



**TURUN  
YLIOPISTO**  
Kauppakorkeakoulu

# **Estimaatiovirheen vaikutus keskiarvo-variانسsopti- moinnissa yksittäisten osakkeiden valinnassa verrattuna naiiviin tasahajautukseen**

Piensijoittajan näkökulma Helsingin pörssissä 2020–2025

Laskentatoimi ja rahoitus  
Kandidaatintutkielma

Laatija:  
Tuomas Lairemo

Ohjaaja:  
KTT Niina Hakala

22.04.2026

Turku

Opiskelijan lausunto tekoölyn käytöstä tähän tutkielmaan liittyen:

**En ole käyttänyt tekoölyä hyödyntäviä työkaluja** tätä tutkielmaa kirjoittaessani.

**Olen käyttänyt tekoölyä hyödyntäviä työkaluja** tätä tutkielmaa kirjoittaessani. Tämä käyttö on dokumentoitu tutkielman liitteessä 5. Vakuutan, että tekoölyä käytettiin yliopiston ohjeistuksen mukaisella tavalla.

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin Originality Check -järjestelmällä.

Kandidaatintutkielma

**Oppiaine:** Laskentatoimi ja rahoitus

**Tekijä:** Tuomas Lairemo

**Otsikko:** Estimaatiovirheen vaikutus keskiarvo-varianssoptimoinnissa yksittäisten osakkeiden valinnassa verrattuna naiiviin tasahajautukseen

**Ohjaaja:** KTT Niina Hakala

**Sivumäärä:** 27 tekstisivua + liitteet 3 sivua

**Päivämäärä:** 22.04.2026

## Tiivistelmä

Markowitzin vuonna 1952 esittämä teoria keskiarvo-varianssisäännöstä portfolion valinnassa on ollut yksi tärkeimmistä teoreettisista kehitelmistä rahoituksen alalla. Keskiarvo-varianssoptimointi onkin ollut laajalti tutkittu ja puhuttu teoria aikaisemmassa kirjallisuudessa. Kuitenkin käytännössä se pitää sisällään suuren estimaatiovirheen riskin, mikä monesti on johtanut huonoon out-of-sample-suoriutumiseen.

Tässä tutkielmassa tutkitaan empiirisesti sitä, voiko perinteisestä keskiarvo-varianssoptimoinnista olla pienisijoittajalle hyötyä tuotolla ja riskikorjatulla tuotolla mitattuna suhteessa tasahajautusstrategiaan valittaessa yksittäisiä osakkeita. Optimoitujen portfolioiden suoriutumista verrattiin tasahajautetun portfolion suoriutumiseen out-of-sample-jaksolla 2020–2025. Aineistoksi valittiin markkina-arvoltaan Helsingin pörssin kymmenen suurimman yhtiön osakkeet vuoden 2019 lopussa ja niistä kerättiin historiallista dataa kymmenen vuoden ajalta, minkä perusteella estimoitiin painot minimivarianssiportfolioille ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiville portfolioille.

Suoriutumista mitattiin tuotolla ja riskikorjatulla tuotolla eli Sharpen luvulla. Tutkimuksen tulokset näyttivät, että yksikään estimoitu minimivarianssiportfolio tai keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio ei onnistunut suoriutumaan paremmin kuin tasahajautusstrategia. Tilastollisesti merkitsevää paremmin suoriutumista tasahajautusstrategialla ei kuitenkaan havaittu suhteessa optimointiin. Tulokset olivat silti samansuuntaisia aikaisemman tutkimuksen kanssa, joissa on esitetty, että monesti tasahajautus suoriutuu paremmin kuin keskiarvo-varianssoptimointi, johtuen optimoinnin sisältämästä suuresta estimaatiovirheen riskistä.

**Avainsanat:** keskiarvo-varianssoptimointi, minimivarianssiportfolio, keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio, 1/N-tasahajautusstrategia, estimaatiovirhe

# SISÄLLYS

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>7</b>
1.1	Johdatus aihepiiriin	7
1.2	Tutkimuskysymys ja tutkimuksen toteutus	7
1.3	Tutkimuksen kulku	8
<b>2</b>	<b>Teoreettinen viitekehys</b>	<b>9</b>
2.1	Portfolioteoria	9
2.1.1	Tarvittavat matemaattiset kaavat	10
2.1.2	Mahdollisten portfolioiden joukko ja tehokas rintama	11
2.1.3	Markowitzin malli	12
2.1.4	Kahden rahaston lause	12
2.1.5	Yhden rahaston lause	14
2.2	Lyhyeksimyntirajoite	15
2.3	1/N-tasahajautusstrategia	15
2.4	Sharpen luku	16
2.5	Keskiarvo-varianssoptimoinnin ongelmia käytännössä	16
2.6	Tämän tutkielman asetelma suhteessa aikaisempaan tutkimukseen	20
<b>3</b>	<b>Empiirinen tutkimus</b>	<b>22</b>
3.1	Käytetty tutkimusaineisto	22
3.2	Portfoliot	22
3.2.1	In-sample-jaksolla muodostetut portfoliot	23
3.2.2	Out-of-sample-jaksolla muodostetut portfoliot	24
3.3	Vertailu out-of-sample-jaksolla	25
<b>4</b>	<b>Tutkimustulokset</b>	<b>27</b>
4.1	1/N vs. minimivarianssiportfolio	27
4.2	1/N vs. keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio	27
4.3	Tilastollinen merkitsevyys	28
4.4	Tulosten tulkinta	29
<b>5</b>	<b>Yhteenveto ja johtopäätökset</b>	<b>32</b>
	<b>Lähteet</b>	<b>34</b>

<b>Liitteet</b>	<b>36</b>
<b>Liite 1 In-sample-kovarianssimatriisi</b>	<b>36</b>
<b>Liite 2 Out-of-sample-kovarianssimatriisi</b>	<b>36</b>
<b>Liite 3 1/N vs. minimivarianssiportfolio kk-luvut</b>	<b>36</b>
<b>Liite 4 1/N vs. keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio kk-luvut</b>	<b>37</b>
<b>Liite 5 Selvitys tekoälyn käytöstä</b>	<b>37</b>

## TAULUKOT

Taulukko 1 Valitut osakkeet	22
Taulukko 2 Muodostetut portfoliot	23
Taulukko 3 In-sample-estimoidut portfoliopainot	24
Taulukko 4 Out-of-sample-lasketut portfoliopainot	25
Taulukko 5 Out-of-sample: 1/N vs. minimivarianssiportfolio	27
Taulukko 6 Out-of-sample: 1/N vs. keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio	28
Taulukko 7 Keskiarvotesti	29
Taulukko 8 Sharpen eron testi	29

# 1 Johdanto

## 1.1 Johdatus aihepiiriin

Markowitzin (1952) esittämä portfolioteoria on yksi tärkeimmistä teoreettisista kehityksistä rahoituksen alalla (Jagannathan & Ma 2003). Tämä perinteinen keskiarvo-varianssoptimointi on ollut suuressa roolissa modernissa rahoitusteoriassa ja se on myös paljon puhuttu ja testattu teoria kirjallisuudessa. Teoriassa se antaa sijoittajalle optimaaliset painot eri arvopapereille portfoliota muodostettaessa, jos portfolion varianssi ja keskituotto ovat ainoat relevantit parametrit ja tulevaisuuden odotetut tuotot ja kovarianssit otetaan annettuina. Kuitenkin käytettäessä keskiarvo-varianssoptimointia arvopapereiden valintaan, estimaatiovirheet syöteparametreissa johtavat usein huonoon out-of-sample-suoriutumiseen. (Bessler ym. 2017.)

Tasahajautusstrategia portfolion valinnassa sen sijaan ei vaadi estimointia, eikä näin ollen sisällä minikäänlaista estimaatiovirhettä (DeMiguel ym. 2009). Tämä strategia onkin yksityissijoittajien keskuudessa hyvin suosittu tapa hajauttaa kohteena olevat arvopaperit rakennettaessa omaa portfoliota (Bernartzi & Thaler 2001). Tasahajautusstrategia on myös tutkimuksessa paljon käytetty vertailukohde optimoinnille ja sen on monesti todettu kykenevän parempaan suoriutumiseen verrattaessa keskiarvo-varianssoptimointiin. Esimerkiksi DeMiguel ym. (2009) näyttivät tutkimuksessaan, että yksikään heidän käyttämästään 14:sta keskiarvo-varianssoptimointimallista ei onnistunut suoriutumaan toistuvasti paremmin kuin tasahajautusstrategia. Aiemmassa tutkimuksessa Bessler ym. (2017), DeMiguel ym. (2009), Levy ja Duchin (2010) ja Platanakis ym. (2021) ovat tutkineet aiheutta käyttäen aineistonaan indeksoitua osakedataa, valmiita osakeportfolioita tai saman sektorin sisällä olevia osakkeita ja tulleet monesti siihen tulokseen, että keskiarvo-varianssoptimointi suoriutuu huonommin kuin tasahajautus.

Aikaisemmasta tutkimuksesta poiketen, tässä tutkimuksessa käytetään yksittäisistä osakkeista muodostettua aineistoa, joka koostuu usean eri toimialan yhtiöistä. Tämä luo piensijoittajan kannalta relevantin tutkimusongelman siitä, voiko tämä yksittäisiä osakkeita valitessaan saada hyötyä keskiarvo-varianssoptimoinnista verrattuna piensijoittajien paljon suosimaan naiiviin tasahajautusstrategiaan.

## 1.2 Tutkimuskysymys ja tutkimuksen toteutus

Tutkielman tavoitteena on arvioida empiirisesti sitä, ovatko minimivarianssiportfolio ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio piensijoittajalle hyödyllisiä verrattuna naiiviin 1/N-tasahajautustrategiaan yksittäisten osakkeiden valinnassa Helsingin pörssissä out-of-sample-testijaksolla

2020–2025. Hyödyllisyyttä mitataan tässä tutkielmassa optimoitujen portfolioiden tuoton ja riskikorjatun tuoton erolla suhteessa  $1/N$ -tasahajautuksella muodostettuun portfolioon. Tavoitteena on siis vastata seuraavaan tutkimuskysymykseen:

- Voiko piensijoittaja parantaa tuottoaan tai riskikorjattua tuottoaan käyttämällä keskiarvo-varianssoptimointia yksittäisten osakkeiden valinnassa verrattuna naiiviin  $1/N$ -tasahajautustrategiaan Helsingin pörssissä out-of-sample-testijaksolla 2020–2025?

Tutkimus rajataan osakeuniversumiin, joka koostuu kymmenestä markkina-arvoltaan suurimmasta Helsingin pörssin yhtiön osakkeesta vuoden 2019 lopussa. Näistä osakkeista kerätään Total Return -hintadataa joulukuun lopusta 2009 joulukuun loppuun 2025. Kerätty aineisto jaetaan in-sample-jaksoon 31.12.2009 – 31.12.2019 ja out-of-sample-jaksoon 31.12.2019 – 30.12.2025. In-sample-jakson perusteella estimoidaan optimaaliset painot minimivarianssiportfolioille ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiville portfolioille. Out-of-sample-jakson alussa luodaan portfolioit näillä optimoiduilla painoilla, joita verrataan  $1/N$ -tasahajautuksella muodostettuun portfolioon. Portfolioille ei suoriteta uudelleenpainottamista, vaan kaikkien portfolioiden painot lasketaan kerran ja ne pidetään samana koko out-of-sample-jakson ajan. Lyhyeksimyntiä ei sallita millekään strategialle eli kaikkien portfolioiden painot pidetään ei-negatiivisina. Minimivarianssiportfolioista ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivasta portfolioista luodaan variaatioita käyttäen erilaisia ylärajoja portfoliojen painoille ja tutkitaan niiden vaikutusta out-of-sample-suoriutumiseen. Lisäksi vertailukohteeksi in-sample-jaksolla estimoiduille portfolioille luodaan jokaiselle optimoidulle portfolioille vastinparit out-of-sample-jaksolla, jolloin painot lasketaan käyttäen todellista tiedettyä tuottojakaumaa.

