



**TURUN  
YLIOPISTO**

SURJEKTIIVISTEN SOLUAUTOMAATTIFUNKTIOIDEN  
SEKOITTUVUUSOMINAISUUKSIA

Boris Lauton

Pro gradu -tutkielma  
Huhtikuu 2026

Tarkastajat:  
Prof. Jarkko Kari  
Dos. Ilkka Törmä

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujaarjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

BORIS LAUTON: SURJEKTIIVISTEN SOLUAUTOMAATTIFUNKTIOIDEN SEKOITTUVUUSOMINAISUUKSIA

Pro gradu -tutkielma, 51 s.

Matematiikka  
Huhtikuu 2026

---

Tässä tutkielmassa tarkastellaan erilaisia soluautomaattifunktioiden sekoittuvuusominaisuuksia ja vertaillaan niitä keskenään. Aluksi esitellään tutkielman kannalta keskeiset topologiset määritelmät ja lauseet. Tämän jälkeen esitellään konfiguraatioavaruus ja asetetaan siihen metriikka, jonka suhteen soluautomaattifunktiot ovat jatkuvia funktioita. Seuraavaksi esitellään soluautomaattifunktiot sekä niiden perusominaisuuksia. Lisäksi annetaan esimerkkejä soluautomaattifunktioista ja soluautomaattifunktioluokista.

Tutkielmassa käsitellään useita topologisia sekoittuvuusominaisuuksia. Työssä osoitetaan, että transitiivisuus, täysi transitiivisuus, heikko sekoittuvuus ja syndeettinen transitiivisuus ovat soluautomaattifunktiolla keskenään ekvivalentteja ominaisuuksia. Lisäksi esitellään sekoittuvuus ja tarkastellaan sen toteutumista eri soluautomaattifunktioluokissa. Työssä esitellään vahva transitiivisuus ja osoitetaan, että se on transitiivisuutta aidosti vahvempi ominaisuus soluautomaattifunktiolla. Lisäksi esitellään myös ketjutransitiivisuus ja näytetään, että se on transitiivisuutta aidosti heikompi ominaisuus.

Tutkielman lopussa tutkitaan myös soluautomaattifunktioiden mittateoreettisia ja ergodisia ominaisuuksia. Erityisesti esitellään ergodisuus, ergodinen sekoittuvuus ja ergodinen heikko sekoittuvuus ja vertaillaan niitä keskenään sekä topologiaan sekoittuvuusominaisuuksiin.

Asiasanat: soluautomaatit, transitiivisuus (matematiikka), mittateoria, topologia.



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Topologia</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Konfiguraatioavaruus</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Soluautomaattifunktio</b>	<b>9</b>
4.1	Perusominaisuudet . . . . .	9
4.2	Surjektiiviset soluautomaattifunktiot . . . . .	13
4.3	Vasemman- ja oikeanpuoleiset soluautomaattifunktiot ja permutatiiviset soluautomaattifunktiot . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Topologiset sekoittuvuusominaisuudet</b>	<b>22</b>
5.1	Transitiivisuus . . . . .	22
5.2	Vahva transitiivisuus . . . . .	25
5.3	Ketjutransitiivisuus . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Ergodiateoria</b>	<b>38</b>
6.1	Uniformi todennäköisyysmitta . . . . .	39
6.2	Ergodiset sekoittuvuusominaisuudet . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Syndeettinen transitiivisuus</b>	<b>47</b>
<b>8</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>49</b>



# 1 Johdanto

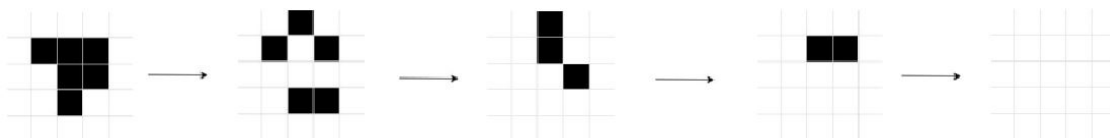
Diskreettiaikainen dynaaminen systeemi on pari  $(X, f)$ , jossa  $X$  on kompakti metrinen avaruus ja  $f: X \rightarrow X$  on jatkuva funktio. Dynaamisissa systeemeissä tutkitaan alkioiden käyttäytymistä, kun funktiota  $f$  iteroidaan avaruudessa  $X$ .

Soluautomaatti on esimerkki diskreettiaikaisesta dynaamisesta systeemistä. Siinä avaruutena on konfiguraatioavaruus  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , joka koostuu funktioista, jotka kuvaavat soluavaruuden  $\mathbb{Z}^d$  pisteet eli solut äärelliseen tilajoukkoon  $S$ . Toisin sanottuna konfiguraatioavaruuden alkiot eli konfiguraatiot kertovat solujen tilat tiettyinä ajanhetkinä. Soluautomaattifunktio  $G$  on jatkuva kuvaus konfiguraatioavaruudesta itseensä. Se muuttaa jokaisen konfiguraation solun tilan samanaikaisesti riippuen solun naapureiden tiloista ja paikallisesta päivitysfunktiosta  $f$ .

Hyvin tunnettu esimerkki soluautomaatista on John Conwayn Game of Life. Tässä konfiguraatiot on määritelty kaksiulotteisessa soluavaruudessa  $\mathbb{Z}^2$  ja jokaisella solulla on tila, joka voi olla elävä tai kuollut. Solun uusi tila määräytyy sen kahdeksan lähimmän naapurin tilojen perusteella. Elävä solu pysyy elävänä, jos sillä on kaksi tai kolme elävää solua naapureinaan. Muussa tapauksessa se muuttuu kuolleeksi. Kuollut solu herää henkiin, jos sillä on tarkalleen kolme elävää naapuria. Muussa tapauksessa se pysyy kuolleenä. Lokaali päivitysfunktio on siis hyvin yksinkertainen, mutta Game of Life voi sen sijaan tuottaa hyvinkin monimutkaisia käyttäytymistä, minkä takia sitä käytetään usein esimerkkinä soluautomaattien tutkimuksessa. (Kuva 1).

Sekoittuvuusominaisuudet kuvaavat dynaamisen systeemin käyttäytymistä pitkällä aikavälillä. Toisin sanoen tarkastellaan kuinka avoimet joukot leikkaavat toisiaan, kun funktiota  $f$  iteroidaan avaruudessa  $X$ . Erilaiset topologiset ominaisuudet, kuten transitiivisuus ja sekoittuvuus, sekä mittateoreettiset ominaisuudet, kuten ergodisuus ja ergodinen sekoittuvuus, mittaavat sekoittumista eri tavoilla. Ne antavat tietoa systeemin kaoottisuudesta, epäjärjestyksestä ja käyttäytymisestä pitkällä aikavälillä. Tämän tutkielman tarkoitus on tarkastella näitä, sekä lisäksi muita sekoittuvuusominaisuuksia soluautomaattifunktioiden tapauksessa ja vertailla niitä keskenään. Tässä työssä  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  ja  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Työssä on hyödynnetty ChatGPT-tekoälyohjelmaa apuna kielenhuollossa tekstin luettavuuden parantamiseksi.



Kuva 1: Viisi peräkkäistä ajanhetkeä kuviolle. Mustat ruudut ovat eläviä ja valkoiset kuolleita soluja.

## 2 Topologia

Ennen siirtymistä tutkielman varsinaiseen aiheeseen määritellään joitakin keskeisiä topologisia käsitteitä ja ominaisuuksia. Tässä osiossa määritellään ensin metriset ja topologiset avaruudet. Tämän jälkeen tarkastellaan topologisia ominaisuuksia, joita sovelletaan tutkielmassa esimerkiksi konfiguraatioavaruudelle. Lisäksi osiossa määritellään jatkuvat funktiot ja esitellään niiden ominaisuuksia.

Osion lauseita ei todisteta. Todistukset löytyvät lähteistä [8] ja [9], joihin osio perustuu. Myös lähde [18] on käytetty määritelmien ja lauseiden esitystavan tukena.

**Määritelmä 2.1.** Olkoon  $X$  joukko. Kuvaus  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  on **metriikka** joukossa  $X$ , jos se täyttää seuraavat ehdot pisteille  $x, y, z \in X$ :

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,
2.  $d(x, y) = 0$ , jos ja vain jos  $x = y$ ,
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Tällöin paria  $(X, d)$  kutsutaan **metriseksi avaruudeksi**.

**Määritelmä 2.2.** Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus,  $\varepsilon > 0$  ja  $x \in X$ . Tällöin

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

on avoin  $\varepsilon$ -pallo, jonka keskipiste on  $x$ .

**Määritelmä 2.3.** Joukko  $U \subseteq X$  on **avoin**, jos ja vain jos se toteuttaa kaavan

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

Joukko  $F \subseteq X$  on **suljettu**, jos sen komplementti  $X \setminus F$  on avoin. Joukko  $V \subseteq X$  on **avosuljettu**, jos se on sekä avoin että suljettu.

**Lause 2.4.** Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. Tällöin

- (a)  $\emptyset$  ja  $X$  ovat avoimia joukkoja,
- (b) jos  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  on perhe avaruuden  $X$  avoimia joukkoja, niin unioni  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$  on avoin,
- (c) jos  $(A_i)_{i=1}^n$  on äärellinen perhe avaruuden  $X$  avoimia joukkoja, niin leikkaus  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  on avoin.

**Määritelmä 2.5.** Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{T}$  kokoelma joukon  $X$  osajoukkoja. Tällöin kokoelma  $\mathcal{T}$  on joukon  $X$  **topologia**, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1.  $\emptyset$  ja  $X$  kuuluvat perheeseen  $\mathcal{T}$ ,

2. jos  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  on perhe kokoelmaan  $\mathcal{T}$  kuuluvia joukkoja, niin unioni  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$  kuuluu kokoelmaan  $\mathcal{T}$ ,
3. jos  $(A_i)_{i=1}^n$  on äärellinen perhe kokoelmaan  $\mathcal{T}$  kuuluvia joukkoja, niin leikkaus  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  kuuluu kokoelmaan  $\mathcal{T}$ .

Tällöin paria  $(X, \mathcal{T})$  kutsutaan **topologiseksi avaruudeksi**. Joukkoja  $U \in \mathcal{T}$  kutsutaan avoimiksi joukoiksi ja niiden komplementteja  $X \setminus U$  suljettuiksi joukoiksi.

**Esimerkki 2.6.** Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{T}$  joukon  $X$  kaikkien osajoukkojen perhe. Tällöin  $\mathcal{T}$  on joukon  $X$  **diskreetti topologia**. Kokoelma  $\{X, \emptyset\}$  on joukon  $X$  **triviaali topologia**.

Diskreetissä topologiassa joukko  $\{x\}$  on avoin kaikille pisteille  $x \in X$ . Lauseen 2.4 mukaan metrisen avaruuden  $(X, d)$  avoimien joukkojen kokoelma on eräs joukon  $X$  topologia. Tätä topologiaa kutsutaan metriikan  $d$  indusoimaksi joukon  $X$  metriseksi topologiaksi.

**Esimerkki 2.7.** Olkoon  $X$  joukko. **Diskreetti metriikka**  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  on

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y, \\ 1, & \text{jos } x \neq y. \end{cases}$$

Diskreetti metriikka indusoi diskreetin topologian, kun taas joukolle  $|X| \geq 2$  triviaali topologia ei ole minkään metriikan indusoima.

**Lause 2.8.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus. Tällöin

- (a)  $\emptyset$  ja  $X$  ovat suljettuja joukkoja,
- (b) jos  $(F_i)_{i \in \mathcal{I}}$  on perhe avaruuden  $X$  suljettuja joukkoja, niin leikkaus  $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i$  on suljettu,
- (c) jos  $(F_i)_{i=1}^n$  on äärellinen perhe avaruuden  $X$  suljettuja joukkoja, niin unioni  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  on suljettu.

**Määritelmä 2.9.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus. Piste  $x \in X$  on **erakkopiste**, jos joukko  $\{x\}$  on avoin. Topologinen avaruus on **perfekti**, jos se ei sisällä erakkopisteitä.

**Määritelmä 2.10.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus, joukko  $A \subseteq X$  ja joukko  $F \subseteq X$  suljettu. **Sulkeuma**  $\bar{A}$  on kaikkien joukon  $A$  sisältävien suljettujen joukkojen leikkaus. Tällöin  $A = \bar{A}$ , jos ja vain jos  $A$  on suljettu, ja jos joukko  $A \subseteq F$ , niin sulkeuma  $\bar{A} \subseteq F$ . Joukko  $A$  on **tiheä** avaruudessa  $X$ , jos sulkeuma  $\bar{A} = X$ .

**Määritelmä 2.11.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus. Avoimien joukkojen perhe  $\mathcal{B}$  on topologian  $\mathcal{T}$  **kanta**, jos ja vain jos jokainen avoin joukko  $U$  voidaan esittää unionina  $U = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i$ , jossa joukko  $B_i \in \mathcal{B}$  kaikilla  $i \in \mathcal{I}$ .

**Lause 2.12.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus. Avoimien joukkojen perhe  $\mathcal{B}$  on topologian  $\mathcal{T}$  **kanta**, jos ja vain jos jokaiselle avoimelle joukolle  $U$  ja alkion  $x \in U$  on olemassa sellainen joukko  $B \in \mathcal{B}$ , että  $x \in B \subseteq U$ .

Jos  $\mathcal{B}$  on kanta, se määrittää joukolle  $X$  topologian yksikäsitteisesti. Tällöin kannan määrittelemään topologiaan  $\mathcal{T}$  kuuluu tarkalleen kannan  $\mathcal{B}$  alkioiden unionit. Jos  $(X, d)$  on metrinen avaruus, Lauseen 2.12 mukaan avoimet  $\varepsilon$ -pallot muodostavat erään avaruuden  $X$  kannan.

**Määritelmä 2.13.** Olkoon  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x_1, x_2 \dots \subseteq X$  jono. Jono  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **suppenee** kohti pistettä  $x$ , jos jokaista pisteen  $x$  sisältävää avointa joukkoa  $U$  kohti on olemassa sellainen  $n_0 \in \mathbb{N}$ , että  $x_i \in U$  kaikilla  $i \geq n_0$ .

**Määritelmä 2.14.** Topologinen avaruus  $(X, \mathcal{T})$  on **Hausdorff-avaruus**, jos kaikille pisteille  $x, y \in X$ , kun  $x \neq y$ , on olemassa sellaiset avoimet joukot  $U_x$  ja  $U_y$ , että  $x \in U_x$ ,  $y \in U_y$  ja  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**Lause 2.15.** Metrinen avaruus  $(X, d)$  on Hausdorff-avaruus.

**Lause 2.16.** Hausdorff-avaruudessa jokainen jono suppenee korkeintaan yhtä pistettä kohti.

**Määritelmä 2.17.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus, joukko  $A \subseteq X$  ja  $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$  perhe avaruuden  $X$  avoimia joukkoja. Perhe  $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$  on joukon  $A$  **avoim peite**, jos  $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ . Tällöin osaperhe  $(U_i)_{i \in \mathcal{I}'}$ , jossa  $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ , on joukon  $A$  **osapeite**, jos  $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}'} U_i$ .

