TURUN YLIOPISTO

Diskreettiaikaiset Markov-ketjut

Antti Hopeanaula

Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2021

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HOPEANAULA, ANTTI: Diskreetiaikaset Markov-ketjut
Pro gradu -tutkielma, 43 s., 4 liites.
Matematiikka
Huhtikuu 2021

Markov-ketjut ovat tärkeä luokka stokastisia prosesseja. Niitä voidaan käyttää mallintamaan prosesseja, jotka toteuttavat Markov-ominaisuuden, jolla tarkoitetaan, että ketjun tulevaisuuden tila riippuu vain sen nykyisestä tilasta. Markov-ketju määritellään sen tilajakauman, ketjun nykytilan ja siirtymämatriisin avulla. Siirtymämatriisi muodostuu ketjun siirtymätodennäköisyyksistä. Siirtymämatriisi voidaan myös esittää siirtymäkaaviona. Useamman askeleen siirtymätodennäköisyydet saadaan laskettua ketjun alkujakauman ja siirtymämatriisin avulla.

Markov-ketjun tilat voidaan jakaa yhteysluokkiin niiden kommunikoivuuden perusteella. Jos tilajoukon kaikki tilat kommunikoivat keskenään, sanotaan siirtymämatriisin ja sitä vastaavan Markov-ketjun olevan yhtenäinen. Luokan sanotaan olevan suljettu, jos sen tiloista ei voida päätyä muihin tiloihin. Tila on absorboiva, jos se muodostaa yksinään suljetun luokan. Tilat ja luokat luokitellaan myös palautuviksi ja väistyviksi.

Tilan jakso on suurin yhteinen tekijä niille ajanhetkille, jolloin tilasta lähtevä ketju voi palata alkutilaansa. Luokan sanotaan olevan jaksollinen, jos sen tilat ovat jaksollisia. Vastaavasti luokka on jaksoton, jos sen tilat ovat jaksottomia. Myös siirtymämatriisi ja sitä vastaava Markov-ketju on jaksoton, jos jokainen tila on jaksoton.

Osumatodennäköisyys h_{iA} ilmaisee todennäköisyyden, että tilasta i käynnistyvä ketju saavuttaa jossain vaiheessa prosessia tilajoukon A. Kulkuajalla k_{iA} tarkoitetaan siirtymien lukumäärää, joka ketjulla menee saavuttaa joukko A lähtötilasta i.

Satunnaismuuttujan todennäköisyysjakaumaa kutsutaan ketjun tasapainojakaumaksi, mikäli siinä ei tapahdu muutoksia enää jonkin tietyn ajanhetken n jälkeen. Rajajakauma sen sijaan on jakauma, jonka ketju mahdollisesti saavuttaa, kun n lähestyy ääretöntä. Mikäli ketjun siirtymämatriisin rivit, ovat samat jonkun ajanhetken jälkeen, on kyseessä rajajakauma. Markov-ketjun rajajakauma on myös sen tasapainojakauma. Pitkällä aikavälillä ketjun rajajakauma ei riipu ketjun lähtötilasta. Tasapainojakauma saadaan selvitettyä ratkaisemalla lineaarinen yhtälöryhmä, joka muodostetaan tasapainoyhtälöiden $\pi P = \pi$ ja $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ avulla.

Asiasanat: Diskreettiaikainen Markov-ketju, Markov-ketju, Stokastinen prosessi, Pro gradu -tutkielma.

Sisällys

1 Johdanto

Andrey Markov (1856-1922) oli venäläinen matemaatikko. Aluksi hän työskenteli muun muassa lukuteorian ja suppenevien sarjojen parissa, mutta parhaiten hänet kuitenkin tunnetaan työstään stokastististen prosessien parissa ja Markov-ketjusta, joka on nimetty hänen mukaansa. Markov julkaisi ensimmäisen tutkimustuloksensa Markov-ketjuista vuonna 1906. Hän oli erittäin kiinnostunut runoudesta, ja ensimmäinen hänen kehittelemänsä Markov-ketjun sovellus liittyi Pushkinin kirjan *Eugene Onegin* kielelliseen analyysiin, jota hän tutki vuonna 1913. [1]

Markov-ketjut ovat stokastisia prosesseja, jotka toteuttavat Markov-ominaisuuden. Tällä tarkoitetaan, että jos prosessin tila on tiedossa tietyllä ajanhetkellä, sen menneisyys ja tulevaisuus eivät riipu toisistaan. Toisin sanoen, jos tiedetään prosessin tila tiettynä ajankohtana, ketjun tulevaisuuden tilan ennustaminen tästä ajanhetkestä eteenpäin ei vaadi tietoja sen menneisyydestä. Tämä ominaisuuden ansiosta kyseisten prosessien mallintamiseen vaaditaan huomattavasti vähemmän parametrejä. Ketju on siis riittävän yksinkertainen, jotta prosessien mallintaminen on luonnollista ja intuitiivista, mutta samalla erittäin monipuolinen, koska se antaa mahdollisuuden ottaa huomioon yleiset todennäköisyysjakaumat hyvin tarkasti. [2]

Markov-ketjuja käytetään ongelmien ratkaisussa useilla eri tieteenaloilla, kuten esimerkiksi tietojenkäsittelyssä, viestinnässä, biologiassa, fysiikassa, kemiassa ja yhteiskuntatieteissä. Ketjujen laaja käytettävyys johtuu pääasiassa niiden yksinkertaisuudesta, käytettävissä olevien teoreettisten tulosten suuresta määrästä ja laadukkaista algoritmeista, jotka on kehitetty niiden numeerista arviointia varten. Itse asiassa koko satunnaisprosessien matemaattista tutkimusta voidaan pitää tavalla tai toisella Markov-ketjujen teorian yleistyksenä. [2]

Markov-ketjujen perusideana on tutkia ketjun tilojen välisiä siirtymiä ja niiden siirtymätodennäköisyyksiä. Markov-ominaisuuden perusteella näiden siirtymien todennäköisyydet riippuvat ainoastaan siirtymää edeltäneestä tilasta. Markov-ketju määritellään siirtymätodennäköisyyksistä muodostuvan siirtymämatriisin ja tilatodennäköisyysvektorin avulla. Näiden avulla pystytään selvittämään siirtymätodennäköisyydet tilasta toiseen tietyllä aikavälillä.

Tutkielmassa tarkastellaan pelkästään diskreettiaikaisia Markov-ketjuja, joiden tilajoukko on äärellinen. Tarkoituksena ei ole perehtyä Markov-ketjun jokaiseen yksityiskohtaan ja eri sovelluksiin, vaan keskittyä luomaan yleinen käsitys Markov-ketjuista ja niiden toiminnasta. Teksti on suunnattu lukion pitkän matematiikan opiskelijoille, jotka ovat kiinnostuneita todennäköisyyslaskennasta ja siihen liittyvistä malleista. Tämän lisäksi tutkielmaa voisi käyttää opetuskäyttöön jollakin todennäköisyyslaskennan jatkokurssilla. Pohjatietona lukijalta vaaditaan lukion pitkän matematiikan todennäköisyyslaskennan kurssi (MAA10). Tarvittavat laskutoimenpiteet ja teoriat esitellään tutkielman edetessä. Mikäli lukija kokee tarvitsevansa kertausta todennäköisyyslaskennan määritelmistä ja merkinnöistä, joita tekstissä ei esitellä, ne löytyvät tutkielman lopusta liitteestä A.

Luvussa 2 esitellään todennäköisyyslaskennan osalta tärkeät määritelmät ja kaavat, kuten ehdollinen todennäköisyys, kokonaistodennäköisyys ja riippumattomuus. Luvussa 3 esitellään, mikä on matriisi sekä siihen liittyvät käsitteet ja laskuoperaatiot. Luku esittelee matriisitulon, jota tarvitaan Markov-ketjujen yhteydessä. Luvussa 4 esitellään diskreettiaikaiset Markov-ketjut. Aluksi määritellään Markov-ominaisuus ja siirtymätodennäköisyys, joiden avulla määritetään siirtymämatriisi. Siirtymämatriisin lisäksi esitellään myös siirtymäkaavio. Tämän jälkeen siirrytään käsittelemään tilatodennäköisyyksiä sekä useamman askeleen siirtymätodennäköisyyksiä. Lisäksi esitellään, miten ketjun tilat voidaan luokitella sekä tilojen jaksollisuus, osumatodennäköisyys ja kulkuaika. Viimeisessä luvussa 5 tutkitaan vielä Markov-ketjuja pitkällä aikavälillä ja määritetään ketjun raja- ja tasapainojakauma. Kaikki luvut sisältävät esimerkkejä, joiden tarkoitus on havainnollistaa tekstissä ja määritelmissä esiteltyä teoriaosuutta.

2 Todennäköisyyslaskenta

Tässä luvussa esitellään todennäköisyyslaskennan osalta oleelliset ja tärkeät laskukaavat ja määritelmät, joita tarvitaan Markov-ketjujen käsittelyssä. Aluksi esitellään ehdollinen todennäköisyys, jonka avulla pystytään johtamaan kokonaistodennäköisyyden lause sekä Bayesin kaava. Tämän lisäksi esitellään myös riippumattomien sekä toisensa poissulkevien tapausten määritelmät. Luvun lähteinä on käytetty [3], [4] ja [8] . Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet sekä merkinnät löytyvät tarvittaessa liitteestä A.

2.1 Ehdollinen todennäköisyys

Tässä luvussa käsitellään yhtä todennäköisyyslaskennan teorian peruskäsitettä. Tarkoituksena on tarkastella, miten tapahtuman A todennäköisyys muuttuu, kun tilanteesta saadaan lisätietoa eli tiedetään, että toinen tapahtuma B on tapahtunut. Tätä tilannetta kutsutaan *ehdolliseksi todennäköisyydeksi*. Tapahtuman A ehdollista todennäköisyyttä ehdolla B merkitään $\mathbb{P}(A \mid B)$.

Esimerkki 1. Heitetään tavallista noppaa. Tapahtuman otosavaruus on nopan silmäluvut eli $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Olkoon tapahtuma $A =$"silmäluku on pariton" ja tapahtuma $B =$"silmäluku on korkeintaan 3". Tapahtumat ovat siis $A = \{1, 3, 5\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$. Mikä on todennäköisyys $\mathbb{P}(A)$? Entä todennäköisyys $\mathbb{P}(A \mid B)$?

Tapahtuman A todennäköisyys on helppo laskea klassisen todennäköisyyden kaavan avulla

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{suotuisat alkeistapaukset}}{\text{kaikki alkeistapaukset}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Tapahtuman A ehdollisessa todennäköisyydessä ehdolla B tiedetään, että tapahtuma B on tapahtunut, jolloin otosavaruus suppenee joukkoon $B = \{1, 2, 3\}$. Tällöin, jotta tapahtuma A tapahtuu niin silmäluvun tulee kuulua leikkaukseen $A \cap B = \{1, 3\}$. Koska kaikkien silmälukujen todennäköisyys on yhtä suuri niin ehdolliseksi todennäköisyydeksi saadaan

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{3}.$$

Esimerkin avulla voidaan määritellä ehdollisen todennäköisyyden laskukaava.

Määritelmä 1. Jos $\mathbb{P}(B) > 0$, niin tapauksen A ehdollinen todennäköisyys ehdolla B on

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{1}$$

Esimerkki 2. Heitetään noppaa kahdesti. Olkoon ensimmäisen heiton silmäluku X_1 ja toisen heiton silmäluku X_2. Tiedetään, että $X_1 + X_2 = 7$. Millä todennäköisyydellä $X_1 = 4$ tai $X_2 = 4$?

Olkoon $A =$ ”ensimmäisen tai toisen heiton silmäluku on 4” ja $B =$ ”silmälukujen summa on 7”. Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(A \mid B)$ saadaan laskettua kaavasta (1):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Tapahtumien otosavaruudet ovat

$$A = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\},$$

$$B = \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\},$$
$$A \cap B = \{(4,3),(3,4)\}.$$

Sijoittamalla ehdollisen todennäköisyyden kaavaan saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \mid B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä 1 saadaan johdettua myös seuraava lause:

Lause 1. *a)* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$, *jos* $\mathbb{P}(B) > 0$,

b) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$, *jos* $\mathbb{P}(A) > 0$.

Lause voidaan yleistää myös useammalle tapaukselle:

Lause 2. *Tapausten* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *leikkaukselle pätee*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \quad (2)$$

mikäli kaikki ehdolliset todennäköisyydet ovat olemassa.

Esimerkki 3. Tehdas valmistaa 100 hehkulamppua, joista 5 on viallisia. Valitaan näistä sadasta hehkulampusta satunnaisesti kolme kappaletta. Mikä on todennäköisyys, ettei mikään niistä ole viallinen?

Olkoon $A_i =$ ”i:nnes hehkulamppu ei ole viallinen”, kun $i = 1, 2, 3$. Halutaan selvittää todennäköisyys $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Koska viallisia lamppuja oli 5 kappaletta niin tiedetään, että ensimmäinen lamppu ei ole viallinen todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{95}{100}.$$

Kun tiedetään, että ensimmäinen lamppu ei ollut viallinen, seuraava lamppu valitaan 94 toimivan ja 5 viallisen lampun joukosta. Tällöin toinen lamppu on viallinen todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{94}{99}.$$

Kun tiedetään, että ensimmäinen ja toinen lamppu olivat toimivia, niin kolmas lamppu valitaan 93 toimivan ja 5 viallisen lampun joukosta eli kolmas lamppu on viallinen todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_2, A_1) = \frac{93}{98}.$$

Kysytty todennäköisyys saadaan laskettua lauseen 2 yhtälön (2) avulla

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_2, A_1) \\
&= \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \\
&= 0.8560
\end{aligned}$$

Seuraavaksi voidaan johtaa kokonaistodennäköisyyslausetta.

