteettiä (C.5), symmetristä mittaa (C.6) sekä heikon kentän approksimaatiota $e^2 F_1(0)^2 \mathbf{A}^2 \approx 0$, saadaan liikeyhtälön Hamiltonin operaattoriksi (ilman massatermiä)

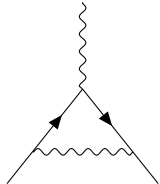
$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{e}{2m} \mathbf{B} \cdot \left[\underbrace{F_1(0)}_{=1} \mathbf{L} + \underbrace{2(F_1(0) + F_2(0))}_{\equiv g} \mathbf{S} \right] - e \underbrace{F_1(0)}_{=1} \phi. \quad (\text{D.5})$$

Saatiin korjatut muototekijöistä riippuva g -tekijä. Koska $F_1(0) = 1$, korjaus saadaan vain spinin g -tekijälle, jolle määritellään anomaalinen osa

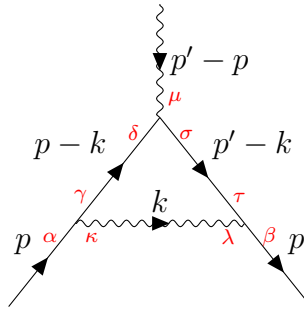
$$a := \frac{g - 2}{2} \equiv F_2(0).$$

E Schwingerin korjaustermin $\frac{\alpha}{2\pi}$ lasku

Esitetään lasku ensimmäiselle epätriviaalille anomaalisen magneettisen momentin kertaluokalle $a^{[1]} \propto \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. Tämä universaali Schwingerin korjaustermi lasketaan matriisialkiosta (1.63)

$$i\mathcal{T}_{fi}^{\mu[1]} = \text{diagram} = -ie\bar{u}(p')\Gamma^{\mu[1]}(p', p)u(p).$$


Merkitään diagrammiin (1.63) liikemäärät, päätetään fotonien liikemäärien suunnat, ja nimetään verteksit



jolloin liikemääräavaruuden Feynmanin säännöillä saadaan 1PI-verteksifunktio

$$\begin{aligned} -ie(\Gamma^{\mu[1]}(p', p))_{\beta\alpha} &= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\kappa\lambda}(k) (\gamma^\lambda)_{\beta\tau} S_F(p')_{\tau\sigma} (\gamma^\mu)_{\sigma\delta} S_F(p)_{\delta\gamma} (\gamma^\kappa)_{\gamma\alpha} \\ &= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\kappa\lambda}(k) [\gamma^\lambda S_F(p') \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\kappa]_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} -ie\Gamma^{\mu[1]}(p', p) &= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \left[\frac{\eta_{\kappa\lambda}}{k^2 + i\epsilon} + (\xi - 1) \frac{k_\kappa k_\lambda}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right] \\ &\quad \times \gamma^\lambda \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\kappa. \end{aligned}$$

Feynmanin mitan $\xi = 1$ valinnalla matriisialkioksi (1.63) saadaan

$$i\mathcal{T}_{fi}^{\mu[1]} = -e^3 \bar{u}(p') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\lambda (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\lambda}{[k^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} u(p).$$

Kuten muototekijöiden hajotelman (1.57) johtamisessa, matriisialkion indegran-
din osoittajaan voidaan käyttää gammamatriisien antikommutaatiota termien \not{p}' ja
 \not{p} siirtelyyn, sekä lopulta Diracin liikeyhtälöitä $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m$ ja $\not{p}u(p) = mu(p)$.
Samalla käytetään massakuoren yhtälöitä $p'^2 = p^2 = m^2$, kunnes saadaan

$$\begin{aligned} N^\mu &= \gamma^\lambda (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\lambda \\ &= 4 \left\{ \gamma^\mu \left[(p' - k) \cdot (p - k) - \frac{k^2}{2} \right] + (p' + p - k)^\mu \not{k} - mk^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Nimittäjä hajoitetaan ns. Feynmanin parametrisaatiolla

$$\frac{1}{[k^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{D^3},$$

missä

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 + i\epsilon) + y((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon) + z((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon) \\ &= k^2 - 2k \cdot (yp' + zp) + i\epsilon \\ &= (k - yp' - zp)^2 - (-yzq^2 + (1 - x)^2 m^2) + i\epsilon. \end{aligned}$$