**Määritelmä 2.18.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus ja joukko  $A \subseteq X$ . Joukko  $A$  on **kompakti**, jos jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite. Topologia  $\mathcal{T}$  on kompakti, jos koko joukko  $X$  on kompakti.

**Lause 2.19.** Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. Joukko  $A \subseteq X$  on kompakti, jos ja vain jos jokaisella jonolla  $x_1, x_2, \dots$  on olemassa osajono  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$ , joka suppenee kohti jotain joukon  $A$  pistettä.

**Lause 2.20.** Olkoon  $(X, d)$  kompakti metrinen avaruus. Joukko  $A \subseteq X$  on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu.

**Määritelmä 2.21.** Joukko  $A \subseteq X$  on **residuaali**, jos se on numeroituvan monen tiheän avoimen joukon leikkaus.

**Määritelmä 2.22.** Topologinen avaruus  $(X, \mathcal{T})$  on **Baire-avaruus**, jos jokainen residuaali joukko on tiheä.

**Lause 2.23.** Kompakti topologinen avaruus  $(X, \mathcal{T})$  on Baire-avaruus.

**Määritelmä 2.24.** Olkoot  $(X, \mathcal{T}_x)$  ja  $(Y, \mathcal{T}_y)$  topologisia avaruuksia. Funktio  $f: X \rightarrow Y$  on **jatkuva** pisteessä  $x \in X$ , jos jokaista pisteen  $f(x)$  sisältävää avointa joukkoa  $V \subseteq Y$  kohti on olemassa sellainen avoin joukko  $U \subseteq X$ , että  $x \in U$  ja  $f(U) \subseteq V$ . Funktio  $f: X \rightarrow Y$  on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä.

Metrisille avaruuksille  $(X, d_X)$  ja  $(Y, d_Y)$  jatkuvuuden voi esittää kaavalla

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

Jatkuvuuden määritelmässä  $\delta$  on riippuvainen reaaliluvun  $\varepsilon$  lisäksi pisteestä  $x$ . Esi-tellään seuraavaksi jatkuvuutta vahvempi ominaisuus.

**Määritelmä 2.25.** Olkoot  $(X, d_X)$  ja  $(Y, d_Y)$  metrisiä avaruuksia. Funktio  $f: X \rightarrow Y$  on **tasaisesti jatkuva**, jos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

Tasaisesti jatkuva funktio  $f: X \rightarrow Y$  on selvästi jatkuva. Lause 2.26 kertoo, että käänteinen on voimassa, jos lähtöjoukko  $X$  kompakti metrinen avaruus.

**Lause 2.26.** Olkoon  $(X, d_X)$  kompakti metrinen avaruus ja olkoon  $(Y, d_Y)$  metrinen avaruus. Tällöin jatkuva funktio  $f: X \rightarrow Y$  on tasaisesti jatkuva.

**Lause 2.27.** Olkoot  $(X, \mathcal{T}_x)$  ja  $(Y, \mathcal{T}_y)$  topologisia avaruuksia ja  $f: X \rightarrow Y$  funktio. Seuraavat kolme ehtoa ovat yhtäpitäviä:

1. Funktio  $f: X \rightarrow Y$  on jatkuva,
2. alkukuva  $f^{-1}(V)$  on avoin avaruudessa  $X$  kaikilla avoimilla joukoilla  $V \subseteq Y$ ,
3. alkukuva  $f^{-1}(F)$  on suljettu avaruudessa  $X$  kaikilla suljetuilla joukoilla  $F \subseteq Y$ .

**Lause 2.28.** Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja olkoon  $(Y, \mathcal{T})$  topologinen avaruus. Funktio  $f: X \rightarrow Y$  on jatkuva, jos ja vain jos jokaiselle suppenevalle jonolle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jono  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  suppenee ja sen raja-arvo on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

**Lause 2.29.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  kompakti ja olkoon  $(Y, \mathcal{T})$  Hausdorff-avaruus. Jos kuvaus  $f: X \rightarrow Y$  on jatkuva bijektio, niin käänteiskuvaus  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  jatkuva.

Kappaleen lopuksi esitetään tulotopologian määritelmä sekä Tihonovin lause. Näitä käytetään Osiossa 3 konfiguraatioavaruuden kompaktisuuden todistuksessa. Määritelmä 2.30 ja Lauseen 2.31 todistus löytyvät lähteestä [14].

**Määritelmä 2.30.** Olkoon  $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$  topologisten avaruuksien perhe. Sellaiset joukot  $\prod_{i \in \mathcal{I}} U_i$ , että  $U_i \subseteq X_i$  on avoin kaikilla  $i \in \mathcal{I}$  ja  $U_j \neq X_j$  vain äärellisen monella  $j \in \mathcal{I}$ , muodostavat kannan topologialle avaruudessa  $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ . Tämän kannan määräämä topologia  $\mathcal{T}$  on **tulotopologia**.

**Lause 2.31.** Olkoon  $(X)_{i \in \mathcal{I}}$  kompaktien topologisten avaruuksien perhe. Tällöin avaruus  $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$  on kompakti tulotopologian suhteen.

### 3 Konfiguraatioavaruus

Tämän osion tarkoituksena on esitellä konfiguraatioavaruus ja sen perusominaisuuksia. Konfiguraatioavaruudelle asetetaan sellainen metriikka, jonka suhteen soluautomaattifunktiot ovat jatkuvia. Lisäksi näytetään, että tämän metriikan suhteen konfiguraatioavaruus on kompakti avaruus, sillä on avosuljettu kanta, eikä se sisällä erakkopisteitä. Osio perustuu lähteisiin [8] ja [9].

**Määritelmä 3.1.** Olkoon  $d \in \mathbb{N}$ . Vektoreita  $\vec{i} \in \mathbb{Z}^d$  kutsutaan **soluiksi**, ja ne muodostavat  $d$ -ulotteisen **soluavaruuden**  $\mathbb{Z}^d$ .

**Määritelmä 3.2. Tilajoukko** on äärellinen epätyhjä joukko  $S$  ja sen alkiot  $a \in S$  ovat **tiloja**.

Oletetaan jatkossa  $S$  tilajoukoksi. Jos  $A$  ja  $B$  ovat joukkoja, niin merkintä  $B^A$  tarkoittaa funktioiden joukkoa joukosta  $A$  joukkoon  $B$ .

**Määritelmä 3.3. Konfiguraatio**  $c$  on funktio

$$c: \mathbb{Z}^d \rightarrow S,$$

joka määrittää jokaiselle solulle tilan. Merkinällä  $c(\vec{n})$  tarkoitetaan konfiguraation tilaa solussa  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$ . **Konfiguraatioavaruus**  $S^{\mathbb{Z}^d}$  on kaikkien konfiguraatioiden joukko.

**Määritelmä 3.4. Kuvio**  $p = (g, D)$  on osittainen konfiguraatio. Kuviossa  $p$  solu-  
joukko  $D \subseteq \mathbb{Z}^d$  on kuvion  $p$  **alue** ja funktio  $g: D \rightarrow S$  kuvaa alueen  $D$  jokaiselle solulle tilan. Kuvio on äärellinen, jos alue  $D$  on äärellinen. Konfiguraation  $c$  kuviota alueessa  $D$  merkitään  $c|_D$ .

**Määritelmä 3.5.** Olkoot  $p_1 = (D_1, g_1)$  ja  $p_2 = (D_2, g_2)$  sellaisia kuvioita, että alue  $D_1 \subseteq D_2$  ja  $g_1(\vec{n}) = g_2(\vec{n})$  kaikilla  $\vec{n} \in D_1$ . Tällöin kuvio  $p_1$  on kuvion  $p_2$  **osakuvio**.

Asetetaan seuraavaksi konfiguraatioavaruudelle  $S^{\mathbb{Z}^d}$  metriikka. Olkoon  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$  solu. Merkitään solun etäisyyttä origosta kaavalla

$$\|(x_1, \dots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}.$$

Määritellään konfiguraatioiden  $c, e \in S^{\mathbb{Z}^d}$  välinen etäisyysfunktio  $d: S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$  kaavalla

$$d(c, e) = \begin{cases} 0, & \text{jos } c = e, \\ 2^{-\min\{\|\vec{x}\| \mid e(\vec{x}) \neq c(\vec{x})\}}, & \text{jos } c \neq e. \end{cases} \quad (1)$$

Tällöin konfiguraatioiden välinen etäisyys on suuri, jos ne eroavat toisistaan lähellä origoa. Toisaalta, jos ensimmäinen origosta katsottuna eroava solu on kaukana, etäisyys on pieni. Konfiguraatioiden välinen etäisyys riippuu siis vain lähimpänä origoa toisistaan poikkeavista soluista.

**Lause 3.6.** Funktio  $d: S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$  on metriikka

*Todistus.* Käydään läpi seuraavat ehdot:

1.  $d(c, e) \geq 0$ ,
2.  $d(c, e) = 0$ , jos ja vain jos  $c = e$ ,
3.  $d(c, e) = d(e, c)$ ,
4.  $d(c, e) \leq d(c, c') + d(c', e)$ .

Kohdat (1), (2) ja (3) ovat selviä. Näytetään, että ehto 4 pätee. Kaikille sellaisille soluille  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$ , joille  $c(\vec{x}) \neq e(\vec{x})$ , pätee  $c(\vec{x}) \neq c'(\vec{x})$  tai  $c'(\vec{x}) \neq e(\vec{x})$  tai molemmat. Tällöin  $d(c, c') \geq d(c, e)$  tai  $d(c', e) \geq d(c, e)$ , joten ehto (4) pätee.  $\square$

Metriikalla (1) avoin  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  keskinen  $\varepsilon$ -pallo on

$$B_\varepsilon(c) = \{e \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid e(\vec{x}) = c(\vec{x}), \text{ kaikille } \|\vec{x}\| \leq r\}, \quad (2)$$

kun  $\varepsilon = 2^{-r}$ . Lauseen 2.12 mukaan nämä pallot muodostavat kannan avaruudelle  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

**Määritelmä 3.7.** Olkoon  $D \subseteq \mathbb{Z}^d$  äärellinen alue ja  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  konfiguraatio. **Sylinteri**  $Syl(c, D)$  on joukko

$$Syl(c, D) = \{e \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid e(\vec{x}) = c(\vec{x}), \text{ kaikille } \vec{x} \in D\}.$$

Sylinteri  $Syl(c, D)$  sisältää kaikki sellaiset konfiguraatiot, joilla on konfiguraation  $c$  kanssa samat tilat äärellisessä alueessa  $D$ . Kääntäen kaikilla konfiguraatioilla  $e \in Syl(c, D)$  on sama kuvio alueessa  $D$ .

Olkoon alue  $E \subseteq \mathbb{Z}^d$  muotoa

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \|\vec{x}\| \leq r\}.$$

Kaikki alueessa  $E$  määritellyt sylinterit ovat samaa muotoa kuin kohdan (2) avoimet  $\varepsilon$ -pallot, joten tällaiset sylinterit ovat avoimia  $\varepsilon$ -palloja. Olkoon  $Syl(c, D)$  sylinteri. Riittävän suurella vakiolla  $r$  pätee  $D \subseteq E$ , jolloin

$$Syl(c, D) = \bigcup_{e \in Syl(c, D)} Syl(e, E).$$

Täten sylinterit ovat avoimien pallojen äärellisiä unioneita, joten sylinterit ovat avoimia. Lisäksi avoimet pallot ovat sylintereitä. Täten sylintereiden perhe  $\mathcal{S}$  muodostaa kannan avaruudelle  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Lauseesta 2.12 seuraa, että joukko  $U$  on avoin, jos ja vain jos jokaisella konfiguraatiolla  $c \in U$  on olemassa sellainen  $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ , että  $Syl(c, D) \subseteq U$ . Sylinterin  $Syl(c, D)$  komplementti

$$S^{\mathbb{Z}^d} \setminus Syl(c, D) = \bigcup_{c \neq e} Syl(e, D)$$

on äärellisen monen sylinterin unioni, joten sylinterit ovat suljettuja joukkoja.

**Seuraus 3.8.** Sylintereiden perhe  $\mathcal{S}$  muodostaa numeroituvan avosuljetun kannan avaruudessa  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

Joukko  $\{c\}$  ei voi olla avoin, koska jokainen sylinteri sisältää äärettömän monta konfiguraatiota. Avaruus  $S^{\mathbb{Z}^d}$  ei siis sisällä erakkopisteitä.

**Seuraus 3.9.** Metrinen avaruus  $S^{\mathbb{Z}^d}$  on perfekti.

**Lause 3.10.** Metrinen avaruus  $S^{\mathbb{Z}^d}$  on kompakti.

*Todistus.* Olkoon  $\mathcal{T}$  tilajoukon  $S$  diskreetti topologia. Topologinen avaruus  $(S, \mathcal{T})$  on kompakti, koska  $S$  on äärellinen. Olkoon  $\prod_{i \in \mathbb{Z}^d} (S, \mathcal{T})$  näiden avaruuksien muodostama tuloavaruus. Tällöin Määritelmän 2.30 tulotopologia on sama kuin metriikan (1) indusoima topologia konfiguraatioavaruudessa  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Lauseesta 2.31 seuraa, että tulotopologia  $\prod_{i \in \mathbb{Z}^d} (S, \mathcal{T})$  on kompakti, joten  $S^{\mathbb{Z}^d}$  on kompakti.  $\square$

Lause 2.31 on ekvivalentti valinta-aksiooman kanssa. Lauseen 3.10 todistuksen, jossa ei käytetä valintaa, löytää lähteestä [8].

Konfiguraatioavaruus  $S^{\mathbb{Z}^d}$  on kompakti metrinen avaruus. Näin ollen Lauseesta 2.15 ja Lauseesta 2.23 saadaan seuraavat ominaisuudet konfiguraatioavaruudelle  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

**Seuraus 3.11.** Konfiguraatioavaruus  $S^{\mathbb{Z}^d}$  on Hausdorff- ja Baire-avaruus.

Lauseen 2.19 mukaan kompaktisuudesta seuraa, että jokaisella konfiguraatiojonnolla  $c_1, c_2, \dots$  on suppeneva osajono  $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots$ . Seuraava lemma auttaa jatkossa konfiguraation suppenemisen osoittamisessa.

**Lemma 3.12.** Olkoon  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konfiguraatiojono avaruudessa  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Jono  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suppenee kohti konfiguraatiota  $c$ , jos ja vain jos jokaista solua  $\vec{m} \in \mathbb{Z}^d$  kohti on olemassa sellainen  $k \in \mathbb{N}$ , että  $c_i(\vec{m}) = c(\vec{m})$  kaikilla  $i \geq k$ .