Lause 3 (Kokonaistodennäköisyys). *Oletetaan, että $A_1, A_2, \ldots, A_n$ muodostavat otosavaruuden partition. Tällöin*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i) \tag{3}$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) &= \mathbb{P}(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)) \\
&= \mathbb{P}((B \cap A_1) \cup \ldots (B \cap A_n)) \\
&= \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n) \\
&= \mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n)
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 4. Pöydällä on kolme laatikkoa, joissa jokaisessa on yhteensä 100 palloa:

- Laatikossa 1 on 75 mustaa ja 25 valkoista palloa;
- Laatikossa 2 on 60 mustaa ja 40 valkoista palloa;
- Laatikossa 3 on 45 mustaa ja 55 valkoista palloa.

Valitaan ensiksi satunnaisesti yksi laatikko. Valitusta laatikosta nostetaan umpimähkään yksi pallo. Millä todennäköisyydellä nostettu pallo on musta?

Olkoon M = ”nostettu pallo on musta” ja L_i = ”valittu laatikko on i”. Tiedetään siis seuraavat ehdolliset todennäköisyydet:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M \mid L_1) &= 0.75, \\
\mathbb{P}(M \mid L_2) &= 0.60, \\
\mathbb{P}(M \mid L_3) &= 0.45.
\end{aligned}$$

Tapahtumat L_1, L_2 ja L_3 ovat toisensa poissulkevia, koska voidaan valita vain yksi laatikko. Kuitenkin varmuudella valitaan ainakin yksi laatikko eli niiden unioni muodostaa koko tila-avaruuden $\mathbb{P}(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = 1$. Tällöin voidaan todennäköisyyden laskemiseksi käyttää kokonaistodennäköisyyden kaavaa (3):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(M \mid L_1)\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(M \mid L_2)\mathbb{P}(L_2) + \mathbb{P}(M \mid L_3)\mathbb{P}(L_3) \\
&= 0.75 \cdot \frac{1}{3} + 0.60 \cdot \frac{1}{3} + 0.45 \cdot \frac{1}{3} \\
&= 0.60
\end{aligned}$$

Käänteiset ehdolliset todennäköisyydet saadaan *Bayesin* lauseen avulla.

Lause 4 (Bayes)**.** *Mille tahansa kahdelle tapahtumalle A ja B, kun $\mathbb{P}(A) > 0$, pätee*

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}. \tag{4}$$

Mikäli $B_1, B_2, \ldots, B_n$ muodostavat otosavaruuden partition ja $\mathbb{P}(A) > 0$, niin B_i:n ehdollinen todennäköisyys ehdolla A on:

$$\mathbb{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)} \tag{5}$$

jossa $j = 1, \ldots, n$.

Esimerkki 5. Olkoon lähtötilanne sama kuin esimerkissä 4. Oletetaan, että tiedetään nostetun pallon olevan musta. Millä todennäköisyydellä pallo on nostettu laatikosta 1?

Todennäköisyys $\mathbb{P}(M \mid L_i)$ tunnetaan, mutta nyt ollaan kiinnostuneita selvittämään todennäköisyys $\mathbb{P}(L_1 \mid M)$. Tässä tapauksessa voidaan käyttää Bayesin kaavaa (4). Todennäköisyydeksi saadaan tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_1 \mid M) &= \frac{\mathbb{P}(M \mid L_1)\mathbb{P}(L_1)}{\mathbb{P}(M)} \\
&= \frac{0.75 \cdot \frac{1}{3}}{0.6} \\
&= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Todennäköisyys $\mathbb{P}(M)$ laskettiin jo esimerkissä 4, joten sitä ei tarvitse laskea uudelleen.

Esimerkki 6. Tietty virus esiintyy henkilöllä todennäköisyydellä $1 \cdot 10^{-4}$. On olemassa testi, jonka avulla voidaan selvittää onko henkilöllä kyseinen virus. Testistä tiedetään, että

- testin tulos näyttää terveelle henkilölle virheellisen (positiivisen) tuloksen todennäköisyydellä 0.02;

- testin tulos näyttää sairaalle henkilölle virheellisen (negatiivisen) tuloksen todennäköisyydellä 0.01.

Satunnaisesti testatun henkilön testitulos on positiivinen. Millä todennäköisyydellä kyseisellä henkilöllä on virus?

Merkitään tapaukset V = ”henkilöllä on virus ja Pos = ”testi on positiivinen”. Vastatapahtumat voidaan merkitä T = ”henkilö on terve” ja Neg = ”testi on negatiivinen. Tiedetään siis, että

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &= 0.0001 \\ \mathbb{P}(Pos \mid T) &= 0.02 \\ \mathbb{P}(Neg \mid V) &= 0.01 \end{aligned}$$

Halutaan selvittää todennäköisyys $\mathbb{P}(V \mid Pos)$. Käytetään Bayesin kaavaa (5):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \mid Pos) &= \frac{\mathbb{P}(Pos \mid V)\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(Pos \mid V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(Pos \mid T)\mathbb{P}(T)} \\ &= \frac{(1-0.01)\cdot 0.0001}{(1-0.01)\cdot 0.0001 + 0.02\cdot(1-0.0001)} \\ &= 0.0049 \end{aligned}$$

Todennäköisyys, että henkilöllä on virus on 0,49 %.

2.2 Riippumattomuus

Riippumattomuutta voidaan havainnollistaa hyvin edellisessä luvussa esitellyn ehdollisen todennäköisyyden $\mathbb{P}(A \mid B)$ avulla. Silloin, kun ehto B ei vaikuta ehdolliseen todennäköisyyteen eli $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, sanotaan tapauksien olevan *riippumattomia*. Riippumattomuus voidaan määritellä seuraavanlaisesti.

Määritelmä 2. Tapaukset A ja B ovat *riippumattomia* jos $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Esimerkki 7. Valitaan satunnaisesti luku joukosta $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ja merkitään sitä kirjaimella X. Oletetaan, että kaikki tapaukset ovat yhtä todennäköisiä. Olkoon A = ”X on pienempi kuin 7” ja B = ”X on parillinen”. Ovatko tapaukset A ja B riippumattomia?

Nyt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ja $A \cap B = \{2, 4, 6\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 0.6 \\ \mathbb{P}(B) &= 0.5 \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= 0.3 \end{aligned}$$

Koska $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.3$, niin määritelmän 2 mukaan tapaukset A ja B ovat riippumattomia. Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka tiedämme tapauksen B tapahtuneen, se ei muuta tapahtuman A todennäköisyyttä.

Riippumattomuus on tärkeä ominaisuus jota hyödynnetään todennäköisyyslaskennassa ja tilastotieteessä. Esimerkiksi koesarjoissa joissa toistetaan samaa koetta monta kertaa kokeiden tulokset ovat usein riippumattomia. Riippumattomuus voidaan myös yleistää useammalle tapaukselle.

Lause 5. *Jos tapaukset $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ovat riippumattomat, niin*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n) \tag{6}$$

Esimerkki 8. Heitetään kolikkoa niin monta kertaa, että saadaan ensimmäisen kerran klaava. Olkoon X tarvittujen heittojen lukumäärä. Millä todennäköisyydellä $X = 5$?

Tarkoituksena on löytää todennäköisyys, että ensimmäinen klaava tulee vasta viidennellä heitolla. Tämä tarkoittaa, että neljä ensimmäistä heittoa ovat kruunia ja viides heitto on klaava. Merkitään, että T = "klaava" ja H = "kruuna". Tällöin kysytty heittosarja on HHHHT. Koska kolikonheitot ovat riippumattomia toisistaan niin kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(HHHHT) &= \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(T) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{32}.
\end{aligned}$$

Taulukko 1: Poissulkevuuden ja riippumattomuuden erot.

Käsite	**Määritelmä**	**Kaavat**
Poissulkevuus	A ja B eivät voi tapahtua yhtäaikaisesti	$A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
Riippumattomuus	A ei anna lisätietoa B:stä	$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Yleinen virhe on sekoittaa keskenään riippumattomuus ja poissulkevuus. Nämä ovat kuitenkin kaksi eri asiaa. Jos kaksi tapahtumaa A ja B ovat toisensa poissulkevia, se tarkoittaa, että jos toinen tapahtuu niin toinen ei voi tapahtua eli $A \cap B = \emptyset$. Tällöin tapahtuma A on kuitenkin riippuvainen tapahtumasta B, mikä tarkoittaa, että ne ovat toisistaan riippuvaisia. Tapausten riippumattomuudesta ei kuitenkaan voida suoraan päätellä, ovatko tapaukset toisensa poissulkevat. Taulukko 1 toimii yhteenvetona toisensa poissulkevien ja riippumattomien tapahtumien osalta.

3 Matriisilaskenta

Tässä luvussa esitellään lyhyesti tämän tutkielman kannalta oleelliset matriiseihin liittyvät käsitteet ja laskuoperaatiot. Aluksi esitellään, mikä on matriisi sekä matriiseihin liittyvä tarpeellinen perustermistö. Lisäksi näytetään myös kahden matriisin tulo sekä matriisin ja vektorin välinen tulo. Luvun lähteenä on käytetty [6].

3.1 Nimityksiä

Matriisi on taulukko, jonka alkiot ovat lukuja. Matriisin pystyrivejä kutsutaan *sarakkeiksi* ja vaakarivejä *riveiksi*. Matriisin koko määräytyy rivien ja sarakkeiden lukumäärän perusteella. Jos matriisilla on m riviä ja n saraketta, sen koko on $m \times n$. (Luetaan "m kertaa n"). Tässä tutkielmassa käsiteltävät matriisit ovat neliömatriiseja eli ne sisältävät yhtä monta riviä ja saraketta. Kuvassa 1 on esitettynä (2×2)- ja (3×3)-neliömatriisi.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Kuva 1: Neliömatriiseja

Matriisia, jossa on vain yksi sarake tai vain yksi rivi, kutsutaan vektoreiksi. Jos rivejä on vain yksi, kyseessä on *vaakavektori*; jos sarakkeita on vain yksi, kyseessä on *pystyvektori*. Tässä tutkielmassa kaikki vektorit esitetään vaakavektoreina. Kuvassa 2 on esitettynä vaaka- ja pystyvektori.

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Kuva 2: Vaaka- ja pystyvektori

Matriiseja merkintään yleensä isoilla kirjaimilla ja vektoreita pienillä kirjaimilla. Matriisin alkioihin viitataan rivin ja sarakkeen numerolla. Merkintä a_{ij} tai $(A)_{ij}$ tarkoittaa matriisin A alkiota, joka on rivillä i ja sarakkeessa j. Vektorien alkioihin viitataan vain yhdellä numerolla. Esimerkiksi kuvassa 3 matriisin A alkioita ovat muun muassa $a_{11} = 2$, $a_{12} = 4$ ja $a_{21} = 6$. Vektorin $\bar{v}$ alkioita taas ovat $v_1 = 4$, $v_2 = 1$ ja $v_3 = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 1 \\ 8 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kuva 3: Matriisi A ja vektori $\bar{v}$

Identiteettimatriisiksi kutsutaan neliömatriisia, jonka lävistäjällä vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan olevat alkiot ovat ykkösiä ja muut nollia. Identiteettimatriisia merkitään isolla kirjaimella I. Matriisitulossa identiteettimatriisi vastaa lukua yksi eli matriisitulo $AI = A$.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kuva 4: Identiteettimatriisi I, jonka koko on 3×3.

3.2 Matriisien kertolasku

Lukion peruskurssien vektorilaskennassa esitelty pistetulo on matriisien kertolaskun perusidea. Matriisien kertolasku koostuu useammasta kahden vektorin välisestä pistetulosta. Kahden vektorin välinen pistetulo lasketaan kertomalla vektorien ensimmäiset alkiot keskenään, toiset alkiot keskenään ja niin edelleen, ja laskemalla lopulta kaikki tulot yhteen. Tuloksena saadaan yksittäinen luku.

Esimerkki 9. Olkoon

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 9$$

Jotta kahden vektorin välinen tulo voidaan laskea, täytyy vaakavektorin rivin olla yhtä pitkä kuin pystyvektorin sarakkeen. Kahden matriisin tapauksessa tulon vektoreina ovat vasemmanpuoleisen matriisin rivit ja oikean puoleisen matriisin sarakkeet. Tällöin, jotta matriisien tulo voidaan laskea, täytyy vasemmanpuoleisen matriisin rivien oltava yhtä pitkiä kuin oikeanpuoleisen matriisin sarakkeiden. Tässä tutkielmassa kaikki matriisit ovat $(n \times n)$-matriiseja, jolloin myös tulomatriisit ovat $(n \times n)$-matriiseja.