### 1.3 Tutkimuksen kulku

Tutkielman luvussa 2 käsitellään alkuun portfolioteorian perustaa ja muodostettavien portfolioiden matemaattisia malleja. Luvun 2 loppupuolella tarkastellaan keskiarvo-varianssoptimoinnin ongelmia käytännössä, aikaisempaa tutkimusta ja aikaisemman tutkimuksen kytkeä tämän tutkielman asetelmaan. Luvussa 3 käsitellään tarkemmin empiirisessä osiossa käytettyä dataa, valittuja osakkeita sekä näistä osakkeista muodostettuja portfolioita. Lisäksi luvussa 3 käsitellään sitä, miten portfolioiden out-of-sample-suoriutumista vertaillaan. Luvussa 4 esitetään empiirisen tutkimuksen tulokset portfolioiden suoriutumisesta ja vertaillaan niitä keskenään sekä suhteessa aikaisempaan tutkimukseen. Luvussa 5 esitetään johtopäätökset ja vastaus tutkimuskysymykseen.

## 2 Teoreettinen viitekehys

### 2.1 Portfolioteoria

Markowitzin (1952) mukaan portfolion valinta voidaan jakaa kahteen osaan. Ensimmäinen osa alkaa tarkkailulla ja havainnoinnilla ja se loppuu näkemyksiin tulevaisuuden tuotoista saatavilla olevista arvopapereista. Toinen osa puolestaan alkaa relevanteilla uskomuksilla tulevaisuuden tuotoista ja loppuu portfolion valintaan. Hänen mukaansa portfoliota valitessaan sijoittajan tulisi maksimoida odotettua tuottoaan ja samalla minimoida odotetun tuoton varianssia. Suurimman odotetun tuoton portfolio ei kuitenkaan ole välttämättä se, jolla on pienin varianssi. Markowitzin (1952) mukaan on siis olemassa suhde, jossa sijoittaja voi lisätä odotettua tuottoaan lisäämällä odotetun tuoton varianssia tai vastaavasti vähentää varianssia samalla luopuen odotetusta tuotosta, jolloin sijoittajan tulisi valita sellainen portfolio, joka on tehokas keskiarvo-varianssisäännön mukaan. Tällainen portfolio minimoi varianssin annetulla tuottotasolla tai vastaavasti maksimoi odotetun tuottotason annetulla varianssilla. (Markowitz 1952.)

Portfoliota muodostettaessa  $n$  määrästä arvopapereita, tarvitaan jokaiselle arvopaperille odotettu tuotto, odotetun tuoton varianssi ja kovarianssi kaikkien muiden arvopapereiden kanssa (Francis & Kim 2013, 22). Yleisimmin arvopapereiden odotettua tuottoa ja riskiä arvioidaan historiallisen datan pohjalta. Monesti tarkastellaan riittävän pitkän ajanjakson historiallisia tuottoja, joiden pohjalta lasketaan keskimääräinen tuotto ja varianssi, joita käytetään estimaatteina tulevasta. Arvopapereiden riskiä mitataan keskihajonnalla eli toisin kutsuttuna volatiliteetilla. Se lasketaan portfolion tuoton varianssin neliöjuurena ja se mittaa tuottojen odotusarvon ympärillä tapahtuvaa hajontaa. (Knüpfer & Puttonen 2018, 136–137.)

Hajauttamalla sijoituksiaan useampaan eri riskilliseen arvopaperiin portfolion tuoton hajonta laskee, etenkin jos uusilla mukaan otettavilla arvopapereilla on alhainen kovarianssi muiden portfolion arvopapereiden kanssa. Portfolion hajautettavissa olevaa riskiä kutsutaan epäsystemaattiseksi riskiksi, sillä se muodostuu sellaisista arvopaperikohtaisista tekijöistä, joilla ei ole vaikutusta muiden arvopapereiden tuottoon. Laajalla hajauttamisellakaan ei voida kuitenkaan poistaa kaikkea riskiä portfoliosta. Tämä puolestaan johtuu markkinariskistä tai niin kutsutusta systemaattisesta riskistä, joka muodostuu makroekonomisista tekijöistä, joilla voi olla samanaikaisesti vaikutus useampaan arvopaperiin. (Bodie ym. 2021, 194–195; Knüpfer & Puttonen 2018, 148–149.)

### 2.1.1 Tarvittavat matemaattiset kaavat

Yksittäisen arvopaperin odotettu keskimääräinen tuotto voidaan laskea ottamalla keskiarvo sen tuottovauhdista. Arvopaperin tuottovauhti  $r$  esimerkiksi kuukausittain voidaan laskea kaavasta (1):

$$r = \frac{x_1 - x_0}{x_0},$$

missä  $x_1$  on arvopaperin arvo tarkasteltavan kuukauden lopussa ja  $x_0$  on arvopaperin arvo tarkasteltavan kuukauden alussa. Koko portfolion odotettu keskimääräinen tuotto  $\bar{r}$  voidaan puolestaan laskea kaavasta:

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i,$$

missä  $w_i$  on arvopaperin  $i$  paino portfoliossa ja  $\bar{r}_i$  on arvopaperin  $i$  odotettu keskimääräinen tuotto. Kaikkien arvopapereiden odotetut keskimääräiset tuotot ja painot summataan yhteen, jolloin saadaan koko portfolion odotettu keskimääräinen tuotto. (Luenberger 2014, 144–146.) Tämä voidaan esittää tutkielman empiirisen osuuden kannalta hyödyllisessä matriisimuodossa kaavalla (2):

$$\bar{r} = \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}},$$

missä  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  on portfolion painoista muodostettu vektori ja yläindeksi T kuvaa vektorin transpoosia eli tilannetta, jossa vektorin rivit muutetaan sarakkeiksi tai sarakkeet muutetaan riveiksi. Puolestaan  $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)$  on portfolion arvopapereiden muodostama keskituottovektori. (Francis & Kim 2013, 142.)

Yksittäisen arvopaperin tuoton lisäksi tarvitaan sen tuoton varianssi  $\sigma^2$ , joka voidaan laskea kaavalla:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2,$$

missä  $r_i$  on arvopaperin satunnainen tuotto ja  $\bar{r}$  on sen odotettu tuotto, joiden erotus on korotettu toiseen potenssiin. (Knüpfer & Puttonen 2018, 136; Luenberger 2014, 149.) Jotta voidaan laskea koko portfolion varianssi, tulee vielä määritellä kovarianssi  $\sigma_{ij}$ , joka voidaan kahdelle arvopaperille laskea seuraavasti kaavalla (3):

$$\sigma_{ij} = \sum_{i,j=1}^n (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j),$$

missä arvopaperin  $i$  satunnaisen tuoton erotus odotetusta tuotostaan kerrotaan samalla ajanhetkellä arvopaperin  $j$  satunnaisen tuoton erotuksella omasta odotetusta tuotostaan. Nyt voidaan esittää kaava, jolla koko portfolion tuoton varianssi  $\sigma^2$  voidaan laskea:

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} ,$$

missä  $w_i$  ja  $w_j$  ovat arvopapereiden  $i$  ja  $j$  painot portfoliossa ja  $\sigma_{ij}$  arvopapereiden  $i$  ja  $j$  välinen kovarianssi. Tässä on tärkeää huomata se, että osakkeen  $i$  kovarianssi  $\sigma_{ii}$  itsensä kanssa on sama kuin osakkeen  $i$  varianssi  $\sigma_i^2$ . (Luenberger 2014, 150–157.) Empiirisen osan kannalta on mielekästä esittää portfolion varianssin kaava myös matriisimuodossa:

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} ,$$

jolloin portfolion keskihajonta eli volatilitteetti on varianssin neliöjuuri kaavalla (4):

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} ,$$

missä  $\mathbf{w}$  on portfolion painovektori ja  $\boldsymbol{\Sigma}$  on portfolion sisältämien arvopapereiden muodostama kovarianssimatriisi. (Francis & Kim 2013, 142.)

### 2.1.2 Mahdollisten portfolioiden joukko ja tehokas rintama

Oletetaan, että on saatavilla  $n$  kappaletta riskillisiä arvopapereita. Kun näistä arvopapereista muodostetaan portfolioita kaikilla mahdollisilla eri kombinaatioilla kuitenkin niin, että arvopapereiden painot portfoliossa summautuvat aina arvoon yksi, saadaan muodostettua mahdollisten portfolioiden joukko. Tämä joukko sisältää siis kaikki sellaiset portfoliot, jotka näistä arvopapereista on mahdollista rakentaa ja se muodostaa niin kutsutun saavutettavan alueen. Tätä saavutettavan alueen vasemmanpuoleista reunamaa kutsutaan minimivarianssirintamaksi, mikä muodostaa luodin tai kallellaan olevan paraabelin muotoisen kuvion. Tällä rintamalla sijaitsevat kaikki ne mahdolliset portfoliot, joissa varianssi minimoituu annetulla tuottotasolla. Minimivarianssirintaman kaukaisin vasemmanpuoleinen piste määrittää puolestaan minimivarianssiportfolion, joka omaa pienimmän varianssin kaikista mahdollisista portfolioista. (Bodie ym. 2021, 208–209; Knüpfer & Puttonen 2018, 146; Luenberger 2014, 161–163.)

Tehokkaaksi rintamaksi kutsutaan minimivarianssirintaman ylempää kaarta alkaen minimivarianssipisteestä. Kaikki portfoliot, jotka sijaitsevat tällä rintamalla muodostavat parhaat mahdolliset riski-

tuottoparit. Puolestaan portfolioit, jotka sijaitsevat minimivarianssirintaman alemmalla kaarella alkaen minimivarianssipisteestä, ovat tehottomia. Näille portfolioille löytyy vastinpari tehokkaalta rintamalta, jossa samalla riskitasolla saavutetaan korkeampi odotettu tuotto. (Bodie ym. 2021, 208–209.)

### 2.1.3 Markowitzin malli

Markowitzin (1952) esittämä varianssin tietyllä tuottotasolla minimoiva malli voidaan muotoilla matemaattiseksi ongelmaksi. Markowitzin ongelma luo perustan yhden periodin sijoitusteorialle ja se muodostuu kompromissista odotetun tuoton ja sen varianssin suhteessa. Oletetaan yleisellä tasolla, että saatavilla on  $n$  kappaletta arvopapereita. Yleisessä tapauksessa oletetaan myös lyhyeksimyynnin olevan mahdollista. Lisäksi tiedetään kyseisten arvopapereiden odotetut tuotot ja tuottojen kovarianssit. Jotta löydetään varianssin minimoiva portfolio halutulla tuottotasolla, asetetaan tämä haluttu tuottotaso arvoon  $\bar{r}$ . Tällä valitulla tuottotasolla portfolion varianssin minimoiva ongelma voidaan muotoilla seuraavasti:

$$\min \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij},$$

missä  $w_i$  ja  $w_j$  ovat arvopapereiden  $i$  ja  $j$  painot ja  $\sigma_{ij}$  on arvopapereiden  $i$  ja  $j$  välinen kovarianssi. Summakaava kuvaa koko portfolion varianssia. Mukana ovat myös rajoitteet:

$$\sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

missä  $w_i$  on arvopaperin  $i$  paino ja  $\bar{r}_i$  arvopaperin  $i$  odotettu keskituotto. Ensimmäinen rajoite kuvaa sitä, että portfolion odotetun tuoton tulee täsmätä sen halutun tuottotason kanssa ja toisen rajoitteen mukaan portfolion painojen tulee summautua arvoon yksi. (Luenberger 2014, 164–165.)

### 2.1.4 Kahden rahaston lause

Kahden rahaston lauseen mukaan voidaan muodostaa Markowitzin mallin pohjalta kaksi tehokasta kantarahastoa keskiarvo-variانسsisuhteessa, jotka sijaitsevat tehokkaalla rintamalla. Näitä kahta kantarahastoa yhdistelemällä voidaan saavuttaa mikä tahansa muu tehokas portfolio, joka sijaitsee myös tehokkaalla rintamalla. Kahden rahaston lauseen mukaisessa asetelmassa oletetaan mahdollisten

sijoituskohteiden muodostuvan ainoastaan riskillisistä sijoituksista. (Luenberger 2014, 169.) Tämän tutkimuksen valossa on mielekäästä muodostaa tehokkaiksi kantarahastoiksi minimivarianssiportfolio ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio, sillä näitä kahta portfolioa tullaan vertailemaan suhteessa 1/N-tasahajautusstrategiaan tutkielman empiirisessä osassa.