*Todistus.* Oletetaan ensin, että jono  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suppenee kohti konfiguraatiota  $c$ . Olkoon solu  $\vec{m} \in \mathbb{Z}^d$ . Olkoon  $U_{\vec{m}} = \text{Syl}(c, \{\vec{m}\})$  alueessa  $D = \{\vec{m}\}$  määritelty sylinteri. Avoin joukko  $U_{\vec{m}}$  sisältää konfiguraation  $c$ , joten Määritelmästä 2.13 seuraa, että on olemassa sellainen  $k$ , että  $c_i \in U_{\vec{m}}$  kaikilla  $i \geq k$ .

Kääntäen oletetaan, että jokaista solua  $\vec{m} \in \mathbb{Z}^d$  kohti on olemassa sellainen  $k \in \mathbb{N}$ , että  $c_i(\vec{m}) = c(\vec{m})$  kaikilla  $i \geq k$ . Olkoon  $D \subseteq \mathbb{Z}^d$  mielivaltainen äärellinen alue. Oletuksesta seuraa, että sylinterille  $U = \text{Syl}(c, D)$  on olemassa sellainen  $k$ , että  $c_i \in U$  kaikilla  $i \geq k$ . Sylinterit muodostavat kannan avaruudelle  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , joten  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ .  $\square$

Esitetään osion lopuksi ulottuvuuden  $d = 1$  tapaukseen liittyviä termejä.

**Määritelmä 3.13.** Sana  $w = s_1 s_2 \dots s_n$  on äärellinen ketju peräkkäisiä tiloja, jossa  $s_i \in S$  kaikilla  $i \leq n$ . Sanan  $w = s_1 s_2 \dots s_n$  **pituus** on sen tilojen lukumäärä, ja sitä merkitään kaavalla  $|w| = n$ . Merkinnällä

$$S^n = \{s_0 s_1 \dots s_{n-1} \mid s_i \in S\}$$

tarkoitetaan kaikkia  $n$ -pituisia sanoja, ja merkinnällä  $S^*$  tarkoitetaan kaikkia tilajoukon  $S$  muodostamia sanoja. Sanalle  $w$  ja kokonaisluvulle  $n \geq 0$  merkitään  $w^n = w \dots w$ , jossa  $|w^n| = n|w|$ .

Sylintereitä voidaan kuvata sanojen avulla. Jatkossa äärelliselle sanalle  $w \in \{0, 1\}^*$  ja luvulle  $n \in \mathbb{Z}$  merkitään kaavalla

$$\text{Syl}(w, n) = \{c \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mid c(n)c(n+1)\dots c(n+|w|-1) = w\}$$

sylinteriä, joka sisältää kaikki sellaiset konfiguraatiot, joilla on sana  $w$  alkaen solusta  $n$ . Toisin sanottuna  $\text{Syl}(w, n) = \text{Syl}(c, [n, n+|w|-1])$ , kun konfiguraatiolla  $c \in S^{\mathbb{Z}}$  on sana  $w$  alueessa  $[n, n+|w|-1] \subseteq \mathbb{Z}$ .

## 4 Soluautomaattifunktio

### 4.1 Perusominaisuudet

Soluautomaattifunktiot ovat tämän tutkielman pääkohde. Tässä alaosiossa aloitetaan soluautomaatin määrittelemisen naapurustovektorin ja paikallisen päivitysfunktion avulla. Lisäksi esitetään kaksi esimerkkiä soluautomaattifunktioista. Alaosion lopussa esitetään vaihtoehtoinen määritelmä soluautomaattifunktiolle. Alaosio perustuu lähteeseen [8].

**Määritelmä 4.1.** Solujoukko  $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m)$  on  $m$ -kokoinen **naapurustovektori** ulottuvuudessa  $d$ , jos  $\vec{n}_i \in \mathbb{Z}^d$  kaikilla  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , ja  $\vec{n}_i \neq \vec{n}_j$ , kun  $i \neq j$ . Naapurustovektori määrittää jokaiselle solulle  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  **naapurit**  $\vec{n} + \vec{n}_i$  kaikilla  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Naapurustoa voidaan ajatella alueena  $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ , joka on sama kaikille soluille suhteessa niiden sijaintiin. Naapurusto voidaan esittää joukkona  $N = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m\}$  vektoriesityksen sijaan yhteyksissä, joissa alkioiden järjestyksellä ei ole väliä. Kaikille soluille  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  ja alueille  $K \subseteq \mathbb{Z}^d$  merkitään solun naapurustoa symbolilla  $N(\vec{n}) = (\vec{n} + \vec{n}_1, \vec{n} + \vec{n}_2, \dots, \vec{n} + \vec{n}_m)$  ja alueen naapurustoa symbolilla  $N(K) = \{\vec{n} + \vec{n}_i \mid \vec{n} \in K \text{ ja } i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ .

**Määritelmä 4.2.** Olkoon  $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m)$   $m$ -kokoinen naapurustovektori,  $S$  tilajoukko ja  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  konfiguraatio. **Paikallinen päivitysfunktio**  $f: S^m \rightarrow S$  määrittää solulle  $\vec{n}$  uuden tilan riippuen naapureiden tiloista. Jos  $s_1, s_2, \dots, s_m$  ovat solun  $\vec{n}$  naapureiden tilat, solun uusi tila on  $f(s_1, s_2, \dots, s_m)$ . Solun  $\vec{n}$  sijainti avaruudessa ei siis vaikuta uuteen tilaan  $f(s_1, s_2, \dots, s_m)$ .

**Määritelmä 4.3.** **Soluautomaatti** on nelikko  $A = (d, S, N, f)$ , missä:

- $d \in \mathbb{N}$  on soluavaruuden ulottuvuus, jossa soluautomaatti on määritelty,
- $S$  on tilajoukko,
- $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m)$  on naapurustovektori,
- $f: S^m \rightarrow S$  on soluautomaatin paikallinen päivitysfunktio.

Soluautomaatti  $A$  määrittää **soluautomaattifunktion**  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$ . Soluautomaattifunktio  $G$  kuvaa konfiguraation  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  konfiguraatioksi  $G(c) \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , jossa kaikille soluille  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  pätee

$$G(c)(\vec{n}) = f[c(\vec{n} + \vec{n}_1), c(\vec{n} + \vec{n}_2), \dots, c(\vec{n} + \vec{n}_m)].$$

Vaikka soluautomaatit ovat muodoltaan nelikkoja  $A = (d, S, N, f)$ , soluautomaattifunktiot  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  ovat tutkielman pääkohde. Monet eri soluautomaatit määrittävät saman funktion  $G$ , sillä naapurustossa voi olla soluja, jotka eivät vaikuta mitenkään soluautomaattifunktion käyttäytymiseen. Lauseessa 4.9 esitetään ekvivalentti määritelmä soluautomaattifunktiolle.

**Määritelmä 4.4.** Olkoon  $G$  soluautomaattifunktio. Kun iteroidaan funktiota  $G$ , saadaan konfiguraation  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  **rata**

$$c \mapsto G(c) \mapsto G^2(c) \mapsto G^3(c) \mapsto G^4(c) \mapsto \dots$$

Konfiguraatio  $c$  on **lähtöhetki** ja radan alkiodien joukko  $\mathcal{O}(c) = \{G^n(c) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  on konfiguraation  $c$  **ratajoukko**.

Seuraavaksi esitellään XOR- ja translaatiosoluautomaattifunktiot sekä annetaan esimerkit niiden käyttäytymisestä. Näitä soluautomaattifunktioita käytetään tutkielmassa esimerkkeinä sekoittuvuusominaisuuksien tarkastelun yhteydessä tutkielman myöhemmissä osioissa.

**Esimerkki 4.5.** (XOR) Olkoon  $A$  sellainen soluautomaatti, että  $d = 1$ ,  $S = \{0, 1\}$ ,  $N = (0, 1)$  ja  $f: S^2 \rightarrow S$

$$f(a, b) = a + b \pmod{2}.$$

Soluautomaattifunktio  $G$  muuttaa jokaisen solun  $c(i)$  tilan lisäämällä sen vanhaan tilaan oikean naapurin  $c(i + 1)$  tilan modulo 2.

Olkoon  $c \in S^{\mathbb{Z}}$  sellainen konfiguraatio, että  $c(0) = 1$  ja  $c(i) = 0$  kaikille  $i \neq 0$ . Tällöin konfiguraatioissa  $G(c)$  pätee  $G(c)(-1) = G(c)(0) = 1$  ja  $G(c)(i) = 0$  kaikilla  $i \notin \{-1, 0\}$ . Jatkamalla funktion  $G$  iterointia saadaan konfiguraation  $c$  rata, joka voidaan esittää 1–ulotteiselle soluautomaattifunktiolle aika-avaruusdiagrammina. Tämä on esitetty Kuvassa 4.5. Kuvassa mustat neliöt esittävät tilaa 1 ja valkoiset neliöt tilaa 0.

**Esimerkki 4.6.** (Translaatio) Olkoon  $A$  soluautomaatti, jossa  $\vec{r} \in \mathbb{Z}^d$  on naapurustovektori,  $S$  on tilajoukko ja identiteettifunktio  $I: S^1 \rightarrow S$  on paikallinen päivitysfunktio. Tällöin globaali päivitysfunktio on **translaatiofunktio**

$$\tau_{\vec{r}}: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d},$$

joka kuvaa konfiguraation  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  konfiguraatioksi  $\tau_{\vec{r}}(c)$ , missä  $\tau_{\vec{r}}(c)(\vec{n}) = (c)(\vec{n} + \vec{r})$  kaikilla  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$ . Translaatiofunktioille selvästi pätevät seuraavat yhtälöt:

$$\tau_{\vec{r}} \circ \tau_{\vec{s}} = \tau_{\vec{r} + \vec{s}}, \quad (3)$$

$$\tau_{\vec{r}}^k = \tau_{k\vec{r}}. \quad (4)$$

Jokaisessa ulottuvuudessa  $1, 2, \dots, d$  sanotaan yhden solun translaatiota siirtofunktioksi ja merkitään  $\sigma_i$ , kun  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Eli jokaiselle yksikkövektorille

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

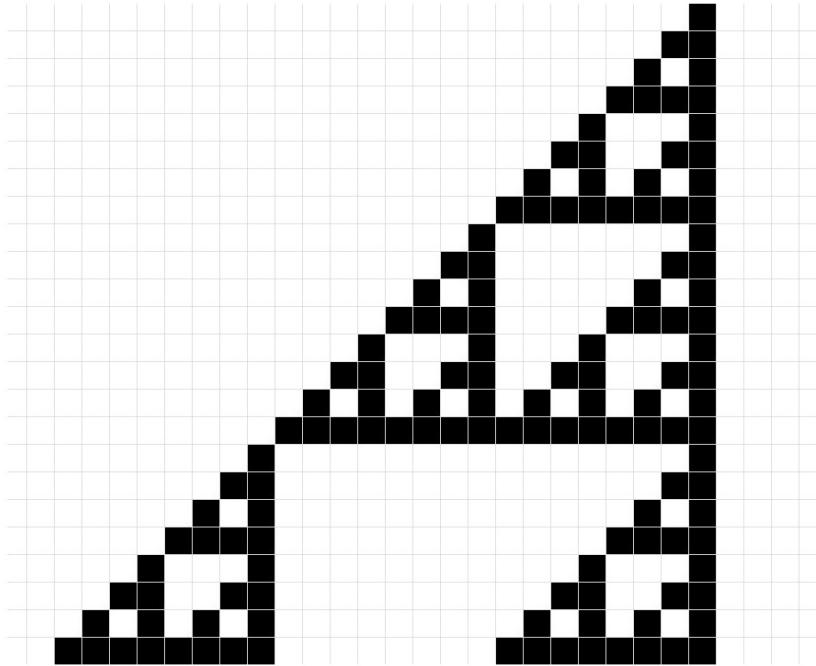
translaatio  $\tau_{\vec{e}_i} = \sigma_i$ . Kohdista (3) ja (4) seuraa, että jokainen translaatiofunktio on siirtofunktioiden yhdistelmä. Yksiulotteisessa tapauksessa merkitään siirtoa  $\sigma_1 = \sigma$ .

**Lause 4.7.** Olkoon  $G$  soluautomaattifunktio ja  $\tau_{\vec{r}}$  translaatiofunktio. Funktiot  $G$  ja  $\tau_{\vec{r}}$  kommutoivat keskenään eli  $\tau_{\vec{r}} \circ G = G \circ \tau_{\vec{r}}$ .

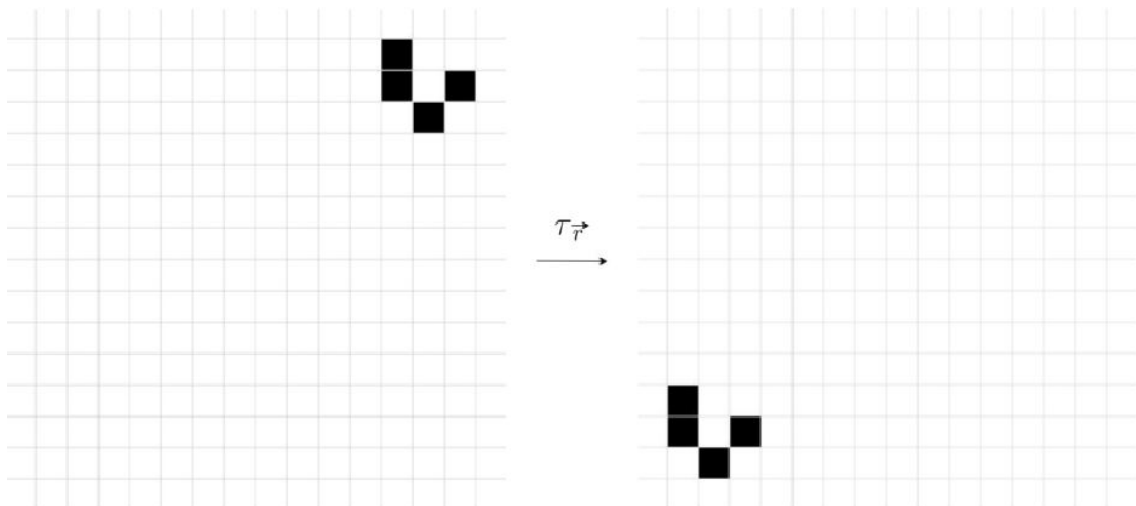
*Todistus.* Olkoon  $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m)$  soluautomaattifunktion  $G$  naapurustovektori,  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  konfiguraatio ja  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  solu. Tällöin

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{r}}(G(c))(\vec{n}) &= G(c)(\vec{n} + \vec{r}) \\ &= f[c(\vec{n} + \vec{r} + \vec{n}_1), c(\vec{n} + \vec{r} + \vec{n}_2), \dots, c(\vec{n} + \vec{r} + \vec{n}_m)] \\ &= f[\tau_{\vec{r}}(c)(\vec{n} + \vec{n}_1), \tau_{\vec{r}}(c)(\vec{n} + \vec{n}_2), \dots, \tau_{\vec{r}}(c)(\vec{n} + \vec{n}_m)] \\ &= G(\tau_{\vec{r}}(c))(\vec{n}) \end{aligned}$$

Koska  $c$  ja  $\vec{n}$  olivat mielivaltaisia, on todistettu väite  $\tau_{\vec{r}} \circ G = G \circ \tau_{\vec{r}}$ .  $\square$



Kuva 2: XOR-soluautomaattifunktion aika-avaruusdiagrammi, kun ylin vaakarivi on konfiguraatio  $c$ .



