Sähködynamiikka kaarevassa avaruudessa

Luk-tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikka
2026
Aaro Alinen
Tarkastaja:
Iiro Vilja

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

Alinen Aaro Sähködynamiikka kaarevassa avaruudessa

Luk-tutkielma, 19 s.
Teoreettinen fysiikka

Sähködynamiikan tarkoituksena on yhdistää klassisen sähkömagnetismin teoria yleisen suhteellisuusteorian geometriseen kuvaukseen ajasta ja avaruudesta. Tutkielmassa näytetään, miten Maxwellin yhtälöt yleistyvät kaareviin avaruuksiin koordinaattivapaasti sekä yleisten koordinaattien formalismilla. Lisäksi pohditaan millaisiin tarkoituksiin formalismit soveltuvat ja mitkä niiden hyödyt ovat. Lopuksi näytetään suhteellisuusteoreettisen tarkastelutavan varsinainen hyöty, kun lasketaan sähkömagneettisen kentän tuloksia tyhjiössä määritellyille mustien aukkojen eri metriikoille. Näitä ovat Schwarzschildin, Reissner-Nordströmin sekä Kerr-Newmanin metriikka.

Asiasanat: Koordinaattivapaa formalismi, yleiset koordinaatit, Maxwellin yhtälöt

Sisällys

Johdanto

Sähködynamiikan nykyisen muotoilun perusta on Albert Einsteinin vuonna 1905 julkaisemasta paperista [1], jossa hän osoitti, että valon vakionopeuden takia aika ja paikka ovat suhteellisia suureita, jotka vaihtelevat eri nopeuksilla liikkuvien havaitsijoiden suhteen Lorentz-muunnoksien mukaisesti. Esimerkiksi havaitsijan $\mathbf{x}$ suhteen nopeudella v liikkuvan havaitsijan $\mathbf{x}'$ koordinaattimuutos on [2]

$$t' = \gamma(t - \frac{vx^1}{c^2}) \tag{1}$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - vt), \tag{2}$$

missä

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Koordinaattimuutokseen liittyy siis vastaava muutos ajassa, joka varmistaa, että valonnopeus pysyy vakiona.

Tätä ennen oli pyritty sovittamaan Maxwellin yhtälöt Newtonilaiseen mekaniikkaan, jossa koordinaattimuunnokset tehtiin Galilei-muunnoksilla. Se tuotti kuitenkin ongelmia, koska Galilei-muunnoksissa valonnopeus vaihtelisi eri inertiaalikoordinaatistoissa, ja täten on olemassa jokin erityinen inertiaalikoordinaatisto, jossa valonnopeus on Maxwellin yhtälöiden ennustama. Einstein osoitti, että kaikki inertiaalikoordinaatistot ovat tasa-arvoisessa asemassa, ja täten kaikissa mitataan sama arvo valonnopeudelle. Tämän johdosta aika ja paikka ovat kytkeytyneitä toisiinsa, joten aikaa käytetään yhtenä parametrina koordinaatistoissa $x^\mu = (x^0,x^1,x^2,x^3)$, missä $x^0 = t$. Koska Maxwellin yhtälöt ennustivat oikein valon vakionopeuden ja ne ovat määritelty tämän puitteissa, ei niihin tarvittu uudistuksia erityisen suhteellisuusteorian myötä, vaan ne ovat täysin toimivia myös relativistisessa viitekehyksessä.

Maxwellin yhtälöiden tulokset eivät kuitenkaan suoraan yleisty kaareviin avaruuksiin, joten siksi on tarpeellista muotoilla yhtälöt koordinaattivapaasti ja yleisillä koordinaateilla. Näin saadaan yleistettyä sähkömagnetismin tuloksia ja on mahdollista tehdä laskutoimituksia kaarevissa avaruuksissa.

1 Indeksivapaa esitystapa mielivaltaisella monistolla

1.1 Peruskäsitteitä

Yleisen suhteellisuusteorian mukaan energia kaareuttaa avaruutta, mikä vaikuttaa vääjäämättä myös sähkömagneettisten ilmiöiden todelliseen luonteeseen. Ilmiöiden tarkastelu tietyn havaitsijan suhteen avaruudessa ei anna kokonaiskuvaa vuorovaikutuksista kaarevassa avaruudessa, minkä vuoksi on hyödyllistä tarkastella vuorovaikutuksia koordinaattivapaasti. Tällöin lait eivät riipu tietystä avaruuden metriikasta, joten ilmiöiden taustalla oleva geometria korostuu. Näin muotoiltuna lait ovat päteviä kaikissa mahdollisissa avaruuden metriikoissa.

