



MATRIISIEN DIAGONALISOINTI

Ellinoora Luostarinen

LuK-tutkielma
Tammikuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

ELLINOORA LUOSTARINEN: Matriisien diagonalisointi
LuK-tutkielma, 11 s.
Matematiikka
Tammikuu 2025

Tässä tutkielmassa käsitellään matriisien ominaisvektoreita, ominaisarvoja sekä karakteristisia yhtälöitä. Tämä kaikki huipentuu tutkielman pääaiheeseen eli viimeisessä luvussa esitettyyn matriisien diagonalisointiin. Tutkielma sisältää aiheelle olennaisia tuloksia sekä niitä havainnollistavia esimerkkejä.

Asiasanat: matriisi, ominaisvektori, ominaisarvo, karakteristinen yhtälö, similaarisuus, diagonalisointi.

Sisällys

1 Johdanto	1
2 Ominaisvektorit ja ominaisarvot	1
3 Karakteristinen yhtälö	4
3.1 Similaarisuus	6
4 Diagonalisointi	6
4.1 Matriisien diagonalisointi	8

1 Johdanto

Matriisilaskennan kehittymisen katsotaan alkaneen 1600-luvulla, kun René Descartes kehitti karteesisen koordinaatiston. Tämä loi pohjan vektori- ja matriisiesityksille. Ominaisarvojen ja karakteristisen polynomin historia juontaa juurensa 1800-luvulle, kun Augustin Cauchy otti käyttöönsä karakteristisen polynomin sekä muotoili ominaisarvo-ongelman. Samaan aikaan James Sylvester loi termin 'matriisi', mikä johti ensimmäisiin lineaarialgebran systemaattisiin tutkimuksiin [2].

Matriisien diagonalisoinnin sovelluksilla on runsaasti käyttökohteita eri tieteenaloilla. Diagonalisoinnin avulla pystytään yksinkertaistamaan monimutkaisia yhtälöitä, koska niistä on helppo selvittää matriisien ominaisarvot sekä ominaisvektorit. Tätä voidaan käyttää hyödyksi esimerkiksi ratkaistaessa differentiaaliyhtälöitä. Tutkielman aihe on rajattu reaalmatriiseihin.

Tutkielman toisessa luvussa käsitellään ominaisvektoreita sekä ominaisarvoja. Luvun alussa esitetään määritelmä ominaisvektoreille ja -arvoille. Määritelmää seuraa havainnollistavat esimerkit. Kolmannessa luvussa käsitellään karakteristista yhtälöä. Luku alkaa yksinkertaisella esimerkillä, jonka jälkeen siirrytään yleiseen tapaukseen.

Viimeisessä luvussa käsitellään tutkielman pääaihetta eli matriisien diagonalisointia. Se alkaa kahdella esimerkillä, jotka havainnollistavat diagonaalimatriisien potenssien laskemista. Luvussa myöhemmin esitetyn lauseen avulla saadaan jaettua diagonalisoinnin vaiheet neljään askeleeseen. Matriisin diagonalisointiin liittyvässä esimerkissä 9 käytetään aiempien lukujen tuloksia hyödyksi. Tällöin tutkielman aiheiden liittyminen toisiinsa konkretisoituu lukijoille.

Tutkielman lukijoilta edellytetään lineaarialgebran perustuntemusta. Tämä tarkoittaa esimerkiksi determinantin laskemisen, matriisien laskutoimitusten sekä matriisilaskennan peruskäsitteiden tuntemista. Tutkielman lähteenä käytetään D.C. Layn, S.R. Layn ja J.J. McDonaldin kirjaa *Linear Algebra and Its Applications* [1]. Toisena lähteenä käytetään Frank Uhligin teosta *The Eight Epochs of Math as regards past and future Matrix Computations* [2].

2 Ominaisvektorit ja ominaisarvot

Lineaarinen muunnos $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ voi siirtää vektoreita moniin eri suuntiin. Usein on kuitenkin olemassa vektoreita, joihin matriisi A vaikuttaa hyvin yksinkertaisella tavalla.

Määritelmä 1. Olkoon A $n \times n$ -matriisi. Kompleksilukua λ sanotaan matriisin A *ominaisarvoksi* ja vektoria $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sitä vastaavaksi ominaisvektoriksi, jos

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Esimerkki 1. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ovatko vektorit \mathbf{u} ja \mathbf{v} matriisin A ominaisvektoreita?