Tässä käytettiin Diracin deltafunktion $\delta(x + y + z - 1)$ ehtoa $x + y + z = 1$ ja
 $p'^2 = p^2 = m^2$. Tekemällä muuttujenvaihto integraaliin

$$k^\mu \rightarrow k'^\mu = k^\mu - yp'^\mu - zp^\mu,$$

missä $d^4k \rightarrow d^4k' = d^4k$, saadaan nimittäjän D termi siistittyä haluttuun neliölliseen
muotoon

$$D = k'^2 - \Delta + i\epsilon,$$

missä $\Delta = -yzq^2 + (1 - x)^2 m^2$. Tätä termiä voidaan mieltää efektiivisenä massa-
terminä $\Delta > 0$, sillä sirontaprosessissa $q^2 < 0$.

Muuttujanvaihdot vaikuttavat toki myös nimittäjään (E.1), joka saadaan yhtä-
löiden $k^\mu k^\nu = \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} k^2$ ja $x + y + z = 1$, liikemäärien muuttujenvaihdon

$$P^\mu = p'^\mu + p^\mu$$

$$q^\mu = p'^\mu - p^\mu,$$

sekä työläiden ryhmittelyiden jälkeen muotoon

$$\frac{1}{2}N^\mu = \gamma^\mu \left[\frac{k'^2}{2} - (1-y)(1-z)q^2 - (1-2x-x^2)m^2 \right] \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} &+ P^\mu x(1-x)m + q^\mu(y-z)(x-2)m \\ &+ k'^\alpha \left\{ [(1-x)P - (y-z)q]_\alpha + \gamma_\alpha [P^\mu(1+x) - q^\mu(y-z)] \right\} \\ &+ 2k'^\mu(x-2)m. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Oleellista on huomata, että alimman rivit termit menevät nollassi. Tämä johtuu siitä, että ne ovat verrannollisia integroimismuuttujaan k'^α (tai k'^μ), ja integrointi-järjestystä vaihtamalla saadaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'^\mu}{D^3} = 0.$$

Integraali on nolla, sillä integrandi on pariton funktio (osoittaja pariton ja nimittäjä parillinen).

Osoittajan (E.3) liikemäärään q^μ verrannollinen termi $q^\mu(y-z)(x-2)m$ tulee olla nolla, joka on selvää jo luvun 1.4.1 Wardin identiteetistä $q_\mu \mathcal{T}_{fi}^\mu = 0$, joka eliminoi q^μ verrannollisen termin muototekijähajotelmasta (1.55). Integraalissa tämä nähdään vaihtamalla integraalimuuttujia $y \leftrightarrow z$ keskenään, mikä muuttaa tämän termin merkkiä, mutta ei nimittäjää. Täten tämä integraali on negatiivinen itsestään eli nolla.

Nollasta poikkeavat osoittajan termit ovat siis

$$\frac{1}{2}N^\mu = \gamma^\mu \left[\frac{k'^2}{2} - (1-y)(1-z)q^2 - (1-2x-x^2)m^2 \right] + P^\mu x(1-x)m,$$

mistä sijoittamalla Gordonin identiteetti (1.56), saadaan

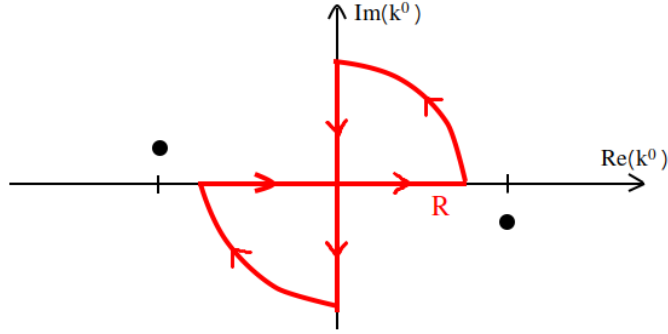
$$\frac{1}{2}N^\mu = \gamma^\mu \left[\frac{k'^2}{2} - (1-y)(1-z)q^2 - (1-4x+x^2)m^2 \right] - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu x(1-x)m.$$

