Vektorijoukkojen ortogonaalisuudesta

Jennifer Vahala

LuK-tutkielma
Toukokuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LuK-tutkielma
Pääaine: Matematiikka
Tekijä: Jennifer Vahala
Otsikko: Vektorijoukkojen ortogonaalisuudesta
Sivumäärä: 9 sivua
Aika: Toukokuu 2026

Vektorit ja vektorijoukot kuuluvat aina johonkin avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Jos nämä vektorit ovat vielä ortogonaalisia eli kohtisuoria keskenään, joukkoa kutsutaan ortogonaaliseksi vektorijoukoksi ja se on lineaarisesti riippumaton, mikäli yksikään vektori ei ole nollavektori. Vektorit ovat ortogonaalisia silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

Avaruuksien sisällä nämä joukot voivat muodostaa aliavaruuksia, joita voidaan kuvata kantojen avulla. Kantojen ortogonaalisuus tekee monista laskutoimituksista helpompia. Vektorien lineaarikombinaatioiden skalaarikertoimet saa yksinkertaisilla laskuilla, ilman monimutkaisia yhtälöryhmiä.

Vektori voi luoda ortogonaalisen projektion jollekin aliavaruudelle. Tämä vektori voidaan jakaa komponentteihin, joista yksi on kohtisuorassa aliavaruuteen nähden ja toinen aliavaruudessa.

Asiasanat: Vektori, ortogonaalinen vektorijoukko, avaruus, ortogonaalinen projektio.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa syvennytään vektorien ominaisuuksiin, joita on sivuttu jo lukion pitkän matematiikan oppimäärässä. Ensin tutkitaan vektorijoukkoja ja niiden ortogonaalisuutta eli kohtisuoruutta ja tutustutaan lopuksi vielä ortogonaalisiin projektioihin. Teorian ohella tutkielmassa hyödynnetään esimerkkejä erilaisista tilanteista ja avaruuksista.

Luvussa kaksi kerätään ensin näkyviin tarvittavat esitiedot vektoreista. Luvussa kolme käsitellään teoriaa vektorien ortogonaalisuuden takana. Luvun neljä aiheena on ortogonaalisiin projektioihin tutustuminen.

Vektori käsitteenä on kehittynyt ainakin kahdella tavalla Miroslav Lovricin oppikirjan *Vector Calculus* [3] mukaan. Jo babylonialaisten ja egyptiläisten ajasta lähtien ihmiset ovat yrittäneet laajentaa luonnollisten lukujen käsitettä. Myöhemmät sukupolvet onnistuivat löytämään ajan kuluessa nykyisin tunnetut reaaliluvut $\mathbb{R}$. Kompleksilukujen keksiminen ja niiden geometrinen tulkinta kaksiulotteisessa koordinaatistossa johti vektorien havaitsemiseen.

Toinen tapaus pohjautuu fyysisiä ilmiöitä parhaiten kuvaavan matemaattisen olion etsimiseen. Yhdellä numerolla ja yksiköllä, voidaan ilmaista monet ominaisuudet, kuten etäisyys, pinta-ala tai lämpötila. Tarkat tiedot tuulesta tai planeetan vetovoimasta vaativat kuitenkin voimakkuuden lisäksi suunnan. Tarve kuvailla suuntaa kahdessa tai kolmessa ulottuvuudessa ja ajatus fyysisten ongelmien lähestyminen geometrian avulla johti vektorien käsitteen syntymiseen.

1800-luvun puolivälin jälkeen vektorilaskennan muodostavat perusajatukset ja -käsitteet formalisoitiin. Ensimmäinen täysin moderniin vektorilaskentaan keskittyvä oppikirja julkaistiin vuonna 1901. Vektorilaskennan kieltä ja käsitteitä hyödynnetään nykyään klassisessa ja modernissa fysiikassa, astronomiassa, geometriassa, konetekniikassa ja lukemattomilla muilla aloilla.

Tämän tutkielman kirjoituksessa on hyödynnetty ChatGPT-tekoälytyökalua kielenhuoltoon.