Lasketaan

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4\mathbf{u}$$

ja

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Näin ollen \mathbf{u} on matriisin A ominaisvektori, joka vastaa ominaisarvoa (-4) . Vektori \mathbf{v} ei ole matriisin A ominaisvektori, koska $A\mathbf{v}$ ei ole vektorin \mathbf{v} monikerta.

Esimerkki 2. Osoita, että skalaari 7 on matriisin A ominaisarvo esimerkiksi 1 ja etsi sitä vastaavat ominaisvektorit.

Skalaari 7 on matriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos yhtälöllä

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x} \tag{1}$$

on ei-triviaali ratkaisu.

Yhtälö 1 on ekvivalentti yhtälön $A\mathbf{x} - 7\mathbf{x} = 0$ kanssa. Näin ollen

$$(A - 7I)\mathbf{x} = 0. \tag{2}$$

Tämän homogeenisen yhtälön ratkaisemiseksi muodostetaan matriisi

$$A - 7I = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Matriisin $A - 7I$ sarakkeet ovat selvästi lineaarisesti riippuvia, joten yhtälöllä 2 on ei-triviaaleja ratkaisuja.

Näin ollen 7 on matriisin A ominaisarvo. Ominaisvektoreiden löytämiseksi käytetään rivioperaatioita

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yleinen ratkaisu on muotoa $x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jokainen tämän muotoinen vektori, jossa $x_2 \neq 0$, on ominaisvektori ja vastaa ominaisarvoa $\lambda = 7$.

Yhtälöiden 1 ja 2 ekvivalenssi pätee mille tahansa ominaisarvolle λ . Näin ollen λ on $n \times n$ -matriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos yhtälöllä

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \tag{3}$$

on ei-triviaali ratkaisu. Yhtälön 3 kaikkien ratkaisujen joukko muodostaa matriisin $A - \lambda I$ nolla-avaruuden. Tämä joukko on avaruuden \mathbb{R}^n aliavaruus. Sitä kutsutaan matriisin A *ominaisavaruudeksi*, joka vastaa sen ominaisarvoa λ . Ominaisavaruus koostuu nollavektorista ja kaikista ominaisarvoa vastaavista ominaisvektoreista.

Esimerkissä 3 osoitetaan, että esimerkin 1 matriisin A ominaisarvoa $\lambda = 7$ vastaava ominaisavaruus sisältää kaikki vektorin $(1, 1)$ monikerrat. Tällöin ominaisavaruus on siis suora, joka kulkee origon ja pisteen $(1, 1)$ kautta.

Esimerkki 3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Matriisilla A on ominaisarvo 2. Etsi kanta vastaavalle ominaisvaruudelle. Muodostetaan

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rivimuunnetaan laajennettu matriisi yhtälölle $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yleinen ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

missä x_2 ja x_3 ovat vapaita muuttujia. Kanta on siis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lause 1. Jos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ ovat $n \times n$ -matriisin A ominaisvektoreita, jotka vastaavat erillisiä ominaisarvoja $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, niin joukko $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Todistus. Oletetaan, että $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ on lineaarisesti riippuva. Koska \mathbf{v}_1 on nollasta poikkeava, niin jokin joukon vektoreista on edeltävien vektoreiden lineaarikombinaatio. Olkoon p pienin indeksi, jolle pätee \mathbf{v}_{p+1} on edeltävien lineaarisesti riippumattomien vektoreiden lineaarikombinaatio. Tällöin on olemassa skalaarit c_1, \dots, c_p , joille pätee

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{p+1}. \quad (4)$$

Kertomalla yhtälön 4 molemmat puolet matriisilla A ja hyödyntämällä tietoa $A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$ jokaiselle k , saadaan

$$c_1 A\mathbf{v}_1 + \dots + c_p A\mathbf{v}_p = A\mathbf{v}_{p+1} \quad (5)$$

$$c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \lambda_p \mathbf{v}_p = \lambda_{p+1} \mathbf{v}_{p+1}. \quad (6)$$

Kertomalla yhtälön 4 molemmat puolet kompleksiluvulla λ_{p+1} ja vähentämällä tuloksen yhtälöstä 6, saadaan

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_1 + \dots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_p = 0. \quad (7)$$

Koska $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ on lineaarisesti riippumaton, niin kaikki kertoimet yhtälössä 7 ovat nollia. Yksikään tekijöistä $\lambda_i - \lambda_{p+1} \neq 0$, koska ominaisarvot eroavat toisistaan ja $c_i = 0$ kaikille $i = 1, \dots, p$. Jos $c_i = 0$, niin yhtälö 4 sanoo, että $\mathbf{v}_{p+1} = 0$. Tämä johtaa ristiriitaan, joten joukko $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ on lineaarisesti riippumaton. \square

3 Karakteristinen yhtälö

Neliömatriisin A ominaisarvoista saadaan hyödyllistä tietoa sen karakteristisesta yhtälöstä. Yleisen tapauksen ymmärtämiseksi tarkastellaan ensin yksinkertaista esimerkkiä.