Yleisessä tapauksessa, jossa riskillisten sijoituskohteiden määrä on  $n$ , voidaan minimivarianssiportfolio ratkaista seuraavasta yhtälöstä:

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} v_j^1 = 1,$$

missä  $\sigma_{ij}$  on sijoituskohteiden  $i$  ja  $j$  välinen kovarianssi ja yhtälön toinen puoli on asetettu vakioksi yksi. Ratkaistaan tästä yhtälöstä vektori  $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1)$ , jonka jälkeen normeerataan  $v_j^1$ :t, jotta saadaan portfoliolle painot niin, että ne summautuvat arvoon yksi. Normeeraus tapahtuu seuraavalla kaavalla:

$$w_i^1 = \frac{v_i^1}{\sum_{j=1}^n v_j^1}.$$

Tästä saadaan painovektori  $\mathbf{w}^1 = (w_1^1, w_2^1, \dots, w_n^1)$ , joka määrittää minimivarianssiportfolion. (Luenberger 2014, 170.) Tämä ratkaisu voidaan esittää myös matriisimuodossa mukaillen DeMiguelin ym. (2009) esittämää kaavaa (5):

$$\mathbf{w}^1 = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}},$$

missä  $\boldsymbol{\Sigma}$  on  $n$  kappaleesta arvopapereita muodostettu kovarianssimatriisi ja  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  on tämän kovarianssimatriisin käänteismatriisi.  $\mathbf{1}$  on vakioista muodostettu vektori muotoa  $\mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$ .

Keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio voidaan ratkaista samaan tyyliin kuin minimivarianssiportfolio. Nyt kuitenkin ratkaistavan yhtälön toisella puolella on mukaan valittujen arvopapereiden keskituottovektori  $\bar{\mathbf{r}}$ , jolloin yhtälö tulee seuraavan kaavan mukaiseen muotoon:

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} v_j^2 = \bar{r}_i.$$

Yhtälöstä ratkaistaan samaan tapaan vektori  $\mathbf{v}^2$  kuin minimivarianssiportfolion tapauksessa, josta normeeraamalla saadaan keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivan portfolion painovektori  $\mathbf{w}^2$ .

(Luenberger 2014, 171.) Tämäkin voidaan esittää matriisimuodossa mukaillen DeMiguelia ym. (2009) seuraavasti kaavalla (6):

$$\mathbf{w}^2 = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\bar{\mathbf{r}}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\bar{\mathbf{r}}},$$

missä komponentit ovat muuten samat kuin minimivarianssiportfolion tapauksessa, mutta nyt toisen vakioista muodostuvan vektorin paikalla on keskituottovektori  $\bar{\mathbf{r}}$ .

Ratkaisujen esittäminen matriisimuodossa helpottaa ja selkeyttää niiden hyödyntämistä tutkielman empiirisessä osiossa, missä portfolioiden muodostaminen tapahtuu nimenomaan matriisilaskentaa käyttämällä.

### 2.1.5 Yhden rahaston lause

Yhden rahaston lauseen mukaisessa asetelmassa lisätään edelliseen teoriaan mahdollisuus sijoittaa myös riskittömään arvopaperiin. Riskittömän arvopaperin tuotto tiedetään varmuudella, joten sen tuoton keskihajonta on nolla. Riskitön arvopaperi on korkoinstrumentti ja sen lisääminen yleisessä asetelmassa vastaa sitä, että riskittömällä korolla voidaan lainata ja ottaa lainaksi. Eli voidaan sijoittaa esimerkiksi riskittömänä pidettävään velkakirjaan, jolloin paino portfolioissa on positiivinen tai lainata rahaa riskittömällä korolla, jolloin paino portfolioissa on negatiivinen. Riskittömän koron ollessa mukana tehokas rintama muodostuu yhdestä suorasta, jota kutsutaan pääomamarkkinasuoraksi. Tämä suora sivuaa riskillisistä sijoituksista muodostettua tehokasta rintamaa pisteessä F, joka määrittää tehokkaan tangenttirahaston. (Bodie ym. 2021, 170; Luenberger 2014, 171–172.)

Yhden rahaston lauseen mukaan kaikki tehokkaat portfoliot voidaan muodostaa yhdistämällä riskitöntä korkoa ja riskillisistä sijoituksista koostuvaa tehokasta rahastoa, joka sijaitsee pisteessä F. Tämä tehokas tangenttiportfolio maksimoi saavutettavan pisteen ylituoton suhteessa riskittömään korkoon eli se siis maksimoi rahaston Sharpen luvun, joka esitellään tarkemmin alaluvussa 2.4. Tangenttiportfolio voidaan ratkaista vastaavalla tavalla kuin minimivarianssiportfolion ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivan portfolion tapauksissa. (Bodie ym. 2021, 170; Luenberger 2014, 173.) Soveltaen DeMiguelia ym. (2009) matriisimuodon kaava tulee muotoon:

$$\mathbf{w}^F = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - r_f)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - r_f)},$$

missä komponentit ovat muuten samat kuin keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivan portfolion ratkaisussa, mutta lisänä on keskituottovektorista  $\bar{\mathbf{r}}$  vähennettävä riskitön korko  $r_f$ .

## 2.2 Lyhyksimyyntirajoite

Lyhyksimyynti tarkoittaa sellaista arvopaperin myyntiä, missä kohteena olevaa arvopaperia ei itse omisteta. Jotta arvopaperin voi myydä lyhyeksi, se tulee lainata joltain toiselta sijoittajalta tai esimerkiksi arvopaperivälitysyhtiöltä. Laina-ajalta sijoittaja saattaa joutua maksamaan koron kaltaista maksua arvopaperin lainanneelle osapuolelle. Myydessään lainatun arvopaperin markkinoille sijoittaja hyötyy kyseisen arvopaperin hinnan laskusta, sillä hän pystyy ostamaan sen takaisin markkinoilta halvemmalla palauttaessaan arvopaperin lainaajalle. Toisaalta tappio arvopaperin hinnan noustessa voi kasvaa suureksi, mikä tekee lyhyksimyynnistä riskialtista. (Diether ym. 2009.)

Portfoliossa lyhyksimyytävien osakkeiden painot ovat negatiivisia. Tämän tutkielman asetelmassa piensijoittajan näkökulmasta sitä ei kuitenkaan sallita portfolioita muodostettaessa. Lyhyksimyynti on käytännössä hyvin vaikeaa toteuttaa ja monet ammattisijoittajatkin haluavat pitää portfolioita muodostaessaan kaikki painot ei-negatiivisina eli he eivät myy mitään arvopaperia lyhyeksi (Jagannathan & Ma 2003).

Markowitzin ongelman yleisessä asetelmassa oletettiin, että lyhyksimyynti on mahdollista. Kun portfolion painot rajataan olemaan ei-negatiivisia, muuttuu ongelma kvadraattiseksi optimointiongelmaksi (Luenberger 2014, 168). Tällaisia ongelmia voidaan ratkaista hyödyntäen esimerkiksi Excelin Solveria, jota myös tässä tutkielmassa käytetään.

## 2.3 1/N-tasahajautusstrategia

1/N-tasahajautusstrategia kuvaa naiivia sijoitustaktiikkaa, missä jokaiseen kohteena olevaan arvopaperiin sijoitetaan samassa suhteessa. Näin ollen painot 1/N-sijoitusstrategialle lasketaan kaavalla (7):

$$w_i = \frac{1}{N},$$

missä  $w_i$  on arvopaperin  $i$  paino ja  $N$  on riskillisten sijoitusten kokonaismäärä. Tämä strategia ei vaadi mitään optimointia tai estimointia vaan se jättää kokonaan historiallisen datan käytön huomioimatta. 1/N-tasahajautusta käytetään monesti vertailukohteena optimoinnille, sillä se on hyvin suoraviivaista soveltaa käytännössä suureenkin määrään arvopapereita kerralla. Tämä saattaa luoda etua suhteessa portfolion optimointiin, sillä optimointi tyypillisesti vaatii lisää parametreja estimoitavaksi kohteena olevien arvopapereiden määrän kasvaessa, mikä lisää estimaatiovirheen riskiä. (DeMiguel ym. 2009.) Estimaatiovirheellä tarkoitetaan sitä, että estimoidut parametrit eroavat tulevaisuuden todellisista parametreista (Kan & Zhou 2007). Vaikka viimeisten vuosikymmenien aikana on luotu paljon

teoreettisesti kehittyneempiä malleja optimaaliseen sijoitussalkun hajauttamiseen, käyttävät sijoittajat silti yksinkertaista tapaa allokoida varojaan tasasuhteessa (DeMiguel ym. 2009).

Tällä strategialla pyritään tuomaan tutkielmaan piensijoittajan näkökulmaa juuri siinä mielessä, että piensijoittajan voi olla houkuttelevaa valita omaan portfolioon esimerkiksi osakkeet vain tasasuhteessa sen sijaan, että tämä käyttäisi aikaa perehtyäkseen vaativampiin optimointimenetelmiin, kuten tässä tutkielmassa käytettävään keskiarvo-varianssoptimointiin.

## 2.4 Sharpen luku

Sharpen (1966) esittämä *reward-to-variability ratio* on myöhemmässä kirjallisuudessa saanut nimekseen *Sharpe ratio* tai nimen *Sharpen luku*, jota tässä tutkielmassa käytetään (Sharpe 1994). Sharpen luku esittää keskimääräisen tuoton ja riskittömän koron erotuksen suhteessa tuoton keskihajontaan. Keskimääräisen tuoton erotus riskittömästä korosta esittää riskipreemiota tai ylituottoa, jonka sijoittaja saa ottamalla lisää riskiä. Puolestaan tuoton hajonta näyttää sijoituksen todellisen syntyneen riskin. (Sharpe 1966.) Se antaa siis mitan ylituotoista volatilitteettisyyskikköä kohden eli toisin sanoen kuvaa sijoituksen riskikorjattua tuottoa. Sharpen luku onkin yksi käytetyimmistä luvuista analysoitaessa ja vertaillaessa esimerkiksi eri portfolioiden riskikorjattua tuottoa. (Opdyke 2007.)

Sharpen lukua hyödynnetään tutkielman empiirisessä osiossa, kun vertaillaan eri portfolioiden suoritumista testijaksolla. Se voidaan esittää seuraavalla kaavalla (8):

$$S_p = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p},$$

missä  $\bar{r}_p$  on portfolion keskimääräinen tuotto,  $\sigma_p$  on portfolion tuoton keskihajonta ja  $r_f$  on riskitön korko (Bodie ym. 2021, 204). Yleisesti ottaen riskittömäksi koroksi voidaan valita esimerkiksi lyhytaikainen rahamarkkinakorko tai pidemmän aikavälin joukkovelkakirjalainan korko. Olennaista on, että valittu riskittömänä pidetty korko vastaa suurin piirtein kestoltaan tarkasteltavana olevan sijoituksen pituutta. (Knüpfer & Puttonen 2018, 154.) Sharpe (1966) käytti estimaattinaan riskittömästä korosta kymmenen vuoden Yhdysvaltain valtionlainan korkoa vertaillaessaan rahastojen Sharpen lukuja.