2 Tarvittavat vektorien ominaisuudet

Vektorien ominaisuuksista vektorien pituuden, sisä– eli pistetulon ja vektorien kohtisuoruuden laskeminen ovat tarpeellisia ortogonaalisen vektorijoukon tutkimisessa. Näiden yksinkertaisten laskutoimitusten todistus tapahtuu David C. Layn oppikirjan *Linear Algebra and its applications* [1] luvun 6.1 mukaisesti, joten niiden todistus sivuutetaan nyt.

Kaikki vektorit sijaitsevat jossain avaruudessa $\mathbb{R}^m$, missä m on positiivinen kokonaisluku. Vektorit voivat muodostaa aliavaruuksia avaruuden sisällä. Aliavaruudet ovat aitoja, jos niiden dimensio eli ulottuvuus on pienempi kuin avaruuden. Vektorit muodostavat avaruuden kannan, jos niiden lineaarikombinaatioilla voidaan muodostaa yksikäsitteisesti avaruuden kaikki muut vektorit.

Koska tässä tutkielmassa käsitellään ortogonaalisuutta, nostetaan vektorien kohtisuoruuden määritelmä erityisesti esille. Kohtisuoruuden tarkastelu on luonnollista vähintään kaksiulotteisessa avaruudessa, joten tutkielmassa avaruuksista käsitellään seuraavia: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ja yleistä avaruutta $\mathbb{R}^n$. Lauseet todistuksineen ja määritelmät esitetään yleisesti n-ulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja esimerkit kaksi- tai kolmiulotteisissa avaruuksissa. Jokainen tutkielmassa esiintyvä vektori ja aliavaruus on vähintään yksiulotteinen.

Määritelmä 1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat *ortogonaaliset* toisiinsa nähden, jos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

On myös hyvä huomioida, että vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat ortogonaaliset *toisiinsa nähden* ja nollavektori $\mathbf{0}$ on kohtisuorassa jokaiseen avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoriin nähden.

3 Vektorijoukkojen ortogonaalisuus

Luvussa kolme käsitellään aiheita Layn oppikirjan [1] aliluvusta 6.2.

Jotta vektorijoukko voi olla ortogonaalinen, sen jokaisen erillisen vektoriparin on oltava ortogonaalinen. Toisin sanoen jokaisen vektoriparin pistetulon on oltava nolla, jotta joukkoa voidaan kutsua ortogonaaliseksi.

Lause 1. *Jos $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ on ortogonaalinen joukko nollasta poikkeavia vektoreita avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin S on lineaarisesti riippumaton ja siten kanta joukon S virittämälle aliavaruudelle.*

Todistus. Olkoot $c_1, \ldots, c_p$ joitain skalaareja. Jos $\mathbf{0} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + c_p \cdot \mathbf{u}_p$, niin

$$\begin{aligned} 0 = (\mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_1) &= (c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_p \cdot \mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{u}_1 \\ &= (c_1\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 + (c_2\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + (c_p\mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{u}_1 \\ &= c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + c_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) + \cdots + c_p(\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_1) \\ &= c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) \end{aligned}$$

koska $\mathbf{u}_1$ on ortogonaalinen vektoreihin $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\mathrm{p}$ nähden. Koska $\mathbf{u}_1$ on nollasta poikkeava vektori, niin $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1$ ei ole nolla ja $c_1 = 0$. Vastaavasti skalaarien $c_2, \ldots, c_p$ on oltava nollia. Näin joukko S on lineaarisesti riippumaton. □

Lineaarisesti riippumattomista vektoreista saadaan muodostettua lineaarikombinaatioita, jotka ovat yksikäsitteisiä. Seuraavassa esimerkissä sovelletaan lauseessa 1 esitettyä teoriaa.

Esimerkki 1. Tutkitaan, onko avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sijaitseva vektorijoukko $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ortogonaalinen, kun

$$\mathbf{u}_1 = (2, -3, -1), \quad \mathbf{u}_2 = (4, 2, 2) \quad \text{ja} \quad \mathbf{u}_3 = (-4, -8, 16).$$

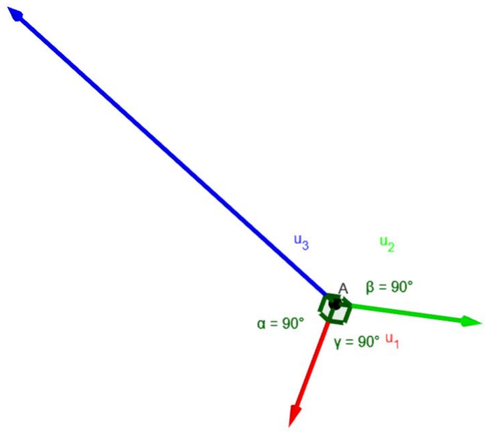
Vektorit $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ovat *Vektorit*-kirjan [2] sivulta 130.