Esimerkki 4. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot.

On löydettävä kaikki kompleksiluvut λ siten, että matriisiyhtälöllä

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

on ei-triviaali ratkaisu. Säännöllisten matriisien ominaisuuksien perusteella on siis löydettävä kaikki kompleksiluvut λ , joilla matriisi $A - \lambda I$ ei ole säännöllinen, missä

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & -6 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Matriisi $A - \lambda I$ ei ole säännöllinen täsmälleen silloin, kun sen determinantti on nolla. Matriisin A ominaisarvot ovat yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & -6 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

ratkaisut. Tiedetään, että

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$

jolloin

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)(-6 - \lambda) - (3)(3) \\ &= -12 + 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda - 21 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 7). \end{aligned}$$

Jos $\det(A - \lambda I) = 0$, niin $\lambda = 3$ tai $\lambda = -7$. Matriisin A ominaisarvot ovat siis 3 ja -7 .

Yhtälöä $\det(A - \lambda I) = 0$ kutsutaan matriisin A karakteristiseksi yhtälöksi. Voidaan todeta (vrt. Esimerkkiä [4]), että λ on matriisin A ominaisarvo jos ja vain jos λ toteuttaa karakteristisen yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esimerkki 5. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

karakteristinen yhtälö.

Muodostetaan $A - \lambda I$. Determinanttien ominaisuuksien perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (5 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Karakteristinen yhtälö on

$$(5 - \lambda)^2(3 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

tai

$$(\lambda - 5)^2(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

eli

$$\lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 130\lambda + 75 = 0.$$

Esimerkeissä 4 ja 5, $\det(A - \lambda I)$ on polynomi muuttujan λ suhteen. Jos A on $n \times n$ -matriisi, niin voidaan osoittaa, että $\det(A - \lambda I)$ on astetta n oleva polynomi. Sitä kutsutaan matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi*.

Esimerkissä 5 ominaisarvolla 5 sanotaan olevan *kertaluku* 2, koska tekijä $(\lambda - 5)$ esiintyy karakteristisessa polynomissa kaksi kertaa. Yleisesti matriisin A ominaisarvon λ *algebraallinen kertaluku* on sen kertaluku matriisin A karakteristisen polynomien nollakohtana.

Esimerkki 6. Olkoon 6×6 matriisin karakteristinen polynomi on $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$.

Etsi ominaisarvot ja niiden kertaluvut.

Jaetaan polynomi tekijöihin

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2).$$

Ominaisarvot ovat 0 kertaluvulla 4, 6 kertaluvulla 1 ja -2 kertaluvulla 1.

Esimerkin 6 ominaisarvot voitaisiin luetella myös muodossa $0, 0, 0, 0, 6, -2$, jossa ominaisarvot toistuvat niiden kertalukujen mukaisesti.

Karakteristinen yhtälö on tärkeä teoreettisista syistä. Käytännön laskennassa minkä tahansa yli 2×2 matriisin ominaisarvot tulisi selvittää tietokoneella, ellei matriisi ole kolmiomatriisi tai sillä ole muita erityisominaisuuksia. Vaikka 3×3 matriisin karakteristinen polynomi on helppo laskea käsin, sen tekijöihin jakaminen saattaa olla hankalaa, mikäli matriisi ei ole tarkoin valittu.

3.1 Similaarisuus

Lause 2 havainnollistaa yhtä karakteristisen polynomin käyttötapaa ja muodostaa perustan useille iteratiivisille menetelmille, jotka approksimoivat ominaisarvoja. Olkoot A ja B $n \times n$ -matriiseja. Matriisi A on *similaarinen* matriisiin B kanssa, jos on olemassa säännöllinen matriisi P , jolle pätee $P^{-1}AP = B$. Merkitsemällä $Q = P^{-1}$, saadaan $Q^{-1} = BQ = A$. Näin ollen, myös B on similaarinen matriisiin A kanssa. Voidaan siis todeta, että A ja B ovat similaarisia. Matriisin A muuttamista muotoon $P^{-1}AP$ kutsutaan similaarisuusmuunnokseksi.