Koordinaattivapaa formalismi edellyttää tensoreiden ja niistä muodostettujen differentiaalimuotojen käyttöä. Ne ovat topologisia suureita, joten ne eivät riipu avaruuden metriikasta ja ovat siksi perusta yleisen formalismin muodostamisessa. Myöhemmin voidaan kaavoihin liittää tietty avaruudellinen metriikka, joka määrittää kaarevassa avaruudessa etäisyydet ja kulmat.

Tensoreilla voidaan kuvata esimerkiksi vektorikenttien muodostamaa kokonaisuutta avaruudessa tai avaruuden metriikoita. Ne ovat yleisessä muodossaan [2]

$$T = \sum T^{i_1,\dots,i_k}{}_{j_1,\dots,j_l} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}, \tag{3}$$

missä $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ovat differentiaaligeometriassa vektoreita, jotka muodostavat tensorin tangenttiavaruuden ja dx^j ovat kovektoreja, jotka muodostavat duaalisen kotangenttiavaruuden.

Differentiaalimuodot ovat antisymmetrisiä tensorikenttiä, joilla voidaan kuvailla kappaleiden geometrisia ominaisuuksia, kuten vektorikenttiä tai tilavuuksia. Antisymmetrisyys on tärkeä ominaisuus, joka takaa, että differentiaalimuodoilla on orientaatio avaruudessa. Tämän hyöty ilmenee sähkömagneettisten suureiden määrittelyssä. [2]

$$\omega = \sum_{\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_l} \omega_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_l} \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_l}, \tag{4}$$

missä

$$dx^{\mu_i} \wedge dx^{\mu_k} = dx^{\mu_i} \otimes dx^{\mu_k} - dx^{\mu_k} \otimes dx^{\mu_i}.$$

Differentiaalimuotoja tarvitaan integroimisalueiden määrittelyyn. [3] Esimerkiksi yksiulotteista polkua pitkin integroitava suure on tutusti 1-muoto eli differentiaali $\mathrm{d}x$. Vastaavasti n-ulotteisen avaruuden ylitse integroimiseen käytetään n-muotoa $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Sovinnon mukaisesti kiilatulo jätetään kuitenkin merkitsemättä integraaleista.

Differentiaalimuodoilla laskemiseen tarvitaan eri operaattoreita, jotka muuttavat differentiaalimuotojen astetta. Ensimmäinen operaattori on ulkoinen derivaatta, jossa on osittaisderivaatta ja se kasvattaa differentiaalimuodon ω astetta $\Lambda^l(\mathcal{M}) \to \Lambda^{l+1}(\mathcal{M})$ [2] , missä $\mathcal{M}$ on n-ulotteinen monisto

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{l!} \sum_{j,j_1,\ldots,j_l=1}^{n} \frac{\partial \omega_{j_1,j_2,\ldots,j_l}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}. \tag{5}$$

Toinen tärkeä operaattori on Hodgen $\star$-operaattori, joka muuttaa p-asteisen differentiaalimuodon $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ n-p -asteiseksi differentiaalimuodoksi $\star\omega \in \Lambda^{n-p}(\mathcal{M})$ [4]

$$\star\omega = \frac{1}{(n-p)!} \omega^{\mu_1,\cdots,\mu_p} \sqrt{|\det g_{ab}|} \epsilon_{\mu_1,\cdots,\mu_n} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}, \tag{6}$$

missä indeksiä on korotettu metriikalla

$$\omega^{\mu_1,\cdots,\mu_p} = g^{\mu_1\nu_1,\cdots,\mu_p\nu_p} \omega_{\nu_1,\cdots,\nu_p}.$$

Ulkoinen derivaatta ja Hodgen $\star$-operaattori ovat tässä tutkielmassa ainoat operaattorit mitä tarvitaan differentiaalimuodoilla laskemiseen. Hodgen $\star$-operaattori liittää avaruuden metriikan, joten sillä määritetyt suureet eivät enää ole topologisia.

Ulkoisella derivaatalla on tärkeä ominaisuus [4] $d(d\omega) = 0$, josta seuraa Poincaren lemma: Mikäli differentiaalimuodolle ω ulkoinen derivaatta $d\omega = 0$, niin siitä seuraa, että on olemassa jokin differentiaalimuoto A, jolle $dA = \omega$ eli $d(dA) = 0$. Poincaren lemmaa hyödynnetään Maxwellin yhtälöiden koordinaattivapaassa formalismissa.