Kuva 3: Kaksi ajanhetkeä translaatiolle  $\tau_{\vec{r}}$  avaruudessa  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ , kun  $\vec{r} = (11, 11)$ .

**Lause 4.8.** Soluautomaattifunktio  $G$  on jatkuva.

*Todistus.* Olkoon  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sellainen suppeva konfiguraatiojono, jonka raja-arvo on  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ . Olkoon  $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m)$  soluautomaattifunktion  $G$  naapurustovektori ja olkoon  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  mielivaltainen solu. Lauseesta 3.12 seuraa, että kaikille  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  on olemassa sellainen  $k_j \in \mathbb{N}$ , että

$$c_i(\vec{n} + \vec{n}_j) = c(\vec{n} + \vec{n}_j)$$

kaikilla  $i \geq k_j$ . Olkoon  $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ . Kaikille  $i \geq k$  pätee

$$\begin{aligned} G(c_i)(\vec{n}) &= f[c_i(\vec{n} + \vec{n}_1), c_i(\vec{n} + \vec{n}_2), \dots, c_i(\vec{n} + \vec{n}_m)] \\ &= f[c(\vec{n} + \vec{n}_1), c(\vec{n} + \vec{n}_2), \dots, c(\vec{n} + \vec{n}_m)] \\ &= G(c)(\vec{n}). \end{aligned}$$

Koska solu  $\vec{n}$  oli mielivaltainen, jono  $(G(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$  suppenee ja sen raja-arvo on  $\lim_{n \rightarrow \infty} G(c_n) = G(c)$ . Jonon  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mielivaltaisuudesta ja Lauseesta 2.28 seuraa funktion  $G$  jatkuvuus.  $\square$

Lauseista 4.8 ja 4.7 seuraa, että soluautomaattifunktiot ovat translaatioiden kanssa kommutoivia jatkuvia funktioita. Näytetään seuraavaksi, että kaikki funktiot, jotka kommutoivat translaatioiden kanssa ja ovat jatkuvia, ovat soluautomaattifunktioita avaruudessa  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

**Lause 4.9.** (Hedlund) Funktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on soluautomaattifunktio, jos ja vain jos se on jatkuva ja kommutoi kaikkien translaatiofunktioiden kanssa.

*Todistus.* Oletetaan, että funktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on jatkuva ja kommutoi kaikkien translaatiofunktioiden kanssa. Lauseesta 2.26 seuraa, että funktio  $G$  on tasaisesti jatkuva. Tästä seuraa riittävän suurella luvulla  $r$  implikaatio

$$d(c, e) < 2^{-r} \implies d(G(c), G(e)) < 1$$

eli

$$c(\vec{x}) = e(\vec{x}) \text{ kaikilla } \|\vec{x}\| \leq r \implies G(c)(\vec{0}) = G(e)(\vec{0}).$$

Tämän vuoksi on olemassa sellainen soluautomaattifunktio  $F$ , jonka naapurustovektori on sellainen alue  $N = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \|\vec{x}\| \leq r\}$ , että kaikille konfiguraatioille  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  pätee  $G(c)(\vec{0}) = F(c)(\vec{0})$ .

Oletuksen mukaan funktio  $G$  kommutoi translaatioiden kanssa ja Lauseen 4.7 mukaan  $F$  kommutoi translaatioiden kanssa. Tällöin kaikille soluille  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  ja kaikille konfiguraatioille  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  pätee yhtälö

$$G(c)(\vec{n}) = \tau_{\vec{n}} \circ G(c)(\vec{0}) = G \circ \tau_{\vec{n}}(c)(\vec{0}) = F \circ \tau_{\vec{n}}(c)(\vec{0}) = \tau_{\vec{n}} \circ F(c)(\vec{0}) = F(c)(\vec{n}).$$

Funktio  $G = F$ , joten  $G$  on soluautomaattifunktio.

Käänteinen suunta seuraa Lauseesta 4.8 ja Lauseesta 4.7.  $\square$

## 4.2 Surjektiiviset soluautomaattifunktiot

Tutkielmassa tarkastellaan pääasiassa surjektiivisten soluautomaattifunktioiden ominaisuuksia. Tässä alaosiassa osoitetaan, että soluautomaattifunktio on surjektiivinen, jos ja vain jos sillä ei ole orpoja. Lisäksi esitellään surjektiivisten soluautomaattifunktioiden tasapainoisuusominaisuus. Lopuksi tarkastellaan lyhyesti myös injektiivisten soluautomaattifunktioiden ominaisuuksia.

Olkoon  $G$  soluautomaatin  $A = (d, S, N, f)$  määräämä soluautomaattifunktio ja olkoon sen naapurustovektori  $N = (\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_m)$ . Olkoon  $p = (D, g)$  kuvio ja olkoon  $D' \subseteq \mathbb{Z}^d$  sellainen alue, että  $N(D') \subseteq D$ . Näin ollen paikallinen päivitysfunktio  $f$  antaa alueelle  $D'$  uudet tilat riippuen täysin kuvioista  $p$ . Tällöin saadaan uusi kuvio  $p' = (D', g')$ , jossa kaikille soluille  $\vec{n} \in D'$  pätee

$$g'(\vec{n}) = f[g(\vec{n} + \vec{n}_1), g(\vec{n} + \vec{n}_2), \dots, g(\vec{n} + \vec{n}_m)].$$

Merkitään kuvausta  $p \mapsto p'$  symbolilla  $G^{(D \rightarrow D')}$ .

**Määritelmä 4.10.** Konfiguraatio  $c$  on **Eedenin puutarha konfiguraatio**, jos sillä ei ole alkukuvia eli  $G^{-1}(c) = \emptyset$ . Soluautomaattifunktio  $G$  on surjektiivinen, jos ja vain jos se ei sisällä Eedenin puutarha konfiguraatioita.

**Määritelmä 4.11.** Äärellinen kuvio  $p = (D, g)$  on **orpo**, jos sillä ei ole alkukuvia. Toisin sanottuna kuvio  $p' = (D', g')$  on orpo, jos kaikille sellaisille kuvioille  $p = (D, g)$ , joiden alue  $D = N(D')$ , pätee kaava

$$G^{(D \rightarrow D')}(p) \neq p'.$$

**Lause 4.12.** Soluautomaattifunktio  $G$  on surjektiivinen, jos ja vain jos sillä ei ole orpoja.

*Todistus.* Olkoon  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  Eedenin puutarha konfiguraatio. Oletetaan, että mikään konfiguraation  $c$  osakuvio ei ole orpo. Olkoon  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$  soluavaruuden  $\mathbb{Z}^d$  kaikkien alkioiden luettelo. Merkitään jokaista lukua  $j \in \mathbb{N}$  kohti aluetta

$$D_j = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_j\}.$$

Mikään konfiguraation  $c$  osakuvio ei ole orpo, joten on olemassa sellainen konfiguraatio  $c_j \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , että  $G(c_j) \in \text{Syl}(c, D_j)$ . Lemmasta 3.12 seuraa, että jono  $G(c_1), G(c_2), \dots$  suppenee kohti konfiguraatiota  $c$ . Lauseesta 2.19 seuraa, että jonolla  $c_1, c_2, \dots$  on suppeneva osajono  $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots$ . Olkoon  $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{i_j} = e$ . Lauseesta 2.28 seuraa, että  $G(c_{i_1}), G(c_{i_2}), \dots$  suppenee kohti konfiguraatiota  $G(e)$ . Toisaalta

$$\lim_{j \rightarrow \infty} G(c_{i_j}) = \lim_{i \rightarrow \infty} G(c_i) = c.$$

Nyt  $c = G(e)$ , joten  $c$  ei ole Eedenin puutarha konfiguraatio. □

Kuvio  $p = (D, g)$  määrittelee sylinterin  $\text{Syl}(c, D)$ , jossa  $c$  on jokin kuvion  $p$  sisältävä konfiguraatio eli  $c|_D = p$ . Tämän vuoksi Lauseesta 4.12 seuraa, että jos soluautomaattifunktio ei ole surjektiivinen, on olemassa sellainen sylinteri  $\text{Syl}(c, D)$ , jonka jokainen alkio  $e \in \text{Syl}(c, D)$  on Eedenin puutarha konfiguraatio.

Esitetään seuraavaksi surjektiivisten soluautomaattifunktioiden tasapainoisuusominaisuus. Sen todistukseen tarvitaan seuraavaa lemmaa.

**Lemma 4.13.** Kaikille  $d, n, r, s \in \mathbb{N}$  on olemassa sellainen  $k \in \mathbb{N}$ , että

$$\left(s^{n^d} - 1\right)^{k^d} < s^{(kn-2r)^d}.$$

*Todistus.* Jos  $s = 1$ , epäyhtälö  $0 < 1$  pätee kaikille  $k$ . Olkoon  $s > 1$ . Epäyhtälö  $\log(s^{n^d} - 1) < \log(s^{n^d})$  on voimassa, koska logaritmfunktio on aidosti kasvava. Raja-arvo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2r}{nk}\right)^d = 1,$$

joten riittävän suurella  $k$  pätee

$$\frac{\log(s^{n^d} - 1)}{\log(s^{n^d})} < \left(1 - \frac{2r}{nk}\right)^d.$$

Kertomalla puolittain positiivisilla luvuilla  $\log(s^{n^d})$  ja  $k^d$  saadaan

$$k^d \log(s^{n^d} - 1) < \left(k - \frac{2r}{n}\right)^d \log(s^{n^d}) = (kn - 2r)^d \log(s),$$

josta seuraa

$$\left(s^{n^d} - 1\right)^{k^d} < s^{(kn-2r)^d}.$$

□

**Määritelmä 4.14. Hyperkuutio** ulottuvuudessa  $d$  on kulman  $(k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$  määräämä  $n^d$  kokoinen alue

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid k_i \leq x_i < k_i + n \quad \forall i = 1, 2, \dots, d\}.$$

**Määritelmä 4.15.** Soluautomaattifunktion  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  säde  $r$  on

$$r = \max\{\|\vec{n}_1\|, \|\vec{n}_2\|, \dots, \|\vec{n}_d\|\},$$

kun  $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_d)$  on soluautomaattifunktion naapurustovektori.

**Lause 4.16.** Olkoon  $A = (d, S, N, f)$  soluautomaatti ja olkoon sen määrittämä soluautomaattifunktio  $G$  surjektiivinen. Merkitään tilajoukon alkioden lukumäärää kirjaimella  $s = |S|$ . Olkoot  $D, D' \subset \mathbb{Z}^d$  sellaisia äärellisiä alueita, että  $N(D') \subseteq D$ . Tällöin jokaiselle kuviolle  $p' = (D', g')$  on yhteensä  $s^{|D|-|D'|}$  sellaista kuviota  $p = (D, g)$ , että

$$G^{(D \rightarrow D')}(p) = p'.$$

*Todistus.* Oletetaan, että on olemassa kuvio  $p' = (D', g')$ , jonka alkukuvien lukumäärä alueessa  $D$  on luku  $t \neq s^{|D|-|D'|}$ . Tarkoituksena on osoittaa, että tästä seuraa, ettei soluautomaattifunktio ole surjektiivinen. Näytetään ensin, että voidaan olettaa alueet  $D$  ja  $D'$  sellaisiksi samankeskisiksi hyperkuutioksi, että  $D' \subseteq D$ .

Tarpeeksi suurelle luvulle  $n$  ja säteelle  $r$  on olemassa sellaiset  $n^d$  ja  $(n - 2r)^d$  kokoiset samankeskiset hyperkuutiot  $E, E' \subset \mathbb{Z}^d$ , että  $D \subseteq E$ ,  $D' \subseteq E'$  ja  $N(E') \subseteq E$ . Alueessa  $E'$  on täsmälleen  $s^{|E'|-|D'|}$  sellaista kuviota  $\hat{p} = (E', \hat{g})$ , joilla  $p'$  on

osakuviona. Tämä seuraa siitä, että alueen  $E' \setminus D'$  soluihin voidaan valita tilat vapaasti, kun kuvio  $p'$  on kiinnitetty alueeseen  $D'$ . Koska kuviolla  $p'$  on  $t$  alkukuvaa alueessa  $D$ , ja koska alueen  $E \setminus D$  tilat voidaan valita vapaasti, kuviolla  $\hat{p}$  on yhteensä  $t \cdot s^{|E|-|D|}$  alkukuvaa alueessa  $E$ . Jos jokaisella alueessa  $E'$  määritellyllä kuviolla olisi  $s^{|E|-|E'|}$  alkukuvaa alueessa  $E$ , saataisiin kuvioiden  $\hat{p}$  alkukuvien lukumäärälle yhtälö

$$s^{|E'|-|D'|} \cdot s^{|E|-|E'|} = t \cdot s^{|E|-|D|}.$$

Tästä yhtälöstä seuraisi  $t = s^{|D|-|D'|}$ , mikä on ristiriidassa oletuksen  $t \neq s^{|D|-|D'|}$  kanssa. Täten voidaan olettaa alueet  $D'$  ja  $D$  samankeskisiksi hyperkuutioiksi.

Olkoot  $D', D \subset \mathbb{Z}^d$  sellaisia hyperkuutioita, että  $|D| = n^d$  ja  $|D'| = (n - 2r)^d$ . Alueessa  $D$  on yhteensä  $s^{|D|}$  eri kuviota ja alueessa  $D'$  on yhteensä  $s^{|D'|}$  eri kuviota. Oletetaan, että kuvion  $p' = (D', g')$  alkukuvien lukumäärä alueessa  $D$  on sellainen luku  $t$ , että

$$t < s^{|D|-|D'|}.$$

Tämä oletus on mahdollinen, sillä jos jokaisen alueessa  $D'$  määritetyn kuvion alkukuvien lukumäärä  $t_1$  täyttäisi epäyhtälön

$$t_1 \geq s^{|D|-|D'|},$$

kuvioiden kokonaislukumäärän perusteella jokaisen kuvion alkukuvien lukumäärä olisi tarkalleen  $t_1 = s^{|D|-|D'|}$ .