Aloitetaan tutkimalla, onko jokainen joukon S vektoripari ortogonaalinen toisiinsa nähden. Kaikki vektorit ovat nollasta poikkeavia, ja tässä tapauksessa parit ovat $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}, \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 2(4) + (-3)(2) + (-1)(2) = 8 - 6 - 2 = 0, \\ &\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 2(-4) + (-3)(-8) + (-1)(16) = -8 + 24 - 16 = 0 \text{ ja} \\ &\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 4(-4) + (2)(-8) + (2)(16) = -16 - 16 + 32 = 0. \end{aligned}$$

Vektoriparit ovat siis kohtisuorassa toisiinsa nähden.

Tarkastellaan tilannetta lauseen 1 kannalta. Olkoot c_1, c_2, c_3 joitain skalaareja ja $c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + c_3 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Järjestämällä yhtälön termejä saadaan aikaiseksi jokaisen vektoriparin pistetulo, jotka todettiin edellä nollaksi. Esimerkin vektorien pistetulo itsensä kanssa poikkeaa nollasta, joten termeissä $c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1), c_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2), c_3(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3)$ skaalarien on oltava nollia, jotta yhtälö $0 = c_i(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i)$, kun $i = 1, 2, 3$, toteutuu.



Kuva 1: Ortogonaalinen vektorijoukko S.

Kuvassa 1 on nähtävissä joukon S vektorit (ks. 1). Jokaisen vektoriparin välissä on myös näkyvillä suorakulma, jotta joukon ortogonaalisuuden voi hahmottaa paremmin.

3.1 Ortogonaalinen kanta

Lauseesta 1 voidaan päätellä, että aliavaruuden kanta on ortogonaalinen silloin, kun avaruuden virittää joukko lineaarisesti riippumattomia vektoreita.

Määritelmä 2. *Ortogonaalinen kanta* avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudelle W on aliavaruuden W kanta, joka on myös ortogonaalinen joukko.

Ortogonaalinen kanta on hyödyllinen monissa laskuissa ja fysiikan sovelluksissa. Kanta voidaan nähdä koordinaatistona, jossa yksi vektori on yhden ulottuvuuden akselin kanssa yhdensuuntainen. Monet laskut yksinkertaistuvat, kun lineaarisen riippumattomuuden myötä ei tarvitse laskea lineaarikombinaatioita monimutkaisesti.

Lause 2. *Olkoon $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ ortogonaalinen kanta avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudelle W. Jokaiselle aliavaruuden W vektorille $\mathbf{y}$ saadaan lineaarikombinaatioiden skalaarikertoimet*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_p\mathbf{u}_p,$$

kun

$$c_j = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j}, \qquad (j = 1, \ldots, p).$$

Todistus. Kuten lauseen 1 todistuksesta nähdään, joukon $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ ortogonaalisuuden mukaan

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 = (c_1\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 + (c_2\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + (c_p\mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{u}_1 = c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)$$

Koska $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1$ ei ole nolla, c_1 voidaan ratkaista yllä olevasta yhtälöstä. Jotta c_j voidaan ratkaista, kun $j = 2, 3, \dots, p$, lasketaan ensin $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_j$ ja sitten ratkaistaan c_j. □

Siis aliavaruuden W vektori $\mathbf{y}$ voidaan esittää niiden vektorien lineaarikombinaationa, jotka muodostavat kannan S. Tehdään tästä seuraavaksi esimerkki.

Esimerkki 2. Käytetään esimerkin 1 vektorijoukkoa S, joka on ortogonaalinen kanta avaruudelle $\mathbb{R}^3$.