1.2 Maxwellin yhtälöt

Maxwellin yhtälöt klassisesti muotoillaan vektorimuodossa

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{j}, \tag{10}$$

missä $\rho, \mathbf{j}$ ovat varaustiheys ja virtatiheys. Yleisen formalismin kannalta on oleellista muotoilla sähkökentän suureet differentiaalimuodoilla vektorien sijaan. Ne antavat geometrisesti selkeän muotoilun yhtälöille ja yleistävät differentiaalioperaattorit siistiin muotoon. Sähkökenttä tekee työn yksiulotteista polkua pitkin, joten sen oikea tulkinta on 1-muotona. Toisaalta magneettikentän tiheys on suure, joka mitataan alaa kohden, joten sen luontainen integroimisalue on kaksiulotteinen ja se luokitellaan 2-muodoksi. [3]

Sähkökentän 1-muodolle E ja magneettikentän tiheyden 2-muodolle B voidaan vielä määrittää tyhjiössä vastaavat n-p -asteiset differentiaalimuodot D (2-muoto) ja H (1-muoto) [5]

$$D = \epsilon_0 \star E \quad H = \frac{1}{\mu_0} \star B.$$

Ne liittyvät oleellisesti samoihin kenttiin, mutta nyt sähkökentän tiheys D on alaa kohti mitattava suure, kun taas magneettikenttä H mitataan polkua pitkin. Termit ϵ_0, μ_0 ovat tyhjiön permittiivisyys ja tyhjiön permeabiliteetti [2]. Ne määrittävät valonnopeuden tyhjiössä $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$. Yleisen tarkastelun kannalta ei ole tarpeellista pitää vakioita laskuissa mukana, joten jatkossa hyödynnetään luonnollisia yksiköitä, missä $c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$. Tällöin on siis $D = \star E$ ja $H = \star B$.

Maxwellin yhtälöt saadaan differentiaalimuodoilla ja ulkoisella derivaatalla kätevään muotoon. Yleiset 1-muodot ja niiden ulkoiset derivaatat ovat

$$\begin{aligned} E &= E_i dx^i \\ dE &= \frac{1}{2}(\partial_i E_j - \partial_j E_i) dx^i \wedge dx^j. \end{aligned}$$

Sulkujen sisässä oleva lauseke on sama kuin roottorioperaattorilla, joten 1-muotojen ulkoinen derivaatta voidaan samaistaa roottoriin

$$\star dE = (\partial_i E_j - \partial_j E_i) dx^k = \nabla \times \mathbf{E}.$$

Samoin 2-muotojen D,B ulkoinen derivaatta voidaan samaistaa divergenssioperaattorin kanssa

$$\begin{aligned} B &= B_i dx^i \wedge dx^j \\ dB &= \partial_x B_x dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y B_y dy \wedge dz \wedge dx + \partial_z B_z dz \wedge dx \wedge dy \\ &= (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \nabla \cdot \mathbf{B} \text{ vol}, \end{aligned}$$

missä vol $= dx \wedge dy \wedge dz$ on tilavuusmuoto. Siis $\star dB = \nabla \cdot \mathbf{B}$. Näin saadaan korvattua vektorimuotoiset Maxwellin yhtälöt differentiaalimuodoilla hyödyntäen pelkästään ulkoista derivaattaa [5]

$$dB = 0 \tag{11}$$

$$dE = -\partial_t B \tag{12}$$

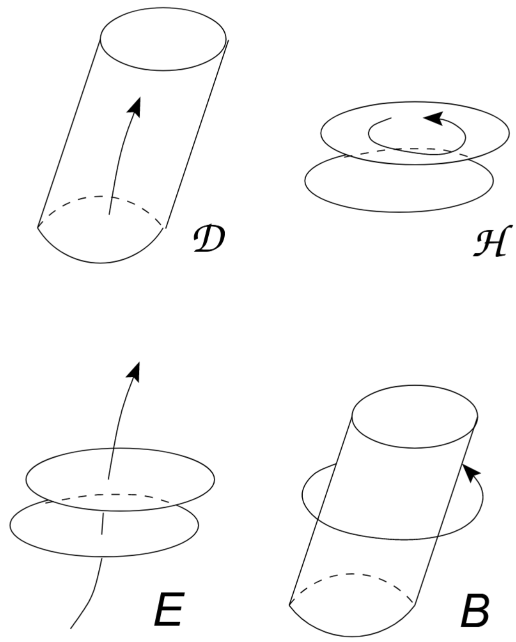
$$dD = \rho \tag{13}$$

$$dH = \partial_t D + j. \tag{14}$$

Olisi mielekästä kirjoittaa Maxwellin yhtälöt (13,14) sähkökentän E ja magneettikentän tiheyden B avulla, mutta differentiaalimuodoista ilmenee miksi se olisi virheellistä. Differentiaalimuodoilla roottorioperaattori on nimenomaan 1-muodoille ilmenevä ulkoinen derivaatta, kun taas divergenssi on 2-muotojen ulkoinen derivaatta. Siksi on tarpeellista määritellä duaaliset suureet D,H, joille ulkoinen derivaatta vastaa oikeaa differentiaalioperaattoria.