Olkoon  $k \in \mathbb{N}$  mielivaltainen. Olkoot  $C$  ja  $C'$  sellaiset samankeskiset hyperkuutiot, että  $|C| = (kn)^d$  ja  $|C'| = (nk - 2r)^d$ . Olkoot  $C_1, C_2, \dots, C_{k^d} \subset C$  sellaiset erilliset hyperkuutiot, että  $\cup_{i=1}^{k^d} C_i = C$ ,  $|C_i| = n^d = |D|$  kaikilla  $i$  ja  $C_i \cap C_j = \emptyset$ , kun  $i \neq j$ . Lisäksi olkoot  $C'_1, C'_2, \dots, C'_{k^d} \subset C'$  sellaiset erilliset hyperkuutiot, että  $|C'_i| = (n - 2r)^d = |D'|$  ja  $N(C'_i) \subseteq C_i$  kaikilla  $i$ . Olkoon  $\mathcal{A}$  sellaisten alueessa  $C'$  määriteltyjen kuvioiden joukko, että kaikissa alueissa  $C'_i$  on kuvion  $p'$  translaatio. Alueen  $C' \setminus \cup_{i=1}^{k^d} C'_i$  tilat voidaan valita vapaasti, joten kuvioiden lukumäärä joukossa  $\mathcal{A}$  on

$$|\mathcal{A}| = s^{|C'|-k^d|D'|}.$$

Olkoon  $\mathcal{B}$  sellaisten alueessa  $C$  määriteltyjen kuvioiden joukko, että kuva  $G^{(C \rightarrow C')}(b) \in \mathcal{A}$ , kun  $b \in \mathcal{B}$ . Joukon  $\mathcal{B}$  alkiot ovat tarkalleen ne kuviot  $b \in \mathcal{B}$ , joilla on jokin kuvion  $p'$  alkukuva jokaisessa alueessa  $C_i$ . Oletuksen mukaan kuviolla  $p'$  on  $t$  alkukuvaa, joten kuvioiden lukumäärä joukossa  $\mathcal{B}$  on

$$|\mathcal{B}| = t^{k^d}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että riittävän suurelle luvulle  $k \in \mathbb{N}$  pätee epäyhtälö

$$|\mathcal{B}| = t^{k^d} < s^{|C'|-k^d|D'|} = |\mathcal{A}|. \quad (5)$$

Alueille  $D$  ja  $C'$  pätee yhtälöt

$$\begin{aligned} |D| &= n^d, \\ |C'| &= (kn - 2r)^d, \end{aligned}$$

joten Lemman 4.13 mukaan on olemassa sellainen  $k$ , että

$$(s^{|D|} - 1)^{k^d} < s^{|C'|}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} t^{k^d} &\leq \left(s^{|D|-|D'|} - 1\right)^{k^d} \\ &\leq \left(s^{|D|-|D'|} - s^{-|D'|}\right)^{k^d} \\ &= s^{-k^d|D'|} (s^{|D|} - 1)^{k^d} \\ &< s^{|C'|-k^d|D'|}. \end{aligned}$$

On osoitettu kohta (5). Näin ollen joukossa  $\mathcal{A}$  on olemassa sellainen kuvio, jolla ei ole alkukuvaa alueessa  $C$ . Lauseesta 4.12 seuraa, että soluautomaattifunktio  $G$  ei ole surjektiivinen.  $\square$

Esitetään edellinen lause sylintereillä. Olkoon  $G$  surjektiivinen soluautomaattifunktio ja  $U = \text{Syl}(c, D')$  sylinteri. Olkoon  $D \subset \mathbb{Z}^d$  sellainen alue, että  $N(D') \subseteq D$  ja olkoon  $n = s^{|D|-|D'|}$ . Lauseesta 4.16 seuraa, että sylinterin  $U$  alkukuva on

$$G^{-1}(U) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n,$$

missä sylinterit  $C_i$  ovat erillisiä ja määritelty alueessa  $D$ .

Soluautomaattifunktio  $G$  on **kääntyvä**, jos se on bijektio ja  $G^{-1}$  on soluautomaattifunktio.

**Lause 4.17.** Soluautomaattifunktio  $G$  on kääntyvä, jos ja vain jos se on bijektio.

*Todistus.* Olkoon soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  bijektio. Silloin Lauseen 2.29 seurauksena  $G^{-1}: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on jatkuva. Lisäksi  $\tau \circ G^{-1} = G^{-1} \circ G \circ \tau \circ G^{-1} = G^{-1} \circ \tau \circ G \circ G^{-1} = G^{-1} \circ \tau$ , joten  $G^{-1}$  kommutoi translaation kanssa. Näin ollen  $G^{-1}$  soluautomaattifunktio. Toinen suunta seuraa kääntyvyyden määritelmästä.  $\square$

Translaatio on  $\tau_{\vec{n}}$  selvästi kääntyvä. Käänteisfunktio on  $\tau_{-\vec{n}}$ , jolloin  $\tau_{\vec{n}} \circ \tau_{-\vec{n}} = I$ . XOR-soluautomaattifunktio ei ole kääntyvä. Konfiguraatioilla  $c_0 = \dots 000 \dots$  ja  $c_1 = \dots 111 \dots$  on sama kuva  $G(c_0) = G(c_1) = \dots 000 \dots$ , joten se ei ole injektiivinen.

Seuraavan lauseen mukaan jokainen injektiivinen soluautomaattifunktio on bijektiivinen, ja näin ollen myös kääntyvä.

**Lause 4.18.** Soluautomaattifunktio  $G$  on surjektiivinen, jos se on injektiivinen.

*Todistus.* Löytyy lähteestä [8].  $\square$

### 4.3 Vasemman- ja oikeanpuoleiset soluautomaattifunktiot ja permutatiiviset soluautomaattifunktiot

Tässä alaosiossa esitellään kaksi soluautomaattifunktioluokkaa, joita tarkastellaan myöhemmin tutkielmassa. Vasemman- ja oikeanpuoleiset soluautomaattifunktiot esitellään ensin, minkä jälkeen siirrytään permutatiivisiin soluautomaattifunktioihin. Näiden määritelmät esitetään lähde [3] mukaillen, ja niiden sekoittuvuusominaisuuksia tarkastellaan myöhemmin tutkielmassa. Lemmat ja lauseet ovat tämän tutkielman omaa tuotosta, ellei toisin mainita.

Alaosion aluksi osoitetaan, että samaa ulottuvuutta olevien soluautomaattifunktioiden yhdistetty funktio on soluautomaattifunktio. Tämän yhteydessä tarkastellaan soluautomaattifunktion naapurustovektorin muutosta soluautomaattifunktiota iteroidessa. Seuraava soluautomaattifunktioiden yhdistetyyn funktioon liittyvä lause on lähteestä [10].

**Lause 4.19.** Soluautomaattifunktioiden  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  ja  $F: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  yhdistetty funktio  $G \circ F$  on soluautomaattifunktio. Soluautomaattifunktion  $G \circ F$  naapurusto on

$$N_{G \circ F} = N_G + N_F = \{\vec{n}_i + \vec{m}_j \mid \vec{n}_i \in N_G \text{ ja } \vec{m}_j \in N_F\}.$$

*Todistus.* Huomataan seuraava ominaisuus soluautomaattifunktioiden iteroinnista. Olkoot  $f(n_1, \dots, n_m)$  ja  $g(u_1, \dots, u_r)$  soluautomaattifunktioiden  $F$  ja  $G$  paikallisia päivytysfunktioita. Tällöin

$$\begin{aligned} G(F(c))(\vec{n}) &= g[F(c(\vec{n} + \vec{u}_1), \dots, F(c(\vec{n} + \vec{u}_r))] \\ &= g[f[c(\vec{n} + \vec{n}_1 + \vec{u}_1), \dots, c(\vec{n} + \vec{n}_m + \vec{u}_1)], \\ &\quad \dots, f[c(\vec{n} + \vec{n}_1 + \vec{u}_r), \dots, c(\vec{n} + \vec{n}_m + \vec{u}_r)]]. \end{aligned} \quad (6)$$

Tästä seuraa, että  $G \circ F$  on soluautomaattifunktio ja sen naapurustovektori on  $N_{G \circ F} = N_G + N_F$ .  $\square$

Lauseesta 4.19 seuraa, että soluautomaattifunktion  $G^n$  naapurusto on  $n$ -kertainen summa  $N_G + \dots + N_G$ . Merkitään jatkossa funktion  $G^n$  naapurustovektoria symbolilla  $N_n$ .

Oletetaan tutkielman jatkossa, että yksiulotteisen soluautomaattifunktion  $G$  naapurustovektori on muotoa  $N = (n_1, \dots, n_m)$ , ja siihen kuuluvat solut ollaan järjestetty pienimmästä kokonaisluvusta suurimpaan eli  $n_i < n_j$ , kun  $1 \leq i < j \leq m$ .

**Määritelmä 4.20.** Olkoon  $G: S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$  yksiulotteinen soluautomaattifunktio. Soluautomaattifunktio  $G$  on **oikeanpuoleinen**, jos  $n_1 > 0$ . Käänteisesti  $G$  on **vasemmanpuoleinen**, jos  $n_m < 0$ .

**Esimerkki 4.21.** Siirtofunktio  $\sigma: S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$  on oikeanpuoleinen soluautomaattifunktio.

Lausetta 4.19 hyödyntäen näytetään seuraavaksi yksiulotteisille soluautomaattifunktiolle ominaisuus, jota käytetään myöhemmin tutkielmassa Määritelmän 4.20 soluautomaattifunktioiden sekoittuvuusominaisuuksien todistuksissa.

**Lemma 4.22.** Olkoon  $G$  yksiulotteinen surjektiivinen soluautomaattifunktio. Oletetaan, että soluautomaattifunktion  $G$  naapurustovektori  $N$  on välin  $\{l, \dots, r\}$  osajoukko. Olkoon  $n \in \mathbb{N}$  ja olkoot  $a, b \in \mathbb{Z}$  sellaisia kokonaislukuja, että  $a < b$ . Tällöin kaikille konfiguraatioille  $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$  on olemassa sellainen konfiguraatio  $d \in S^{\mathbb{Z}}$ , että

$$\begin{aligned} d(x) &= c(x) && \text{kaikilla } x < a + nl \text{ ja } x > b + nr, \\ G^n(d)(x) &= e(x) && \text{kaikilla } a \leq x \leq b. \end{aligned}$$

*Todistus.* Olkoon  $N_n$  soluautomaattifunktion  $G^n$  naapurustovektori. Lauseesta 4.19 seuraa, että alueen  $D = \{a, \dots, b\}$  naapurusto  $N_n(D)$  on välin  $\{a + nl, \dots, b + nr\}$  osajoukko. Olkoon  $Syl(e, D)$  kuvion  $p = (D, g)$  määräämä sylinteri eli  $e|_D = p$  kaikilla  $e' \in Syl(e, D)$ . Määritellään konfiguraatiolle  $d$  tilat  $d(x) = c(x)$  kaikilla  $x < a + nl$  ja  $x > b + nr$ . Koska soluautomaattifunktio on surjektiivinen, Lauseen 4.12 mukaan on olemassa sellainen kuvio  $p_2 = (N_n(D), g)$ , että  $(G^n)^{(N_n(D) \rightarrow D)}(p_2) = p_1$ . Olkoon konfiguraatiolla  $d$  kuvio  $p_2$  alueessa  $N_n(D)$ . Nyt  $G^n(d) \in Syl(e, D)$ , mikä todistaa väitteen.  $\square$

Yleistetään Määritelmän 4.20 soluautomaattifunktiot korkeampiin ulottuvuuksiin. Tätä varten määritellään soluavaruudelle  $\mathbb{Z}^d$  sisätulo.

**Määritelmä 4.23.** Olkoot  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  ja  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$  soluja. Soluavaruuden  $\mathbb{Z}^d$  **pistetulo** on

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

**Määritelmä 4.24.** Olkoon  $\vec{t} \in \mathbb{Z}^d$  nollasta eroava vektori. Soluautomaattifunktio  $G$  on  $\vec{t}$ -**puoleinen**, jos jokaisella sen naapurilla  $\vec{n}_i \in N$  pistetulo  $\vec{t} \cdot \vec{n}_i > 0$ .

Lemma 4.22 yleistyy seuraavalla tavalla.

**Lemma 4.25.** Olkoon  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  surjektiivinen soluautomaattifunktio. Olkoon  $D \subseteq \mathbb{Z}^d$  alue,  $n \geq 1$  kokonaisluku ja  $N_n$  soluautomaattifunktion  $G^n$  naapurustovektori. Tällöin kaikille konfiguraatioille  $c, e \in S^{\mathbb{Z}^d}$  on olemassa sellainen konfiguraatio  $d \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , että

$$\begin{aligned} d(\vec{x}) &= c(\vec{x}) && \text{kaikilla } \vec{x} \notin N_n(D), \\ G^n(d)(\vec{x}) &= e(\vec{x}) && \text{kaikilla } \vec{x} \in D. \end{aligned}$$

*Todistus.* Olkoon konfiguraatio  $d(\vec{x}) = c(\vec{x})$  kaikilla  $\vec{x} \notin N_n(D)$ . Alueen  $N_n(D)$  tilat määräävät kuvan  $G^n(d)$  tilat alueessa  $D$ . Lauseen 4.12 mukaan soluautomaattifunktiolla  $G^n$  ei ole orpoja, joten voidaan valita sellaiset tilat alueeseen  $N_n(D)$ , että konfiguraatio  $G^n(d)(\vec{x}) = e(\vec{x})$  kaikilla soluilla  $\vec{x} \in D$ .  $\square$

Siirrytään seuraavaksi permutatiivisiin soluautomaattifunktioihin.

**Määritelmä 4.26.** Funktio  $f: S^m \rightarrow S$  on **permutatiivinen** muuttujassa  $s_i$ , jos jokaiselle  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_m) \in S^{m-1}$  kuvaus  $s \mapsto f(s_1, \dots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \dots, s_m)$  on permutaatio eli bijektio.

**Määritelmä 4.27.** Soluautomaatti  $A = (1, S, N, f)$  määrittää **vasen-permutatiivisen** soluautomaattifunktion, jos paikallinen päivitysfunktio  $f: S^m \rightarrow S$  on permutatiivinen naapurissa  $n_1$  vastaavassa muuttujassa  $s_{n_1}$  (naapurissa  $n_1$ ) ja **oikea-permutatiivisen** soluautomaattifunktion, jos funktio  $f$  on permutatiivinen naapurissa  $n_m$  vastaavassa muuttujassa  $s_{n_m}$  (naapurissa  $n_m$ ).

**Esimerkki 4.28.** XOR-soluautomaattifunktio on vasen- ja oikea-permutatiivinen. Jos  $b \in \{0, 1\}$ , funktio  $a \mapsto f(a, b)$  on permutaatio. Samoin funktio  $b \mapsto f(a, b)$  on permutaatio, jos  $a \in \{0, 1\}$ .

Kohdasta (6) seuraa, että jos yksiulotteiset soluautomaattifunktiot  $F$  ja  $G$  ovat permutatiivisia oikeanpuolimmaisissa naapureissa  $n_m$  ja  $u_r$ , soluautomaattifunktio  $G \circ F$  on permutatiivinen oikeanpuolimmaisessa naapurissa  $n_m + u_r$ . Erityisesti  $G^k$  on permutatiivinen solua  $kn_r$  vastaavassa muuttujassa.

Seuraavia lemmoja hyödynnetään myöhemmin tutkielmassa, kun todistetaan sekoittuvuusominaisuuksia vasen- ja oikea-permutatiivisille soluautomaattifunktioille.