Esitetään aliavaruuden W vektori $\mathbf{y} = (-6, 1, 7)$ joukon S vektorien lineaarikombinaatioina. Lasketaan pistetulot seuraaville vektoripareille:

$$\{\mathbf{y}, \mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}, \mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}, \mathbf{u}_3\}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3\}.$$

Nämä ovat:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 &= 2(-6) - 3(1) - 1(7) = -12 - 3 - 7 = -22, \\
\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_3 &= 4(-6) + 2(1) + 2(7) = -24 + 2 + 14 = -8, \\
\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_3 &= 4(6) - 8(1) + 16(7) = 24 - 8 + 112 = 128, \\
\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 &= 2(2) - 3(-3) - 1(-1) = 4 + 9 + 1 = 14, \\
\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 &= 4(4) + 2(2) + 2(2) = 16 + 4 + 4 = 24 \text{ ja} \\
\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 &= -4(-4) - 8(-8) + 16(16) = 16 + 64 + 256 = 336.
\end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi lauseessa 2 esitetyllä tavalla vektorin $\mathbf{y}$ lineaarikombinaatio sijoittamalla pistetulot oikeille paikoilleen kaavassa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 \\
&= \frac{-22}{14}\mathbf{u}_1 + \frac{-8}{24}\mathbf{u}_2 + \frac{128}{336}\mathbf{u}_3 \\
&= -\frac{11}{7}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{u}_2 + \frac{8}{21}\mathbf{u}_3.
\end{aligned}$$

Vektori $\mathbf{y}$ saadaan siis kertomalla kannan S vektorit $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ skalaareilla $c_1 = -\frac{11}{7}, c_2 = -\frac{1}{3}, c_3 = \frac{8}{27}$.

Fysiikassa käytetään yleisesti karteesista koordinaatistoa. Matemaattisesti se pohjautuu *ortonormaaliin kantaan.* Ortonormaali kanta vastaa ortogonaalista kantaa, mutta muodostuu yksikkövektoreista. Yleisin esimerkki tällaisesta kannasta on avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta $\{e_1, e_2, e_3\}$.

3.2 Matriisimuotoinen esitys vektorijoukon ortogonaalisuudelle

Vektoreita ja vektorijoukkoja voidaan tutkia myös matriisien muodossa. Vektorit esitetään hakasulkeissa $1 \times n$-matriiseissa, kun $n = 1, 2, \dots, p$. Vektorijoukot, kannat ja aliavaruudet esitetään hakasulkeissa $m \times n$-matriiseissa, missä m on vektorien lukumäärä ja n on vektorin komponenttien lukumäärä. Esitetään seuraavaksi jo esimerkeissä käytetyt vektori $\mathbf{u}_1$ ja vektorijoukko S matriisimuodossa:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & -8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Vektorien pistetulon laskeminen matriiseilla on helpompaa, kun toinen matriiseista transponoidaan.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ortonormaalius on helppo havainnoida matriisimuodossa. Jos matriisin lävistäjän alkiot ovat ykkösiä ja muut alkiot nollia, kyseessä on identiteettimatriisi ja vektorijoukko on ortonormaali. Seuraava lause esittää tämän matemaattisesti.

Lause 3. *Matriisin U, joka on $m \times n$-muotoinen, sarakkeet ovat ortonormaaleja, jos ja vain jos $U^TU = I$.*

Todistus. Todistamisen yksinkertaistamiseksi oletetaan avaruuden U sarakkeita ja vektoreita olevan kolme. Yleisessä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ todistaminen tapahtuu samalla tavalla.
Olkoon $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Lasketaan seuraavaksi

$$U^TU = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Oikeanpuoleisessa matriisissa alkiot ovat vektorien pistetuloja. Matriisin U sarakkeet ovat ortogonaalisia, jos ja vain jos

$$\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_1 = 0, \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_1 = 0, \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_2 = 0 \tag{2}$$

Kaikkien U:n sarakkeiden eli vektorien pituus on yksi, jos ja vain jos

$$\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1 = 1, \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2 = 1, \mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_3 = 1 \tag{3}$$

Lause seuraa suoraan kaavoista (1)-(3). $\square$

4 Ortogonaalinen projektio

Projektio voi olla käsitteenä hankala ymmärtää. Tunnettu ja arkipäiväinen esimerkki projektiosta on varjo. Tuleva valo ei läpäise kappaletta, vaan tarkasteltavalle pinnalle muodostuu kappaleen kaltainen kuva, varjo. Jos valo tulisi kohtisuoraan tarkasteltavaan pintaan nähden, varjo olisi ortogonaalinen projektio. Kuvaava tapaus tästä tilanteesta olisi siis asettaa jokin kappale pöydälle ja osoittaa lampulla suoraan kohti pöytää ennen varjon tarkastelua.