Verteksifunktio on

$$\Gamma^{\mu[1]}(p', p) = -ie^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{2N^\mu}{D^3},$$

josta muototekijöiden hajotelmalla (1.57) on helppo eritellä

$$F_2^{[1]} \left(\frac{q^2}{m^2} \right) = i8e^2m^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) x(1-x) \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4 D^3}$$



Kuva 27. Wickin rotaatiossa käytetään hyödyksi kompleksianalyysin tulosta analyttisille funktioille, jotka häviävät äärettömydessä. Suljettu polkuintegraali on nolla, jos polku ei kierrä singulariteetteja. Kaari-integraalit häviävät äärettömydessä $R \rightarrow \infty$, ja integraali voidaan kääntää reaaliakselilta imaginaariakselille. Tämän jälkeen voidaan laittaa $\epsilon \rightarrow 0$, ja integraalin laskeminen on suoraviivaista muuttujanvaihdolla $k^0 \rightarrow ik^0$, ns. euklidisaatiolla.

Wickin rotaation avulla neliulotteinen integraali muuttujien k'^μ suhteen voidaan laskea, ja se on esitelty kuvatekstissä 27. Käytetään integraaliin Wickin rotaatiota:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk'^0 f(k') = \int_{-i\infty}^{i\infty} dk'^0 f(k') = i \int_{-\infty}^{\infty} dk'^0 f(ik'_0, \mathbf{k}'),$$

ja muuttujanvaihtoa $k' \rightarrow k_E = (-ik'^0, \mathbf{k}')$. Lisäksi merkitään Euklidista sisätuloa $k_E^2 := k_E^\mu k_E^\mu$ (jolloin $k'^2 = -k_E^2$). Saadaan

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k'^2 - \Delta + i\epsilon)^3} &= i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-k_E^2 - \Delta)^3} \\ &= (-1)^3 \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty dR \frac{R^3}{(R^2 + \Delta)^3} \\ &= \frac{-i}{32\pi^2 \Delta}. \end{aligned} \tag{E.4}$$

missä vaihdettiin integraali neliulotteiseen pallokoordinaatteihin yksikköpallon kolmeulotteisella hyperpinta-alalla $\int d\Omega_4 = 2\pi^2$.

Sijoitetaan tulos (E.4) muototekijään F_2 , ja laitetaan efektiivinen massa epärelativistiselle rajalle $q^2 \rightarrow 0$, $\Delta = -yzq^2 + (1-x)^2m^2 \rightarrow (1-x)^2m^2$, jolloin muototekijän integraalista saadaan äärellinen

$$\begin{aligned} F_2^{[1]}(0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x+y+z-1) \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}, \end{aligned} \tag{E.5}$$

missä α on hienorakennevakio $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

F Larmorin prekessio

Homogeenisessa ulkoisessa magneettikentässä magneettinen momentti saa liikeyhtälön ratkaisuna prekession, ns. Larmorin prekession, missä magneettinen momentti kiertyy magneettikentän akselin ympäri tasaisella kulmanopeudella. Tässä liitteessä ratkaistaan Larmorin prekession kulmanopeus tarkasteltavan kappaleen (yleensä hiukkasen) yleiselle kulmaliikemäärälle \mathbf{J} , ja ratkaisuun voidaan sijoittaa joko pyörimismäärän- tai spinin gyromagneettinen suhde.