Esimerkki 10. Olkoon matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28 & 39 & 21 \\ 17 & 19 & 11 \\ 11 & 21 & 21 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Määritelmä 3 (Matriisitulo)**.** Olkoon $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ molemmat $n \times n$ neliömatriiseja. Tällöin matriisien tulon tuloksena saadaan matriisi AB, joka koostuu alkioista $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Kertolaskun tuloksena saadun matriisin AB alkio a_{ij} saadaan matriisin A rivin i ja matriisin B sarakkeen j pistetulosta. Esimerkiksi matriisin A ensimmäisen rivin ja matriisin B kolmannen sarakkeen pistetulosta saadaan alkio a_{13}:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \cdot \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Kun matriisi kerrotaan vaakavektorilla, tulee vektorin sarakkeiden lukumäärä olla yhtä suuri kuin matriisin rivien lukumäärä. Vektorin ja matriisin tulon tuloksena syntyy vektori.

Esimerkki 11. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \bar{u}A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4 Diskreettiaikaiset Markov-ketjut

Markov-ketjut ovat melko yleinen ja suhteellisen yksinkertainen tapa satunnaisprosessien matemaattiseen mallintamiseen. Niitä on käytetty monilla eri aloilla, aina tekstin luomisesta talouden ilmiöiden mallintamiseen. Kaiken kaikkiaan Markov-ketjut ovat käsitteellisesti helposti perusteltavissa todennäköisyyslaskennan kaavojen ja määritelmien perusteella. Niiden käyttö on myös yksinkertaista, koska ne voidaan toteuttaa ilman edistyneitä tilastollisia tai matemaattisia käsitteitä. Ne ovat loistava tapa aloittaa todennäköisyyspohjaisen mallinnuksen ja tietojenkäsittelytekniikoiden oppiminen. Aloitetaan Markov-ketjujen käsittely yksinkertaisella havainnollistavalla esimerkillä. Tämän luvun lähteinä on käytetty [3], [5], [7] ja [8].

Esimerkki 12. Yksinkertaisuudessaan Markov-ketjun ideaa voidaan havainnollistaa säämallin avulla. Tarkastellaan erään kaupungin säätilan ennustamista. Oletetaan, että mahdollisia säätiloja on kaksi: aurinkoinen ja pilvinen. Oleellinen asia Markov-ketjujen käsittelyssä on, että tiedetään prosessin nykyhetken tila. Säämallin tapauksessa nykyhetken säätila saadaan selville katsomalla ulos. Voidaan siis olettaa, että nykyhetken säätila tunnetaan ja se on taatusti aina jompikumpi edellä mainituista tiloista. Oletetaan, että mallin avulla halutaan pystyä ennustamaan huomista säätä. Jotta säämalli voidaan luokitella Markov-ketjuksi, tulee huomisen sään ennustamisen olla mahdollista ainoastaan tämän hetken sään mukaan. Kaikki nykyhetkeä edeltävien säätilojen tulee olla siis tilastollisesti merkityksettömiä ja parhaan mahdollisen ennusteen määrittämiseksi riittää tarkastella ainoastaan nykyhetken säätilaa. Oletetaan, että kuvitteellisista tilastoista saadaan laskettua, että pilvisen päivän jälkeen on aurinkoista todennäköisyydellä 0.25. Koska mahdollisia säätiloja on vain kaksi niin voidaan päätellä, että pilvisen päivän todennäköisyys pilvisen päivän jälkeen on oltava 0.75. Tilastoista saadaan myös laskettua, että aurinkoisen päivän jälkeen on pilvistä todennäköisyydellä 0.20, jolloin voidaan päätellä, että aurinkoista päivää seuraa toinen aurinkoinen päivä todennäköisyydellä 0.80. Markov-ketjun idea on, että näiden todennäköisyyksien avulla pystytään ennustamaan seuraavan päivän sää vain ja ainoastaan senhetkisen säätilan perusteella.

Kyseessä on siis stokastinen prosessi, joka voidaan kirjoittaa satunnaismuuttujien sarjana $(X_0, X_1, X_2, \dots)$, missä X_n vastaa satunnaismuuttujan arvoa ajanhetkellä n. Tässä tutkielmassa prosessi on diskreettiaikainen eli $n \in \mathbb{N}$. Satunnaismuuttujan X_n arvoa ajanhetkellä n kutsutaan ketjun *tilaksi.* Jos $X_n = i$ sanotaan, että ketju on tilassa i ajanhetkellä n. Tilojen muodostamaa joukkoa kutsutaan *tilajoukoksi*, jota merkitään kirjaimella S. Esimerkissä 12 säämallin tiloja voidaan merkitä $1 =$ "aurinkoista" ja $2 =$ "pilvistä", jolloin kyseisen mallin tilajoukko on $S = \{1, 2\}$. Prosessi etenee siirtymällä tilasta toiseen jollakin tietyllä todennäköisyydellä. Seuraavaksi esitellään, mikä tekee stokastisesta prosessista juuri Markov-ketjun sekä siihen liittyviä peruskäsitteitä.

4.1 Markov-ominaisuus ja siirtymätodennäköisyys

Stokastisen prosessin *siirtymätodennäköisyys* ilmaisee kahden tilan välisen siirtymän todennäköisyyden. Jos prosessi on ajanhetkellä n tilassa i niin prosessi siirtyy tilaan j siirtymätodennäköisyydellä $p_{ij}(n)$. Markov-ketjut ovat stokastisia prosesseja, jotka toteuttavat *Markov-ominaisuuden.* Markov-ominaisuudella tarkoitetaan prosessin muistittomuutta eli kun prosessin nykyhetken tila tunnetaan, Markov-ketjun tulevaisuus ja menneisyys ovat toisistaan riippumattomia. Tulevaisuuteen vaikuttaa siis ainoastaan nykyhetken tilanne eikä se, miten siihen on päädytty.

Määritelmä 4. Diskreettien satunnaismuuttujien sarja $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ on Markov-ketju, jos se toteuttaa Markov-ominaisuuden eli

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \tag{7}$$

kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$ ja $i_0, \dots, i, j \in S$.

Markov-ketjun seuraava tila X_{n+1} riippuu siis ainoastaan nykyhetkestä X_n eikä ketjun nykyhetkeä edeltävillä tiloilla $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ ole tilastollista merkitystä tulevaisuutta ennustettaessa. Esimerkin 12 säämalli on siis Markov-ketju, koska siinä huomisen päivän säähän vaikutti ainoastaan se, millainen sää on tänään.

Määritelmä 5. Olkoon $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ Markov-ketju, jonka tilajoukko on S. Tällöin Markov-ketjun siirtymätodennäköisyydet ovat

$$p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \text{ kaikilla } i, j \in S \text{ ja } n = 0, 1, 2, \dots \tag{8}$$

Aikahomogeeninen Markov-ketju on riippumaton ajanhetkestä n ja ainoastaan aikavälin pituus vaikuttaa Markov-ketjun käyttäytymiseen.

Oletus. Tässä tutkielmassa kaikki Markov-ketjut ovat aikahomogeenisia.

Määritelmä 6. Markov-ketjun sanotaan olevan aikahomogeeninen jos

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij},$$

kaikilla i, j ja n.

Esimerkki 13. Taulukossa 2 on esitettynä esimerkin 12 siirtymät ja niiden siirtymätodennäköisyydet.

X_n	X_{n+1}	Siirtymä	Siirtymätodennäköisyys
Aurinkoista (1)	Aurinkoista (1)	$1 \to 1$	$p_{11} = 0.80$
Aurinkoista (1)	Pilvistä (2)	$1 \to 2$	$p_{12} = 0.20$
Pilvistä (2)	Aurinkoista (1)	$2 \to 1$	$p_{21} = 0.25$
Pilvistä (2)	Pilvistä (2)	$2 \to 2$	$p_{22} = 0.75$

Taulukko 2: Esimerkin 12 mahdolliset siirtymät ja niiden siirtymätodennäköisyydet.

4.2 Siirtymämatriisi ja -kaavio

Siirtymätodennäköisyydet listataan yleensä matriisiksi, jota kutsutaan *siirtymämatriisiksi* ja merkitään $P = (p_{ij})$. Siirtymämatriisi on tärkein apuväline Markov-ketjujen analysoinnissa. Kun oletetaan, että tilajoukko on $S = \{1, 2, \dots, N\}$ niin siirtymämatriisi on aina $(N \times N)$-neliömatriisi, joka voidaan esittää muodossa

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}.$$

Siirtymämatriisin rivi i ilmaisee ketjun nykyistä tilaa ajanhetkellä n. Sarake j sen sijaan ilmaisee ketjun seuraavaa tilaa ajanhetkellä $n+1$. Siirtymämatriisi sisältää kaikki mahdolliset tilat tilajoukosta S ja koska X_n ja X_{n+1} saavat molemmat arvoja samassa tilajoukossa S, niin kyseessä on $(N \times N)$-neliömatriisi. Koska siirtymämatriisin alkiot ovat todennäköisyyksiä niin ne ovat kaikki myös ei-negatiivisia eli

$$p_{ij} \geq 0, \text{ kaikilla } i, j \geq 0.$$

Koska ketju siirtyy aina varmuudella johonkin tilaan, niin siirtymämatriisin jokaisen rivin alkioiden summa on aina 1 eli

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1, \text{ kaikilla } i \in S.$$

Esimerkki 14. Mallinnetaan erään kaupungin säätä päivänä $n = 0, 1, 2, \ldots$ tilajoukossa $S = \{1, 2\}$, missä 1 = "sateista" ja 2 = "aurinkoista". Oletetaan, että sateista päivää seuraa aurinkoinen päivä todennäköisyydellä $p = 0.4$ ja aurinkoista päivää seuraa sateinen päivä todennäköisyydellä $q = 0.2$. Muodostetaan tilanteesta siirtymämatriisi P.

Tiedetään, että sateista säätä vastaa tila 1 ja aurinkoista tila 2. Ensimmäinen rivi vastaa tällöin sitä, että päivänä n on sateinen sää ja toinen rivi, että päivänä n sää on aurinkoinen. Vastaavasti sarake 1 vastaa sitä, että seuraavana päivänä $(n+1)$ sataa ja sarake 2, että seuraava päivä on aurinkoinen. Annetut todennäköisyydet vastaavat siirtymätodennäköisyyksiä $p = p_{12}$ ja $q = p_{21}$.

Koska Markov-ketju siirtyy aina varmuudella johonkin tilaan, niin siirtymämatriisin jokaisen rivin alkioiden summan tulee olla 1. Tällöin puuttuvat siirtymätodennäköisyydet voidaan selvittää seuraavasti:

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{12} &= 1 \\ p_{11} &= 1 - p_{12} \\ p_{11} &= 1 - 0.4 = 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{21} + p_{22} &= 1 \\ p_{22} &= 1 - p_{21} \\ p_{22} &= 1 - 0.2 = 0.8 \end{aligned}$$

Kyseisen säämallin tila voidaan esittää Markov-ketjuna $(X_0, X_1, \ldots)$, jonka siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Siirtymämatriisista P pystytään myös havaitsemaan, että sateista päivää seuraa sateinen päivä todennäköisyydellä $p_{11} = 0.6$ ja aurinkoista päivää seuraa aurinkoinen päivä todennäköisyydellä $p_{22} = 0.8$.

Esimerkki 15. Olkoon X_n henkilön opiskelumotivaatio viikkona n. Oletetaan, että opiskelumotivaatio voi olla 1 = huono, 2 = normaali tai 3 = hyvä. Muodostetaan tilamuutoksista Markov-ketju, jonka siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Kyseisen Markov-ketjun tilajoukko on $S = \{1, 2, 3\}$. Siirtymämatriisista voidaan havaita esimerkiksi, että opiskelumotivaatioltaan huonoa viikkoa seuraa hyvä viikko todennäköisyydellä $p_{13} = 0.1$. Hyvää viikkoa taas seuraa normaali viikko todennäköisyydellä $p_{32} = 0.4$.

Esimerkki 16. Oletetaan, että henkilö tekee ruokaostoksensa kaupassa 1, 2 tai 3. Merkitään, että X_n on kauppa, jossa henkilö tekee ostoksensa ostokerralla n. Henkilöiden kauppavalinnoista tiedetään seuraavat asiat:

- todennäköisyydet, että henkilö valitsee saman kaupan kuin edellisellä ostokerralla ovat $p_{11} = 0.8$, $p_{22} = 0.6$ ja $p_{33} = 0.4$;
- henkilö, joka teki edellisellä ostokerrallaan ostokset kaupassa 1 vaihtaa seuraavalla ostokerralla kauppaan 2 todennäköisyydellä $p_{12} = 0.1$;
- henkilö, joka teki edellisellä ostokerrallaan ostokset kaupassa 2 vaihtaa seuraavalla ostokerralla kauppaan 3 todennäköisyydellä $p_{23} = 0.2$;
- henkilö, joka teki edellisellä ostokerrallaan ostokset kaupassa 3 vaihtaa seuraavalla ostokerralla kauppaan 1 todennäköisyydellä $p_{31} = 0.3$.