**Lemma 4.29.** Olkoon  $G$  oikea-permutatiivinen soluautomaattifunktio ja olkoon  $r = n_m$  sen naapurustovektorin oikeanpuoleisin naapuri. Kaikille konfiguraatioille  $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$ , sekä luvuille  $n \geq 1$  ja  $k \in \mathbb{Z}$  on olemassa sellainen konfiguraatio  $b \in S^{\mathbb{Z}}$ , että

$$b(x) = c(x) \quad \text{kaikilla } x < k + rn, \quad (7)$$

$$G^n(b)(x) = e(x) \quad \text{kaikilla } x \geq k. \quad (8)$$

*Todistus.* Olkoot  $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$  konfiguraatioita, luku  $n \geq 1$  ja  $k \in \mathbb{Z}$  mielivaltainen kokonaisluku. Olkoon  $f_n$  soluautomaattifunktion  $G^n$  paikallinen päivitysfunktio. Koska paikallinen päivitysfunktio  $f$  on permutatiivinen naapurissa  $r = n_m \in N$ , funktio  $f_n$  on permutatiivinen naapurissa  $nr \in N_n$ , ja funktio  $s_{nr} \mapsto f_n(s_{nn_1}, \dots, s_{nr})$  on bijektio kaikilla kiinnitetyillä tiloilla  $s_{nn_1}, \dots, s_{nr-1}$ . Kiinnitetään konfiguraatioon  $b$  tilat  $b(x) = c(x)$  kaikilla  $x < k + nr$ . Määritellään seuraavaksi konfiguraatiolle  $b$  sellaiset tilat soluihin  $x \geq k + nr$ , että  $G^n(b)(x) = e(x)$  pätee kaikilla soluilla  $x \geq k$ . Aloitetaan solusta  $k + nr$ . Koska funktio  $f_n$  on permutatiivinen naapurissa  $nr$  ja tilat  $b_{\{x < k + nr\}}$  ollaan kiinnitetty, on olemassa sellainen yksikäsitteinen tila  $a \in S$ , että  $f(b(k + nn_1), \dots, b(k + nr - 1), a) = e(k)$ . Olkoon  $b(k + nr) = a$ . Nyt kun tila  $b(k + nr)$  on kiinnitetty, voidaan määritellä soluun  $k + nr + 1$  sellainen tila  $a \in S$ , että  $f(b(k + nn_1 + 1), \dots, b(k + nr), a) = e(k + 1)$ . Jatkamalla tätä konfiguraation  $b$  soluille  $k + nr + 2, k + nr + 3, \dots$  saadaan sellainen konfiguraatio  $b$ , että

$$b(x) = c(x) \quad \text{kaikilla } x < k + rn,$$

$$G^n(b)(x) = e(x) \quad \text{kaikilla } x \geq k.$$

□

**Lemma 4.30.** Olkoon  $G$  vasen-permutatiivinen soluautomaattifunktio ja olkoon  $r = n_1$  sen naapurustovektorin vasemmanpuoleisin solu. Kaikille konfiguraatioille  $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$ , sekä luvuille  $n \geq 1$  ja  $k \in \mathbb{Z}$ , on olemassa sellainen konfiguraatio  $b \in S^{\mathbb{Z}}$ , että

$$\begin{aligned} b(x) &= c(x) && \text{kaikilla } x > k + rn, \\ G^n(b)(x) &= e(x) && \text{kaikilla } x \leq k. \end{aligned}$$

*Todistus.* Menee samoin kuin Lemman 4.29 todistus.  $\square$

Näytetään seuraavaksi, että vasen-permutatiiviset ja oikea-permutatiiviset soluautomaattifunktiot ovat surjektiivisiä.

**Lause 4.31.** Vasen-permutatiivinen (*oikea-permutatiivinen*) soluautomaattifunktio  $G$  on surjektiivinen.

*Todistus.* Olkoon  $w$  mielivaltainen sana ja konfiguraatio  $e \in \text{Syl}(w, k)$  jollekin  $k \in \mathbb{Z}$ . Olkoon  $r = n_1$  naapurustovektorin vasemmanpuoleisin solu ja  $c \in S^{\mathbb{Z}}$  mielivaltainen konfiguraatio. Lemmasta 4.30 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $b \in S^{\mathbb{Z}}$ , että

$$\begin{aligned} b(x) &= c(x) && \text{kaikilla } x > k + |w| + r - 1, \\ G(b)(x) &= e(x) && \text{kaikilla } x \leq k + |w| - 1. \end{aligned}$$

Näin ollen sanalla  $w$  on olemassa alkukuva. Nyt Lauseesta 4.12 seuraa, että soluautomaattifunktio  $G$  on surjektiivinen.  $\square$

Yleistetään alaosion lopuksi Määritelmän 4.27 soluautomaattifunktiot korkeampiin ulottuvuuksiin. Yleistys mukailee lähdeä [5].

**Määritelmä 4.32.** Olkoon  $\vec{t} \in \mathbb{Z}^d$  nolasta eroava vektori. Soluautomaattifunktio  $G$  on  $\vec{t}$ -**permutatiivinen**, jos paikallinen päivitysfunktio  $f$  on permutatiivinen sellaista naapuria  $\vec{n}_i \in N$  vastaavassa muuttujassa, että pistetulo  $\vec{t} \cdot \vec{n}_i$  on aidosti suurempi kuin vektorin  $\vec{t}$  pistetulo minkään muun naapurin kanssa. Toisin ilmaistuna

$$\forall j \neq i: \vec{t} \cdot \vec{n}_i > \vec{t} \cdot \vec{n}_j.$$

**Lemma 4.33.** Olkoon soluautomaattifunktio  $G$   $\vec{t}$ -permutatiivinen ja  $\vec{n}_i$  sellainen naapuri, että pistetulo  $\vec{t} \cdot \vec{n}_i$  on suurin. Kaikille konfiguraatioille  $c, e \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , luvuille  $n \geq 1$  ja vektoreille  $\vec{k} \in \mathbb{Z}^d$ , on olemassa sellainen konfiguraatio  $b \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , että

$$b(\vec{x}) = c(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) < \vec{t} \cdot (n\vec{n}_i), \quad (9)$$

$$G^n(b)(\vec{x}) = e(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) \geq 0. \quad (10)$$

*Todistus.* Olkoot  $c, e \in S^{\mathbb{Z}}$  konfiguraatioita, luku  $n \geq 1$  ja solu  $\vec{k} \in \mathbb{Z}^d$ . Olkoon  $f_n$  soluautomaattifunktion  $G^n$  paikallinen päivitysfunktio. Määritellään konfiguraatio  $b \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , joka täyttää ehdot (9) ja (10). Kiinnitetään konfiguraatiolle  $b$  tilat

$$b(\vec{x}) = c(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) < \vec{t} \cdot (n\vec{n}_i).$$

Olkoon  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$  sellainen solu, että  $\vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) = \vec{t} \cdot (n\vec{n}_i)$ . Funktio  $f_n$  on permutatiivinen naapurissa  $n\vec{n}_i$ . Lisäksi soluautomaattifunktion  $G^n$  kaikille naapureille  $\vec{m} \in N_n$ , joilla  $\vec{m} \neq n\vec{n}_i$ , pätee pistetulo

$$\vec{t} \cdot \vec{m} < \vec{t} \cdot (n\vec{n}_i).$$

Tällöin on olemassa yksikäsitteinen tila  $s \in S$ , jonka asettamalla soluun  $\vec{x}$ , saadaan  $G^n(b)(\vec{y}) = e(\vec{y})$ , missä  $\vec{y} = \vec{x} - n\vec{n}_i$ . Lisäksi solulle  $\vec{y}$  pätee  $\vec{t} \cdot (\vec{y} - \vec{k}) = 0$ . Koska solu  $\vec{x}$  oli mielivaltainen, kaikille soluille  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$ , joille  $\vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) = \vec{t} \cdot (n\vec{n}_i)$ , voidaan valita sellaiset tilat, että  $G^n(b)(\vec{y}) = e(\vec{y})$ , missä  $\vec{y} = \vec{x} - n\vec{n}_i$  ja  $\vec{t} \cdot (\vec{y} - \vec{k}) = 0$ .

Olkoon  $a \geq 1$  kokonaisluku. Oletetaan induktio-oletuksena, että kaikille sellaisille soluille  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$ , että

$$0 \leq \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) - \vec{t} \cdot (n\vec{n}_i) < a,$$

olla määritelty sellaiset tilat, että  $G^n(b)(\vec{y}) = e(\vec{y})$  kaikilla sellaisilla soluilla  $\vec{y}$ , että

$$0 \leq \vec{t} \cdot (\vec{y} - \vec{k}) < a.$$

Olkoon  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$  sellainen solu, että

$$\vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) - a = \vec{t} \cdot (n\vec{n}_i).$$

Tällöin soluautomaattifunktion  $G^n$  kaikille sellaisille naapureille  $\vec{m} \in N_n$ , että  $\vec{m} \neq n\vec{n}_i$ , on voimassa epäyhtälö

$$\vec{t} \cdot \vec{m} < \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) - a.$$

Nyt  $\vec{t}$ -permutatiivisuudesta seuraa, että on olemassa yksikäsitteinen tila  $s \in S$ , jonka asettamalla soluun  $\vec{x}$ , saadaan  $G^n(b)(\vec{y}) = e(\vec{y})$ , missä  $\vec{y} = \vec{x} - n\vec{n}_i$ . Lisäksi solulle  $\vec{y}$  pätee  $\vec{t} \cdot (\vec{y} - \vec{k}) = a$ . Solun  $\vec{x}$  mielivaltaisuudesta ja induktiosta seuraa, että

$$G^n(b)(\vec{x}) = e(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{k}) \geq 0.$$

□

## 5 Topologiset sekoittuvuusominaisuudet

Seuraavaksi siirrytään tutkielman päätutkimuskohteeseen. Osion tarkoituksena on esitellä erilaisia soluautomaattifunktioiden sekoittuvuusominaisuuksia ja vertailla niitä keskenään. **Dynaaminen systeemi**  $(X, f)$  koostuu kompaktista metrisestä avaruudesta  $X$  ja jatkuvasta funktiosta  $f: X \rightarrow X$ . Kuten nähtiin Lauseessa 4.9, konfiguraatioavaruuden ja soluautomaattifunktion muodostama pari  $(S^{\mathbb{Z}^d}, G)$  on dynaaminen systeemi kaikille soluautomaattifunktiolle  $G$ . Tutkielman jatkossa esiteltäviä sekoittuvuusominaisuuksia on tutkittu monilla eri dynaamisilla systeemeillä, ja tässä tutkielmassa ne esitetään soluautomaattifunktiolle. Sekoittuvuusominaisuuksilla tarkoitetaan yksinkertaistettuna, miten dynaamista systeemiä iteroidessa avoimet joukot leikkaavat toisiaan.

### 5.1 Transitiivisuus

Tässä alaosiossa esitetään transitiivisuus, heikko sekoittuvuus ja täysi transitiivisuus, ja osoitetaan, että ne ovat keskenään ekvivalentteja ominaisuuksia. Lisäksi esitetään sekoittuvuus. Alaosio perustuu lähteeseen [8]. Joukon  $N_G(U, V)$  tarkastelu, Lauseen 5.13 todistus ja Lause 5.10 ovat tutkielman omaa tuotosta.

Aloitetaan määrittelemällä leikkaushetkijoukko  $N_G(U, V)$ . Joukko on esitetty lähteessä [16].

**Määritelmä 5.1.** Olkoon  $G$  soluautomaattifunktio ja olkoot  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  epätyhjiä avoimia joukkoja. Joukkojen  $U$  ja  $V$  **leikkaushetkijoukko** on

$$N_G(U, V) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid G^n(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Joukko  $N_G(U, V)$  koostuu niistä ajanhetkistä, joilla joukot  $U$  ja  $V$  leikkaavat keskenään.

Jatkossa tutkitaan, miten erilaiset sekoittuvuusominaisuudet vaikuttavat joukon  $N_G(U, V)$  käyttäytymiseen.

**Määritelmä 5.2.** Soluautomaattifunktio  $G$  on **transitiivinen**, jos kaikille epätyhjiille avoimille joukoille  $U$  ja  $V$  on olemassa sellainen  $n \geq 0$ , että  $G^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Seurauksen 3.8 mukaan sylinterit muodostavat kannan konfiguraatioavaruudessa  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , joten soluautomaattifunktio on transitiivinen, jos jokaiselle epätyhjälle sylinterille  $U$  ja  $V$  on olemassa sellainen  $n \geq 0$ , että  $G^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Näytetään, että transitiivisuus on vain surjektiivisten soluautomaattifunktioiden ominaisuus.

**Lause 5.3.** Transitiivinen soluautomaattifunktio  $G$  on surjektiivinen.

*Todistus.* Oletetaan, että soluautomaattifunktio  $G$  ei ole surjektiivinen. Lauseen 4.12 mukaan on olemassa sylinteri  $V = \text{Syl}(c, D)$ , jolla ei ole alkukuvaa. Olkoon  $U = (e, D)$  sylinteri, missä  $e|_D \neq c|_D$ . Tällöin  $V \cap U = \emptyset$ . Lisäksi  $V \cap G^n(S^{\mathbb{Z}^d}) = \emptyset$  kaikilla  $n \geq 1$ , joten  $G^n(U) \cap V = \emptyset$  kaikilla  $n \geq 0$ .  $\square$

Olkoot  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  epätyhjiä avoimia joukkoja. Transitiivisuudesta seuraa, että on olemassa sellainen  $n \geq 0$ , että  $G^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , joten jokaisella transitiivisella soluautomaattifunktiolla joukko  $N_G(U, V)$  on epätyhjä. Lisäksi soluautomaattifunktio  $G$  on jatkuva, joten Lauseen 2.27 mukaan  $G^{-(n+1)}(V)$  on avoin. Lauseen 5.3 mukaan  $G$  on surjektiivinen, joten joukko  $G^{-(n+1)}(V)$  on myös epätyhjä. Transitiivisuudesta seuraa, että on olemassa sellainen luku  $k \geq 0$  ja konfiguraatio  $x \in U$ , että  $G^k(x) \in G^{-(n+1)}(V)$ . Näin ollen  $G^{n+k+1}(U) \cap V \neq \emptyset$ , joten joukko  $N_G(U, V)$  on ääretön transitiivisella soluautomaattifunktiolla  $G$ .

**Esimerkki 5.4.** XOR-soluautomaattifunktio  $G$  on transitiivinen.

*Todistus.* Kuten todettiin Esimerkissä 4.28, soluautomaattifunktio  $G$  on permutatiivinen naapurua 1 vastaavassa muuttujassa. Olkoot  $U = \text{Syl}(u, 0)$  ja  $V = \text{Syl}(v, 0)$  sellaisia sylintereitä, että  $u, v \in S^n$ . Olkoot  $c \in U$  ja  $e \in V$  konfiguraatioita. Lemmasta 4.29 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $b$ , että

$$b(x) = c(x) \quad \text{kaikilla } x < n, \quad (11)$$

$$G^n(b)(x) = e(x) \quad \text{kaikilla } x \geq 0. \quad (12)$$

Täten konfiguraatio  $b \in U$  ja kuva  $G^n(b) \in V$ . Koska sanat  $u$  ja  $v$  olivat mielivaltaisia, osoitettiin, että kaikille alueessa  $D = \{0, \dots, n-1\}$  määritellyille sylintereille  $U$  ja  $V$  on olemassa sellainen  $n \geq 0$ , että  $G^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Tämä todistaa transitiivisuuden.  $\square$

Selvästi kaikki surjektiiviset soluautomaattifunktiot eivät ole transitiivisia, kuten esimerkiksi identiteettifunktio  $I: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$ . Kaikille avoimille epätyhjiille joukoille  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$ , joilla leikkaus  $U \cap V$  on tyhjä, myös leikkaus  $I^n(U) \cap V$  on tyhjä kaikilla  $n \geq 0$ .