Luvun 1 alkujohdannossa määriteltiin oleelliset suureet ratkaisua varten. Systemin potentiaalienergia on (1.2)

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B},$$

ja vääntömomentti (1.3)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

Kappaleen ei pääse potentiaalin minimitilaan $\boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{B}$ kulmaliikemääränsä vuoksi, vaan vääntömomentti $\boldsymbol{\tau} = \partial_t \mathbf{J}$ aiheuttaa prekession minimin ympäri. Tämä nähdään kirjoittamalla magneettinen momentti $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J}$, missä γ on gyromagneettinen suhde (1.1), jolloin saadaan liikeyhtälö

$$\partial_t \mathbf{J} = \gamma \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (\text{F.1})$$

Ristitulon vuoksi kulmaliikemäärävektori muuttuu aina ortogonaalisesti \mathbf{J} ja \mathbf{B} vektoreihin nähden, ja näin aiheuttaa tasaisen prekession \mathbf{B} -akselin ympäri. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö (F.1), jotta prekessio selviää eksplisiittisesti. Olkoon magneettikenttä on z -akselin suuntainen. Suoralla laskulla saadaan

$$\partial_t \mathbf{J} = -\gamma B_z \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{J} = (-\gamma B_z) \mathfrak{R}_z \mathbf{J} = \omega_L \mathfrak{R}_z \mathbf{J},$$

missä merkitään jo valmiiksi $\omega_L = -\gamma B_z$, sekä \mathfrak{R}_z on (reaalinen) $\mathfrak{so}(3)$ rotaatioalgebran generaattori z -akselin suhteen. Ratkaisu saadaan rotaatioalgebran eksp-

mentiaalikuvauksesta $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{SO}(3)$:

$$\mathbf{J}(t) = \exp(\omega_L \mathfrak{R}_z t) \mathbf{J}(0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_L t) & -\sin(\omega_L t) & 0 \\ \sin(\omega_L t) & \cos(\omega_L t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J}(0) = R_z(\omega_L t) \mathbf{J}(0),$$

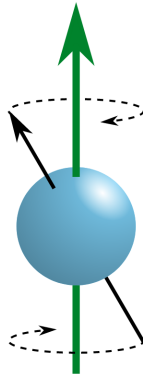
missä $R_z(\theta) \in \text{SO}(3)$ on generaattoria $\mathfrak{R}_z \in \mathfrak{so}(3)$ vastaava z -akselin rotaatio, ja $\omega_L = -\gamma B_z$ on Larmorin prekession kulmanopeus positiiviseen kiertosuuntaan. Rotaatio on siis magneettikentän ympäri, ja Larmorin prekession kulmanopeus

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\gamma \mathbf{B}$$

Sijoittamalla spin-operaattoria vastaava gyromagneettinen suhde (1.4), saadaan

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\gamma \mathbf{B} = -g \frac{q}{2m} \mathbf{B}. \quad (\text{F.2})$$

Koska g -tekijä on positiivinen, spin-prekession kiertosuunnan määrittää hiukkasen varauksen etumerkki. Kuvassa 28 esitetään hiukkasen spinin magneettisen momentin Larmorin prekessio.



Kuva 28. Vihreä nuoli kuvaa ulkoisen magneettikentän \mathbf{B} ja Larmorin prekession kulmanopeuden $\boldsymbol{\omega}_L$ vastakkaista suuntaa (tässä $q > 0$). Musta nuoli kuvaa hiukkasen magneettista momenttia $\boldsymbol{\mu}$ ja sen prekessiota akselin ympäri. [Kuvan lähdesivu: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Precession_in_magnetic_field.svg (9.5.2023)]