Selvitetään puuttuvat siirtymätodennäköisyydet ja muodostetaan siirtymämatriisi P. Koska siirtymämatriisin rivien alkioiden summan tulee olla 1, saadaan puuttuvat siirtymätodennäköisyydet laskettua seuraavasti:

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{12} + p_{13} &= 1 \\ p_{13} &= 1 - p_{11} - p_{12} \\ p_{13} &= 1 - 0.8 - 0.1 = 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{21} + p_{22} + p_{23} &= 1 \\ p_{21} &= 1 - p_{22} - p_{23} \\ p_{21} &= 1 - 0.6 - 0.2 = 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{31} + p_{32} + p_{33} &= 1 \\ p_{32} &= 1 - p_{31} - p_{33} \\ p_{32} &= 1 - 0.3 - 0.4 = 0.3 \end{aligned}$$

Kyseisen Markov-ketjun siirtymämatriisi on

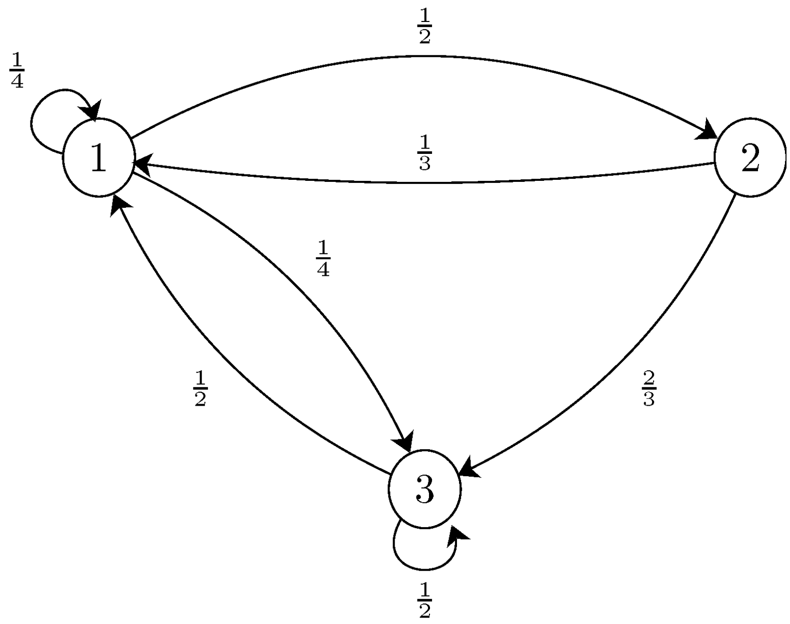
$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Markov-ketju voidaan siirtymämatriisin lisäksi esittää myös siirtymäkaaviona. Markov-ketjun siirtymäkaavio on suunnattu verkko, jonka solmuina ovat ketjun tilat. Siirtymäkaaviossa tilojen väliset siirtymät esitetään nuolina, joiden viereen merkitään kyseistä siirtymää vastaava siirtymätodennäköisyys p_{ij}. Mikäli $p_{ij} = 0$ niin nuoli jätetään pois. Myös siirtymäkaaviossa pätee, että jokaisesta tilasta lähtevien nuolien siirtymätodennäköisyyksien summa on 1.

Esimerkki 17. Olkoon Markov-ketjun tilajoukko $S = \{1, 2, 3\}$ ja siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Siirtymämatriisia P vastaava siirtymäkaavio on esitetty kuvassa 5.



Kuva 5: Siirtymämatriisin P siirtymäkaavio. [8]

Esimerkki 18. Tarkastellaan esimerkin 17 siirtymäkaaviota.

a) Selvitä $\mathbb{P}(X_4 = 3 \mid X_3 = 2)$.

b) Selvitä $\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_2 = 1)$.

c) Jos tiedetään, että $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \dfrac{1}{3}$, selvitä $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2)$.

d) Jos tiedetään, että $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \dfrac{1}{3}$, selvitä $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3)$.

Ratkaisu

a) Määritelmän 5 mukaan siirtymätodennäköisyys on

$$\mathbb{P}(X_4 = 3 \mid X_3 = 2) = p_{23} = \frac{2}{3}.$$

b) Kysytty todennäköisyys on

$$\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) = p_{11} = \frac{1}{4}.$$

c) Lauseen 1 perusteella kysytty todennäköisyys voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2) &= \mathbb{P}(X_0 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot p_{12} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

d) Lauseen 2 sekä Markov-ominaisuuden (määritelmä 4) perusteella kysytty todennäköisyys voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3) &= \mathbb{P}(X_0 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_1 = 2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot p_{12} \cdot p_{23} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

4.3 Tilatodennäköisyydet

Olkoon $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ Markov-ketju tilajoukolla $S = \{1, 2, \dots, N\}$. Jokainen X_n on satunnaismuuttuja, jolla on todennäköisyysjakauma. Todennäköisyysjakauma kertoo satunnaismuuttujan X_n eri tilojen todennäköisyydet ajanhetkellä n ja sitä merkitään $\pi^{(n)}$. Alkuhetken todennäköisyysjakaumasta $\pi^{(0)}$ käytetään nimitystä *alkujakauma*. Todennäköisyysjakauma esitetään $1 \times N$ vaakavektorina. Esimerkiksi alkujakauman $\pi^{(0)}$ vektorimuotoinen esitys on

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 1) & \mathbb{P}(X_0 = 2) & \cdots & \mathbb{P}(X_0 = N) \end{bmatrix}$$

Oletetaan, että Markov-ketju on ajanhetkellä $n + 1$ tilassa $j \in S$. Todennäköisyysjakauma ajanhetkelle $n + 1$ saadaan käyttämällä kokonaistodennäköisyyden laskukaavaa ehdollistamalla ajanhetken n suhteen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = j) &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)\mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_{ij}\mathbb{P}(X_n = i).\end{aligned}$$

Todennäköisyyttä sille, että ketju on tilassa i ajanhetkellä n merkitään

$$\pi_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i).$$

Ajanhetkeen n liittyvät tilatodennäköisyydet voidaan esittää vektorimuodossa

$$\pi^{(n)} = \begin{bmatrix} \pi_1^{(n)} & \pi_2^{(n)} & \cdots & \pi_N^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Tällöin ylläoleva yhtälö

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}\mathbb{P}(X_n = i)$$

voidaan kirjoittaa lyhyemmin muotoon

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)}P, \tag{9}$$

missä P on siirtymämatriisi.

Lause 6. *Jos Markov-ketjun satunnaismuuttujan alkujakauma $\pi^{(0)}$ on määritelty, niin todennäköisyysjakauma mielivaltaisella ajanhetkellä $n = 0, 1, 2, \ldots$ saadaan laskettua alkujakaumasta kaavalla*

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)}P^n, \tag{10}$$

missä P^n on siirtymämatriisin n:s potenssi.

Todistus. Lauseen väite on selvästikin totta ajanhetkellä $n = 0$, sillä P^0 on identiteettimatriisi. Mikäli lauseen väite pitää paikkansa jollain ajanhetkellä $n \geq 0$, niin yhtälön (9) ja matriisikertolaskun liitännäisyyden mukaan

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)}P = (\pi^{(0)}P^n)P = \pi^{(0)}(P^nP) = \pi^{(0)}P^{n+1},$$

ja tällöin väite pitää paikkansa myös ajanhetkellä $n+1$. Induktioperiaatteen mukaan väite pätee siis kaikilla $n \geq 0$. □

Esimerkki 19. Tarkastellaan Markov-ketjua tilajoukolla $S = \{0, 1\}$, jonka siirtymämatriisi on

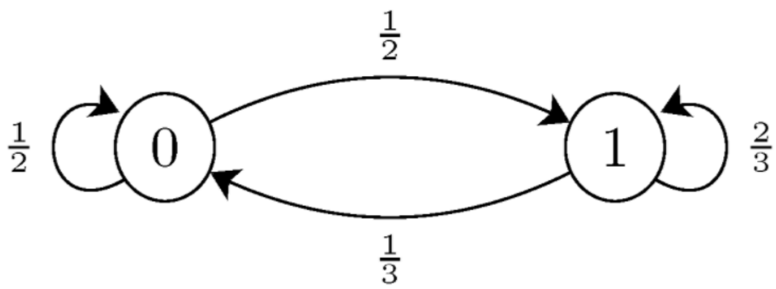
$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että ketju on tilassa 0 ajanhetkellä $n = 0$ eli $X_0 = 0$.

a) Määritä ketjun siirtymäkaavio.

b) Selvitä todennäköisyys, että ketju on tilassa 1 ajanhetkellä $n = 3$.

Ratkaisu
a) Siirtymäkaavio on esitettynä kuvassa 6.



Kuva 6: Siirtymämatriisin P siirtymäkaavio.

b) Tehtävänannon perusteella tiedetään, että

$$\begin{aligned} \pi^{(0)} &= \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) & \mathbb{P}(X_0 = 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kaavan (10) perusteella tiedetään, että

$$\pi^{(3)} = \pi^{(0)} P^3.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \pi^{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}^3 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{29}{72} & \frac{43}{72} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Todennäköisyys, että ketju on tilassa 1 ajanhetkellä $n = 3$ on siis $\frac{43}{72}$.

Esimerkki 20. Käytetään esimerkin 14 siirtymämatriisia

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

ja ennustetaan viikon säätilaa. Oletetaan, että tarkasteltavan viikon maanantaina ($n = 0$) on sateista. Millä todennäköisyydellä keskiviikkona on sateista? Entä perjantaina?

Koska tiedetään, että maanantaina on sateista, niin alkutilaa $X_0 = 1$ vastaava alkujakauma vektorimuodossa on $\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Yhtälön (10) mukaan keskiviikon ($n = 2$) tilajakauma saadaan laskettua kaavasta $\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2$, joten

$$\begin{aligned} \pi^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Näin ollen keskiviikkona on sateista (tila 1) todennäköisyydellä 0.44. Vastaavasti perjantain ($n = 4$) tilajakauma saadaan laskettua kaavasta $\pi^{(4)} = \pi^{(0)}P^4$, eli

$$\begin{aligned}\pi^{(4)} &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\0.2 & 0.8\end{bmatrix}^4\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3504 & 0.6496\\0.3248 & 0.6752\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0.3504 & 0.6496\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Eli perjantaina on sateista todennäköisyydellä 0.3504.

4.4 Useamman askeleen siirtymätodennäköisyydet

Kappaleessa 4.1 esiteltiin, että ketju siirtyy tilasta i tilaan j siirtymätodennäköisyydellä $p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$. Kyseinen siirtymätodennäköisyys kertoo todennäköisyyden siirtyä tilasta i tilaan j täsmälleen yhdellä askeleella. Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa halutaan selvittää todennäköisyys, että ketju siirtyy tilasta i tilaan j kahdella askeleella eli

$$p_{ij}^{(2)} = \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_0 = i).$$

Tämän jälkeen esitellään lause, jonka mukaan saadaan määritettyä yleisesti n askeleen siirtymätodennäköisyys, kun $n \geq 2$.

Tiedetään, että X_1 voi saada jonkin arvon $k \in S$. Kokonaistodennäköisyyden ja Markov-ominaisuuden avulla kysytty todennäköisyys voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(2)} &= \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_0 = i)\\ &= \sum_{k\in S}\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_0 = i)\\ &= \sum_{k\in S}\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = k)\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_0 = i) \qquad \textbf{(Markov-ominaisuus)}\\ &= \sum_{k\in S} p_{kj}p_{ik}.\end{aligned}$$

Saadaan

$$p_{ij}^{(2)} = \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_0 = i) = \sum_{k\in S} p_{ik}p_{kj}. \tag{11}$$

Yhtälö (11) voidaan selittää siten, että päätyäkseen tilaan j tulee ketjun kulkea jonkin välitilan k kautta, jolloin kokonaissiirtymän todennäköisyys on $p_{ik}p_{kj}$. Siirtymätodennäköisyyden p_{ij}^2 määrittämiseksi, lasketaan siis yhteen kaikki mahdolliset välitilat. Vastaavasti kaksivaiheinen siirtymämatriisi voidaan määritellä

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & \cdots & p_{1N}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & \cdots & p_{2N}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}^{(2)} & p_{N2}^{(2)} & \cdots & p_{NN}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Tarkastelemalla yhtälöä (11) voidaan huomata, että $p_{ij}^{(2)}$ on matriisin

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

rivin i sarakkeen j alkio. Kaksivaiheinen siirtymämatriisi saadaan siis laskemalla siirtymämatriisin P toinen potenssi eli

$$P^{(2)} = P^2.$$

Lause 7. *Todennäköisyys, että Markov-ketju siirtyy n askeleella tilasta i tilaan j saadaan laskettua kaavasta*

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i), \tag{12}$$

missä $p_{ij}^{(n)}$ on siirtymämatriisin n:nnen potenssin rivin i sarakkeen j alkio.

Todistus. Olkoon m ja n kaksi positiivista kokonaislukua ja olkoon $X_0 = i$. Jos ketju päätyy $(m+n)$ askeleella tilasta i tilaan j, niin m askeleen jälkeen ketju on jossakin välitilassa $k \in S$. Siitä ketju päätyy n askeleella tilaan j. Siirtymätodennäköisyyden $p_{ij}^{(m+n)}$ määrittämiseksi, tulee laskea yhteen kaikki mahdolliset välitilat:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}. \tag{13}$$

Yhtälöä (13) kutsutaan Chapman-Kolmogorov-yhtälöksi ja se on oleellinen osa lauseen yhtälön (12) todistamista. Kun yhtälö (13) on todistettu niin lauseen yhtälö seuraa siitä. Markov-ominaisuuden perusteella siirtymät tilasta i tilaan k sekä siirtyminen tilasta k tilaan j ovat toisistaan riippumattomia. Tällöin Chapman-Kolmogorov-yhtälö voidaan todistaa kaavalla

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i).$$

Ehdollisen todennäköisyyden (määritelmä 1) mukaan

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)}.$$

Kun yhtälön oikea puoli kerrotaan ja jaetaan termillä $\mathbb{P}(X_m = k, X_0 = i)$ saadaan

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_m = k, X_0 = i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_m = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)}.$$

Ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä saadaan

$$= \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = i).$$

Markov-ominaisuuden (määritelmä 4) mukaan yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$= \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = k) \cdot \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = i) = p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

Näin on todistettu Chapman-Kolmogorov-yhtälö ja samalla lauseen yhtälö. □

Esimerkki 21. Esimerkissä 14 esitellyn säämallin siirtymämatriisi oli

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että maanantaina ($n = 0$) on sateista. Tällöin säämallin ennusteen mukaan tiistaina on sateista todennäköisyydellä $p_{11} = 0.6$ ja aurinkoista todennäköisyydellä $p_{12} = 0.4$ eli

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = 0.6 \qquad \text{ja} \qquad \mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) = 0.4.$$

Todennäköisyys, että keskiviikkona on sateista, saadaan laskettua kaavalla (11) ottamalla huomioon tiistain sään kaksi mahdollista tilaa:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) &= \sum_{k=1}^{2} p_{1k} p_{k1} \\ &= p_{11} \cdot p_{11} + p_{12} \cdot p_{21} \\ &= 0.6 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.2 \\ &= 0.44. \end{aligned}$$

Keskiviikkona on siis sateista todennäköisyydellä 0.44, mikä on sama tulos, joka saatiin esimerkissä 20.