**Määritelmä 5.5.** Soluautomaattifunktio  $G$  on **sekoittuva**, jos kaikille epätyhjiille avoimille joukoille  $U$  ja  $V$  on olemassa sellainen  $n \geq 0$ , että  $G^k(U) \cap V \neq \emptyset$  aina, kun  $k \geq n$ .

Kuten transitiivisuuden tapauksessa, soluautomaattifunktio on sekoittuva, jos se täyttää sekoittuvuuden ehdot epätyhjiille sylintereille  $U$  ja  $V$  avoimien joukkojen sijaan.

Sekoittuvalla soluautomaattifunktiolla joukon  $N_G(U, V)$  komplementti on äärellinen. Selvästi sekoittuva soluautomaattifunktio  $G$  on transitiivinen. Ei tiedetä seuraako transitiivisuudesta sekoittuvuus vai onko olemassa soluautomaattifunktioita, jotka ovat transitiivisia, mutta eivät sekoittuvia. Yksinkertainen esimerkki sekoittuvasta soluautomaattifunktiosta on translaatiofunktio  $\tau_{\vec{n}}$ .

**Esimerkki 5.6.** Translaatiofunktio  $\tau_{\vec{n}}: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on sekoittuva, kun  $\vec{n} \neq \vec{0}$ .

*Todistus.* Olkoot  $U = \text{Syl}(e, D)$  ja  $V = \text{Syl}(c, E)$  sylintereitä. Alueet  $E$  ja  $D$  ovat äärellisiä, joten on olemassa sellainen  $m \geq 0$ , että  $(D + i\vec{n}) \cap E = \emptyset$  kaikilla  $i \geq m$ . Tällöin  $\tau_{\vec{n}}^i(U) \cap V \neq \emptyset$  kaikilla  $i \geq m$ .  $\square$

Esimerkki 5.6 yleistetään myöhemmin Lauseessa 5.24 kaikille surjektiivisille oikeanpuoleisille soluautomaattifunktiolle. Näytetään seuraavaksi, että myös XOR-soluautomaattifunktio on sekoittuva.

**Esimerkki 5.7.** XOR-soluautomaattifunktio  $G$  on sekoittuva.

*Todistus.* Todistus menee muuten samoin kuin Esimerkin 5.4 todistus, mutta sekoittuvuuden osoittamiseksi voidaan soveltaa Lemmaa 4.29 kaikille  $m \geq n$ . Tällöin saadaan sellaiset konfiguraatiot  $b_n, b_{n+1}, \dots$ , joilla  $b_m \in U$  ja  $G^m(b_m) \in V$  kaikille  $m \geq n$ .  $\square$

Esimerkki 5.7 yleistetään myöhemmin Lauseessa 5.26 kaikille oikea-permutatiivisille soluautomaattifunktiolle.

Esitellään seuraavaksi ominaisuus, joka on vahvempi ominaisuus kuin transitiivisuus, mutta heikompi kuin sekoittuvuus. Soluautomaattifunktiolle  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  ja  $H: A^{\mathbb{Z}^l} \rightarrow A^{\mathbb{Z}^l}$  karteesian tulo  $G \times H: S^{\mathbb{Z}^d} \times A^{\mathbb{Z}^l} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d} \times A^{\mathbb{Z}^l}$  on soluautomaattifunktio, jolla on kaksi toisistaan riippumatonta kerrosta. Funktio  $G$  toimii toisessa kerroksessa ja  $H$  toisessa.

Seuraava määritelmä ja lause perustuvat lähteeseen [16].

**Määritelmä 5.8.** Soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on **heikosti sekoittuva**, jos soluautomaattifunktio  $G \times G: S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d}$  on transitiivinen.

Selvästi heikosti sekoittuva soluautomaattifunktio on transitiivinen. Näytetään seuraavaksi, että myös käänteinen on voimassa.

**Lause 5.9.** Transitiivinen soluautomaattifunktio  $G$  on heikosti sekoittuva.

*Todistus.* Olkoot  $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  epätyhjiä sylintereitä. Sylintereiden leikkaus  $Syl(c_1, D_1) \cap Syl(c_2, D_2) \neq \emptyset$ , kun alueiden leikkaus  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ . Koska alueet  $D_1$  ja  $D_2$  ovat äärellisiä, on olemassa sellainen translaatiofunktio  $\tau_{\vec{m}}$ , että  $\tau_{\vec{m}}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$  ja  $\tau_{\vec{m}}(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$ . Joukot  $U = \tau_{\vec{m}}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$  ja  $V = \tau_{\vec{m}}(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$  ovat avoimia kahden avoimen joukon leikkauksina. Koska  $G$  on transitiivinen, on olemassa sellainen  $n \geq 0$ , että  $G^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Nyt on olemassa sellaiset konfiguraatiot  $\tau_{\vec{m}}(c) \in U_1$  ja  $e \in U_2$ , että  $G^n(\tau_{\vec{m}}(c)) \in \tau_{\vec{m}}(V_1)$  ja  $G^n(e) \in V_2$ . Lauseen 4.7 mukaan  $G^n(\tau_{\vec{m}}(c)) = \tau_{\vec{m}}(G^n(c))$ , joten  $G^n(c) \in V_1$ . On siis olemassa sellainen  $n \geq 0$ , että  $G^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$  ja  $G^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ . Koska sylinterit olivat mielivaltaisia,  $G \times G$  on transitiivinen.  $\square$

Lause 5.9 on erikoitapaus Lauseesta 7.5, joka todistetaan Osiossa 7. Sen mukaan kaikkien transitiivisten soluautomaattifunktioiden  $G$  ja  $H$  karteesian tulo  $G \times H$  on transitiivinen.

Induktiolla voidaan todistaa transitiiviselle soluautomaattifunktiolle  $G$ , että jokainen äärellinen karteesian tulo  $G \times G \times \dots \times G$  on transitiivinen.

**Lause 5.10.** Olkoon  $G$  transitiivinen soluautomaattifunktio. Tällöin  $G \times G \times \dots \times G$  on transitiivinen.

*Todistus.* Oletetaan, että jos  $G$  on transitiivinen, niin  $\prod_{i=1}^n G$  on transitiivinen. Olkoot joukot  $U_1, \dots, U_{n+1}, V_1, \dots, V_{n+1}$  epätyhjiä sylintereitä. Olkoon  $\tau_{\vec{m}}$  sellainen translaatiofunktio, jolla leikkaukset  $U_i \cap \tau_{\vec{m}}(U_{n+1}) \neq \emptyset$  ja  $V_i \cap \tau_{\vec{m}}(V_{n+1}) \neq \emptyset$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tällainen translaatio on olemassa, koska sylinterit ollaan määritelty äärellisissä alueissa. Nyt joukot  $A_i = U_i \cap \tau_{\vec{m}}(U_{n+1})$  ja  $B_i = V_i \cap \tau_{\vec{m}}(V_{n+1})$  ovat epätyhjiä ja avoimia kaikilla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Oletuksesta seuraa, että on olemassa sellainen  $k \geq 0$ , että  $G^k(A_i) \cap B_i \neq \emptyset$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Koska  $G$  kommutoi siirron kanssa,  $G^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ , mikä todistaa väitteen.  $\square$

Seuraavaksi osoitetaan, että transitiivisuudesta seuraa, että leikkaushetkijoukko  $N_G(U, V)$  sisältää mielivaltaisen pitkiä peräkkäisten luonnollisten lukujen välejä. Seuraava lause on lähteestä [13].

**Lause 5.11.** Olkoon  $G$  transitiivinen soluautomaattifunktio,  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  avoimia epätyhjiä joukkoja ja  $N_G(U, V)$  leikkaushetkijoukko. Tällöin jokaista lukua  $m \in \mathbb{N}$  vastaavalle joukolle  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  on olemassa sellainen  $k \in \mathbb{N}_0$ , että  $M + k \subset N_G(U, V)$ .

*Todistus.* Kiinnitetään luku  $m \in \mathbb{N}$  ja olkoon  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ . Joukko  $V$  on avoin, joten Lauseen 2.27 mukaan  $G^{-n}(V)$  on avoin kaikille  $n \geq 0$ . Lisäksi  $G$  on surjektiivinen, joten joukko  $G^{-n}(V)$  on epätyhjä kaikille  $n \geq 0$ . Lauseen 5.10 mukaan on olemassa sellainen  $k \in \mathbb{N}_0$ , että  $G^k(U) \cap G^{-i}(V) \neq \emptyset$  kaikilla  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Tästä seuraa, että  $G^{k+i}(U) \cap V \neq \emptyset$  kaikilla  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , joten  $M + k \subset N_G(U, V)$ . Alkion  $m$  mielivaltaisuus todistaa väitteen.  $\square$

On osoitettu, että transitiiviselle soluautomaattifunktiolle  $G$  karteeminen tulo  $G \times G \times \dots \times G$  on transitiivinen. Näytetään seuraavaksi, että  $G \circ G \circ \dots \circ G$  on transitiivinen, kun  $G$  on transitiivinen. Seuraava määritelmä on lähteestä [16].

**Määritelmä 5.12.** Soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on **täysin transitiivinen**, jos  $G^n$  on transitiivinen kaikilla  $n \geq 1$ .

**Lause 5.13.** Transitiivinen soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on täysin transitiivinen.

*Todistus.* Kiinnitetään luku  $m \in \mathbb{N}$ . Olkoot  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  epätyhjiä avoimia joukkoja ja  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ . Lauseen 5.11 mukaan on olemassa sellainen  $k \in \mathbb{N}$ , että  $M + k \subset N_G(U, V)$ . Nyt  $m \mid k + i$  jollekin  $i \in M$  ja  $G^{k+i}(U) \cap V \neq \emptyset$ .  $\square$

**Seuraus 5.14.** Soluautomaattifunktiolle pätee, että transitiivisuus, heikko sekoittuvuus ja täysi transitiivisuus ovat ekvivalentteja ominaisuuksia.

Yleisesti dynaamisilla systeemeillä pätee, että jos dynaaminen systeemi  $X$  on heikosti sekoittuva, niin mikä tahansa äärellinen karteeminen tulo  $X \times X \times \dots \times X$  on transitiivinen. Tämän tuloksen todistus löytyy lähteestä [6]. Lisäksi Lause 5.11 ja Lause 5.13 seurasivat suoraan Lauseesta 5.10, eikä näiden todistuksissa käytetty soluautomaattifunktioiden erityisominaisuuksia. Näin ollen kaikki heikosti sekoittuvat dynaamiset systeemit ovat täysin transitiivisia.

## 5.2 Vahva transitiivisuus

Tarkastellaan seuraavaksi sekoittuvuusominaisuuksia konfiguraatioiden  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  ratajoukkojen  $\mathcal{O}(c)$  avulla avoimien joukkojen sijaan. Tässä alaosiassa esitellään sekoittuvuusominaisuudet minimaalisuus ja vahva transitiivisuus. Lopuksi tarkastellaan Alaosiassa 4.3 esitettyjen soluautomaattifunktioiden sekoittuvuusominaisuuksia. Transitiivisten pisteiden määritelmä ja Lause 5.17 perustuvat lähteeseen [8].

**Määritelmä 5.15.** Konfiguraatio  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  on transitiivinen, jos ratajoukko  $\mathcal{O}(c)$  on tiheä avaruudessa  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Transitiivisten konfiguraatioiden joukko on

$$\mathcal{T}_G = \{c \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid \mathcal{O}(c) \text{ on tiheä avaruudessa } S^{\mathbb{Z}^d}\}.$$

Annetaan esimerkki transitiivisesta pisteestä siirtofunktiolle  $\sigma: S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$ . Tämä esitellään lähteessä [11].

**Esimerkki 5.16.** Siirtofunktiolla  $\sigma: S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$  on transitiivinen piste.

*Todistus.* Olkoon  $w_1, w_2, \dots$  kaikkien äärellisten sanojen luettelo lyhyimmästä pi-simpään. Olkoon  $c = \dots w_3 w_2 w_1 w_1 w_2 w_3 \dots$  konfiguraatio, jossa sanat ollaan liitetty yhteen. Olkoon  $U = (e, [r, r])$  avoin pallo, jossa  $v = e_{[-r, r]}$  on sana, joka määrittelee sylinterin  $U$ . Sana  $v$  esiintyy konfiguraatiossa  $c$  äärettömän monta kertaa molemmilla puolilla solua 0. Näin ollen on olemassa sellainen  $m \geq 0$ , että  $\sigma^m(c) \in U$ . Ratajoukko  $\mathcal{O}(c)$  on siis tiheä.  $\square$

**Lause 5.17.** Olkoon  $G$  soluautomaattifunktio. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1.  $G$  on transitiivinen.
2.  $\mathcal{T}_G \neq \emptyset$ .
3.  $\mathcal{T}_G$  on residuaali.

*Todistus.* "1.  $\implies$  3." Olkoon  $G$  transitiivinen. Olkoon  $\mathcal{S} = U_1, U_2, \dots$  sylintereiden perhe. Olkoon  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sellaisten joukkojen  $X_n$  jono, että

$$X_n = \{c \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid G^m(c) \in U_n \text{ jollekin } m \geq 0\}.$$

Tällöin  $X_n$  on kaikkien sellaisten pisteiden joukko, joiden radat päätyvät sylinteriin  $U_n$ . Tällöin transitiivisten pisteiden joukko on leikkaus

$$\mathcal{T}_G = \bigcap_{i=0}^{\infty} X_i.$$

Osoitetaan ensin, että jokainen  $X_n$  on avoin. Jos  $c \in X_n$ , on olemassa sellainen luku  $m \geq 0$ , että  $G^m(c) \in U_n$ . Funktio  $G^m$  on jatkuva, joten Lauseen 2.27 mukaan joukko  $G^{-m}(U_n)$  on avoin. Täten jokaista konfiguraatiota  $c \in X_n$  kohti on olemassa sellainen avoin joukko  $G^{-m}(U_n)$ , että  $c \in G^{-m}(U_n) \subseteq X_n$ . Näin ollen joukko  $X_n$  on avoin. Nyt riittää osoittaa, että  $X_n$  on tiheä. Olkoon  $U \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  avoin. Funktion  $G$  transitiivisuudesta seuraa, että on olemassa sellainen  $k \geq 0$ , että  $G^k(U) \cap U_n \neq \emptyset$ . Tästä seuraa, että  $U \cap X_n \neq \emptyset$ . On osoitettu, että jokaisen avoimen joukon rata päättyy joukkoon  $X_n$ , joten joukko  $X_n$  on tiheä. Näin ollen joukko  $\mathcal{T}_G$  on numeroituvan monen tiheän avoimen joukon leikkaus eli residuaali.