G Thomasin prekessio

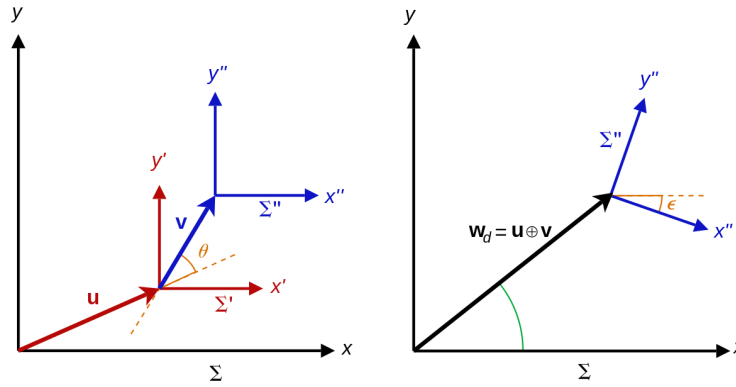
Lorentzin boostit eivät muodosta Lorentzin muunnoksissa aliryhmää, kuten spatioaalisen avaruuden rotaatiot. Tämä on havaittavissa liitteen A Lorentzin algebran $\mathfrak{so}^+(1, 3)$ määrittävästä generaattoreiden kommutaatiorelaatioista (A.10)

$$[\mathbf{J}^i, \mathbf{J}^j] = i\epsilon_{ijk} \mathbf{J}^k,$$

$$[\mathbf{J}^i, \mathbf{K}^j] = i\epsilon_{ijk} \mathbf{K}^k,$$

$$[\mathbf{K}^i, \mathbf{K}^j] = -i\epsilon_{ijk} \mathbf{J}^k,$$

missä $\{\mathbf{J}^i\}_{i=1}^3$ ovat liitteessä A määritetyt rotaatiogeneraattorit ja $\{\mathbf{K}^i\}_{i=1}^3$ boostigeneraattorit. Ei-yhdensuuntaisten boostien yhdistelmä ei ole boosti vaan rotaation ja boostin kombinaatio. Boostien aiheuttamaa rotaatiota kutsutaan Wignerin rotaatioksi. Kiihtyvää koordinaatistoa tarkastellessa differentiaalisilla boosteilla, saadaan jatkuva rotaatio ajan suhteen, ns. Thomasin prekessio, koordinaatistojen välillä.



Kuva 29. Kuvassa \mathbf{u} ja \mathbf{v} kuvaavat kahta boostia eri spatiaalisiin suuntiin $\mathbf{u} \not\parallel \mathbf{v}$ sekä \mathbf{w} näiden vektoreiden summaa. Ensimmäinen koordinaatisto Σ on merkitty mustalla, ensimmäisen boostin jälkeinen Σ' punaisella ja molempien boostin jälkeinen Σ'' sinisellä. Vasemmalla on esitetty koordinaatistomuunnokset boosti kerrallaan ja oikealla molempien boostien yhdistelmämuunnos. Koska boostien välinen kulma $\theta \neq 0$, saadaan nolosta poikkeava Wignerin rotaatio $\epsilon \neq 0$. [Kuvan lähdesivu: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thomas_rotation.svg (9.5.2023)]

Wignerin rotaation olemassaolo on selkeää tarkasteltaessa boostin aiheuttamaa pituuskontraktiota. Boosti lyhentää etäisyyksiä suuntansa komponentissa. Olete-

taan spatiaaliset pisteet A , B ja C , jotka eivät ole samalla suoralla. Ensimmäinen boosti on suuntaan $\mathbf{v} = \vec{AB}$. Alkuperäinen- ja boostattu koordinaatiosto ovat pituuskontraktion vuoksi eri mieltä boostin C suunnasta. Kahden boostin yhdistelmässä on siis oltava (Wignerin) rotaatio mukana, joka nähdään kuvassa 29.

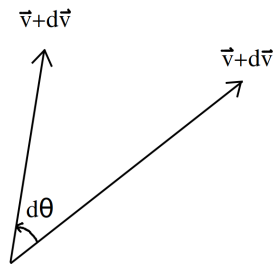
Tarkastellaan seuraavaksi boostia suuntaan $\mathbf{v} = \vec{AB}$, jonka jälkeen tehdään differentiaalisen nopeuden boosti eri suuntaan. Tästä on saadaan differentiaalinen Wignerin rotaatio $d\boldsymbol{\theta}$, mistä jakamalla dt termillä saadaan johdettua Thomasin prekession kulmanopeus $\boldsymbol{\omega}_T = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$. Boostattuja koordinaatteja merkitään yläpilkulla, ja esimerkiksi $\mathbf{v}' = 0$. Wignerin rotaation suuntavektori $d\boldsymbol{\theta}$ saadaan oikean käden säännöllä kulmaan nähden. [102]