Esimerkki 22. Oletetaan, että maanantaina ($n = 0$) on sateista. Lasketaan todennäköisyys, että perjantaina on sateista. Säämallin siirtymämatriisi on sama kuin esimerkissä 14 eli

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Lauseen 12 mukaan n askeleen siirtymätodennäköisyys tilasta i tilaan j saadaan siirtymämatriisin P n:nnen potenssin rivin i sarakkeen j alkiosta. Maanantaista ($n = 0$) perjantaihin ($n = 4$) on neljä askelta, joten tulee laskea siirtymämatriisin P neljäs potenssi. Kätevä tapa neljännen potenssin laskemiseen on laskea ensiksi siirtymämatriisin toinen potenssi:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{bmatrix}.$$

Siirtymämatriisin neljäs potenssi saadaan kertomalla siirtymämatriisin toinen potenssi itsellään:

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3504 & 0.6496 \\ 0.3248 & 0.6752 \end{bmatrix}.$$

Alkutila oli pilvinen eli $X_0 = 1$ ja kysyttiin, että millä todennäköisyydellä perjantaina on sateista eli $X_4 = 1$. Kysytty siirtymätodennäköisyys on $p_{11}^{(4)}$, joka löytyy siirtymämatriisista P^4 ensimmäisen rivin ensimmäisestä sarakkeesta. Todennäköisyys, että perjantaina sataa on siis 0.3504, mikä on sama tulos, joka saatiin esimerkissä 20.

Esimerkki 23. Esimerkissä 15 esiteltiin henkilön opiskelumotivaatiota mallintava siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

a) Oletetaan, että henkilön opiskelumotivaatio ensimmäisellä viikolla ($n = 1$) on normaali (tila 2). Millä todennäköisyydellä kolmannella viikolla ($n = 3$) opiskelumotivaatio on huono (tila 1)?

b) Oletetaan, että henkilön opiskelumotivaatio ensimmäisellä viikolla ($n = 1$) on huono (tila 1). Millä todennäköisyydellä kolmannella viikolla ($n = 3$) opiskelumotivaatio on hyvä (tila 3)?.

Ratkaise siirtymätodennäköisyydet sekä pistetodennäköisyyksien että siirtymämatriisin avulla.

Ratkaisu

a) Kyseisen todennäköisyyden määrittämiseksi pistetodennäköisyyksien avulla, täytyy ottaa huomioon kaikki kolme mahdollista tilaa toiselle viikolle. Todennäköisyys voidaan tällöin laskea kaavalla (11)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_1 = 2) = p_{21}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{3} p_{2k}p_{k1} \\ &= p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{23}p_{31} \\ &= 0.3 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 \\ &= 0.21 + 0.15 + 0.04 = 0.40 \end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on siis 0.40.

Kysytty siirtymätodennäköisyys $p_{21}^{(2)}$ on matriisin P^2 toisen rivin ensimmäisen sarakkeen alkio. Kyseisen alkion selvittämiseksi riittää, kun kerrotaan siirtymämatriisin P toinen rivi ja ensimmäinen sarake keskenään:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & \cdot & \cdot \\ 0.3 & \cdot & \cdot \\ 0.2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0.4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Myös siirtymämatriisin avulla kysytyksi todennäköisyydeksi saadaan 0.40.

b) Pistetodennäköisyyksien avulla, kysytty todennäköisyys saadaan taas laskettua kaavalla (11) ottamalla huomioon kaikki kolme mahdollista tilaa toiselle viikolle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = p_{13}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{3} p_{1k}p_{k3} \\ &= p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} \\ &= 0.7 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.4 \\ &= 0.07 + 0.04 + 0.04 = 0.15\end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on siis 0.15.

Kysytty siirtymätodennäköisyys $p_{13}^{(2)}$ on matriisin P^2 ensimmäisen rivin kolmannen sarakkeen alkio. Kyseisen alkion selvittämiseksi riittää, kun kerrotaan siirtymämatriisin P ensimmäinen rivi ja kolmas sarake keskenään:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0.1 \\ \cdot & \cdot & 0.2 \\ \cdot & \cdot & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0.15 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Myös siirtymämatriisin avulla kysytyksi todennäköisyydeksi saadaan 0.15.

4.5 Tilojen luokittelu

Mikäli siirtymäkaaviossa on polku tilasta i tilaan j sanotaan, että tila i johtaa tilaan j. Tätä merkitään $i \to j$. Toisin sanoen tilasta i päästään tilaan j jos $p_{ij}^{(n)} > 0$ jollakin kokonaisluvulla $n \geq 0$. Voidaan myös olettaa, että jokainen tila on saavutettavissa itsestään, koska $p_{ii}^{0} = 1$.

Määritelmä 7. Tilat i ja j kommunikoivat, jos ne ovat molemmat saavutettavissa toisistaan. Kommunikoivia tiloja merkitään $i \leftrightarrow j$. Toisin sanoen

$$i \leftrightarrow j \text{ tarkoittaa, että } i \to j \text{ ja } j \to i.$$

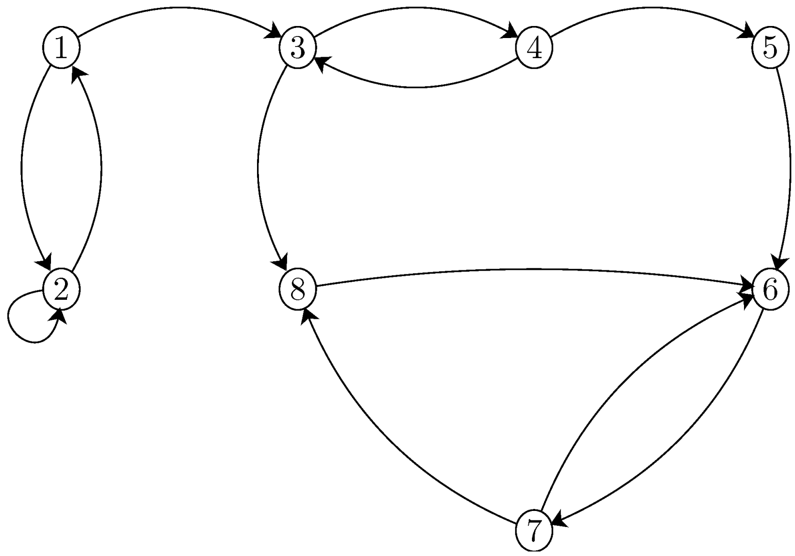
Määritelmä 8. Kommunikoivuus on ekvivalenssirelaatio eli sille pätee:

a) jokainen tila kommunikoi itsensä kanssa, $i \leftrightarrow i$;

b) jos $i \leftrightarrow j$ niin $j \leftrightarrow i$;

c) jos $i \leftrightarrow j$ ja $j \leftrightarrow k$, niin $i \leftrightarrow k$.

Ekvivalenssirelaatiota perusteella Markov-ketjun tilajoukko voidaan jakaa ekvivalenssiluokkiin, joita kutsutaan ketjun *yhteysluokiksi*. Jatkossa yhteysluokista käytetään nimitystä luokka ja merkintä C_l viittaa luokkaan l. Kaksi tilaa i ja j kuuluvat samaan luokkaan jos tilasta i on mahdollista päästä tilaan j eli tilat kommunikoivat keskenään ($i \leftrightarrow j$). Mitkään kaksi eri luokista otettua tilaa eivät kommunikoi keskenään. Luokka muodostuu yhdestä tai useammasta tilasta ja jokainen tila kuuluu täsmälleen yhteen luokkaan.



Kuva 7: Siirtymäkaavio [8]

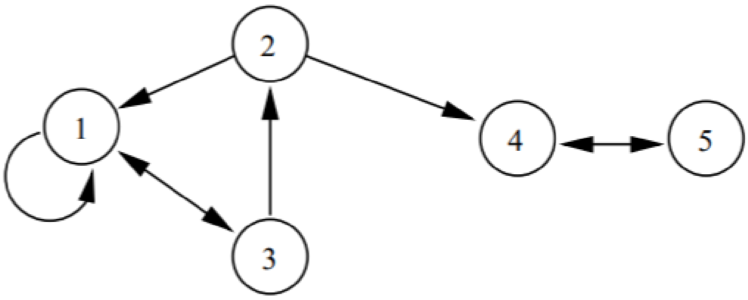
Esimerkki 24. Tarkastellaan allaolevaa Markov-ketjun siirtymäkaaviota. Voidaan olettaa, että jos tilasta i on nuoli tilaan j niin tällöin $p_{ij}^{(n)} > 0$. Etsi kyseisen Markov-ketjun luokat.

Kyseisessä Markov-ketjussa on yhteensä neljä luokkaa. Siirtymäkaaviosta huomataan, että tilat 1 ja 2 kommunikoivat keskenään, mutta eivät muiden tilojen kanssa. Vastaavasti tilat 3 ja 4 kommunikoivat vain keskenään. Tila 5 ei kommunikoi minkään toisen tilan kanssa, joten se muodostaa yksinään yhden luokan. Lopuksi tilat 6, 7 ja 8 muodostavat oman luokan. Tällöin kyseisen Markov-ketjun luokat ovat siis:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1, 2\} \\ C_2 &= \{3, 4\} \\ C_3 &= \{5\} \\ C_4 &= \{6, 7, 8\}. \end{aligned}$$

Määritelmä 9. Luokan C sanotaan olevan *suljettu* jos mikään sen tiloista ei johda mihinkään joukon ulkopuolisista tiloista eli jos $p_{ij} = 0$, kun $i \in C$ ja $j \notin C$.

Esimerkki 25. Alla on esiteltynä erään Markov-ketjun siirtymäkaavio.



Kuva 8: Siirtymäkaavio [7]

a) Mitkä ovat kyseisen Markov-ketjun luokat?

b) Ovatko luokat suljettuja?

Ratkaisu

a) Kyseisellä ketjulla on yhteensä kaksi luokkaa. Tilat 1, 2 ja 3 kommunikoivat keskenään. Vastaavasti myös tilat 4 ja 5 kommunikoivat keskenään. Tilasta 2 pääsee myös tilaan 4, mutta ei takaisin, joten ne kuuluvat eri luokkiin. Tällöin Markov-ketjun luokkia on kaksi, jotka ovat:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1,2,3\} \\ C_2 &= \{4,5\}. \end{aligned}$$

b) Luokka $C_1 = \{1,2,3\}$ ei ole suljettu, koska siitä pääsee poistumaan toiseen luokkaan. Luokka $C_2 = \{4,5\}$ on suljettu, koska sieltä ei ole mahdollista poistua.

Määritelmä 10. Tilan i sanotaan olevan *absorboiva* jos se muodostaa yksinään suljetun luokan. Tällöin tilalle i pätee $p_{ii} = 1$. Tilaan i voidaan tulla muista tiloista, mutta siitä ei voida siirtyä pois.

Siirtymämatriisin P ja sitä vastaavan Markov-ketjun sanotaan olevan *yhtenäinen*, jos sillä on vain yksi luokka, joka koostuu tilajoukosta S. Yhtenäisyys tarkoittaa, että tilajoukon kaikki tilat kommunikoivat keskenään eli $i \leftrightarrow j$ kaikilla $i, j \in S$.

Jos tarkastellaan esimerkin 24 siirtymäkaaviota, voidaan huomata, että se sisältää kahdenlaisia luokkia. Jos ketju päätyy luokkaan 4 millä ajanhetkellä tahansa, se pysyy siell loputtomiin. Toisaalta tämä ei päde muiden luokkien kohdalla. Esimerkiksi jos $X_0 = 2$ niin ketju saattaa pysyä luokassa 1 jonkin aikaa, mutta lopulta se poistuu sieltä eikä enää palaa sinne. Luokan 4 tiloja kutsutaan *palautuviksi* ja muiden luokkien tiloja *väistyviksi*.

Yleisesti sanotaan, että tila on palautuva, jos tilasta poistumisen jälkeen samaan tilaan palataan tulevaisuudessa uudelleen todennäköisyydellä 1. Jos tilaan palaamisen todennäköisyys on vähemmän kuin 1, niin tilan sanotaan olevan väistyvä.