Projektio on myös tärkeä osa monia ortogonaalisuuteen liittyviä laskuja ja johtaa suoraan lauseen 2 geometriseen tulkintaan. Tämän tulkinnan käsittely jätetään tämän tutkielman ulkopuolelle.

Tämän luvun ensimmäisessä alaluvussa käsitellään projektiota ensin kaksiulotteisessa avaruudessa. Toisessa alaluvussa laajennetaan teoriaa käsittämään korkeampien ulottuvuuksien avaruudet. Kolmannessa alaluvussa kootaan teoria vielä yhteen esimerkin avulla.

4.1 Kaksiulotteinen tapaus

Hyödynnetään Layn oppikirjan [1] alalukua 6.2 ja tutkitaan kaksiulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ nollasta poikkeavaa vektoria $\mathbf{u}$ ja toista vektoria $\mathbf{y}$. Vektori $\mathbf{y}$ halutaan esittää kahden vektorin summana, joista toinen on vektorin $\mathbf{u}$ monikerta ja toinen on ortogonaalinen vektoriin $\mathbf{u}$ nähden. Halutaan siis kirjoittaa

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \tag{4}$$

missä $\hat{\mathbf{y}} = a\mathbf{u}$ jollain skalaarilla a ja $\mathbf{z}$ on jokin vektoriin $\mathbf{u}$ nähden ortogonaalinen vektori. Olkoon $\mathbf{z} = \mathbf{y} - a\mathbf{u}$ millä tahansa skalaarilla a niin, että (4) toteutuu. Näin $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ on ortogonaalinen vektoriin $\mathbf{u}$ nähden, jos ja vain jos

$$0 = (\mathbf{y} - a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} - (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} - a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}).$$

Siis kaava (4) totetuu, kun $\mathbf{z}$ on ortogonaalinen vektoriin $\mathbf{u}$ nähden, jos ja vain jos $a = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$ ja $\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}$. Vektoria $\hat{\mathbf{y}}$ kutsutaan vektorin $\mathbf{y}$ ortogonaaliseksi projektioksi vektorilla $\mathbf{u}$ ja vektori $\mathbf{z}$ on vektorin $\mathbf{y}$ komponentti, joka on ortogonaalinen vektoriin $\mathbf{u}$ nähden.

Jos vektorin $\hat{\mathbf{y}}$ määritelmässä $\mathbf{u}$ korvataan vektorilla $c\mathbf{u}$ ja c on mikä tahansa nollasta poikkeava skalaari, niin vektorin $\mathbf{y}$ ortogonaalinen projektio vektorille $c\mathbf{u}$ on täysin sama kuin vektorin $\mathbf{y}$ ortogonaalinen projektio vektorilla $\mathbf{u}$. Siis projektio on määritetty aliavaruudella L, joka on virittyy vektorilla $\mathbf{u}$. Toinen tapa ilmaista $\hat{\mathbf{y}}$ on $\mathrm{proj}_L\, \mathbf{y}$ ja sitä kutsutaan vektorin $\mathbf{y}$ ortogonaaliseksi projektioksi aliavaruudella L. Toisin sanoen,

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_L\, \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}. \tag{5}$$

Tässä käytettiin aliavaruutena yksiulotteista viivaa, joka kulkee koordinaatiston origon kautta vektorin $\mathbf{u}$ suuntaisesti.

4.2 Yleinen n-ulottuvuus

Tutustutaan vielä projektion käyttäytymiseen, kun tutkitaan yleistä n-ulottuvuutta ja avaruutta $\mathbb{R}^n$. Hyödynnetään Layn oppikirjan [1] alalukua 6.3.