Wignerin rotaatio on vektoreiden $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ ja $\mathbf{v} + d\mathbf{v}'$ erotuskulma, kuten kuvassa 30 on esitetty. Kulma $d\theta$ saadaan ratkaistua ristitulon identiteetistä

$$|(\mathbf{v} + d\mathbf{v}') \times (\mathbf{v} + d\mathbf{v})| = |\mathbf{v} + d\mathbf{v}'||\mathbf{v} + d\mathbf{v}| \sin(d\theta).$$

Sinifunktion $\sin(\theta)$ lineaarinen termi on θ , eli differentiaalisella muuttujalla $\sin(d\theta) = d\theta$. Lisäksi vektoreiden pituudet ovat ilman infinitesimaalisia termejä $|\mathbf{v}| = v$, joten saadaan Wignerin rotaatio

$$d\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{v^2}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}') \times (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) = \frac{1}{v^2}(\mathbf{v} \times d\mathbf{v} - \mathbf{v} \times d\mathbf{v}'). \quad (\text{G.1})$$



Kuva 30. Havainnollistus infinitesimaalisen Wignerin rotaation muuttujista Thomasin prekession johtamisessa.

Laitetaan seuraavaksi kaikki yhtälön (G.1) termit alkuperäiseen (ei-pilkulliseen) koordinaatistoon. Tulee siis selvittää nopeustermi $d\mathbf{v}'$, jonka kohtisuora komponentti

vaikuttaa ristitulotermiin $\mathbf{v} \times d\mathbf{v}'$. Mielivaltainen nopeusvektori \mathbf{u} voidaan jakaa boostin \mathbf{v} yhdensuuntaiseen ja kohtisuoraan komponenttiin $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$, joille pätee $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times (\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u}_{\perp}$. Kohtisuoran nopeuskomponentin käänteismuunnos boostissa on

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_{\perp} &= \frac{d\mathbf{r}'_{\perp}}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}_{\perp}/dt}{dt'/dt} = \frac{d\mathbf{r}_{\perp}/dt}{\gamma d(t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/dt} \\ &= \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{\gamma(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}, \end{aligned}$$

missä $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ on boostin Lorentzin tekijä. Määrittämällä $\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ (josta $\mathbf{u}' = d\mathbf{v}'$), saadaan

$$d\mathbf{v}'_{\perp} = \frac{(\mathbf{v} + d\mathbf{v})_{\perp}}{\gamma(1 - (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})} = \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{\gamma(1 - (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})},$$

ja ristitulotermistä

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{v}' = \mathbf{v} \times d\mathbf{v}'_{\perp} = \mathbf{v} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{\gamma(1 - (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})} \right) = \gamma \mathbf{v} \times d\mathbf{v},$$

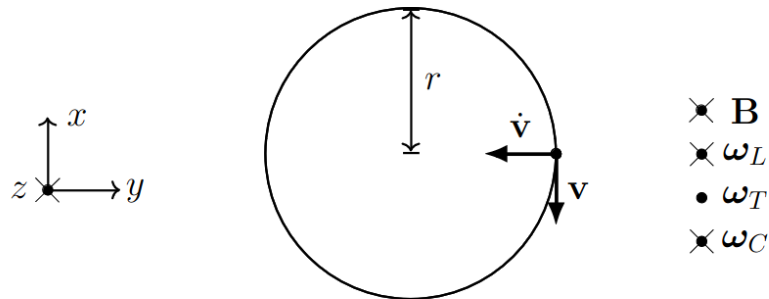
missä nimittäjän differentiaalinen korjaus on pieni, eli $|d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| \ll \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$. Sijoittamalla saatu ristitulotermi differentiaaliseen Wignerin rotaation (G.1), jakamalla dt termillä ja kääntämällä ristitulo, saadaan Thomasin prekession kulmanopeus [103, 102]

$$\boldsymbol{\omega}_T = \left(\frac{\gamma - 1}{v^2} \right) \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}. \quad (\text{G.2})$$