Määritelmä 11. Määritellään mille tahansa tilalle $i \in S$ todennäköisyys

$$f_{ii} = \mathbb{P}(X_n = i, \text{ jollakin } n \geq 1 \mid X_0 = i).$$

Tila i on *palautuva* jos $f_{ii} = 1$ ja *väistyvä* jos $f_{ii} < 1$.

On suhteellisen helppoa osoittaa, että jos kaksi tilaa on samassa luokassa, niin joko molemmat ovat palautuvia tai molemmat ovat väistyviä. Siksi voimme laajentaa ylläolevat määritelmät myös koskemaan luokkia. Luokan sanotaan olevan palautuva, jos kyseisen luokan tilat ovat palautuvia. Toisaalta, jos tilat ovat väistyviä, luokkaa kutsutaan väistyväksi. Yleensä Markov-ketju voi koostua useista väistyvistä sekä useista palautuvista luokista.

Lause 8. *Äärellinen Markov-ketju sisältää ainakin yhden palautuvan luokan.*

Todistus. Tarkastellaan Markov-ketjua, joka sisältää N tilaa eli $S = \{1, 2, \dots, N\}$. Oletetaan, että kaikki tilat ovat väistyviä. Tällöin, kun aloitetaan ajanhetkestä $n = 0$, ketju saattaa pysyä tilassa 1 useamman askeleen ajan, mutta lopulta se poistuu kyseistä tilasta eikä enää palaa sinne. Olkoon $M_1 > 0$ kokonaisluku, jolle pätee $X_n \neq 1$ kaikilla $n \geq M_1$. Vastaavasti on myös olemassa kokonaisluku $M_2 > 0$, jolle pätee $X_n \neq 2$ kaikilla $n \geq M_2$ ja niin edelleen. Jos valitaan, että

$$n \geq \max\{M_1, M_2, \dots, M_N\},$$

niin tällöin $X_n \neq \{1, 2, \dots, N\}$. Tämä on ristiriita, mikä tarkoittaa, että ketju sisältää ainakin yhden palautuvan tilan. Tämä taas tarkoittaa myös, että ketju sisältää myös ainakin yhden palautuvan luokan. □

Lause 9. *Siirtymämatriisi P on yhtenäinen jos ja vain jos kaikille tiloille $i, j \in S$ on olemassa kokonaisluku $n \geq 1$, jolle pätee $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että P on yhtenäinen ja valitaan tarkasteltavaksi tilat $i \neq j$. Tällöin siirtymäkaaviossa on olemassa polku $i = i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n = j$, joten

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} > 0.$$

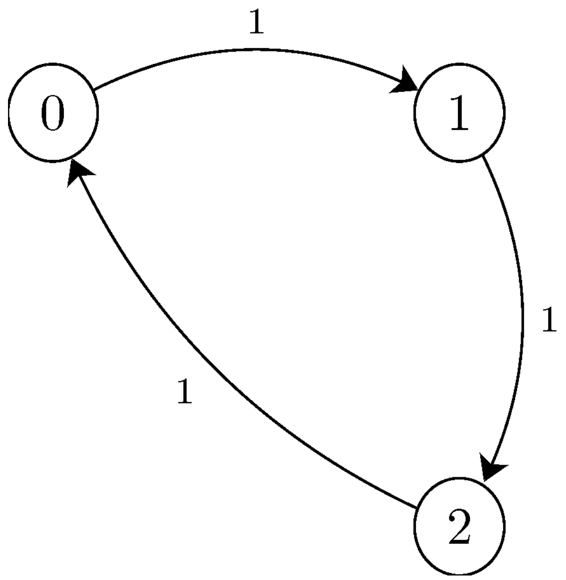
Näin ollen

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0) \\
&\geq \mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \\
&= p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Käänteisen väitteen todistamiseksi oletetaan, että $p_{ij}^{(n)} > 0$ jollain kokonaisluvulla $n \geq 1$. Tällöin siis $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$, eli tilasta i käynnistyvä Markov-ketju on n:n ajanhetken kuluttua mahdollista löytää tilasta j, jolloin siirtymäkaaviosta täytyy löytyä n:n askeleen pituinen polku, jota pitkin ketju voi edetä tilasta i tilaan j, eli pätee $i \leftrightarrow j$. □

4.6 Jaksollisuus

Tarkastellaan allaolevaa siirtymäkaaviota. Huomataan, että kyseinen ketju sisältää jaksollisen kuvion. Jos aloitetaan tilasta 0, niin kyseiseen tilaan palataan ainoastaan ajanhetkillä $n = 3, 6, 9, \cdots$. Toisin sanoen siirtymätodennäköisyys $p_{00}^{(n)} = 0$ jos n ei ole jaollinen kolmella. Tällaista tilaa kutsutaan jaksolliseksi tilaksi, jonka jakso on $d(0) = 3$.



Kuva 9: Siirtymäkaavio [8]

Tilan i jakso on suurin yhteinen tekijä niille ajanhetkille, jolloin tilasta i lähtevä ketju voi palata alkutilaansa. Tilan jakso on helppo määrittää siirtymäkaaviosta. Jos kaikki siirtymäkaavion tilasta i lähtevät ja tilaan i palaavat syklit ovat jonkun kokonaisluvun d monikertoja, ja jos d on suurin tällainen kokonaisluku, niin tällöin d on tilan i jakso.

Määritelmä 12. Tilan i jakso on suurin kokonaisluku d joka toteuttaa ehdon $p_{ii}^{(n)} = 0$ aina, kun n ei ole jaollinen d:llä. Tilan i jaksoa merkitään $d(i)$. Jos $p_{ii}^{(n)} > 0$ kaikilla $n > 0$, niin $d(i) = \infty$.

- Jos $d(i) > 1$, niin tila i on *jaksollinen.*
- Jos $d(i) = 1$, niin tila i on *jaksoton.*

Samaan luokkaan kuuluvilla tiloilla on sama jakso eli jos $i \leftrightarrow j$, niin $d(i) = d(j)$. Luokan sanotaan olevan jaksollinen, jos sen tilat ovat jaksollisia. Vastaavasti luokka on jaksoton, jos sen tilat ovat jaksottomia. Myös siirtymämatriisi P ja sitä vastaava Markov-ketju on jaksoton, jos jokainen tila on jaksoton.

Yhtenäisen Markov-ketjun jaksottomuuden tarkistamiseen on yksinkertainen keino. Tiedetään, että kaksi lukua m ja l ovat suhteellisia alkulukuja, jos niiden suurin yhteinen tekijä on 1. Oletetaan, että pystytään löytämään suhteelliset alkuluvut l ja m siten, että $p_{ii}^{(l)} > 0$ ja $p_{ii}^{(m)} > 1$. Toisin sanoen tilasta i voidaan palata takaisin tilaan i käyttämällä joko l tai m askelta. Tästä voidaan tehdä johtopäätös, että tila i on jaksoton. Jos Markov-ketju on yhtenäinen tarkoittaa, että ketju on jaksoton. Koska luku 1 on suhteellinen alkuluku kaikkien kokonaislukujen kanssa, niin jokainen tila, jolla on itsesiirtymä, on jaksoton.

Määritelmä 13. Olkoon Markov-ketju äärellinen ja yhtenäinen. Tällöin:

a) Jos ketju sisältää itsesiirtymän $p_{ii} > 0$ jollakin i, niin ketju on jaksoton.

b) Oletetaan, että tilasta i voidaan palata tilaan i käyttämällä joko l tai m askelta siten, että $p_{ii}^l > 0$ ja $p_{ii}^m > 0$. Jos syt(l, m)=1, niin tila i on jaksoton.

c) Ketju on jaksoton jos ja vain jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n, siten että kaikki matriisin P^n alkiot ovat positiivisia eli

$$p_{ij}^{(n)} > 0, \text{ kaikilla } i, j \in S.$$

Esimerkki 26. Tarkastellaan esimerkin 24 Markov-ketjua.

a) Onko luokka $C_1 = \{1, 2\}$ jaksoton?

b) Onko luokka $C_2 = \{3, 4\}$ jaksoton?

c) Onko luokka $C_4 = \{6, 7, 8\}$ jaksoton?

Ratkaisu

a) Luokka C_1 on jaksoton, koska se sisältää itsesiirtymän $p_{22} > 0$.

b) Luokka C_2 on jaksollinen ja sen jakso on 2.

c) Luokka C_4 on jaksoton. Esimerkiksi tilasta 6 voidaan palata tilaan 6 kahdella askeleella $(6 \to 7 \to 6)$ ja kolmella askeleella $(6 \to 7 \to 8 \to 6)$. Koska $\text{syt}(2, 3) = 1$ niin tila 6 ja sen luokka ovat jaksottomia.

4.7 Osumatodennäköisyys

Olkoon $A \subset S$ jokin epätyhjä tilojen joukko. Yhtenäinen ketju käy varmuudella kaikissa tiloissa aikanaan, mutta epäyhtenäinen ei välttämättä. Osumatodennäköisyys ilmaisee, millä todennäköisyydellä tilasta i käynnistyvä ketju käy joskus tilajoukossa A. Kyseistä todennäköisyyttä kutsutaan joukon A osumatodennäköisyydeksi alkutilasta i ja sitä merkitään

$$h_{iA} = \mathbb{P}(X_n \in A \text{ jollain } n \geq 0 \mid X_0 = i).$$

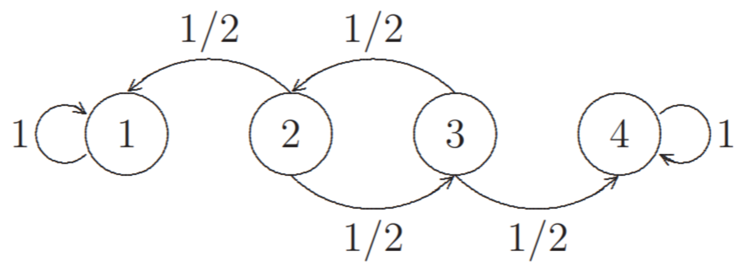
Lause 10. *Osumatodennäköisyyksien vektori* $h_A = (h_i : i \in S)$ *on yhtälöryhmän*

$$h_{iA} = \begin{cases} 1, & \textit{jos } i \in A, \\ \sum_{j \in S} p_{ij} h_{jA}, & \textit{jos } i \notin A, \end{cases} \tag{14}$$

pienin ei-negatiivinen ratkaisu. Mikäli tilajoukko A *on absorboiva niin kyseisen tilajoukon osumatodennäköisyyttä kutsutaan absorptiotodennäköisyydeksi. Absorptiotodennäköisyydelle pätee että* $h_{jA} = 0$*, kun* $j \notin A$ *on jokin toinen absorboiva tila.*

Lauseen 10 todistus löytyy lähteestä [7] luvusta 8.11.

Esimerkki 27. Tarkastellaan allaolevaa Markov-ketjun siirtymäkaaviota. Määritetään kyseisen Markov-ketjun osumatodennäköisyydet tilalle 4.



Kuva 10: Siirtymäkaavio [7]

Siirtymäkaaviosta nähdään helposti, että osumatodennäköisyys tilalle 4, kun alkutila on $X_0 = 4$ on 1, koska tällöin ketju saavuttaa tilan heti eli $h_{44} = 1$. Selvästi nähdään myös, että alkutilan ollessa $X_0 = 1$ osumatodennäköisyys on 0, koska tila 1 on absorboiva, jolloin kyseisestä tilasta ei voida koskaan päätyä tilaan 4 eli $h_{14} = 0$. Osumatodennäköisyydet alkutiloille $X_0 = 2$ ja $X_0 = 3$ saadaan laskettua yhtälöryhmän (14) alemmasta yhtälöstä:

$$\begin{aligned} h_{24} &= \sum_{j \in S} p_{2j} h_{j4} \\ &= p_{21} h_{14} + p_{23} h_{34} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} h_{34} \\ &= \frac{1}{2} h_{34}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{34} &= \sum_{j \in S} p_{3j} h_{j4} \\ &= p_{32} h_{24} + p_{34} h_{44} \\ &= \frac{1}{2} \cdot h_{24} + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} h_{24} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ratkaisemalla yhtälöt saadaan

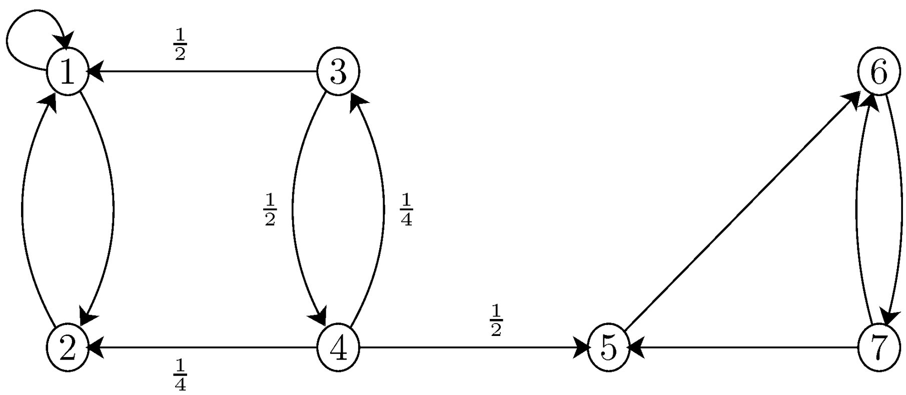
$$h_{34} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h_{34} + \frac{1}{2} \Rightarrow h_{34} = \frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad h_{24} = \frac{1}{2} h_{34} = \frac{1}{3}.$$

Osumatodennäköisyyksien vektori tilalle 4 on siis

$$h_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

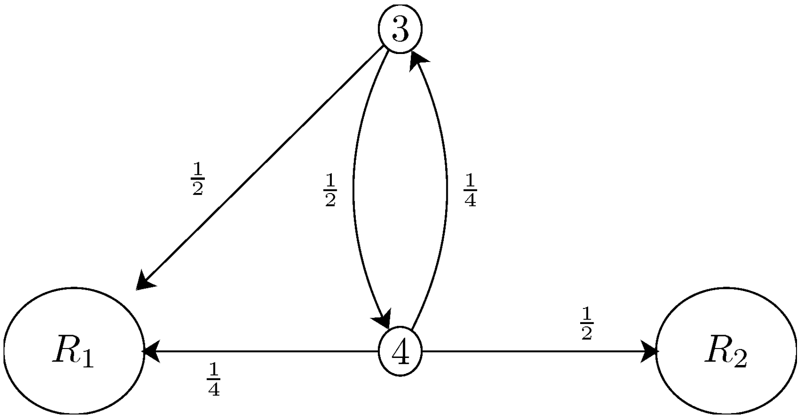
Äärellisellä Markov-ketjulla voi olla useita väistyviä tai palautuvia tilajoukkoja. Kun ajanhetki n kasvaa, niin ketju tulee päätymään johonkin palautuvaan tilajoukkoon ja pysyy siellä ikuisesti. Käytännössä jokainen palautuva tilajoukko voidaan korvata yhdellä absorboituvalla tilalla. Tällöin ketju sisältää ainoastaan väistyviä ja absorboituvia tiloja, jolloin pystytään määrittämään absorptiotodennäköisyydet.