## 2.5 Keskiarvo-varianssoptimoinnin ongelmia käytännössä

Tuotto- ja riskiodotukset ovat väistämättä alttiita estimaatiovirheille. Keskiarvo-varianssoptimointi monesti ylipainottaa portfolioissa niitä kohteena olevia arvopapereita, joilla on suuret odotetut tuotot,

pieni varianssi ja matala kovarianssi muiden arvopapereiden kanssa. Edellisten ollessa päinvastaisia, kohteena olevien arvopapereiden painot monesti alipainottuvat. Tämän tyyppisillä arvopapereilla on tyyppillisesti suuri estimaatiovirhe. (Michaud 1989.) Jobson ja Korkie (1981b) muodostivat 20 osakkeesta keskiarvo-varianssioptimaalisen portfolion todellisella jo tiedetyllä tuottojakaumalla käyttäen kuukausittaisia tuottoja. He muodostivat samalle vertailuajalle myös estimoidun keskiarvo-varianssiportfolion käyttäen historiallista tuottojakaumaa. Lisäksi vertailukohteeksi samoista osakkeista muodostettiin 1/N-tasahajautusportfolio. Sharpen luvulla mitattaessa estimoinnin perusteella muodostettu portfolio tuotti huomattavasti pienemmän Sharpen luvun kuin 1/N-tasahajautusportfolio ja ero kasvoi suuremmaksi verrattuna todellisen tiedetyn jakauman perusteella muodostettuun portfolioon nähden, joka sai suurimman Sharpen luvun kolmesta portfolioista. He eivät kuitenkaan käyttäneet lyhyeksimyntirajoitetta, jonka käyttäminen todennäköisesti olisi pienentänyt eroja Sharpen lukujen välillä (Michaud 1989).

Jagannathan ja Ma (2003) näyttivät tutkimuksessaan, että lyhyeksimyntirajoitetta ja kuukausittaista dataa käytettäessä pelkän otoskovarianssimatriisin perusteella muodostetut minimivarianssiportfoliot suoriutuivat lähes yhtä hyvin kuin portfoliot, jotka oli muodostettu käyttämällä kehittyneempiä optimointimenetelmiä kuten faktorimalleja, shrinkage-estimaattoreita tai päivittäistä dataa. Heidän mukaansa lyhyeksimyntirajoitteen käyttäminen vastaa samaa kuin pienennettäisiin kyseessä olevan osakkeen ja muiden osakkeiden välisiä kovariansseja, minkä avulla estimaatiovirhe samalla pienenee. He tutkivat myös ylärajojen asettamista portfoliopainoille ja näyttivät, että niiden avulla on myös mahdollista pienentää estimaatiovirhettä ja parantaa out-of-sample-suoriutumista. Kuitenkin lyhyeksimyntirajoitteen jo ollessa paikallaan, ei ylärajojen asettamisen huomattu merkittävästi parantavan minimivarianssiportfolion suoriutumista. He näyttivät myös 500 yhdysvaltalaisen osakkeen aineistollaan, että keskiarvo-varianssioptimoidut tangentiportfoliot rajoitteilla tai ilman, eivät suoriutuneet yhtä hyvin kuin minimivarianssiportfolio, kun verrattiin out-of-sample-jaksolla Sharpen lukuja. Tälle selityksenä pidettiin keskiarvon heikkoutta estimaattorina suuren estimaatiovirheen takia.

DeMiguel ym. (2009) vertasivat tutkimuksessaan 14 erilaista keskiarvo-varianssioptimointimallia seitsemällä eri kuukausittaisista tuotoista muodostetulla datasarjalla suhteessa 1/N-tasahajautusstrategiaan. Datasarjat muodostuivat eri indekseistä ja eri toimialojen pohjalta muodostetuista valmiista portfolioista ympäri maailmaa, painottuen kuitenkin Yhdysvaltain osakemarkkinoille. Heidän tutkimuksessaan yksikään 14 optimointimallista ei suoriutunut toistuvasti paremmin kuin 1/N Sharpen luvulla mitattuna out-of-sample-jaksolla. Tässä tutkimuksessa huomattiin, että molemmat keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio ja minimivarianssiportfolio lyhyeksimyntirajoitteilla suoriutuivat paremmin, kuin samat portfoliot ilman rajoitteita. Minimivarianssiportfolio

lyhyeksimyöntirajoitteilla, jota myös Jagannathan ja Ma (2003) tutkivat, suoriutui näistä portfolioista parhaiten, mutta sekään ei onnistunut toistuvasti päihittämään 1/N-strategiaa Sharpen luvulla mitattuna. DeMiguel ym. (2009) päättelivät tulosten pohjalta, että optimoidut strategiat suoriutuvat paremmin kuin 1/N, kun estimointiperiodi on pitkä, in-sample-jaksolla laskettu Sharpen luku on huomattavasti korkeampi tai kohteena olevien arvopapereiden joukko on pieni. Heidän mukaansa pienempi määrä arvopapereita vaatii vähemmän estimoitavia parametrejä, jolloin estimaatiovirheen riski on pienempi. Näin ollen muiden tekijöiden pysyessä muuttumattomana, pienempi määrä arvopapereita tekee 1/N-strategiasta tehottomamman verrattuna optimoituun hajautukseen. He esittivät myös mahdolliseksi syyksi 1/N paremmalle suoriutumiselle sitä, että tässä tutkimuksessa tarkasteltiin sijoituksia eri valmiiden portfolioiden välillä yksittäisten osakkeiden sijaan. Heidän mukaansa tämä voisi johtua siitä, että hajautettavissa oleva riski on paljon pienempi valmiiksi hajautetuissa portfolioissa kuin yksittäisissä osakkeissa.

Levy ja Duchin (2010) tutkivat keskiarvo-varianssioptimoinnin suoriutumista suhteessa 1/N-tasahajautukseen käyttämällä kuukausittaisista tuotoista muodostettuja 30 eri sektoriportfolioita data-aineistonaan. He muodostivat molemmilla hajautustyyyleillä arvopaperimäärältään pienempiä ja suurempia portfolioita, joita vertailtiin tuoton eroilla out-of-sample-jaksolla sekä tuoton häviöllä suhteessa in-sample-jaksolla laskettuun keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivaan portfolioon. Tämä in-sample-vertailuportfolio oli siis laskettu tiedetyn ja todellisen tuottojakauman perusteella eli se ei sisältänyt mitään estimaatiovirhettä. Poiketen DeMiguelin ym. (2009) havainnoista Levy ja Duchin (2010) puolestaan esittivät tutkimuksessaan, että 1/N-strategia menetti hyötyään suhteessa keskiarvo-varianssioptimointiin, kun kohteena olevien arvopapereiden määrä kasvoi. He perustelivat havaintoaan sillä, että kohteena olevien arvopapereiden määrän ollessa suuri, on yleensä optimaalista sijoittaa vain pienen osaan niistä. Yhtyen Jagannathanin ja Man (2003) tutkimuksen tuloksiin myös Levy ja Duchin (2010) havaitsivat, että asettamalla ylärajat portfoliopainoille, suoriutuivat ne paremmin kuin keskiarvo-varianssiportfoliot ilman rajoitteita out-of-sample-jaksolla. Levyn ja Duchinin (2010) mukaan, mitä epävakaampia tuottojakaumat ovat, sitä suuremmalla todennäköisyydellä 1/N suoriutuu keskiarvo-varianssioptimointia paremmin out-of-sample-jaksolla.

Bessler ym. (2017) tutkivat out-of-sample-suoriutumista useammalla erilaisella keskiarvo-varianssioptimointitavalla verrattuna 1/N-tasahajautukseen, käyttäen aineistonaan aiemmasta tutkimuksesta poiketen useampaa eri arvopaperiluokkaa osakkeiden lisäksi. Uusia mukaan otettuja arvopaperiluokkia olivat valtioiden ja yritysten velkakirjat sekä erilaiset hyödykkeet, kuten esimerkiksi energia, maataloustuotteet ja jalometallit. Heidän käyttämänsä data koostui maailmanlaajuisista osake- ja hyödykeindekseistä sekä Yhdysvaltoihin keskittyvistä velkakirjaindekseistä. Heidän tuloksissaan kaikki

optimointitavat suoriutuivat paremmin Sharpen luvuilla verrattuna out-of-sample-jaksolla kuin  $1/N$ . Kuitenkin keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivalla portfoliolla oli havaittavissa vain pientä paremmin suoriutumista kuin  $1/N$ -strategialla. Heidän havaintonsa erosivat DeMiguelin ym. (2009) esittämistä, jotka puolestaan olivat tulleet siihen tulokseen, että yksikään keskiarvo-varianssoptimointi-strategia ei suoriutunut paremmin kuin  $1/N$ . Bessler ym. (2017) testasivat näin ollen tuloksiaan myös vain osakeindekseistä koostuvalla datalla, jolloin tulokset olivat yhteneväisiä DeMiguelin ym. (2009) kanssa. Todennäköisenä selityksenä tälle Bessler ym. (2017) pitivät sitä, että vain osakkeista muodostettu portfolio menettää hajautuksesta saatavaa hyötyä ja samalla estimaativirheet kasvavat, jolloin optimointi menettää tehoaan.

Platanakis ym. (2021) puolestaan argumentoivat tutkimuksessaan, että keskiarvo-varianssoptimointi on parempi omaisuusluokkien valinnassa, mutta heikompi yksittäisten arvopapereiden valinnassa omaisuusluokkien sisällä kuin  $1/N$ . He käyttivät tutkimuksessaan omaisuusluokkina kymmentä Yhdysvaltain osakemarkkinoilta muodostettua sektori-indeksiä ja yksittäisinä arvopapereina näiden sektori-indeksien sisältämiä osakkeita. Out-of-sample-jaksolla vertailuun käytettiin esimerkiksi Sharpen lukua. He muodostivat vertailtavat portfoliot kahdessa osassa, ensin valitsemalla osakeindeksien joukosta käytettävät indeksit joko keskiarvo-varianssoptimoinnilla tai  $1/N$ -strategialla ja tämän jälkeen valituista indekseistä osakkeet käyttämällä jompaa kumpaa. Parhaimmin suoriutuivat portfoliot, joissa indekseistä optimaaliset valittiin keskiarvo-varianssoptimoinnilla ja tämän jälkeen indeksien sisältämät osakkeet valittiin  $1/N$ -strategialla. He esittivät yhdeksi selitykseksi havainnolleen sen, että estimaativirheet ovat pienempiä omaisuusluokille kuin yksittäisille arvopapereille, sillä omaisuusluokat koostuvat yhteen kerätyistä datasta. He tulivat myös siihen tulokseen, että omaisuusluokkien pienempi määrä verrattuna yksittäisiin arvopapereihin luo etua keskiarvo-varianssoptimoinnille verrattuna  $1/N$ -strategiaan. Tulos oli samankaltainen kuin DeMiguelilla ym. (2009), jotka päättelivät, että keskiarvo-varianssoptimointi suoriutuu paremmin arvopaperijoukon ollessa pieni.

Platanakisin ym. (2021) saamat tulokset erosivat kuitenkin DeMiguelin ym. (2009) ja Besslerin ym. (2017) tuloksista, kun käytössä oleva data koostui pelkästään osakkeista. Platanakis ym. (2021) tulivat tutkimuksessaan tulokseen, että osakeindekseistä valittaessa keskiarvo-varianssoptimointi suoriutuu paremmin kuin  $1/N$ , kun taas DeMiguel ym. (2009) ja Bessler ym. (2017) eivät löytäneet osakedataa käytettäessä vastaavaa paremmin suoriutumista. Toisaalta Platanakisin ym. (2021) argumentointi keskiarvo-varianssoptimoinnin puolesta omaisuusluokkien valinnassa oli saman suuntainen kuin Besslerillä ym. (2017), vaikka heillä olikin käytössään osakeindeksien lisäksi myös muita arvopaperiluokkia.

Aiempi tutkimus on näyttänyt, että varsinkin pelkkää osakedataa käytettäessä estimaatiovirheet ovat heikentäneet huomattavasti keskiarvo-varianssoptimoinnin suoriutumista suhteessa tasahajautukseen. Kuitenkin käyttämällä rajoitteita portfolion painoille, on havaittu, että suoriutuminen paranee, sillä virheellisten ääriarvojen määrää saadaan näin ollen vähennettyä. Rajoitteetkaan eivät ole kuitenkaan osakedataa käytettäessä toistaiseksi johtaneet siihen, että keskiarvo-varianssoptimointi olisi onnistunut päihittämään tasahajautuksen.