Schoutenin kuvat (kuva 1) havainnollistavat sähkömagneettista kenttää differentiaalimuotoina 3-ulotteisessa avaruudessa. Kentät jaetaan lähdeyhtälöihin (13,14) sekä kenttäyhtälöihin (11,12). Kentät D,H ovat kiertyneitä differentiaalimuotoja, jotka liittyvät sähkömagneettisen kentän lähteisiin. Sähkökentän tiheydelle D sylinterin sisässä oleva kenttäviiva kuvastaa varauksen sähkövuota suljetun pinnan lävitse. Vastaavasti magneettikentän voimakkuus H kuvastaa sähkövirran synnyttämää magneettikenttää suljetun silmukan ympäri. Kiertymättömät differentiaalimuodot E,B kuvaavat sähkömagneettisen kentän luonnetta. Esimerkiksi sähkökentän voimakkuus E on kaikkialla pyörteetön, jolloin se määrittää voiman, joka ohjaa sähkövarauksen liikettä suoraviivaista polkua pitkin. Sen sijaan magneettikentän tiheydelle B sylinteri ja suljetut kenttäviivat kuvastavat magneettikentän lähteettömyyttä siten, että kaikki sylinteriin saapuvat suljetut kenttäviivat myös poistuvat sylinteristä. [6]

Kenttäyhtälöt kuvaavat siis sähkömagneettisen kentän topologisia ominaisuuksia, minkä vuoksi ne ovat metriikasta riippumattomia. Lähdeyhtälöt sen sijaan johtuvat avaruudessa olevista varauksista ja ovat siten riippuvia avaruuden metriikasta.



Kuva 1. Schoutenin kuvat sähkömagneettiselle kentälle [5]

Kuten Lorentz-muunnoksista nähtiin, koordinaattimuunnoksiin inertiaalisten havaitsijoiden välillä liittyy muutos myös aikakoordinaatissa. Näin ollen 3-ulotteisessa avaruudessa määritettyjen sähkömagneettisten suureiden E,D,B,H rajoittava tekijä on se, että ne eivät ole kovariantteja yleisissä koordinaattimuunnoksissa. Tämä tarkoittaa, että ne eivät säilytä muotoaan kaikissa koordinaatistovalinnoissa. Esimerkiksi tasaisesti liikkuvan varauksen magneettikenttä häviää, kun siirrytään varauksen lepokoordinaatistoon. Tämän vuoksi halutaan laajentaa sähkömagneettinen kenttä neliavaruuteen, jossa voidaan muotoilla kovariantteja eli koordinaatistomuunnoksissa säilyviä suureita. Sähkö- ja magneettikentän luomaa kokonaisuutta neliavaruudessa voidaan kuvata Faradayn 2-muotona [4]

$$F = E \wedge dt + B, \tag{15}$$

jonka matriisiesitys on

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Tämän ulkoinen derivaatta on siis

$$d_4 F = dE \wedge dt + dB + \partial_t B \wedge dt.$$

Ulkoinen derivaatta koostuu Maxwellin yhtälöiden ensimmäisestä yhtälöparista (11,12), josta nähdään, että $dF = 0$. Sähkökentän suureet H,D saadaan sisällettyä Hodgen $\star$-operaattorilla Maxwellin 2-muodoksi

$$\begin{aligned} G = \star F &= D - H \wedge dt \\ d_4 G &= dD + \partial_t D \wedge dt - dH \wedge dt \\ &= \rho - j \wedge dt = J, \end{aligned}$$

missä J on virtatiheyden 3-muoto neliavaruudessa. Nämä vastaavat Maxwellin yhtälöiden toista yhtäloparia (13,14). Tensorikenttien ulkoisista derivaatoista päädytään Maxwellin yhtälöiden yleiseen muotoon neliavaruudessa [4]

$$d_4 F = 0 \tag{17}$$

$$d_4 \star F = d_4 G = J. \tag{18}$$

Ensimmäinen yhtälö (17) on määritelty ilman metriikkaa ja sisältää kenttäyhtälöt, joten tämä yhtälö on sellaisenaan pätevä kaikissa avaruuksissa. Toinen yhtälö sisältää lähdeyhtälöt, jolloin Hodgen $\star$-operaattori liittää jälleen avaruuden metriikan, eli (18) on riippuvainen avaruuden metriikasta.

2 Yleiset koordinaatit

Koordinaattivapaa muotoilu sopii vain yleisten relaatioiden muotoiluun, joten varsinaisiin laskuihin tarvitaan kovarianttia esitystä, joka mahdollistaa tarkempien laskujen tekemistä tietyssä metriikassa. Kovariantti esitysmuoto on kuitenkin vielä koordinaatistovalinnasta riippumaton, joten näin määritetyt yhtälöt pätevät mielivaltaisissa koordinaateissa.