Esimerkki 28. Tarkastellaan alla olevaa Markov-ketjun siirtymäkaaviota. Kyseinen ketju sisältää kaksi palautuvaa luokkaa $R_1 = \{1, 2\}$ ja $R_2 = \{5, 6, 7\}$. Olkoon lähtötila $X_0 = 3$. Selvitetään todennäköisyys, että ketju absorboituu luokkaan R_1.



Kuva 11: Siirtymäkaavio [8]

Tässä tilanteessa palautuvat luokat $R_1 = \{1, 2\}$ ja $R_2 = \{5, 6, 7\}$ voidaan korvata yhdellä absorboivalla tilalla. Tuloksena saadaan uusi siirtymäkaavio.



Kuva 12: Siirtymäkaavio, jossa palautuvat luokat on korvattu absorboivilla tiloilla. [8]

Nyt todennäköisyyksien selvittämiseen voidaan käyttää normaalisti yhtälöryhmän (14) kaavoja. Absorptiotodennäköisyydet voidaan tässä tehtävässä esittää muodossa

$$h_{iR_1} = \mathbb{P}(X_n \in R_1 \text{ jollain } n \geq 0 \mid X_0 = i), \text{ kaikilla } i \in S.$$

Lauseen 10 mukaan $h_{R_1R_1} = 1$, koska ketju saavuttaa tilan R_1 välittömästi, ja $h_{R_2R_1} = 0$, koska tila R_2 on absorboiva tila eikä siitä voi päästä muihin tiloihin. Muiden absorptiotodennäköisyyksien selvittämiseksi käytetään kaavaa

$$h_{iR_1} = \sum_{j \in S} p_{ij} h_{jR_1}, \text{ kaikille } j \in S.$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
h_{3R_1} &= \sum_{j \in S} p_{3j} h_{jR_1} \\
&= p_{3R_1} h_{R_1R_1} + p_{34} h_{4R_1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} h_{4R_1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} h_{4R_1}, \\
\\
h_{4R_1} &= \sum_{j \in S} p_{4j} h_{jR_1} \\
&= p_{4R_1} h_{R_1R_1} + p_{43} h_{3R_1} + p_{4R_2} h_{R_2R_1} \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} h_{3R_1} + \frac{1}{2} \cdot 0 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} h_{3R_1}.
\end{aligned}$$

Ratkaisemalla yhtälöt saadaan

$$h_{3R_1} = \frac{5}{7} \quad \text{ja} \quad h_{4R_1} = \frac{3}{7}.$$

Koska $X_0 = 3$ niin ketju päätyy absorboituu luokkaan R_1 todennäköisyydellä $h_{3R_1} = \frac{5}{7}$.

4.8 Kulkuaika

Tarkastellaan seuraavaksi kuinka kauan Markov-ketjulla kestää päästä tilasta i joukkoon A. Tätä kutsutaan Markov-ketjun *kulkuajaksi* joukkoon A ja se voidaan määritellä

$$T_A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}.$$

Kulkuaika T_A kertoo siis kuluneen ajan eli siirtymien lukumäärän, joka ketjulle menee kunnes se ensimmäisen kerran saavuttaa joukon A. Kulkuaika saa arvoja joukossa $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$. Jos ketju ei koskaan saavuta osajoukkoa A niin $T_A = \infty$. Tilasta i käynnistyvän Markov-ketjun *keskimääräistä kulkuaikaa* joukkoon A merkitään

$$k_{iA} = \mathbb{E}(T_A \mid X_0 = i).$$

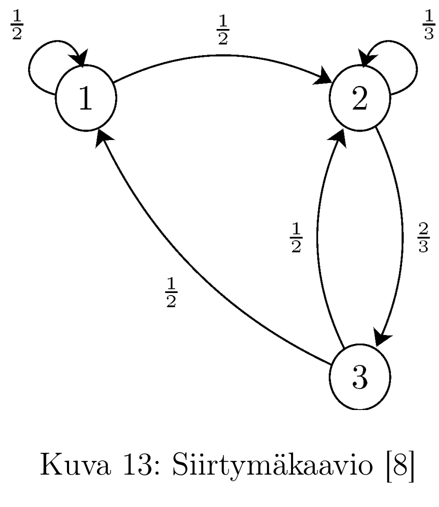
Lause 11. *Odotettujen kulkuaikojen kokoelma $k_A = (k_{iA} : i \in S)$ on yhtälöryhmän*

$$k_{iA} = \begin{cases} 0, & \text{jos } i \in A, \\ 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_{jA}, & \text{jos } i \notin A, \end{cases} \tag{15}$$

pienin ei-negatiivinen ratkaisu.

Lauseen 11 todistus löytyy lähteestä [7] luvusta 8.12.

Esimerkki 29. Tarkastellaan allaolevaa Markov-ketjun siirtymäkaaviota. Olkoon k_{i1} odotettu kulkuaika tilaan 1, kun alkutila on $X_0 = i$. Määritetään odotetut kulkuajat k_{11}, k_{21} ja k_{31}.



Kuva 13: Siirtymäkaavio [8]

Lauseen 11 mukaan $k_{11} = 0$, koska tutkittiin odotettua kulkuaikaa tilaan 1 ja kyseisessä tilanteessa ollaan jo valmiiksi tilassa 1. Muut odotetut kulkuajat saadaan yhtälöryhmän (15) alemmasta yhtälöstä.

$$\begin{aligned}
k_{21} &= 1 + \sum_{j=2}^{3} p_{2j} k_{j1} \\
&= 1 + p_{22} k_{21} + p_{23} k_{31} \\
&= 1 + \frac{1}{3} k_{21} + \frac{2}{3} k_{31},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{31} &= 1 + \sum_{j=2}^{3} p_{3j} k_{j1} \\
&= 1 + p_{32} k_{21} + p_{33} k_{31} \\
&= 1 + \frac{1}{2} k_{21} + 0 \cdot k_{31} \\
&= 1 + \frac{1}{2} k_{21}.
\end{aligned}$$

Ratkaisemalla yhtälöt saadaan $k_{21} = 5$ ja $k_{31} = \frac{7}{2}$. Kaikki odotetut kulkuajat tilaan 1 voidaan esittää vektorimuodossa

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

5 Markov-ketjut pitkällä aikavälillä

Luvussa 4.3 käsiteltiin tilatodennäköisyyksiä ja määriteltiin, että tilassa i ajanhetkellä n olevan ketjun todennäköisyysjakauma on

$$\pi_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i).$$

Tilatodennäköisyydet ajanhetkellä n pystyttiin myös esittämään vektorimuodossa

$$\pi^{(n)} = \begin{bmatrix} \pi_1^{(n)} & \pi_2^{(n)} & \cdots & \pi_N^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Alkujakaumasta $\pi^{(0)}$ käynnistyvän Markov-ketjun todennäköisyysjakaumat $\pi^{(n)}$ ajanhetkellä $n = 1, 2, \ldots$ saadaan laskettua siirtymämatriisin P avulla kaavasta

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n.$$

Nyt halutaan tutkia, mitä ketjun todennäköisyysjakaumalle tapahtuu kun Markov-ketjua tarkastellaan pitkällä aikavälillä. Tarkastellaan siis todennäköisyysjakaumia

$$\pi^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) & \mathbb{P}(X_n = 1) & \cdots & \mathbb{P}(X_n = N) \end{bmatrix}, \text{ kun } n \to \infty.$$

Luvussa selvitetään, onko ketjun todennäköisyysjakaumalla $\pi^{(n)}$ olemassa jokin *rajajakauma*, kun $n \to \infty$. Lisäksi määritellään, että jos ketjun rajajakauma on olemassa niin, miten sen voi laskea ja riippuuko se ketjun alkutilasta. Luvun lähteinä on käytetty [3], [5], [7] ja [8].

5.1 Raja- ja tasapainojakauma

Aloitetaan käsittelemällä Markov-ketjun tasapainojakaumaa. Tasapainolla tarkoitetaan, että satunnaismuuttujan X_n todennäköisyysjakaumassa ei tapahdu enää muutoksia tietyn ajanhetken n jälkeen. Tasapaino ei kuitenkaan tarkoita, että satunnaismuuttujien X_n ja X_{n+1} arvot olisivat välttämättä samat. Tasapainossa satunnaismuuttujien X_n ja X_{n+1} todennäköisyysjakaumat ovat kuitenkin samat.

Määritelmä 14. Todennäköisyysjakauma π on siirtymämatriisin P ja sitä vastaavan Markov-ketjun tasapainojakauma, mikäsi se toteuttaa tasapainoyhtälöt

$$\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j, \ j \in S, \tag{16}$$

eli matriisimuodossa

$$\pi P = \pi.$$

Kun Markov-ketju käynnistyy alkujakaumasta π, voidaan lauseen 6 ja matriisitulon liitännäisyyden avulla osoittaa, että

$$\pi^{(n)} = \pi P^n = (\pi P)P^{n-1} = \pi P^{n-1} = \cdots = \pi P = \pi.$$

Toisin sanoen, kun Markov-ketjun satunnainen alkutila noudattaa tasapainojakaumaa, niin tilan X_n jakauma pysyy aina vakiona eli $\pi^{(n)} = \pi$ kaikilla n.

Määritelmä 15. Todennäköisyysjakauma π on siirtymämatriisin P ja sitä vastaavan Markov-ketjun rajajakauma jos

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \text{ kaikilla } i, j \in S, \tag{17}$$

ja jolle pätee, että

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1. \tag{18}$$

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan Markov-ketjun rajajakauman olemassaoloa. Lisäksi tutkitaan riippuuko rajajakauma ketjun alkutilasta sekä miten rajajakauma saadaan ratkaistua. Aloitetan aihe esimerkillä.

Esimerkki 30. Markov-ketjun tilajoukko on $S = \{0, 1\}$ ja siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},$$

missä a ja b ovat lukuja väliltä [0,1]. Luvuille a ja b pätee myös $0 < a + b < 2$. Ketju on tilassa 0 ajanhetkellä $n = 0$ todennäköisyydellä α eli

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) & \mathbb{P}(X_0 = 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix},$$

missä $\alpha \in [0, 1]$.

Osoita, että

a) $P^n = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}.$

b) $\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix}.$

c) $\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix}.$

Ratkaisu

a) Kun $n = 1$ saadaan

$$\begin{aligned} P^1 &= \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{1-a-b}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oletetaan, että tehtävän väite pätee ajanhetkellä n, jolloin P^{n+1} voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} P^{n+1} = P^n P &= \frac{1}{a+b}\left(\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^{n+1}}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

mikä täydentää todistuksen.

b) Koska $0 < a+b < 2$ niin $-1 < 1-a-b < 1$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty}(1-a-b)^n = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix}.$$

c) Tiedetään, että $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$. Tällöin

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} &= \lim_{n\to\infty}\left(\pi^{(0)} P^n\right) \\ &= \pi^{(0)} \lim_{n\to\infty} P^n \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkin 30 vektoria $\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix}$ kutsutaan määritelmän 15 mukaisesti Markov-ketjun rajajakaumaksi. Nähdään, että rajajakauma ei riipu lähtötilan todennäköisyyksistä α ja $1-\alpha$. Toisin sanoen, lähtötilalla X_0 ei ole merkitystä, kun n kasvaa suureksi. Kun $i = 1, 2$, voidaan kirjoittaa

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = i) = \frac{b}{a+b},$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = i) = \frac{a}{a+b}.$$

Nyt tiedetään, että jos ketjun rajajakauma on olemassa, se ei riipu ketjun lähtötilasta i. Tällöin määritelmän 15 yhtälö (17) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) \text{ kaikilla } j \in S.$$

Seuraava tulos kertoo, että jos Markov-ketjulla on rajajakauma, voidaan se selvittää ratkaisemalla lineaarinen yhtälöryhmä (16).