## **2.6 Tämän tutkielman asetelma suhteessa aikaisempaan tutkimukseen**

Suurin osa edellä esitetystä aikaisemmasta tutkimuksesta kuten Bessler ym. (2017), DeMiguel ym. (2009), Jagannathan ja Ma (2003) ja Levy ja Duchin (2010) käyttivät data-aineistonaan indeksejä, valmiita portfolioita tai hyvin suurta määrää osakkeita. Tästä poiketen tämän tutkielman data-aineisto koostuu kymmenestä yksittäisestä markkina-arvoltaan suurimmasta Helsingin pörssin yhtiön osakkeesta. Puolestaan Jobson ja Korkie (1981b) käyttivät vain 20 yksittäistä osaketta, mutta heidän tutkimuksessaan ei käytetty lyhyeksimyntirajoitetta. Lyhyeksimyntirajoitteen käyttäminen pienelle määrälle osakkeita tuo siis uuden lisän aikaisempaan tutkimukseen, sillä esimerkiksi Jagannathan ja Ma (2003) näyttivät lyhyeksimyynnin parantavan portfolion suoriutumista. Platanakis ym. (2021) taas käyttivät data-aineistonaan osakkeista muodostettuja sektori-indeksejä ja yksittäisten osakkeiden valinnassa näiden sektori-indeksien sisältämiä markkina-arvoltaan kymmenen suurimman yhtiön osaketta. Nämä kymmenen sektori-indeksin sisältä valittua osaketta olivat kuitenkin jo valmiiksi hyvin samankaltaisia johtuen siitä, että ne olivat saman toimialan yhtiöiden osakkeita. Tämän tutkielman kohteena olevat osakkeet hajautuvat kuitenkin usealle erilaiselle toimialalle.

Aiempi tutkimus kuten DeMiguel ym. (2009) ja Platanakis ym. (2021) suosittavat keskiarvo-varianssoptimoinnille pienempää määrää kohteena olevia arvopapereita. Puolestaan Levy ja Duchin (2010) ehdottivat, että arvopaperien määrän kasvaessa keskiarvo-varianssoptimoinnin suoriutuminen paranee. Levy ja Duchin (2010) käyttivät vertailussa tuottojen eroja, kun taas DeMiguel ym. (2009) ja Platanakis ym. (2021) käyttivät Sharpen lukua eli riskikorjattua tuottoa, joten tulokset eivät välttämättä ole täysin vertailukelpoisia keskenään. Tässä tutkielmassa käytetään mittareina sekä tuottojen eroa ja Sharpen lukua.

Lisäksi yksi muutos tämän tutkielman asetelmassa suhteessa aikaisempaan tutkimukseen on se, että portfolioiden painot lasketaan vain kerran out-of-sample-jakson alussa ja ne pidetään koko tarkastelujakson ajan muuttumattomana eli toteutetaan niin kutsuttua buy-and-hold-strategiaa. Aikaisemmassa tutkimuksessa kuten Bessler ym. (2017), DeMiguel ym. (2009), Jagannathan ja Ma (2003) ja Platanakis ym. (2021) portfoliot uudelleenpainotettiin kuukausittain eli portfolioiden painot

optimoitiin joka kuukauden alussa uudestaan ja testattiin suoriutumista seuraavana kuukautena. Tällä voidaan nähdä, onko uudelleenpainottamisen poisjättämisellä vaikutusta aikaisemman tutkimuksen osoittamiin tuloksiin siitä, että pelkällä osakedatalla ja yksittäisillä osakkeilla  $1/N$  on monesti parempi vaihtoehto kuin keskiarvo-varianssoptimointi.

### 3 Empiirinen tutkimus

#### 3.1 Käytetty tutkimusaineisto

Tutkimukseen käytetty data-aineisto haettiin Bloombergin Terminaalista. Tutkimuksen osakeuniversumi koostuu kymmenestä markkina-arvoltaan suurimmasta Helsingin pörssin yhtiön osakkeesta vuoden 2019 lopussa. Markkina-arvoltaan kymmenen suurinta osaketta valikoituivat kohteeksi, sillä monesti piensijoittaja valitsee portfolioonsa 5–10 osaketta ja suosii markkina-arvoltaan suuria ja tunnettuja yhtiöitä (Pörssisäätiö 2026). Myös Platanakis ym. (2021) käyttivät markkina-arvoltaan kymmenen suurimman yhtiön osakkeita, valitessaan niitä sektoriportfolioiden sisältä. Valitut osakkeet löytyvät taulukosta 1. Näistä valituista osakkeista kerättiin data-aineisto, joka sisälsi kuukausittaiset Total Return -osakekurssit ajanjaksolta 31.12.2009 – 30.12.2025. Total Return -osakekurssit ottavat huomioon yhtiön osingonmaksun ja muut osakkeen kurssiin vaikuttavat tapahtumat, kuten osakkeiden splitit, joissa esimerkiksi yksi osake muutetaan neljäksi uudeksi osakkeeksi. Total Return -kursseja käyttivät myös esimerkiksi Bessler ym. (2017) ja Platanakis ym. (2021) tutkimuksissaan, sillä ne kuvaavat paremmin sijoituksen kokonaistuottoa valitulta ajanjaksolta, joten niitä on mielekästä käyttää myös tässä tutkimuksessa. Tämän jälkeen kerätty osakedata jaettiin kahteen osaan. In-sample-jaksoon, joka käsitti ajanjakson 31.12.2009 – 31.12.2019 ja out-of-sample-jaksoon, joka sisälsi kurssidatan ajanjaksolta 31.12.2019 – 30.12.2025.

Ajanjaksolta 31.12.2019 – 30.12.2025 kerättiin dataa myös riskittömästä korosta, jota käytettiin laskettaessa Sharpen lukuja muodostetuille portfolioille. Riskittömäksi koroksi valikoitui Saksan kymmenen vuotisen valtionlainan korko, sillä se vastasi maturiteetiltaan pidempiaikaisen osakesijoituksen aikahorisonttia. Saksan valtionlainojen korkoja on käytetty euroalueen riskittömänä korkona sekä ennen että jälkeen euron käyttöönoton (European Central Bank 2014).

**Taulukko 1 Valitut osakkeet**

Yhtiöt	Kone Oyj	Nordea Oyj	Neste Oyj	Sampo Oyj	Fortum Oyj	Nokia Oyj	UPM-Kymmene Oyj	Telia Oyj	Stora Enso Oyj	Elisa Oyj
Lyh.	KNEBV	NDA	NESTE	SAMPO	FORTUM	NOKIA	UPM	TELIA1	STERV	ELISA

#### 3.2 Portfoliot

Tutkimuksessa muodostettiin vertailuportfolio 1/N, neljä erilaista portfolioita estimoituja parametrejä käyttämällä ja vertailun vuoksi jokaiselle neljälle estimoidulle portfolioille vastaavat portfoliot, jotka

muodostettiin todellisten tiedettyjen parametrien perusteella. Jokaiselle portfolioille oli voimassa lyhyeksimyntirajoite eli jokaisen portfolion painot rajattiin olemaan ei-negatiivisia. Kaikille portfolioille laskettiin painot kerran out-of-sample-jakson alussa ja painot pidettiin samana koko out-of-sample-vertailujakson ajan. Tällä toteutettiin niin kutsuttua buy-and-hold-strategiaa. Kaupankäyntikustannuksia tässä tutkielmassa ei huomioitu, sillä osakkeisiin sijoitettiin vain kerran. Muodostetut portfoliot ja niiden kuvaukset löytyvät taulukosta 2.

**Taulukko 2 Muodostetut portfoliot**

Portfo-lio	Selite
<b>min-ce</b>	Minimivarianssiportfolio estimoiduista parametreistä 30 % ylärajoitteella
<b>min-e</b>	Minimivarianssiportfolio estimoiduista parametreistä ilman ylärajoitetta
<b>mv-ce</b>	Keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio estimoiduista parametreistä 30 % ylärajoitteella
<b>mv-e</b>	Keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio estimoiduista parametreistä ilman ylärajoitetta
<b>1/N</b>	Tasahajautus
<b>min-ct</b>	Minimivarianssiportfolio tiedetyistä parametreistä 30 % ylärajoitteella
<b>min-t</b>	Minimivarianssiportfolio tiedetyistä parametreista ilman ylärajoitetta
<b>mv-ct</b>	Keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio tiedetyistä parametreista 30 % ylärajoitteella
<b>mv-t</b>	Keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio tiedetyistä parametreista ilman ylärajoitetta

### 3.2.1 In-sample-jaksolla muodostetut portfoliot

Osakkeiden kurssidatasta laskettiin in-sample-jaksolle kuukausittaiset tuottovauhdit hyödyntäen kaavaa 1. Tuottovauhtihavainnot saatiin 120 kappaletta. Näistä tuottovauhtihavainnoista laskettiin otoskovarianssimatriisi (ks. liite 1) hyödyntäen kaavaa 3. Lisäksi kuukausittaisista tuottovauhdeista laskettiin aritmeettisella keskiarvolla keskituottovektori, jota käytettiin laskettaessa painoja estimoitaville keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiville portfolioille. Aritmeettinen keskiarvo toimii yleisesti ottaen riittävän hyvänä estimaattorina odotetuista tuotoista (Bodie ym. 2021, 131). In-sample-jaksolla laskettiin painot seuraaville portfolioille hyödyntäen Excelin Solveria: min-ce, min-e, mv-ce ja mv-e.

Min-ce ja min-e -portfolioille laskettiin painot käyttäen pelkkää otoskovarianssimatriisia hyödyntäen kaavaa 5. Erotuksena kahden portfolion välillä oli se, että min-ce-portfolioille asetettiin yksittäisen osakkeen painolle ylärajaksi 30 %. Tämä rajoite ei kuitenkaan aktivoitunut laskettaessa painoja, joten min-ce ja min-e -portfolioiden painot olivat identtiset. Tämä oli linjassa Jagannathanin ja Man (2003)

kanssa, jotka näyttivät, että lyhyeksimyyntirajoitteen jo ollessa paikallaan, ei ylärajoitteella ole minimivarianssiportfolion tapauksessa suurta vaikutusta.

Mv-ce ja mv-e -portfolioille laskettiin painot käyttäen otoskovarianssimatriisin lisäksi myös in-sample-jaksolle laskettua keskituottovektoria ja hyödyntäen kaavaa 6. Mv-ce-portfolion 30 % ylärajoite yksittäisen osakkeen painolle aktivoitui, joten eroja painoissa syntyi suhteessa mv-e-portfolion painoihin. Kuten Levy ja Duchinkin (2010) huomasivat, ylärajoitteen käyttö vähensi keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivan portfolion ääripainoja. In-sample-jaksolla muodostettujen portfolioiden painot ovat taulukossa 3.

**Taulukko 3 In-sample-estimoidut portfolioipainot**

Painot	min-ce	min-e	mv-ce	mv-e
KNEBV	18,43%	18,43%	30,00%	29,15%
NDA	0%	0%	0%	0%
NESTE	0%	0%	6,79%	5,78%
SAMPO	21,39%	21,39%	29,70%	19,18%
FORTUM	9,94%	9,94%	3,51%	0%
NOKIA	0,15%	0,15%	0%	0%
UPM	0%	0%	0%	0%
TELIA1	22,96%	22,96%	0%	0%
STERV	0%	0%	0%	0%
ELISA	27,13%	27,13%	30,00%	45,89%

### 3.2.2 Out-of-sample-jaksolla muodostetut portfoliot

Out-of-sample-jaksolla laskettiin kuukausittaiset tuottovauhdit, otoskovarianssimatriisi (ks. liite 2) ja aritmeettinen keskituottovektori vastaavalla tavalla kuin in-sample-jaksolla. Tällä kertaa tuottovauhtihavaintoja saatiin 72 kappaletta. Out-of-sample-jaksolla painot laskettiin seuraaville portfolioille hyödyntäen Excelin Solveria: min-ct, min-t, mv-ct ja mv-t. Lisäksi muodostettiin 1/N-vertailuportfolio kaavalla 7, jolloin painot jakautuivat tasan jokaiselle osakkeelle.