Olkoot jokin vektori $\mathbf{y}$ ja aliavaruus W avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Aliavaruudessa W on jokin vektori $\hat{\mathbf{y}}$, jolla on ominaisuudet

1. $\hat{\mathbf{y}}$ on yksikäsitteinen vektori aliavaruudessa W, mille $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ on ortogonaalinen aliavaruuteen W nähden,

2. $\hat{\mathbf{y}}$ on yksikäsitteinen vektori aliavaruudessa W ja lähimpänä vektoria $\mathbf{y}$.

Nämä vektorin $\hat{\mathbf{y}}$ ominaisuudet ovat tärkeitä työkaluja, kun ratkaistaan lineaaristen järjestelmien pienimpiä neliösummia. Lisäksi $\hat{\mathbf{y}}$ on vektoria $\mathbf{y}$ lähin aliavaruuden W vektori.

Ennen seuraavaan lauseeseen siirtymistä on hyvä huomata, miten avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $\mathbf{y}$ kirjoitetaan vektorien $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\mathrm{n}$ lineaarikombinaationa. Nämä vektorin $\mathbf{y}$ summan termit voidaan ryhmitellä kahteen osaan niin, että $\mathbf{y}$ voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2,$$

missä $\mathbf{z}_1$ on lineaarikombinaatio joistain vektoreista $\mathbf{u}_i$ ja $\mathbf{z}_2$ on lineaarikombinaatio lopuista vektoreista $\mathbf{u}_i$. Tämä ajatus on erityisen hyödyllinen, kun $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ on ortogonaalinen kanta.

Seuraavassa lauseessa näytetään, miten vektorin $\mathbf{y} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ komponenttihajoitelma voidaan laskea ilman avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortogonaalista kantaa. Riittää, että on tiedossa aliavaruuden W ortogonaalinen kanta.

Lause 4. *Olkoon W avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus. Silloin jokainen $\mathbf{y}$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisessä muodossa*

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}, \tag{6}$$

missä $\hat{\mathbf{y}}$ on aliavaruudessa W ja $\mathbf{z}$ on aliavaruuteen W nähden kohtisuorassa aliavaruudessa $W^\perp$. Itse asiassa, jos $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ on mikä tahansa aliavaruuden W ortogonaalinen kanta, niin

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p \tag{7}$$

ja $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

Todistus. Olkoon $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ aliavaruuden W ortogonaalinen kanta ja määrätään $\hat{\mathbf{y}}$ kaavan (7) mukaan. Näin vektori $\hat{\mathbf{y}}$ on aliavaruudessa W, koska $\hat{\mathbf{y}}$ on kannan $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$ lineaarikombinaatio. Olkoon $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$. Koska vektori $\mathbf{u}_1$ on ortogonaalinen vektoreihin $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ nähden, kaavasta (7) seuraa

$$\begin{aligned}\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_1 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 - \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 - 0 - \cdots - 0 \\ &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 = 0.\end{aligned}$$

Siis $\mathbf{z}$ on ortogonaalinen vektoriin $\mathbf{u}_1$ nähden. Samanlaisesti $\mathbf{z}$ on ortogonaalinen muihin vektoreihin $\mathbf{u}_j$ nähden, mitkä muodostavat aliavaruuden W kannan. Näin $\mathbf{z}$ on ortogonaalinen jokaiseen aliavaruuden W vektoriin nähden ja kuuluu kohtisuoraan aliavaruuteen $W^\perp$.

Komponenttihajoitelman yksikäsitteisyys esitetään kaavan (6) mukaisesti seuraavalla tavalla. Oletetaan, että $\mathbf{y}$ voidaan myös kirjoittaa muodossa $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{z}_1$, kun $\hat{\mathbf{y}}_1$ on aliavaruudessa W ja $\mathbf{z}_1$ kohtisuorassa aliavaruudessa $W^\perp$. Näin $\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = \hat{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{z}_1$ (koska yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret kuin vektori $\mathbf{y}$) ja

$$\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}$$

Tämä yhtäsuuruus osoittaa, että vektori $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_1$ kuuluu aliavaruuksiin W ja $W^\perp$ (koska molemmat vektorit $\mathbf{z}_1$ ja $\mathbf{z}$ kuuluvat kohtisuoraan aliavaruuteen $W^\perp$). Näin $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tämä todistaa, että $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}_1$ ja $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}$. □

Kaavan (6) mukaan laskettu komponenttihajoitelman yksikäsitteisyys osoittaa, että vektorin $\hat{\mathbf{y}}$ ortogonaalinen projektio riippuu vain aliavaruudesta W eikä tietystä kannasta, jota käytettiin kaavan (7) kanssa laskemisessa.