2.1 Maxwellin yhtälöt

Maxwellin yhtälöiden kovarianttien muotojen löytäminen kaarevassa avaruudessa on hieman hankalampaa kuin koordinaattivapaiden yhtälöiden. Esimerkiksi osittaisderivaatta täytyy korvata koderivaatalla, joka huomioi avaruuden kaareutumisen [7]

$$\partial_\mu F^{\lambda\nu} \to D_\mu F^{\lambda\nu} = \partial_\mu F^{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} F^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} F^{\lambda\alpha}, \tag{19}$$

missä

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \tag{20}$$

on Christoffelin symboli, joka liittää osittaisderivaattaan avaruuden metriikan.

Kovarianttien yhtälöiden muodostamiseen voidaan hyödyntää jo laskettuja yleisiä Maxwellin yhtälöitä. Ensin lasketaan kenttäsuureille kovariantit tensorit. Faradayn kenttätensorin kovarianttiin muotoon päästään, kun hyödynnetään Poincaren lemmaa Maxwellin yhtälöille. Esimerkiksi magneettikentän tiheyden yhtälöstä seuraa [3] mukaisesti

$$dB = 0 \ \Rightarrow B = dA,$$

sekä sijoittamalla sähkökentän yhtälöön (12) $B = dA$ saadaan

$$d(E + \partial_t A) = 0 \Rightarrow E = -d\Phi - \partial_t A.$$

Voidaan muodostaa nelipotentiaali $A_\mu = (\Phi, \mathbf{A})$, joka voidaan muotoilla myös neliavaruuden 1-muotona $A = A_\mu dx^\mu$. Nelipotentiaali ei ole varsinaisesti fysikaalisesti mitattava suure, mutta se seuraa luontaisesti Poincaren lemmasta ja on matemaattinen työkalu, joka mahdollistaa sähkömagneettisten liikeyhtälöiden muodostamisen kovariantisti.

Nelipotentiaalin A ulkoisesta derivaasta saadaan Faradayn tensorin kovariantti muoto

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned}$$

Tensorin matriisiesitys Minkowskin metriikalla $diag(1, -1, -1, -1)$ on

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Faradayn 2-muodosta saadaan Maxwellin yhtälöiden kovariantit muodot hyödyntämällä ulkoista derivaattaa

$$d_4 F = \frac{1}{2} \partial_\sigma F_{\mu\nu} dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Yhtälö on 3-muoto, joka vastaa rangin kolme kovarianttia tensoria. Siitä saadaan yhtäpitävä kovektori, kun operoidaan vielä Hodgen $\star$-operaattorilla (6)

$$\begin{aligned} \star d_4 F &= \frac{\sqrt{|g|}}{2} \partial^\sigma F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\sigma\gamma} dx^\gamma \\ 0 &= \partial^\sigma F^*{}_{\sigma\gamma} \\ &= \partial_\mu F^{*\mu\nu}. \end{aligned}$$

Toinen yhtälö saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned}
\star F &= \frac{\sqrt{|g|}}{4} F^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma} dx^\gamma \wedge dx^\sigma \\
d_4 \star F &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}) dx^\alpha \wedge dx^\gamma \wedge dx^\sigma \\
\star d_4 \star F = J_\beta dx^\beta &= \frac{\sqrt{|g|}}{4} g^{\alpha\rho}g^{\gamma\psi}g^{\sigma\phi}\epsilon_{\rho\psi\phi\beta}\epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}) dx^\beta \\
g^{\theta\beta}J_\beta &= \frac{\sqrt{|g|}}{4} g^{\alpha\rho}g^{\gamma\psi}g^{\sigma\phi}g^{\theta\beta}\epsilon_{\rho\psi\phi\beta}\epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

Käyttäen Levi-Civita -symbolin ominaisuuksia

$$\begin{aligned}
g^{i_1 j_1,\cdots,i_n j_n}\epsilon_{i_1,\cdots,i_n} &= |(g^{ij})|\epsilon^{j_1,\cdots,j_n} = |(g_{ij})|^{-1}\epsilon^{j_1,\cdots,j_n} \\
\epsilon^{i_1,\cdots,i_k,i_{k+1},\cdots,i_n}\epsilon_{i_1,\cdots,i_k,j_{k+1},\cdots,k_n} &= k!\delta^{i_{k+1},\cdots,i_n}_{j_{k+1},\cdots,k_n},
\end{aligned}$$

saadaan vihdoin

$$\begin{aligned}
J^\theta &= \frac{\sqrt{|g|}}{4}|g|\epsilon^{\alpha\gamma\sigma\theta}\epsilon_{\mu\nu\gamma\sigma}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{|g|}} 2(\delta^\alpha_\mu\delta^\theta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\theta_\mu)\partial_\alpha(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\Big((\partial_\alpha(\sqrt{|g|}F^{\alpha\theta}) - \partial_\alpha(\sqrt{|g|}F^{\theta\alpha})\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}F^{\alpha\theta}).
\end{aligned}$$

Tästä saadaan tunnettu tulos antisymmetriselle tensorille [7]

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}). \tag{21}$$

Päästiin koderivaatan yleiseen tulokseen ilman, että laskettiin Christoffelin symboleita, jotka liittävät metriikan osittaisderivaattaan.