Thomasin prekessio havaitaan siis vain koordinaatistoissa, missä kappaleella on nollasta poikkeavat ja ei-yhdensuuntaiset nopeus- ja kiihtyvyyksvektorit, mistä seuraa $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} \neq 0$. Lisäksi vaaditaan relativistiset nopeudet, jotta $\gamma - 1 \not\approx 0$. Myonin anomaalista g -tekijää mitataan varastorengaskokeissa, missä myonin koordinaatisto kiertyy Thomasin prekession vuoksi. Kokeessa mitataan Larmorin prekessiota (F.2), johon Thomasin prekessio vaikuttaa myonin relativistisen ympyräliikkeen vuoksi. Varastorengaskokeiden spin-prekessiota käsitellään luvussa 2.3.2, ja spin-prekession kulmanopeus lasketaan liitteessä H.

H Spin-prekessio varastorengaskokeessa

Tässä liitteessä lasketaan homogeenisen magneettikentän varastorengaskaassa liikkuvan varatun hiukkasen spin-prekessio, johon vaikuttaa Larmorin prekessio ω_L ja Thomasin prekessio ω_T . Lopuksi laboratoriokoordinaatiston spin-prekessiota ω_S verrataan hiukkasen ympyräliikkeen kulmanopeuteen ω_C , joiden erotuksena saadaan anomaaliseen g -tekijään verrannollinen suure ω_a . Tarkasteltava systeemi on esitetty kuvassa 31.



Kuva 31. Varastorengaskoe, jota käytetään myonin spin-prekession ja siten anomaalisen g -tekijän mittaukseen. Ristillä merkityt vektorit ovat positiivisen z -akselin suuntaan. Kuvassa magneettikentän suunta on valittu siten, että varaus $q = -e$ varastoituu ympyräliikkeeseen renkaaseen.

Oletetaan homogeeninen magneettikenttä \mathbf{B} ja sähkökenttä \mathbf{E} laboratoriokoordinaatistossa, joka vastaa todellista mittausta. Ideaalitulanteessa sähkökenttä voisi olla nolla, mutta käytännössä sähkökenttää käytetään hiukkasratojen vertikaaliseen keskittämiseen. Sähkö- ja magneettikentille pätee $\mathbf{v} \perp \mathbf{E}$ ja $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$. Merkitään pilkuilla hiukkasen lepokoordinaatiston suureita, eli esimerkiksi $\mathbf{v}' = 0$.

Kiertoliikkeen kulmanopeus ω_C saadaan laskettua yhdistämällä Lorentzin voimalaki

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

ja relativistinen liikelaki ($\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{v}}$)

$$\mathbf{F} = m\gamma\dot{\mathbf{v}},$$

missä $\dot{\mathbf{v}}$ on ympyräliikkeen keskeiskiihtyvyys. Saadaan

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m\gamma}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

joka sijoitetaan kierto liikkeen kulmanopeuteen

$$\boldsymbol{\omega}_C = \frac{1}{v^2} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} \quad (\text{H.1})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{m\gamma v^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ &= \frac{q}{m\gamma v^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E} + (\underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}_{=0} \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B})) \\ &= -\frac{q}{m\gamma} \left(\mathbf{B} - \frac{1}{v^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right) \\ &= -\frac{q}{m\gamma} \left(\mathbf{B} - \left(1 + \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

Lasketaan seuraavaksi Larmorin prekession kulmanopeus tähän relativistiseen systeemiin. Liitteessä F laskettiin ulkoiseen homogeeniseen magneettikenttään verrannollinen spinin Larmorin prekession kulmanopeus (F.2)

$$\boldsymbol{\omega}_L = -g \frac{q}{2m} \mathbf{B}.$$

Relativistisesti liikkuva hiukkanen kokee kuitenkin laboratoriokoordinaatiston sähkökentän osittain magneettikenttänä, joten Larmorin prekessio tulee laskea hiukkasen lepokoordinaatistossa. Sähkö- ja magneettikenttien Lorentzin muunnokset ovat [11]