4.3 Esimerkki ortogonaalisesta projektiosta

Esimerkki 3. Tutkitaan esimerkkien 1 ja 2 kolmiulotteista avaruutta $\mathbb{R}^3$ ja erästä vektoria $\mathbf{y} = (3, -2, 6)$. Vektori $\mathbf{y}$ on kirjasta *Vektorit* sivulta 84. Vektorijoukon S vektoripari $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ muodostaa erään aliavaruuden W ortogonaalisen kannan. Muodostetaan vektorin $\mathbf{y}$ komponenttihajoitelma ja ortogonaalinen projektio aliavaruudelle W.

Muodostetaan ensin aliavaruuden vektori $\hat{\mathbf{y}}$. Lasketaan tarvittavat pistetulot vektorien välillä:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1 &= 3(2) + (-2)(-3) + 6(-1) = 6 + 6 - 6 = 6,\\
\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_3 &= 3(-4) + (-2)(-8) + 6(16) = -12 + 16 + 96 = 100,\\
\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 &= 14 \text{ ja}\\
\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 &= 336.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan pistetulot seuraavaksi projektion kaavaan:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}} &= \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3\\
&= \frac{6}{14}\mathbf{u}_1 + \frac{100}{336}\mathbf{u}_3 = \frac{36}{84}\mathbf{u}_1 + \frac{25}{84}\mathbf{u}_3\\
&= (-\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{13}{3}).
\end{aligned}$$

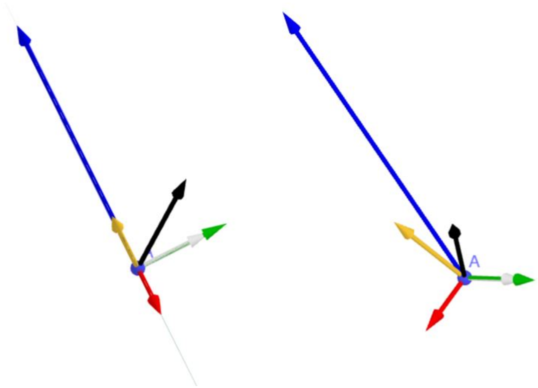
Siis avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorin $\mathbf{y}$ ortogonaalinen projektio aliavaruudelle W on vektori $\hat{\mathbf{y}} = (-\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{13}{3})$. Lasketaan vielä aliavaruudelle W ortogonaalinen komponentti $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \left(\frac{9}{3} + \frac{1}{3}, -\frac{6}{3} + \frac{11}{3}, \frac{18}{3} - \frac{13}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Vektorin $\mathbf{y}$ komponenttihajoitelma on siis

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Kuvassa (2) on näkyvissä vektorit $\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{z}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ seuraavassa värijärjestyksessä: musta, keltainen, valkoinen, punainen, vihreä ja sininen. Vasemmalla puolella näkyy, kuinka ortogonaalinen projektio on samassa tasossa kannan virittäneiden vektorien kanssa. Oikealla puolella näkyy, kuinka ortogonaalinen komponentti $\mathbf{z}$ on vektorin $\mathbf{u}_2$ skalaarimoninkerta, mikä vahvistaa sen kuuluvan kohtisuoraan aliavaruuteen $W^\perp$.



Kuva 2: Vektorin $\mathbf{y}$ (musta) ortogonaalinen projektio $\hat{\mathbf{y}}$ (keltainen) aliavaruudessa W.

Viitteet

[1] Lay, David C. & al., *Linear Algebra and its applications*, Fifth edition, Pearson Education, Inc., Yhdysvallat, 2016, s. 331-355.

[2] Heiskanen ym., *Vektorit, Sanoma Pro Oy*, Helsinki, 2019, (Tekijä Pitkä matematiikka).

[3] Lovrić, M., *Vector Calculus*, Addison-Wesley Publishers Limited, Canada, 1997.