Kaarevassa avaruudessa myös ensimmäinen yhtälö korvattaisiin koderivaatalla, mutta differentiaalimuotoisista Maxwellin yhtälöistä tiedetään, että ensimmäinen yhtälöpari on metriikasta riippumaton kenttäyhtälö, joten koderivaatta palautuu normaaliksi osittaisderivaataksi myös kaarevassa avaruudessa. Näin ollen koordinaattivapaat yhtälöt sisältävät tarvittavan informaation avaruuden geometriasta ja yleistyvät myös kovarianttiin muotoon.

2.2 Energia-impulssi -tensori

Yleisen suhteellisuusteorian mukaan energia kaareuttaa aika-avaruutta, jolloin energian jakautuminen määrää avaruuden geometrian. Energian kokonaisvaltaista jakautumista avaruudessa (lepoenergia, liike, aineen sisäinen kitka) kuvaamiseen voidaan muodostaa energia-impulssi -tensori, joka sähkökentälle on muotoa [2]

$$T = T_\alpha{}^\beta \partial_\beta \otimes dx^\alpha \tag{22}$$

$$T_\alpha{}^\beta = -cF_{\alpha\sigma}G^{\sigma\beta} - \frac{c}{4}F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta. \tag{23}$$

Tyhjiössä luonnollisilla yksiköillä $F = G$, joten

$$T_\alpha{}^\beta = -F_{\alpha\sigma}F^{\sigma\beta} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta,$$

missä Kroneckerin deltan mukaan jälkimmäinen termi ilmestyy ainoastaan diagonaalialkioilla. Yleinen energia-impulssi -tensori määrittää myös Einsteinin kenttäyhtälön [8]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{24}$$

missä $G_{\mu\nu}$ on Einsteinin tensori, joka määrittää avaruuden kaareutumisen, Λ on kosmologinen vakio, joka liittyy avaruuden laajenemiseen ja G on gravitaatiovakio. Kenttäyhtälöstä on ratkaistu eri avaruuden metriikat, joita tässä tutkielmassa hyödynnetään.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan vain varausta sen lepokoordinaatistossa, jolloin varauksen energia riippuu vain sen energiatiheydestä $T_0^0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$. Termi kertoo sähkömagneettisen kentän lepoenergian, jonka suuruus on tietysti riippuvainen koordinaatistovalinnasta.

3 Sähködynamiikan yhtälöiden ratkaisuja

Tarkastellaan seuraavaksi vapaan kentän yhtälöitä erilaisissa kaarevissa avaruuksissa. Vapaa kenttä tarkoittaa tilannetta, jossa ei ole ulkoisia varauksia, jolloin virtatiheys $J = 0$. Tällöin Maxwellin yhtälöt yksinkertaistuvat muotoon

$$d_4 F = 0 \tag{25}$$

$$d_4 G = 0. \tag{26}$$

Yleisistä Maxwellin yhtälöistä on nyt muodostettu mahdollisimman kattavat kovariantit muodot, joten ne ovat sellaisinaan käyttökelpoisia eri metriikoissa työskentelyyn

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \tag{27}$$

$$\partial_\mu(\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}) = 0. \tag{28}$$

3.1 Vapaa kenttä Schwarzschildin metriikassa

Suurten kappaleiden, kuten tähtien tai mustien aukkojen metriikan kuvaamiseen tyhjässä avaruudessa käytetään Schwarzschildin metriikkaa. Se kuvaa pistemäistä massaa, joten se on luonteva kuvaus mustalle aukolle, jossa massa on kerääntynyt pistemäiseen singulariteettiin. Metriikassa otetaan huomioon vain gravitaation kaareuttava vaikutus, joten muita kaareuttavia tekijöitä, kuten sähkövaraus tai pyörimisenergia, ei oteta huomioon. Metriikka on määritelty massan lepokoordinaatistossa ja on yleisesti muotoa [8]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \tag{29}$$

missä $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$ kuvaa massan vaikutusta aika- ja radiaalitermiin. Jos $M = 0$, niin metriikka on vain Minkowskin metriikka 4-ulotteisissa pallokoordinaateissa. $f(r) < 1$ termillä on Lorentz-muunnosten tavoin vastakkainen vaikutus aikaan ja paikkaan. Massajakauma nimittäin hidastaa ympäristönsä aikaa ja venyttää etäisyyksiä radiaalisessa suunnassa.