Min-ct ja min-t -portfoliot muodostettiin muuten samaan tyyliin kuin in-sample-jaksolla, mutta tällä kertaa käytettiin todellista jo tiedettyä out-of-sample-jakson otoskovarianssimatriisia laskettaessa painoja. Vaikka 30 % ylärajoite tuli aktiiviseksi tällä kertaa, kovin suurta eroa kummankaan painoissa ei ollut suhteessa toisiinsa. Tämä tuotti siis samankaltaisen tuloksen kuin estimoitujen portfolioiden kesken eli ylärajoitteella ei ollut suurta vaikutusta minimivarianssiportfolioiden tapauksessa.

Mv-ct ja mv-t -portfoliot muodostettiin myös samaan tyyliin kuin vastaavat parit in-sample-jaksolla sillä erotuksella, että tällä kertaa laskettaessa painoja, käytettiin todellisia jo tiedettyjä parametrejä sekä otoskovarianssimatriisin että aritmeettisen keskituottovektorin osalta. Rajoitetun ja rajoittamattoman portfolion painoissa voidaan havaita tässä tapauksessa huomattavaa eroa. Tämä oli samankaltainen tulos kuin in-sample-jaksolla. Out-of-sample-jaksolla muodostettujen portfolioiden painot ovat taulukossa 4.

**Taulukko 4 Out-of-sample-lasketut portfoliopainot**

Painot	1/N	min-ct	min-t	mv-ct	mv-t
KNEBV	10%	16,49%	15,95%	13,92%	0%
NDA	10%	5,33%	4,84%	30,00%	69,98%
NESTE	10%	3,66%	3,33%	0%	0%
SAMPO	10%	15,15%	14,98%	30,00%	22,36%
FORTUM	10%	0,78%	0,77%	0%	0%
NOKIA	10%	0,16%	1,69%	12,84%	7,00%
UPM	10%	18,05%	17,63%	0%	0%
TELIA1	10%	10,38%	9,66%	11,35%	0,66%
STERV	10%	0%	0%	0%	0%
ELISA	10%	30,00%	31,15%	1,89%	0%

### 3.3 Vertailu out-of-sample-jaksolla

Out-of-sample-jaksolla minimivarianssiportfolioiden ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivien portfolioiden suoriutumista suhteessa 1/N-tasahajautusportfolioon verrattiin toteutuneella tuotolla ja Sharpen luvuilla.

Out-of-sample-jaksolla kaikille portfolioille laskettiin kokonaistuotto geometrisen kokonaistuottovektorin ja painovektorin avulla käyttäen kaavaa 2, sillä geometrinen keskiarvo mittaa todellista testijakson tuottoa (Bodie ym. 2021, 132). Tämä saatu kokonaistuotto muutettiin korkoa korolle mukaisesti myös konformiksi vuosi- ja kuukausituotoksi. Kaikille portfolioille laskettiin lisäksi kuukausittainen volatilitteetti otoskovarianssimatriisin ja painovektorin avulla hyödyntäen kaavaa 4. Volatilitteetti muutettiin myös vuositasolle. Kuukausittaiset ja vuosittaiset Sharpen luvut laskettiin jokaiselle portfolioille käyttämällä kaavaa 8. Riskittömänä korkona käytettiin keskiarvoa ajanjakson 31.12.2019 – 30.12.2025 Saksan kymmenen vuoden valtionvelkakirjan vuotuisesta korosta, joka muutettiin konformiksi kuukausikoroksi laskettaessa kuukausittaisia Sharpen lukuja. Luvussa 4 raportoidut tuotot,

volatiliteetit ja Sharpen luvut on ilmoitettu vuositasolla, poislukien kokonaistuotto. Kuukausittaiset tuotot, volatiliteetit ja Sharpen luvut on raportoitu tämän tutkielman liitteissä (ks. liite 3 ja 4).

Portfolioiden tuottojen eron tilastollista merkitsevyyttä suhteessa 1/N-vertailuportfolioon testattiin Excelissä kuukausittaisista tuotoista kaksisuuntaisella parittaisella keskiarvotestillä käyttäen t-jakaumaa. Parittaista t-testiä käytettiin, sillä molemmat portfoliot muodostettiin samoista kohteena olevista osakkeista, jolloin havaintojen ei voitu katsoa olevan toisistaan riippumattomia. Parittainen t-testi soveltuu siis tilanteeseen, missä molemmat vertailtavat keskiarvot on saatu samoista havaintoyksiköistä (Field 2013, 364–388).

Puolestaan portfolioiden Sharpen lukujen erojen tilastollista merkitsevyyttä suhteessa 1/N-portfolioon testattiin Excelissä kuukausittaisista Sharpen luvuista, käyttäen Jobsonin & Korkien (1981a) ehdottamaa normaalijakaumaan perustuvaa testiä, johon Memmel (2003) oli tehnyt korjauksen. Tämä on rahoituksen alalla paljon käytetty testi, vertailtaessa Sharpen lukujen eron tilastollista merkitsevyyttä (Frahm 2018). Samaa testiä käyttivät tutkimuksissaan Bessler ym. (2017), DeMiguel ym. (2009) ja Platanakis ym. (2021).

## 4 Tutkimustulokset

### 4.1 1/N vs. minimivarianssiportfolio

Kuten jo luvussa 3 huomattiin minimivarianssiportfolioiden painoja laskettaessa, ei 30 % ylärajoitteella ollut merkittävää vaikutusta estimoitujen parametrien tai tiedettyjen parametrien perusteella muodostettujen portfolioiden painoihin. Out-of-sample-suoriutumisen tulokset löytyvät taulukosta 5.

**Taulukko 5 Out-of-sample: 1/N vs. minimivarianssiportfolio**

Out-of-sample	1/N	min-ce	min-e	min-ct	min-t
Vuosituotto	6,91%	5,56%	5,56%	5,35%	5,31%
Volatiliteetti	14,76%	13,52%	13,52%	12,36%	12,35%
Sharpen luku	0,3807	0,3157	0,3157	0,3285	0,3253
Kokonaistuotto	49,35%	38,35%	38,35%	36,75%	36,41%

Estimoitujen minimivarianssiportfolioiden min-ce ja min-e painot olivat keskenään identtiset, joten näin ollen niiden suoriutuminen out-of-sample-jaksolla oli myös identtistä. Molemmat onnistuivat tuottamaan pienemmän varianssin kuin vertailtava 1/N, mutta jäivät sekä tuotossa että Sharpen luvussa jälkeen verrattuna 1/N-portfolioon. Kokonaistuotolla mitattuna estimoidut minimivarianssiportfoliot jäivät 11 %-yksikköä 1/N-portfolioon kokonaistuotosta.

Vertailun vuoksi tiedettyjen parametrien perusteella muodostettujen minimivarianssiportfolioiden min-ct ja min-t painot erosivat pienesti toisistaan, sillä 30 % ylärajoite aktivoitui min-ct-portfolioille. Erot jäivät kuitenkin painojen osalta hyvin pieniksi, joten myös suoriutuminen out-of-sample-jaksolla näiden kahden välillä oli hyvin samankaltaista. Myös nämä portfoliot onnistuivat tuottamaan pienemmän varianssin kuin 1/N, mutta estimoitujen tyyliin molemmat jäivät tuotossa ja Sharpen luvussa jälkeen verrattuna 1/N-portfolioon.

### 4.2 1/N vs. keskiarvo-variانسsisuhteen maksimoiva portfolio

Keskiarvo-variانسsisuhteen maksimoivilla portfolioilla eroja portfolioiden painoissa syntyi sekä estimoitujen parametrien että tiedettyjen parametrien perusteella muodostetuissa portfolioissa, sillä 30 % ylärajoitteet aktivoituivat kummassakin tapauksessa rajoitetuille portfolioille. Näin ollen myös out-of-sample-suoriutumisessa oli havaittavissa suurempia eroja kuin minimivarianssiportfolioiden kesken. Out-of-sample-suoriutumisen tulokset löytyvät taulukosta 6.

**Taulukko 6 Out-of-sample: 1/N vs. keskiarvo-variانسsisuhteen maksimoiva portfolio**

Out-of-sample	1/N	mv-ce	mv-e	mv-ct	mv-t
Vuosituotto	6,91%	5,49%	3,91%	13,92%	19,33%
Volatiliteetti	14,76%	13,45%	13,59%	15,69%	19,77%
Sharpen luku	0,3807	0,3118	0,1924	0,8047	0,9120
Kokonaistuotto	49,35%	37,78%	25,86%	118,54%	188,67%

Estimoitujen parametrien perusteella muodostetuista mv-ce ja mv-e -portfolioista kumpikaan ei onnistunut päihittämään 1/N-portfolioa tuotolla tai Sharpen luvulla mitattuna. Mv-ce suoriutui hyvin samankaltaisesti kuin min-ce ja min-e -portfoliot ja onnistui tuottamaan muutaman prosentin sadasan pienemmän varianssin verrattuna estimoituihin minimivarianssiportfolioihin. Mv-e suoriutui puolestaan absoluuttisilla luvuilla mitattuna selkeästi huonommin kuin mv-ce ja 1/N. Mv-e-portfolioon Sharpen luku ja kokonaistuotto olivat lähes puolet pienemmät kuin 1/N-vertailuportfolioilla ja huomattavasti pienemmät kuin mv-ce-portfolioilla. Mv-ce jäi kokonaistuotossa noin 11,6 %-yksikköä ja mv-e puolestaan noin 23,5 %-yksikköä verrattuna 1/N-portfolioon.

Vertailun vuoksi tiedettyjen parametrien perusteella muodostetut mv-ct ja mv-t -portfoliot tuottivat suurimmat tuotot ja korkeimmat Sharpen luvut kaikista portfolioista. Näidenkin välillä löytyi eroa, sillä 30 % ylärajoite aktivoitui ja rajasi mv-ct-portfolioon ääripainoja. Molemmat onnistuivat lyömään 1/N-portfolioon sekä tuotolla että Sharpen luvulla mitattuna ja absoluuttisista arvoista tulkittuna erot olivat huomattavia. Kumpikin tiedetyn jakauman perusteella muodostettu keskiarvo-variانسsisuhteen maksimoiva portfolio tuotti yli puolet korkeamman Sharpen luvun ja reilusti yli puolet korkeamman kokonaistuoton kuin 1/N.

### 4.3 Tilastollinen merkitsevyys

Tuoton osalta tilastollista merkitsevyyttä testattiin tuoton erolla suhteessa 1/N-portfolioon. Vaikka 1/N päihitti kaikki estimoidut portfoliot out-of-sample-tuotossa, tilastollisesti merkitsevää huonompaa tuottoa ei kuitenkaan havaittu estimoitujen portfolioiden osalta. Vertailun vuoksi tuoton osalta saatiin yksi tilastollisesti merkitsevä tuoton ero mv-t ja 1/N -portfolioiden välillä. 5 % merkitsevyystasolla voitiin todeta, että mv-t-portfolioon tuotto oli tilastollisesti merkitsevästi parempi kuin 1/N-portfolioon. Tulokset kaksisuuntaisen parittaisen keskiarvotestin osalta löytyvät taulukosta 7.

**Taulukko 7 Keskiarvotesti**

Tuottoero	min-ce	min-e	mv-ce	mv-e	mv-t
t-luku	-0,4081	-0,4081	-0,5001	-0,7499	2,1624
p-arvo	0,6844	0,6844	0,6185	0,4558	0,0340

Sharpen lukujen osalta tilastollista merkitsevyyttä testattiin Sharpen lukujen erolla suhteessa 1/N-portfolioon. Myös tässä tapauksessa 1/N-portfolio päihitti kaikki estimoidut portfolioit Sharpen luvulla mitattuna, mutta tilastollisesti merkitsevää eroa ei yhdenkään estimoidun portfolioin kohdalla havaittu. Vertailun vuoksi Sharpen luvulla mitattuna 5 % merkitsevyytasolla lähimmäksi tilastollisesti merkitsevää eroa pääsi mv-ct-portfolio suhteessa 1/N-portfolioon. Tässä huomionarvoista on se, että vaikka mv-t-portfolio saavutti paljon suuremman tuoton suhteessa mv-ct-portfolioon, ei se Sharpen luvulla mitattaessa onnistunut saavuttamaan vastaavaa suurta eroa, johtuen huomattavasti korkeammasta volatiliteetista. Pienemmän volatiliteetin ansiosta mv-ct pääsi lähemmäksi tilastollisesti merkitsevää Sharpen luvun eroa suhteessa 1/N-portfolioon kuin mv-t. Sharpen lukujen erojen tilastot löytyvät taulukosta 8.