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}_{=0}, \quad (\text{H.3})$$

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}_{=0}. \quad (\text{H.4})$$

Larmorin prekession kulmanopeudeksi (F.2) saadaan hiukkasen lepokoordinaatistossa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}'_L &= -g \frac{q}{2m} \mathbf{B}' \\ &= -g \frac{q\gamma}{2m} (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})\end{aligned}$$

ja siten laboratoriokoordinaatistossa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_L &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{\gamma dt'} = \frac{\boldsymbol{\omega}'_L}{\gamma} \\ &= -g \frac{q}{2m} (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}).\end{aligned}$$

Thomasin prekession kulmanopeus selvitetiin ja laskettiin liitteessä G, missä saatiin yleinen ratkaisu (G.2)

$$\boldsymbol{\omega}_T = \left(\frac{\gamma - 1}{v^2} \right) \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}.$$

Ympyräliikkeessä Thomasin prekession kulmanopeus on suoraan verrannollinen kulmanopeuteen (H.1), eli

$$\boldsymbol{\omega}_T = (1 - \gamma) \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{v^2} = (1 - \gamma) \boldsymbol{\omega}_C.$$

Ottamalla koordinaatiston kiertymisen Thomasin prekessio huomioon Larmorin preksiossa, saadaan spin-prekession kulmanopeus laboratoriokoordinaatistossa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_S &= \boldsymbol{\omega}_L + \boldsymbol{\omega}_T \\ &= -g \frac{q}{2m} (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) + (1 - \gamma) \boldsymbol{\omega}_C.\end{aligned}\tag{H.5}$$

Lasketaan spin-prekession kulmanopeuden $\boldsymbol{\omega}_S$ (H.5) ja ympyräliikkeen kulmanopeuden $\boldsymbol{\omega}_C$ (H.2) erotus [71, 69]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_a &= \boldsymbol{\omega}_S - \boldsymbol{\omega}_C \\ &= -g \frac{q}{2m} (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \gamma \boldsymbol{\omega}_C \\ &= -\frac{q}{m} \left(\frac{g-2}{2} \mathbf{B} - \left(\frac{g-2}{2} + \frac{1}{1-\gamma^2} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right) \\ &= -\frac{q}{m} \left(a \mathbf{B} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right).\end{aligned}\tag{H.6}$$

Ratkaistaan vielä hiukkasen tangenttivauhti v , jolla suure $\boldsymbol{\omega}_a$ ei riipu sähkökentästä [69, 5]. Sijoitetaan anomaaliseen g -tekijään myonille standardimallista laskettu arvo (2.25)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2 - 1} &= a_\mu \\ \Leftrightarrow \gamma &= \sqrt{\frac{1 + a_\mu}{a_\mu}} \approx 29,3 \\ \Leftrightarrow \frac{v}{c} &= \frac{1}{\sqrt{a_\mu + 1}} \approx 0,99942 \\ \Leftrightarrow p_{\text{magic}} &= m_\mu \gamma v \approx 3,09 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Viimeisellä rivillä laskettiin vauhtia vastaava liikemäärä myoneille, jota kutsutaan taikaliikemääräksi (engl. magic momentum), koska tällä liikemäärällä sähkökentän vaikutus kulmanopeuteen $\boldsymbol{\omega}_a$ on nolla. Eli yhtälöstä (H.6) saadaan myoneille tulos [71]

$$\boldsymbol{\omega}_a = -\frac{q}{m} \left[a_\mu \mathbf{B} - \left(a_\mu + \frac{1}{1 - \gamma^2} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right]^{p \approx 3,09 \text{ GeV}} \simeq -a_\mu \frac{q}{m} \mathbf{B}. \quad (\text{H.7})$$