Mikäli asetetaan origoon pistevaraus, täytyy radiaaliseen termiin lisätä vielä sähkökentän energiasta aiheutuva vaikutus. Varauksen lepokoordinaatistossa magneettikenttä häviää $\mathbf{B} = 0$ ja sähkökenttä $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, joten energiatiheys pistevaraukselle on $T^0_0 = \frac{1}{32\pi^2}\frac{Q^2}{r^4}$, joka voidaan sisällyttää skaalaustermiin $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{1}{32\pi^2}\frac{Q^2}{r^4}$. Varauksen energian lisäys on Schwarzschildin metriikan yleistys, jonka nimi on Reissnerin-Nordströmin metriikka. [2]

Maxwellin yhtälöissä esiintyvä metriikkatermi voidaan laskea

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|} &= \sqrt{f(r)\cdot\frac{1}{f(r)}\cdot r^2\cdot r^2\sin^2(\theta)}\\ &= r^2\sin(\theta).\end{aligned}$$

Termi $f(r)$ katoaa kokonaan Joten Maxwellin yhtälöt palautuvat litteän avaruuden Maxwellin yhtälöihin

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{*\mu\nu} &= 0\\ \partial_\alpha(r^2\sin(\theta)F^{\mu\alpha}) &= 0.\end{aligned}$$

Radiaalisessa suunnassa toinen yhtälö on

$$\begin{aligned}\sin(\theta)\partial_r(r^2F^{tr}) &= 0\\ \Rightarrow r^2F^{tr} &= \text{vakio} = Q\\ g^{tt}g^{rr}F_{tr} &= \frac{Q}{r^2}\\ E_r &= \frac{Q}{r^2}.\end{aligned}$$

Tämä on vain tuttu Coulombin laki sähkökentälle. Poikkeuksena klassiseen tapaukseen on kuitenkin se, että tässä tapauksessa on huomioitu avaruuden metriikan kaareuttava vaikutus. Coulombin laki ilmenee siis siksi, että radiaalista termiä on skaalattu tekijällä $\frac{1}{f(r)}$. Coulombin laki klassisesti määriteltynä ei siis päde sellaisenaan gravitaatiokentässä. Skaalaustekijä ei myöskään ole mitenkään ilmeinen, joten Coulombin laki pistevaraukselle ei yleisty tähän muotoon ilman yleistä suhteellisuusteoriaa.

3.2 Vapaa kenttä Kerr-Newmanin metriikassa

Pyörimisenergiasta aiheutuu vielä avaruuden kaareutumista, joten kulmaliikemäärällä $a = \frac{S}{M}$ pyörivälle mustalle aukolle tarvitaan metriikka, joka ottaa huomioon massan, sähkövarauksen ja pyörimisliikkeen. Tämä on nimeltään Kerr-Newmanin metriikka ja ratkaisu löydettiinkin vasta 50 vuotta myöhemmin Schwarzschildin metriikasta. Kulmaliikemäärä oli hankalin osa liittää metriikkaan, koska sen lisäys muuttaa metriikkaa muissa kuin pelkässä radiaalisessa suunnassa.

Metriikan kaarialkio on yleisesti

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left[dt - a\sin^2\theta\, d\phi\right]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)d\phi - a\,dt\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2\, d\theta^2, \quad (30)$$

missä

$$\begin{aligned} \rho^2 &\equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta &\equiv a^2 + r^2 - 2Mr + Q^2. \end{aligned}$$

Pyörivän mustan aukon metriikka ei ole staattinen, joten metriikka on monimutkaisempi ja siksi myös Maxwellin yhtälöiden ratkaisujen löytäminen on hankalampaa. Samoilla menetelmillä saataisiin [9] mukaisesti

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{Q\left(a^2+r^2\right)\left(r^2 - a^2\cos^2\theta\right)}{r^2\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^2} \\ E_\theta &= -\frac{2a^2Q\sin\theta\cos\theta}{\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^2} \\ B_r &= \frac{2aQr\cos\theta}{\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^2} \\ B_\theta &= \frac{aQ\left(r^2-a^2\cos^2\theta\right)\sin\theta}{r\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^2}. \end{aligned}$$

Kerr-Newmanin metriikassa radiaalinen sähkökenttä ei tuota Coulombin lain mukaista sähkökenttää, sillä pyöriminen tekee mustan aukon singulariteetista rengasmaisen [10]. Yhtälöt palautuvat tietysti Reissner-Nordström metriikkaan kun $a = 0$, jolloin jäljelle jää ainoastaan sähkökentän radiaalinen osa.