**Taulukko 8 Sharpen eron testi**

Sharpen ero	min-ce	min-e	mv-ce	mv-e	mv-ct
z-luku	-0,2293	-0,2293	-0,2428	-0,5374	1,9181
p-arvo	0,8186	0,8186	0,8082	0,5910	0,0551

#### 4.4 Tulosten tulkinta

Suuria eroja suoriutumisessa ei estimoitujen ja tiedettyjen parametrien perusteella muodostettujen minimivarianssiportfolioiden kesken ollut, mutta odotetusti tiedettyjen parametrien avulla lasketut minimivarianssiportfolioit onnistuivat tuottamaan kaikista mukana olleista portfolioista pienimmät varianssit. Erot tuotoissa ja Sharpen luvuissa olivat pieniä minimivarianssiportfolioiden kesken, mutta suhteessa 1/N-portfolioon erot kasvoivat suuremmaksi. Toisaalta voidaan sanoa, että estimoidut minimivarianssiportfolioit onnistuivat tämän tutkimuksen aineistolla päätehtävässään eli varianssin minimoimisessa suhteessa tasahajautukseen, vaikka se ei tämän tutkimuksen varsinaisen tutkimuskohde ollutkaan. Minimivarianssiportfolioit näyttivät myös tämän tutkimuksen aineistolla varianssin olevan tarkempi estimaattori kuin keskiarvo, sillä erot estimoitujen ja todellisten parametrien avulla muodostettujen minimivarianssiportfolioiden välillä olivat huomattavasti pienemmät kuin keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivien portfolioiden välillä.

Puolestaan erot keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivien portfolioiden kesken olivat huomattavia. Ylärajoitteella oli havaittavissa selkeää ero sekä estimoitujen että tiedettyjen parametrien perusteella muodostettujen portfolioiden välillä. Havaittavissa olevat erot olivat kuitenkin päinvastaisia, sillä mv-ce ja mv-e tapauksessa ylärajoite paransi suoriutumista out-of-sample-jaksolla, kun taas mv-ct ja mv-t -portfolioiden tapauksessa ylärajoite heikensi suoriutumista. Tämä johtuu siitä, että tiedettäessä varmuudella tuottojakauma, ei ole järkevää rajoittaa portfolion painoja, sillä estimaatiovirheen riskiä ei ole olemassa. Puolestaan estimoitaessa, portfolion painoja on hyvä rajoittaa, sillä estimaatiovirhe voi helposti johtaa huonoon suoriutumiseen, kuten tässä tutkimuksessa havaittiin estimoitujen keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivien portfolioiden kohdalla.

Vaikka ylärajoitteet paransivat estimointia keskiarvoa käytettäessä, ei sekään tuotolla ja Sharpen luvulla mitattuna yltänyt absoluuttisilla arvoilla estimoitujen minimivarianssiportfolioiden tasolle. Kuten Jagannathan ja Ma (2003) esittivät tutkimuksessaan, myös tämän tutkimuksen tuloksista oli huomattavissa keskiarvon heikkous estimaattorina. Estimaattorina keskiarvo pitää sisällään suuren estimaatiovirheen riskin, mikä johti tässäkin tutkimuksessa estimoitujen keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivien portfolioiden heikkoon suoriutumiseen. Tästä hyvänä esimerkkinä ovat suuret erot estimoitujen ja tiedettyjen parametrien perusteella muodostettujen keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivien portfolioiden suoriutumisessa.

Oli odotettavaa, että tiedetyn jakauman perusteella muodostetut minimivarianssiportfoliot tuottavat pienimmät varianssit ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivat portfoliot tuottavat suurimmat Sharpen luvut ja suurimman kokonaistuoton. Todellisuuden kannalta relevantteja tuloksia ovat kuitenkin estimoitujen portfolioiden tuottamat tulokset, sillä todellisuudessa on mahdotonta tietää tulevaisuuden tuottojakaumia varmuudella, jolloin estimaatiovirhe on aina läsnä ennustettaessa tulevaisuuden tuottoja. Vaikka tämän tutkimuksen aineistolla ei saatu tilastollisesti merkitsevää eroa estimoitujen portfolioiden ja tasahajautuksen välille tuotolla ja Sharpen luvulla mitattuna, olivat tulokset silti samansuuntaisia aikaisemman tutkimuksen kanssa.

Kuten Besslerin ym. (2017) ja DeMiguelin ym. (2009) tutkimuksissa, keskiarvo-varianssoptimointi ei tässäkään tutkimuksessa suoriutunut Sharpen luvulla mitattuna paremmin kuin tasahajautus. Vaikka Bessler ym. (2017) ja DeMiguel ym. (2009) käyttivät indeksoitua osakedataa ja valmiita osakeportfolioita tutkimuksissaan, ei tämän tutkimuksen yksittäisistä osakkeista koostuneella data-aineistolla saatu erilaista suoriutumista optimoinnin ja tasahajautuksen välillä. Sharpen luvuilla mitattuna tulos oli myös yhteneväinen Platanakisin ym. (2021) kanssa, jotka näyttivät yksittäisistä osakkeista koostuvalla aineistollaan, että tasahajautus suoriutuu paremmin kuin keskiarvo-

varianssoptimointi. Vaikka Platanakis ym. (2021) tutkimuksessa yksittäiset osakkeet koostuivat saman toimialan yrityksistä ja tämän tutkimuksen aineisto useamman eri toimialan yksittäisistä yrityksistä, ei keskiarvo-varianssoptimointi silti onnistunut päihittämään tasahajautusta.

Jobson ja Korkie (1981b) käyttivät tutkimuksessaan myös yksittäisiä osakkeita, mutta eivät lyhyeksimyntirajoitetta. Tämän tutkimuksen asetelmassa lyhyeksimyntirajoite oli voimassa kaikille portfolioille, mutta sekään ei auttanut optimointia suoriutumaan tasahajautusta paremmin Sharpen luvulla mitattuna. Myös uudelleenpainotus oli jätetty tässä tutkimuksessa pois. Sekään ei kuitenkaan tämän tutkimuksen aineistolla johtanut optimoinnin paremmin suoriutumiseen suhteessa tasahajautukseen.

Myöskään tuoton eroilla mitattuna keskiarvo-varianssoptimointi ei onnistunut suoriutumaan yhdenkään estimoidun portfolion kohdalla paremmin kuin tasahajautus. Levy ja Duchin (2010) ehdottivat tutkimuksessaan, että arvopapereiden määrän ollessa suuri, keskiarvo-varianssoptimoinnin suoriutuminen paranee suhteessa tasahajautukseen. Tämän tutkimuksen tapauksessa arvopapereiden määrä oli kuitenkin melko pieni, joten tulos sen osalta oli samanlainen kuin Levyn ja Duchinin (2010). He argumentoivat, että arvopapereiden määrän ollessa alle 15, tuoton erolla mitattuna tasahajautus suoriutuu paremmin kuin keskiarvo-varianssoptimointi. Sama tulos saatiin myös tämän tutkimuksen aineistolla, vaikka käytettiin yksittäisiä osakkeita eikä valmiita osakeportfolioita, kuten Levyn ja Duchinin (2010) tutkimuksessa.

## 5 Yhteenveto ja johtopäätökset

Tämän tutkielman tavoitteena oli selvittää empiirisen aineiston avulla sitä, voiko piensijoittaja hyötyä perinteisen keskiarvo-varianssoptimoinnin käyttämisestä suhteessa naiiviin tasahajautusstrategiaan yksittäisten osakkeiden valinnassa. Empiirinen aineisto koostui kymmenestä markkina-arvoltaan suurimmasta Helsingin pörssin yhtiön osakkeesta vuoden 2019 lopussa. Näille valituille osakkeille estimoitiin painot kymmenen vuoden historiallisen datan perusteella ja niistä muodostettiin sekä ylärajoitteella että ilman minimivarianssiportfoliot ja keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivat portfoliot. Kaikille portfolioille oli voimassa lyhyeksimyntirajoite ja painot jokaiselle portfolioille laskettiin vain kerran vuoden 2020 alussa eli toteutettiin niin kutsuttua buy-and-hold-strategiaa. Estimoitujen portfolioiden suoriutumista out-of-sample-jaksolla verrattiin tuotolla ja Sharpen luvulla mitattuna suhteessa 1/N-tasahajautusportfolion suoriutumiseen. Tavoitteena oli siis vastata luvussa 1 esitettyyn tutkimuskysymykseen:

- Voiko piensijoittaja parantaa tuottoaan tai riskikorjattua tuottoaan käyttämällä keskiarvo-varianssoptimointia yksittäisten osakkeiden valinnassa verrattuna naiiviin 1/N-tasahajautustrategiaan Helsingin pörssissä out-of-sample-testijaksolla 2020–2025?

Empiirisen aineiston pohjalta saatujen tulosten perusteella voitiin havaita, että yksikään estimoitu keskiarvo-varianssisäännön mukaan muodostettu portfolio ei onnistunut suoriutumaan paremmin kuin 1/N out-of-sample-testijaksolla 2020–2025. Näin ollen vastauksena tutkimuskysymykseen voidaan tämän tutkimuksen aineistolla todeta, että piensijoittaja ei pystynyt parantamaan omaa tuottoaan tai riskikorjattua tuottoaan käyttämällä keskiarvo-varianssoptimointia. Tasahajautus suoriutui absoluuttisilla arvoilla mitattuna paremmin kuin yksikään estimoitu keskiarvo-varianssisäännön mukaan muodostettu portfolio.

Keskiarvo-varianssoptimoiduista portfolioista erityisesti estimoitu keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio ilman ylärajoitetta suoriutui absoluuttisilla arvoilla kaikista huonoimmin ja huomattavasti huonommin kuin kumpikaan minimivarianssiportfolio tai keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio ylärajoitteella. Tuloksista huomattiin myös, että suurimmat estimaatiovirheet olivat havaittavissa juuri keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivien portfolioiden kesken. Tämä näytti keskiarvon heikkoutta estimaattorina, mitä myös aikaisemmassa tutkimuksessa on osoitettu.

Tilastollisesti merkitsevää huonommin suoriutumista keskiarvo-varianssoptimoiduilta portfolioilta ei kuitenkaan havaittu suhteessa tasahajautukseen. Näin ollen tämän tutkimuksen tulosten pohjalta ei voida laajemmin ja vedenpitävästi todeta tasahajautuksen olevan yleisellä tasolla parempi yksittäisten

osakkeiden valinnassa kuin keskiarvo-variانسsoptimointi. Saadut tulokset olivat kuitenkin samansuuntaisia aiemman tutkimuksen kanssa, missä osakedataa käytettäessä on havaittu tasahajautuksen monesti suoriutuvan paremmin kuin keskiarvo-variانسsoptimointi. Aiempi tutkimus on kuitenkin keskittynyt enemmän käyttämään data-aineistonaan jo valmiita osakeportfolioita tai indeksejä yksittäisten osakkeiden sijaan. Näin ollen näkisin, että tulevaisuudessa voisi olla mielekästä laajentaa tutkimusta yksittäisten osakkeiden kohdalla, sillä tämän tutkimuksen aineisto ja otanta jäivät isommassa kuvassa katsottuna maltillisen pieniksi.