Lause 12. *Jos π on äärellisen tilajoukon Markov-ketjun rajajakauma, on se myös tasapainojakauma.*

Todistus. Matriisitulon liitännäisyyttä käyttämällä nähdään, että

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(0)} P^{n+1} = (\pi^{(0)} P^n) P = \pi^{(n)} P,$$

joka voidaan kirjoittaa alkioittain muodossa

$$\pi_j^{(n+1)} = \sum_{i\in S} \pi_i^{(n)} p_{ij}.$$

Kun oletetaan, että kaikilla $i \in S$ pätee $\pi_i^{(n)} \to \pi_i$, kun $n \to \infty$, nähdään otamalla raja-arvot ylläolevan yhtälön molemmin puolin, että

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n+1)} = \sum_{i\in S} \lim_{n\to\infty} \pi_i^{(n)} p_{ij} = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}.$$

Näin ollen tasapainoyhtälö (16) pitää paikkansa. Lisäksi, koska $\pi^{(n)}$ on todennäköisyysjakauma, pätee

$$\sum_{i\in S} \pi_i^{(n)} = 1, \text{ kaikilla } n.$$

Ottamalla raja-arvot ylläolevan yhtälön molemmin puolin, kun $n \to \infty$, nähdään että $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$ eli π on todennäköisyysjakauma. □

Esimerkki 31. Tarkastellaan siirtymämatriisia

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan kyseisen siirtymämatriisin potensseja:

$$\begin{aligned}
P^2 &= \begin{bmatrix} 0.69 & 0.17 & 0.14 \\ 0.34 & 0.44 & 0.22 \\ 0.42 & 0.33 & 0.42 \end{bmatrix} \\
P^{10} &= \begin{bmatrix} 0.5471287 & 0.2715017 & 0.1813696 \\ 0.5430034 & 0.2745217 & 0.1824748 \\ 0.5441087 & 0.2737123 & 0.1821790 \end{bmatrix} \\
P^{20} &= \begin{bmatrix} 0.5454610 & 0.2727226 & 0.1818165 \\ 0.5454452 & 0.2727341 & 0.1818207 \\ 0.5454494 & 0.2727310 & 0.1818196 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Huomataan, että 20 siirtymän jälkeen matriisin rivit ovat likimain samat. Tällöin tilasta i alkava ketju on 20 siirtymän jälkeen esimerkiksi tilassa 2 todennäköisyydellä $p_{i2}^{(20)} \approx 0.2727$. Koska matriisin P^{20} rivit ovat likimain samat, alkutilalla $i = 1, 2, 3$ ei ole merkitystä pitkän ajan kuluttua, joten ketju näyttäisi suppenevan kohti rajajakaumaa

$$\begin{bmatrix} 0.5454545 & 0.2727273 & 0.1818182 \end{bmatrix}.$$

Tiedetään, että todennäköisyysjakauma on $\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix}$ ja tasapainoyhtälöt ovat $\pi P = \pi$ sekä $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \pi_i = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Tällöin

$$\pi P = \pi \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix}$$

Tasapainoyhtälöt siirtymämatriisille P voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
0.8\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.3\pi_3 &= \pi_1 \\
0.1\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.2\pi_3 &= \pi_2 \\
0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.4\pi_3 &= \pi_3 \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1.
\end{aligned}$$

Näiden yhtälöiden yksikäsitteinen ratkaisu on

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{6}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5454545 & 0.2727273 & 0.1818182 \end{bmatrix},$$

mikä on siis sama kuin numeerisesti havaittu rajajakauma, kuten lauseen 12 mukaan pitääkin olla.

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä, jossa Markov-ketjulla ei ole rajajakaumaa, mutta sillä on tasapainojakauma.

Esimerkki 32. Tarkastellaan alkutilasta $X_0 = 1$ käynnistyvää tilajoukon $S = \{1, 2\}$ Markov-ketjua, jonka siirtymämatriisi on

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla siirtymämatriisin P potensseja nähdään, että

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

josta havaitaan, että

$$P^n = \begin{cases} P, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ P^2, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Alkutilasta $X_0 = 1$ eli alkujakaumasta $\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ käynnistyvän ketjun tilajakaumalle siis pätee

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n = \begin{cases} [0 \quad 1], & n = 1, 3, 5, \dots, \\ [1 \quad 0], & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Kyseisellä Markov-ketjulla ei siis ole rajajakaumaa. Suoralla laskulla kuitenkin nähdään, että $\pi = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ on ketjun tasapainojakauma.

Tarkastellaan vielä lopuksi esimerkkiä, jossa Markov-ketjulla on useampi rajajakauma.

Esimerkki 33. Tarkastellaan alkutilasta $X_0 = 1$ käynnistyvää Markov-ketjua. Sen tilajoukko on $S = \{1, 2, 3\}$ ja siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kyseiselle matriisille pätee $P^n = P$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$ Alkutilalla $X_0 = 1$ ketjun alkujakauma on $\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, jolloin

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sama tulos saadaan myös alkutilalla $X_0 = 2$. Kun ketjun alkutila on $X_0 = 3$ niin alkujakauma on $\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tällöin tulokseksi saadaan

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kyseisellä ketjulla on siis useita rajajakaumia, riippuen ketjun alkujakaumasta. Lineaarisuuden perusteella voidaan tarkistaa, että jokainen muotoa

$$\pi = \alpha \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

oleva jakauma on ketjun tasapainojakauma.

A Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä ja merkintöjä

Joukko on alkioiden muodostama kokonaisuus, jota merkitään isolla kirjaimella. Joukkoa määrittäessä voidaan kaikki sen alkiot luetella aaltosulkeiden sisällä. Esimerkiksi jos joukko A muodostuu alkioiosta a, b ja c voidaan merkitä $A = \{a, b, c\}$. Merkinnällä $a \in A$ tarkoitetaan, että alkio a kuuluu joukkoon A. Jos taas alkio ei kuulu kyseiseen joukkoon, merkitään $a \notin A$. Tyhjällä joukolla tarkoitetaan joukkoa, joka ei sisällä yhtään alkiota, ja sitä merkitään $\emptyset$. Otosavaruudella Ω taas tarkoitetaan kaikkia tapahtuman tai kokeen mahdollisia alkeistapauksia. Tässä tutkielmassa otosavaruuden sijaan puhutaan tilajoukosta ja sitä merkitään kirjaimella S. Tässä tutkielmassa tilajoukko S koostuu luonnollisista luvuista eli $S = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

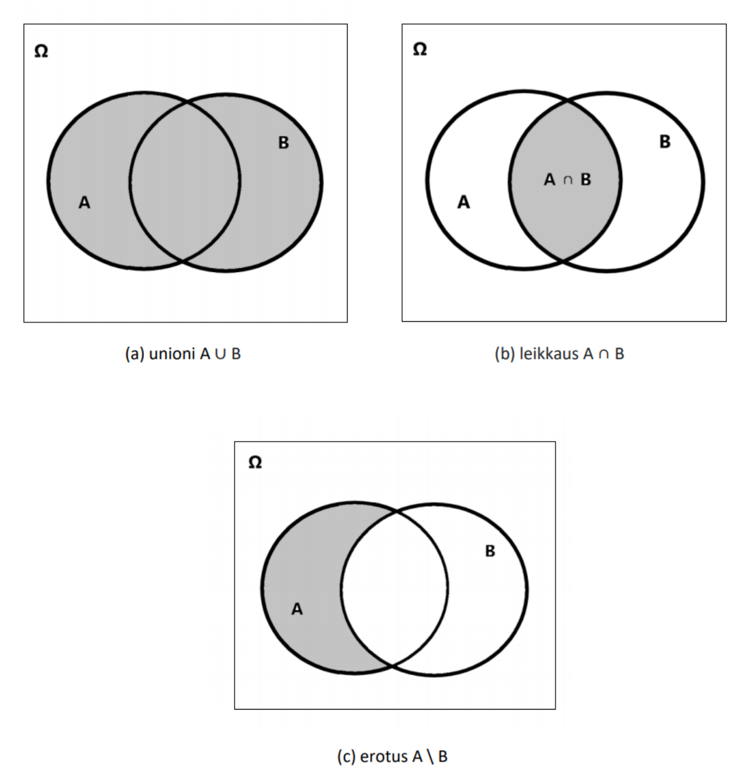
Joukko A on joukon B osajoukko, jos kaikki sen alkiot ovat myös joukon B alkioita. Merkintä $A \subset B$ tarkoittaa, että joukko A on joukon B osajoukko. Kahden joukon unioni $A \cup B$, sisältää alkiot, jotka kuuluvat joko joukkoon A tai B tai molempiin. Myös kolmen tai useamman joukon unioni voidaan määritellä samalla tavalla. Jos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ovat n joukkoa, niiden unioni $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n$ on joukko, joka sisältää kaikki alkiot, jotka kuuluvat ainakin yhteen joukoista. Kyseinen useamman joukon unioni voidaan kirjoittaa lyhyemmin muodossa

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Kahden joukon leikkausta merkitään $A \cap B$. Kyseinen leikkaus sisältää ne alkiot, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että B. Samalla tavalla kuin unioni tapauksessa, myös useamman joukon leikkaus voidaan kirjoittaa lyhyemmin muodossa

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Joukkojen erotusta merkitään joko $A - B$ tai $A \setminus B$. Erotus sisältää ne alkiot, jotka kuuluvat joukkoon A, mutta eivät joukkoon B.



Kuva 14: Venn-diagrammi unionista, leikkauksesta ja erotuksesta.

Siirryttäessa joukko-opista todennäköisyyslaskentaan, käytetään termin joukko sijaan nimitystä *tapaus* tai *tapahtuma*. Tapaukset A ja B ovat *toisensa poissulkevat* jos niillä ei ole yhtään yhteistä alkiota. Toisin sanoen niiden leikkaus on tyhjä joukko, $A \cap B = \emptyset$. Yleisesti voidaan määritellä, että tapaukset A_i, kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$, ovat toisensa poissulkevat jos

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ kaikille } i \neq j.$$

Tapausten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sanotaan muodostavan otosavaruuden *partition*, jos

1. kaikki A_i:t ovat toisensa poissulkevat,
2. joukkojen unioni muodostaa otosavaruuden eli $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ ja
3. $P(A_i) > 0$, kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

Lause 13. *De Morganin kaavat komplementille:*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^n.$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^n.$$

Lause 14. *Distrubiivilait unionille ja leikkaukselle:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i).$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i).$$

Sigma-algebra eli σ-algebra tarkoittaa satunnaiskokeen tapahtumien joukkoa ja sitä merkitään $\mathcal{F}$.

Määritelmä 16. Olkoon Ω mielivaltainen epätyhjä joukko. Tällöin σ-algebra $\mathcal{F}$ on perusjoukon Ω osajoukkujen kokoelma, joka toteuttaa ehdot:

1. perusjoukko kuuluu σ-algebraansa eli $\Omega \in \mathcal{F}$
2. jos $A \in \mathcal{F}$, niin A:n komplementtijoukko $A^c \in \mathcal{F}$
3. jos $A_n \in \mathcal{F}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$
4. $\emptyset \in \mathcal{F}$

Määritelmä 17. Todennäköisyysjakauma on kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$, joka määrittää kaikille tapahtumille $A \in \mathcal{F}$ todennäköisyyden $P(A) \in [0, 1]$.

Kolmogorovin aksioomat:

1. $P(A) > 0$, jokaiselle tapaukselle A.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Jos tapaukset $A_1, A_2, \ldots$ ovat toisensa poissulkevat, niin

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Kolmogorovin aksioomien avulla voidaan todistaa muun muassa seuraavia laskusääntöjä.

Lause 15. *Todennäköisyydellä on seuraavat ominaisuudet:*

a) $P(\emptyset) = 0$,

b) $P(A) = 1 - P(A^c)$,

c) $0 \leq P(A) \leq 1$

d) $P(A \cap B) = 0$, *jos* $A \cap B = \emptyset$

e) *Jos* $A \subset B$ *niin* $P(A) \leq P(B)$,

f) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Lause 16. *Oletetaan, että tapaukset* A_i *ovat toisensa poissulkevat. Tällöin*

a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

b) *Mikäli* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Mikäli tapaukset eivät ole toisensa poissulkevat unionin todenäköisyyttä voidaan laskea seuraavan lauseen avulla.

Lause 17. *a)* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

b) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Viitteet

[1] Yang, X. (2019). *Markov Chain and Its Applications.* Saatavissa: https://ssrn.com/abstract=3562746

[2] Sericola, B. (2013). *Markov Chains: Theory, Algorithms and Applications.* ISTE Ltd.

[3] Durrett, R. (2009). *Elementary Probability For Applications.* Cambridge University Press, s. 1–150.

[4] Emet, S. (2014). *Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastotieteeseen.* Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, luentomoniste, s. 1–16.

[5] Leskelä, L. (2018). *Stokastiset prosessit.* Aalto-yliopisto, luentomoniste, s. 15–32.

[6] Tilvis, V. Kairema, A. (2017). *Matriisilaskenta.* Helsingin matematiikkalukio, luentomoniste, s. 2–8.

[7] (2014). *Stochastic Processes.* University of Auckland, Department of Statistics, luentomoniste, s. 149–186.

[8] Pishro-Nik, H. (2014). *Introduction to probability, statistics, and random processes.* Kappa Research LLC. Saatavissa: https://www.probabilitycourse.com