Lause 2. *Jos $n \times n$ -matriisit A ja B ovat similaarisia, niin niillä on sama karakteristinen polynomi ja näin ollen samat ominaisarvot ja niiden kertaluvut.*

Todistus. Todistamme tässä vain sen, että ominaisarvot ovat samat similaarisilla polynomeilla. Jos $B = P^{-1}AP$, niin

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(AP - \lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P.$$

Determinanttien kertolaskun ominaisuuden perusteella saadaan

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P). \quad (8)$$

Koska

$$\det(P^{-1}) \det(P) = \det(P^{-1}P) = \det I = 1,$$

niin yhtälöstä 8 nähdään, että

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I).$$

□

4 Diagonalisointi

Monissa tapauksissa matriisin A sisältämä tieto ominaisarvoista sekä -vektoreista voidaan esittää hyödyllisessä tulomuodossa $A = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi. Tässä luvussa huomataan, miten tulomuoto mahdollistaa matriisin potenssien A^k laskemisen suurilla arvoilla k , joka on perusidea useissa lineaarialgebran sovelluksissa. Esimerkki 7 havainnollistaa, että diagonaalimatriisien potenssien laskeminen on helppoa.

Esimerkki 7. Jos

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

niin

$$D^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

ja

$$D^3 = DD^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

Yleisesti

$$D^k = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix},$$

kaikille $k \geq 1$.

Jos $A = PDP^{-1}$ jollekin säännölliselle matriisille P ja diagonaalimatriisille D , niin myös A^k on helppo laskea. Tämä osoitetaan esimerkissä 8.

Esimerkki 8. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Etsi kaava potenssille A^k . On annettu, että

$$A = PDP^{-1}, \text{ missä } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ja } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Standardikaava 2×2 matriisin käänteismatriisille antaa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tällöin matriisin kertolaskun assosiativisuuden nojalla,

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDDP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Edelleen,

$$A^3 = (PDP^{-1})A^2 = (PDP^{-1})PD^2P^{-1} = PDD^2P^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

Yleisesti kaikille $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 5^k & 2 \cdot 3^k - 5^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Neliömatriisia A sanotaan diagonalisoituvaksi, jos se on similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa. Toisin sanoen silloin, kun pätee $A = PDP^{-1}$, jossa P on jokin säännöllinen matriisi ja D on diagonaalimatriisi.

Lause 4 antaa ehdot diagonalisoituville matriiseille ja kertoo, kuinka sopiva tulo-muoto voidaan muodostaa.

Lause 3. Neliömatriisi A on diagonalisoituva jos ja vain jos sillä on n määrä lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita.

Itse asiassa $A = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi, pätee jos ja vain jos matriisin P sarakkeet ovat matriisin A lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita.

Tässä tapauksessa matriisin D diagonaalialkiot ovat matriisin A ominaisarvoja, jotka vastaavat matriisin P ominaisvektoreita.

Todistus. Jos P on mikä tahansa $n \times n$ -matriisi, jonka sarakkeina ovat $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ja D on mikä tahansa diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkioita ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, niin huomataan, että

$$AP = A(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n) = (A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2 \ \dots \ A\mathbf{v}_n) \quad (9)$$

ja

$$PD = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \dots \ \lambda_n\mathbf{v}_n). \quad (10)$$

Nyt oletetaan, että A on diagonalisoituva ja $A = PDP^{-1}$. Kertomalla yhtälön molemmat puolet matriisilla P saadaan $AP = PD$. Eli

$$(A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2 \ \dots \ A\mathbf{v}_n) = (\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \dots \ \lambda_n\mathbf{v}_n). \quad (11)$$

Yhdistämällä sarakkeet nähdään, että

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad A\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n. \quad (12)$$

Koska P on säännöllinen, sen sarakkeiden $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ täytyy olla lineaarisesti riippumattomia. Lisäksi, koska sarakkeet ovat nollasta poikkeavia, niin yhtälöt kohdassa 12 osoittavat, että $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ovat ominaisarvoja ja $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ niitä vastaavia ominaisvektoreita.