Yhteenvedona voisi kuitenkin todeta, että tähänastisen tiedon valossa niin tämän tutkimuksen kuin muun tutkimuskirjallisuudenkin osalta vaikuttaa siltä, että perinteinen keskiarvo-variانسsoptimointi on teorian tasolla toimiva kehitelmä, mutta käytännössä estimaatiovirheet syövät suuren osan teoreettisesta mahdollisuudesta suoriutua paremmin kuin tasahajautus. Osakkeita valittaessa portfolioon, voisi pelkän historiallisen tuottodatan lisäksi olla järkevää laajentaa tarkastelua myös muihin tekijöihin kohteena olevien yhtiöiden osalta. Tällaisia tekijöitä voisivat olla esimerkiksi kohteena olevan yhtiön tilinpäätösdata, laadulliset tekijät yhtiön odotetussa kehityksessä tai kassavirtapohjaiset arvomääritysmallit.

## Lähteet

- Benartzi, S., & Thaler, R. H. (2001). Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. *American Economic Review*, 91 (1), 79–98.
- Bessler, W., Opfer, H., & Wolff, D. (2017). Multi-asset portfolio optimization and out-of-sample performance: An evaluation of Black–Litterman, mean-variance, and naïve diversification approaches. *The European Journal of Finance*, 23 (1), 1–30.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2021). *Investments* (Twelfth Edition). McGraw-Hill Education.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, 22 (5), 1915–1953.
- Diether, K. B., Lee, K.-H., & Werner, I. M. (2009). Short-sale strategies and return predictability. *The Review of Financial Studies*, 22 (2), 575–607.
- European Central Bank. (2014). Euro area risk-free interest rates: Measurement issues, recent developments and relevance to monetary policy. *ECB Monthly Bull July, 2014*, 63–78.
- Field, A. (2013). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics* (4th Edition). Sage.
- Frahm, G. (2018). An intersection–Union test for the sharpe ratio. *Risks*, 6 (2), 40.
- Francis, J. C., & Kim, D. (2013). *Modern portfolio theory: Foundations, analysis, and new developments* (1st Edition). Wiley.
- Jagannathan, R., & Ma, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *The Journal of Finance*, 58 (4), 1651–1683.
- Jobson, J. D., & Korkie, B. M. (1981a). Performance hypothesis testing with the Sharpe and Treynor measures. *The Journal of Finance*, 889–908.
- Jobson, J. D., & Korkie, R. M. (1981b). Putting Markowitz theory to work. *The Journal of Portfolio Management*, 7 (4), 70–74.
- Kan, R., & Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42 (3), 621–656.
- Knüpfer, S., & Puttonen, V. (2018). *Moderni rahoitus* (10. Uudistettu painos). Alma.
- Levy, H., & Duchin, R. (2010). Markowitz’s mean–variance rule and the Talmudic diversification recommendation. *Teoksessa Handbook of Portfolio Construction* (97–123). Springer.
- Luenberger, D. G. (2014). *Investment Science* (Second Edition). Oxford University Press.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7 (1), 77–91. JSTOR.
- Memmel, C. (2003). Performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Finance Letters*, 1, 21–23.

- Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized' optimal? *Financial Analysts Journal*, 45 (1), 31–42.
- Opdyke, J. D. (2007). Comparing Sharpe ratios: So where are the p-values? *Journal of Asset Management*, 8 (5), 308–336.
- Platanakis, E., Sutcliffe, C., & Ye, X. (2021). Horses for courses: Mean-variance for asset allocation and 1/N for stock selection. *European Journal of Operational Research*, 288 (1), 302–317.
- Pörssisäätiö. (2026). *Sijoituskohteet ja niiden valinta*. Haettu 17.02.2026. Pörssisäätiö.  
<https://www.porssisaatio.fi/opi-sijoittamaan/sijoituskoulu/sijoituskohteet-ja-niiden-valinta/>
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *The Journal of Business*, 39 (1), 119–138.
- Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. *Journal of Portfolio Management*, (Fall), 49–58.

## Liitteet

### Liite 1 In-sample-kovarianssimatriisi

In-Sample $\Sigma$	KNEBV	NDA	NESTE	SAMPO	FORTUM	NOKIA	UPM	TELIA1	STERV	ELISA
KNEBV	<b>0,0026</b>	0,0010	0,0018	0,0008	0,0006	0,0000	0,0014	0,0006	0,0015	0,0003
NDA	0,0010	<b>0,0044</b>	0,0015	0,0022	0,0010	0,0006	0,0026	0,0008	0,0029	0,0005
NESTE	0,0018	0,0015	<b>0,0097</b>	0,0016	0,0016	0,0025	0,0040	0,0007	0,0041	0,0007
SAMPO	0,0008	0,0022	0,0016	<b>0,0020</b>	0,0007	0,0008	0,0019	0,0007	0,0020	0,0004
FORTUM	0,0006	0,0010	0,0016	0,0007	<b>0,0032</b>	0,0016	0,0018	0,0008	0,0019	0,0005
NOKIA	0,0000	0,0006	0,0025	0,0008	0,0016	<b>0,0141</b>	0,0021	0,0007	0,0017	0,0014
UPM	0,0014	0,0026	0,0040	0,0019	0,0018	0,0021	<b>0,0068</b>	0,0008	0,0060	0,0011
TELIA1	0,0006	0,0008	0,0007	0,0007	0,0008	0,0007	0,0008	<b>0,0017</b>	0,0006	0,0007
STERV	0,0015	0,0029	0,0041	0,0020	0,0019	0,0017	0,0060	0,0006	<b>0,0073</b>	0,0009
ELISA	0,0003	0,0005	0,0007	0,0004	0,0005	0,0014	0,0011	0,0007	0,0009	<b>0,0020</b>

### Liite 2 Out-of-sample-kovarianssimatriisi

Out-of-Sample $\Sigma$	KNEBV	NDA	NESTE	SAMPO	FORTUM	NOKIA	UPM	TELIA1	STERV	ELISA
KNEBV	<b>0,0033</b>	0,0012	0,0005	0,0008	0,0023	0,0007	0,0005	0,0009	0,0009	0,0011
NDA	0,0012	<b>0,0043</b>	0,0014	0,0020	0,0027	0,0023	0,0015	0,0012	0,0018	0,0002
NESTE	0,0005	0,0014	<b>0,0125</b>	0,0014	0,0021	0,0032	0,0012	0,0010	0,0021	0,0004
SAMPO	0,0008	0,0020	0,0014	<b>0,0031</b>	0,0025	0,0013	0,0013	0,0011	0,0017	0,0005
FORTUM	0,0023	0,0027	0,0021	0,0025	<b>0,0099</b>	0,0028	0,0015	0,0009	0,0017	-0,0005
NOKIA	0,0007	0,0023	0,0032	0,0013	0,0028	<b>0,0104</b>	0,0014	0,0014	0,0019	0,0005
UPM	0,0005	0,0015	0,0012	0,0013	0,0015	0,0014	<b>0,0040</b>	0,0006	0,0036	0,0003
TELIA1	0,0009	0,0012	0,0010	0,0011	0,0009	0,0014	0,0006	<b>0,0038</b>	0,0012	0,0011
STERV	0,0009	0,0018	0,0021	0,0017	0,0017	0,0019	0,0036	0,0012	<b>0,0060</b>	0,0004
ELISA	0,0011	0,0002	0,0004	0,0005	-0,0005	0,0005	0,0003	0,0011	0,0004	<b>0,0027</b>

### Liite 3 1/N vs. minimivarianssiportfolio kk-luvut

Out-of-sample	1/N	min-ce	min-e	min-ct	min-t
Kuukausituotto	0,56%	0,45%	0,45%	0,44%	0,43%
Volatiliteetti (kk)	4,26%	3,90%	3,90%	3,57%	3,57%
Sharpen luku (kk)	0,1059	0,0884	0,0884	0,0920	0,0912

## Liite 4 1/N vs. keskiarvo-varianssisuhteen maksimoiva portfolio kk-luvut

Out-of-sample	1/N	mv-ce	mv-e	mv-ct	mv-t
Kuukausituotto	0,56%	0,45%	0,32%	1,09%	1,48%
Volatiliteetti (kk)	4,26%	3,88%	3,92%	4,53%	5,71%
Sharpen luku (kk)	0,1059	0,0873	0,0543	0,2174	0,2411

## Liite 5 Selvitys tekoälyn käytöstä

Tekoälyä (OpenAI, ChatGPT, GPT 5.2, GPT 5.4) on hyödynnetty apuna tutkielmapirosessissa. Tekoälyä on hyödynnetty apuna alustavien tutkimusaiheiden ideoinnissa ja apuna kielenhuollossa oikeinkirjoituksen tarkistamisessa. Tutkielman rakenne, sisältö, empiria, analyysit ja johtopäätökset ovat kokonaan omaa työtäni. Tutkielmassa ei ole tekoälyn tuottamaa tekstiä.

### 1. Käytetty työkalu: OpenAI, ChatGPT (GPT 5.2)

- Käytön vaihe: aiheen ideointi
- Käyttötarkoitus: Käytin ChatGPT alustavien tutkimusaiheiden ideointiin ja kysyäkseni mielipidettä suunnittelemani tutkimusaiheen toteutettavuudesta kandidaatintutkielmassa.
  - Esimerkki syötetiedosta kokonaisuudessaan (23.01.2026): Onko seuraavan aiheen laajuus ja samalla rajaus onnistunut niin, että se olisi toteutettavissa kandidaatintutkielmaan? ”Aihe: Voiko minimivarianssi ja tuotto-hajontasuhteen maksimoivalla portfoliolla saavuttaa merkitsevää hyötyä tuoton ja riskin suhteen verrattuna 1/N tasahajautusstrategiaan sijoittamalla markkina-arvoltaan 10 suurimman yhtiön osakkeeseen Helsingin pörssissä. Testaus 10 suurimman yhtiön osakkeella, joista historiallinen data estimointiin 2010–2019 ja testausperiodi 2020–2025. Ei lyhyeksimyntiä ja yhden osakkeen paino max 30% minivarianssi ja tuotto-hajontasuhteen maksimoivissa portfolioissa.”
- Todentaminen: Tekoäly vastasi, että aihe on kandidatasolle hyvä, sen asetelma on selkeä ja toteutuskelpoinen sekä rajaus kymmeneen osakkeeseen on toimiva, jolloin optimointi pysyy riittävän yksinkertaisena ja työn toteutettavuus on hallittavissa. Kehityskohdaksi tekoäly ehdotti, että pitää tarkentaa sitä, miten markkina-arvoltaan kymmenen suurimman yhtiön osakkeet valitsee. Sen osalta asia oli itselle kuitenkin jo selvä, että osakkeet valitaan vuoden 2019 lopussa, sillä piensijoittajan näkökulmasta on mielekästä valita osakkeet

markkina-arvon perusteella juuri sijoitushetkellä eikä esimerkiksi in-sample-jakson alussa vuoden 2009 lopussa. Keskustelin tämän jälkeen aihe-ehdotuksestani vielä kokeneen tutkijan kanssa Laskentatoimen ja rahoituksen laitoksella. Tämän keskustelun jälkeen aiheeni muotoutui pääpiirteissään lopulliseen muotoonsa, vaikka siihen tutkielmaproessin edetessä tuli vielä hieman lisäyksiä, perehdyttyäni laajemmin teoriaan ja tutkimuskirjallisuuteen. Sen myötä myös ”tuotto-hajontasuhteen maksimoivan portfolion” nimi vaihtui tutkimuskirjallisuudessa enemmän käytettyyn ”keskiarvo-varianssisuhteen maksimoivaan portfolioon”.

## 2. Käytetty työkalu: OpenAI, ChatGPT (GPT 5.4)

- Käytön vaihe: oikeinkirjoituksen tarkistaminen
- Käyttötarkoitus: Käytin ChatGPT tarkistaakseni yksittäisten sanojen oikeinkirjoituksen.
  - Esimerkki syötetiedosta kokonaisuudessaan (11.04.2026): Voiko sanan ”lyhyksimyynti” kirjoittaa yhteen vai kuuluuko se kirjoittaa erikseen?
- Todentaminen: Tekoäly vastasi, että sana ”lyhyksimyynti” kirjoitetaan yhteen, sillä kyseessä on vakiintunut yhdyssana. Tutkin vielä, että esimerkiksi Osuuspankin ja Nordnetin nettisivuilla käytettiin myös sanasta ”lyhyksimyynti” juuri yhteenkirjoitettua muotoa.