Klassisilla menetelmillä olisi hankalaa päätyä näihin tuloksiin. Jälleen sähkö- ja magneettikentän komponenteissa on huomioitu metriikan skaalaustekijät, jotka eivät ole järkevästi selitettävissä klassisin menetelmin. Tämän vuoksi Maxwellin yhtälöt eivät päde klassisessa painovoimakentässä vaan tarvitaan yleisen suhteellisuusteorian muokkauksia gravitaatioteoriaan, jotta ne yleistyisivät kaareviin avaruuksiin.

4 Yhteenveto

Työssä tarkasteltiin sähködynamiikan muotoilua koordinaattivapaasti ja yleisillä koordinaateilla ja näytettiin mihin tarkoituksiin molemmat formalismit soveltuvat. Koordinaattivapaa formalismi on erityisen vahva työkalu, kun tarkoituksena on luoda yleispätevä muotoilu fysikaaliselle teorialle. Koordinaatistoriippumattomilla differentiaalimuodoilla on melko vaivatonta muodostaa Maxwellin yhtälöt neliavaruudessa. Sen lisäksi taustalla oleva geometria ilmenee differentiaalimuodoilla huomattavasti selkeämmin, kuin yleisillä koordinaateilla muodostetuista tensoriyhtälöistä. Differentiaalimuotoiset yhtälöt helpottavat tarkastelua kaarevan avaruuden tapauksessa, jolloin metriikka esiintyy ainoastaan kätkettynä Hodgen $\star$-operaattoriin, ja yhtälöihin ei sotkeudu hankalia operaattoreita, kuten Christoffelin symboleita, joita tarvitaan kovarianttiin tensoriesitykseen.

Toisaalta itse laskut tehdään käytännössä aina kovarianteilla yhtälöillä, joten yleisistä muodoista on tarpeellista siirtyä kovarianttiin muotoon. Yleisestä muodosta siirtyminen ei ole kuitenkaan laskennallisesti ihan triviaalia, joten niiden näennäinen yksinkertaisuus rikkoutuu, kun halutaan tehdä konkreettisia laskuja. Tällöin tensorien indeksinotaatiot sotkevat laskuja ja tekevät niistä hyvin monimutkaisia.

On kuitenkin hyödyllistä ymmärtää myös koordinaattivapaa esitystapa, koska sen tarjoama geometrinen intuitio auttaa ymmärtämään sähködynamiikan taustalla olevan teorian ja sitä kautta kovariantit yhtälöt sekä niissä tarvittavat operaattorit. Differentiaalimuodot soveltuvat myös esimerkiksi mekaniikkaan ja termodynamiikkaan, joten ne ovat tärkeässä osassa myös muissa fysiikan aihepiireissä.

5 Tekoälyn käyttö tutkielmassa

Tutkielmassa on hyödynnetty Math-gpt tekoälyohjelmaa kaavojen kirjoittamiseen Latex-komennoilla silloin, kun kaava on otettu suoraan lähteestä. Lisäksi tiedonhakuvaiheessa esitin tekoälylle kysymyksiä epäselvyyksistä, joita minulla oli teoriaan liittyen.

Viitteet

[1] A. Einstein, Annalen der Physik **322**, 891 (1905) doi:10.1002/andp.19053221004.

[2] J.-P. Pellonpää, *Fysiikka ja geometria* (Turun yliopisto, University of Turku, 2014).

[3] K. F. Warnick ja P. H. Russer, Progress In Electromagnetics Research **148**, 83 (2014) doi:10.2528/PIER14063009.

[4] S. Fumeron, B. Berche ja F. Moraes, American Journal of Physics **88**, 1083 (2020) doi:10.1119/10.0001754.

[5] F. W. Hehl ja Y. N. Obukhov, A gentle introduction to the foundations of classical electrodynamics: The meaning of the excitations (D,H) and the field strengths (E, B), 2000, arXiv:physics/0005084.

[6] J. Gratus, A pictorial introduction to differential geometry, leading to Maxwell's equations as three pictures, 2017, arXiv:1709.08492 [math].

[7] F. Cabral ja F. S. N. Lobo, Foundations of Physics **47**, 208 (2017) doi:10.1007/s10701-016-0051-6.

[8] C. R. Bunney ja G. Gradoni, IEEE Antennas and Propagation Magazine **64**, 40 (2022) doi:10.1109/MAP.2021.3099714.

[9] S. M. Blinder, Minkowski electromagnetic analog for Kerr-Newman electrovac solution, 2004, arXiv:gr-qc/0409025.

[10] O.-C. Stoica, Kerr-Newman Solutions with Analytic Singularity and no Closed Timelike Curves, 2012, arXiv:1111.7082 [gr-qc].