Otetaan lopuksi mitkä tahansa ominaisvektorit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ja käytetään niitä muodostamaan matriisin P sarakkeet. Käytetään ominaisvektoreita vastaavia ominaisarvoja $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ muodostamaan matriisi D . Yhtälöiden 9, 10 ja 11 perusteella $AP = PD$. Tämä pätee ominaisvektoreille ilman mitään lisäehtoja. Jos ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin matriisien ominaisuuksien perusteella P on säännöllinen. Tällöin yhtälö $AP = PD$ on sama asia yhtälön $A = PDP^{-1}$ kanssa. \square

4.1 Matriisien diagonalisointi

Esimerkki 9. Diagonalisoi matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

jos mahdollista.

Toisin sanoen etsi säännöllinen matriisi P ja diagonaalimatriisi D siten, että $A = PDP^{-1}$.

Lauseessa 3 esitetyn menetelmän toteuttamiseksi tarvitaan neljä vaihetta.

Ensimmäisessä vaiheessa etsitään matriisin A ominaisarvot. Kuten kappaleessa 3

mainittiin, tämän vaiheen laskutoimitukset soveltuvat paremmin tietokoneella laskettaviksi, kun matriisi on suurempi kuin 2×2 -matriisi. Tarpeettomien sivuseikkojen välttämiseksi tekstissä yleensä annetaan tarvittavat tiedot tämän vaiheen suorittamiseksi. Tässä esimerkissä karakteristinen yhtälö sisältää kolmannen asteen polynomin, joka voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2. \end{aligned}$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda = 1$ ja $\lambda = -2$.

Toisessa vaiheessa etsitään matriisin A kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Ominaisvektoreita tarvitaan kolme, sillä matriisi A on 3×3 -matriisi. Jos tämä vaihe epäonnistuu, niin lauseen 3 mukaan matriisi A ei ole diagonalisoituva. Luvussa 2 esitetty menetelmä tuottaa kannan jokaiselle ominaisavaruudelle.

Kanta ominaisarvolle $\lambda = 1$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kanta ominaisarvolle $\lambda = -2$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voidaan tarkistaa, että vektorit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon.

Vaiheessa kolme muodostetaan säännöllinen matriisi P vaiheessa kaksi saaduista vektoreista. Vektorit voidaan järjestää miten tahansa. Käyttäen vaiheessa kaksi olevaa järjestystä saadaan

$$P = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Viimeisessä vaiheessa eli vaiheessa neljä muodostetaan diagonaalimatriisi D vastaavista ominaisarvoista. Tässä vaiheessa on olennaista, että ominaisarvojen järjestys vastaa matriisin P sarakkeissa käytettyä järjestystä. Ominaisarvoa $\lambda = -2$ käytetään kaksi kertaa, sillä sitä vastaavia ominaisvektoreita on kaksi:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lopuksi voi tarkistaa, että matriisit P ja D todella toimivat. Jotta vältetään matriisin P^{-1} laskeminen, voidaan yksinkertaisemmin tarkistaa pitääkö yhtälö $AP = PD$

paikkansa. Lasketaan

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lause 4 tarjoaa riittävän ehdon sille, että matriisi on diagonalisoituva.

Lause 4. Jos $n \times n$ -matriisilla on n määrä toisistaan eroavia ominaisarvoja, niin se on diagonalisoituva.

Todistus. Olkoon $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ matriisin A määrää n toisistaan eroavia ominaisarvoja vastaavia ominaisvektoreita. Tällöin lauseen 1 mukaan joukko $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton. Näin ollen matriisi A on diagonalisoituva lauseen 3 perusteella. \square

Ei kuitenkaan ole välttämätöntä $n \times n$ -matriisin diagonalisoituvuuden kannalta, onko sillä n määrä toisistaan eroavaa ominaisarvoa. Esimerkin 9 3×3 -matriisi on diagonalisoituva, vaikka sillä on ainoastaan kaksi ominaisarvoa.

Esimerkki 10. Määritä, onko matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonalisoituva.

Koska matriisi A on kolmiomatriisi, niin sen ominaisarvot sijaitsevat sen päädiagonaalilla. Tällöin matriisin ominaisarvot ovat siis 5, 0 ja -2 . Matriisi A on 3×3 -matriisi ja sillä on kolme toisistaan eroavaa ominaisarvoa. Näin ollen A on diagonalisoituva.

Viitteet

- [1] D. C. Lay, S. R. Lay, J. J. McDonald: *Linear Algebra and Its Applications, Sixth Edition*, Pearson Education, 2021.
- [2] F. Uhlig: *The Eight Epochs of Math as regards past and future Matrix Computations*, Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, 2020.