"3.  $\implies$  2." Seuraa Lauseesta 3.10 ja Lauseesta 2.23.

"2.  $\implies$  1." Olkoon konfiguraatio  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  transitiivinen ja olkoot joukot  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  avoimia ja epätyhjiä. Ratajoukon  $\mathcal{O}(c)$  tiheydestä seuraa, että on olemassa sellainen  $n \geq 0$ , että  $G^n(c) \in U$ . Koska  $V' = V \setminus \{c, G(c), \dots, G^n(c)\}$  on epätyhjä ja avoin, on olemassa sellainen  $m \geq n+1$ , että  $G^m(c) \in V'$ . Tästä seuraa, että  $G^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ . Joukot  $U$  ja  $V$  olivat mielivaltaisia, joten  $G$  on transitiivinen.  $\square$

Näytettiin, että transitiivisilla soluautomaattifunktiolla on residuaali joukko transitiivisia konfiguraatioita ja transitiivisesta konfiguraatiosta seuraa, että soluautomaattifunktio on transitiivinen.

Seuraavaksi esitellään minimaalinen soluautomaattifunktio. Minimaalisuuteen liittyvä määritelmä ja lause perustuvat lähteeseen [9].

**Määritelmä 5.18.** Soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on **minimaalinen**, jos jokainen konfiguraatio  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  on transitiivinen.

Näytetään seuraavaksi, että minimaalisuus ei ole soluautomaattifunktioiden ominaisuus. Konfiguraatio  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  on **homogeeninen**, jos jokaisessa solussa on sama tila. Toisin sanoen  $c(\vec{n}) = a$  kaikilla  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$ , missä  $a \in S$ . Merkitään homogeenistä konfiguraatiota, jossa jokaisessa solussa on tila  $a$ , merkinnällä  $\bar{a}$ .

**Lause 5.19.** Soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  ei ole koskaan minimaalinen.

*Todistus.* Olkoon  $a \in S$ . Konfiguraatiossa  $\bar{a}$  jokaisen solun naapureilla on samat tilat, joten  $G(\bar{a}) = \bar{b}$  jollekin  $b \in S$ . Eli  $\mathcal{O}(\bar{a})$  on äärellinen eikä siis tiheä.  $\square$

Esimerkiksi translaatiofunktio  $\tau_{\vec{r}}: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on sekoittuva dynaaminen systeemi, joka ei ole minimaalinen. Olkoon  $(\varphi_\alpha, \mathbb{T})$  sellainen pari, että  $\varphi_\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  on irrationaalinen kiertofunktio ja avaruus  $\mathbb{T} = [0, 1)$  on varustettu metriikalla  $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$ . Tämä on esimerkki dynaamisesta systeemistä, joka on minimaalinen, mutta ei sekoittuva. Tämän todistus löytyy lähteestä [9]. Sekoittuvuus ja minimaalisuus eivät siis kumpikaan yleisesti implikoivat toistaan.

Esitetään seuraavaksi ominaisuus, joka on soluautomaattifunktioilla aidosti transitiivisuutta vahvempi. Seuraava määritelmä ja Lause 5.22 perustuvat lähteeseen [1].

**Määritelmä 5.20.** Soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on **vahvasti transitiivinen**, jos jokaisen konfiguraation  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  alkukuvajoukko  $\{G^{-n}(c) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  on tiheä.

Ekvivalentti määritelmä on, että jokaiselle epätyhjälle avoimelle joukolle  $U \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  pätee

$$\bigcup_{k \geq 0} G^k(U) = S^{\mathbb{Z}^d}.$$

Vahvasta transitiivisuudesta seuraa, että joukko  $N_G(U, \{c\})$  on epätyhjä jokaiselle epätyhjälle avoimelle joukolle  $U \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  ja konfiguraatiolle  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$ . Vahvasti transitiiviset soluautomaattifunktiot ovat selvästi transitiivisia. Minimaalisuuden sijaan on olemassa vahvasti transitiivisia soluautomaattifunktioita.

**Esimerkki 5.21.** XOR-soluautomaattifunktio  $G$  on vahvasti transitiivinen.

*Todistus.* Olkoon  $U = \text{Syl}(c, D)$  sylinteri, jonka alue on  $D = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Olkoot  $c \in U$  ja  $d \in S^{\mathbb{Z}}$  konfiguraatioita. Esimerkin 4.28 mukaan  $G$  on permutatiivinen soluja 0 ja 1 vastaavissa muuttujissa. Lemman 4.29 mukaan on olemassa sellainen konfiguraatio  $e$ , että

$$\begin{aligned} e(x) &= c(x) && \text{kaikilla } x < n, \\ G^n(e)(x) &= d(x) && \text{kaikilla } x \geq 0. \end{aligned}$$

Lemman 4.30 mukaan on olemassa sellainen konfiguraatio  $b$ , että

$$\begin{aligned} b(x) &= e(x) && \text{kaikilla } x \geq 0, \\ G^n(b)(x) &= d(x) && \text{kaikilla } x < 0. \end{aligned}$$

On määritelty sellainen konfiguraatio  $b$ , että  $b(x) = e(x) = c(x)$  pätee kaikilla alueeseen  $D$  kuuluvilla soluilla  $x$ , joten konfiguraatio  $b \in U$ . Koska soluautomaattifunktion  $G$  vasemmanpuoleisin naapuri on 0, konfiguraation  $G^i(b)$  tiloihin alueessa  $\{x \geq 0\}$  ei vaikuta konfiguraation  $b$  tilat alueessa  $\{x < 0\}$ . Konfiguraatiolle  $b$  pätee  $b(x) = e(x)$  kaikilla  $x \geq 0$ , joten

$$G^m(b)(x) = G^m(e)(x) = d(x) \quad \text{kaikilla } x \geq 0.$$

Lisäksi konfiguraatiolle  $b$  pätee

$$G^m(b)(x) = d(x) \quad \text{kaikilla } x < 0.$$

Näin ollen jokaiselle sylinterille  $U$  ja konfiguraatiolle  $d$  joukko  $N_G(U, \{d\})$  on epätyhjä, ja  $G$  on vahvasti transitiivinen.  $\square$

Toisaalta transitiivisuudesta ei seuraa vahva transitiivisuus, koska on olemassa transitiivisia soluautomaattifunktioita, jotka eivät ole vahvasti transitiivisia. Tämä voidaan osoittaa rajaamalla injektiiiset soluautomaattifunktiot kokonaan pois vahvasti transitiivisten soluautomaattifunktioiden luokasta.

**Lause 5.22.** Vahvasti transitiivinen soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  ei ole injektiiivinen.

*Todistus.* Olkoon  $\mathcal{H} = \{\overline{s}_1, \dots, \overline{s}_n\}$  homogeenisten konfiguraatioiden joukko. Koska  $G$  on injektiiivinen, Lauseen 4.18 mukaan  $G$  on bijektiiivinen ja Lauseen 4.17 mukaan kääntyvä. Kaikkien homogeenisten konfiguraatioiden  $\overline{s}_i$  kuva  $G(\overline{s}_i)$  on homogeeninen. Kääntävyydestä seuraa, että konfiguraation  $\overline{s}_i$  alkukuvat ovat myös homogeenisiä, joten  $\{G^{-n}(\overline{s}_i) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{H}$ . Näin ollen konfiguraation  $\overline{s}_i$  alkukuvavara on äärellinen eikä siis tiheä. Täten soluautomaattifunktio  $G$  ei ole vahvasti transitiivinen.  $\square$

**Seuraus 5.23.** Translaatiofunktio  $\tau: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  ei ole vahvasti transitiivinen.

Ei ole tiedossa, seuraako vahvasta transitiivisuudesta sekoittuvuus vai onko olemassa vahvasti transitiivisia, mutta ei sekoittuvia soluautomaattifunktioita.

Tarkastellaan seuraavaksi sekoittuvuutta ja vahvaa transitiivisuutta Alaosion 4.3 soluautomaattifunktiolle. Alaosion lopussa esitettävät tapauksen  $d = 1$  määritelmät ja lauseet pohjautuvat lähteeseen [3]. Useampiulotteisten  $\vec{t}$ -permutatiivisten soluautomaattifunktioiden tarkastelu mukailee lähdeettä [5]. Alaosion lopun todistukset ja esimerkit ovat tutkielman omaa tuotosta

**Lause 5.24.** Surjektiiivinen oikeanpuoleinen soluautomaattifunktio (*vasemmanpuoleinen soluautomaattifunktio*)  $G: S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$  on sekoittuva.

*Todistus.* Olkoot  $c$  ja  $d$  konfiguraatioita ja olkoot  $U, V \subset S^{\mathbb{Z}}$  avoimia  $2^{-r}$  säteisiä  $c$  ja  $d$  keskisiä  $\varepsilon$ -palloja. Pallojen  $U$  ja  $V$  sisältävien konfiguraatioiden tilat ollaan siis määritelty välillä  $[-r, r]$ . Näiden tarkastelu riittää sekoittuvuuteen, koska jokaisella sylinterillä on  $\varepsilon$ -pallo osajoukkona riittävän suurelle luvulle  $r > 0$ . Olkoon  $l = n_1$  naapurustovektorin vasemmanpuoleisin solu. Olkoon  $n \geq 1$  sellainen luku, että  $nl >$

2r. Nyt Lemmasta 4.22 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $d_n \in S^{\mathbb{Z}}$ , että

$$\begin{aligned} d_n(x) &= c(x) && \text{kaikilla } x < nl - r, \\ G^m(d_n)(x) &= e(x) && \text{kaikilla } -r \leq x \leq r. \end{aligned}$$

Oletuksista  $c \in U$ ,  $nl > 2r$  ja  $e \in V$  seuraa, että konfiguraatio  $d_n \in U$  ja  $G^m(d_n) \in V$ . Soveltamalla Lemmaa 4.22 kaikille luvuille  $m \geq n$  saadaan konfiguraatio  $d_{n+1}, d_{n+2}, \dots$ , joilla  $d_m \in U$  ja  $G^m(d_m) \in V$ . Tästä seuraa, että soluautomaattifunktio  $G$  on sekoittuva.  $\square$

Näytetään, että  $\vec{t}$ -puoleiset soluautomaattifunktiot ovat sekoittuvia.

**Lause 5.25.** Surjektiivinen  $\vec{t}$ -puoleinen soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on sekoittuva.

*Todistus.* Olkoot  $U = \text{Syl}(c, D)$  ja  $V = \text{Syl}(e, D)$  alueessa  $D$  määriteltyjä sylintereitä. Olkoon  $\vec{n}_i \in N$  sellainen naapuri, että sen pistetulolle vektorin  $\vec{t}$  kanssa pätee epäyhtälöt

$$\forall \vec{n}_j \in N: \vec{n}_i \cdot \vec{t} \leq \vec{n}_j \cdot \vec{t}.$$

Olkoon  $n \geq 1$  sellainen kokonaisluku, että

$$\forall \vec{x} \in D: \vec{x} \cdot \vec{t} < n(\vec{t} \cdot \vec{n}_i).$$

Tällöin leikkaus  $N_m(D) \cap D$  on tyhjä kaikille  $m \geq n$ , kun  $N_m$  on soluautomaattifunktion  $G^m$  naapurustovektori. Nyt Lemmasta 4.25 seuraa kaikille luvuille  $m \geq n$ , että on olemassa sellainen konfiguraatio  $d_m$ , että

$$\begin{aligned} d_m(\vec{x}) &= c(\vec{x}) && \text{kaikilla } \vec{x} \notin N_m(D), \\ G^m(d_m)(\vec{x}) &= e(\vec{x}) && \text{kaikilla } \vec{x} \in D. \end{aligned}$$

Tällöin konfiguraatio  $d_m \in U$  ja konfiguraatio  $G^m(d_m) \in V$ . Näin ollen soluautomaattifunktio  $G$  on sekoittuva.  $\square$

Siirrytään permutatiivisiin soluautomaattifunktioihin.

**Lause 5.26.** Vasen-permutatiivinen (*oikea-permutatiivinen*) soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$ , jolla naapuri  $n_1 < 0$  (*vastaavasti*  $n_m > 0$ , *kun*  $G$  *on oikea-permutatiivinen*), on sekoittuva.

*Todistus.* Olkoon  $f: S^m \rightarrow S$  vasen-permutatiivinen. Olkoot joukot  $U, V \subset S^{\mathbb{Z}}$  avoimia  $2^{-r}$  säteisiä palloja. Tällöin niiden tilat ollaan määritelty välillä  $[-r, r]$ . Olkoon  $k \in \mathbb{N}$ . Merkitään soluautomaattifunktion  $G^k$  naapurustovektoria  $N_k$  ja paikallista päivitysfunktiota  $f_k$ . Funktio  $f_k$  on permutatiivinen naapurissa  $kn_1 \in N_k$ , koska  $f$  on permutatiivinen naapurissa  $n_1$ . Olkoot  $c \in U$  ja  $d \in V$  konfiguraatioita ja  $m \in \mathbb{N}$  pienin sellainen luku, että  $mn_1 < -2r$ . Määritellään kaikille  $k \geq m$  sellainen konfiguraatio  $d_k \in U$ , että  $G^k(d_k) \in V$ . Lemmasta 4.30 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $d_m$ , että

$$\begin{aligned} d_m(x) &= c(x) && \text{kaikilla } x > r + mn_1, \\ G^m(d_m)(x) &= e(x) && \text{kaikilla } x \leq r. \end{aligned}$$

Koska konfiguraatio  $c \in U$  ja  $e \in V$  sekä  $mn_1 < -2r$ , konfiguraatio  $d_m$  kuuluu joukkoon  $U$  ja konfiguraatio  $G^m(d_m)$  kuuluu joukkoon  $V$ . Koska kaikilla  $k \geq m$  pätee  $kn_1 < -2r$ , Lemmaa 4.30 soveltamalla voidaan määritellä sellaiset konfiguraatiot  $d_{m+1}, d_{m+2}, \dots$ , että  $d_{m+i} \in U$  ja  $G^{m+i}(d_{m+i}) \in V$  kaikilla  $i \geq 0$ . Avoimet pallot  $U$  ja  $V$  olivat mielivaltaisia, joten soluautomaattifunktio  $G$  on sekoittuva.  $\square$

Lauseista 5.24 ja 5.26 saadaan Seuraus 5.27 soluautomaattifunktioille, jotka ovat vasen- ja oikea-permutatiivisia.

**Seuraus 5.27.** Vasen- ja oikea-permutatiivinen soluautomaattifunktio  $G$  on sekoittuva, jos  $n_1 \neq 0$  tai  $n_m \neq 0$ .

Näytetään seuraavaksi, että  $\vec{t}$ -permutatiiviset soluautomaattifunktiot ovat sekoittuvia.

**Lause 5.28.** Olkoon  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  soluautomaattifunktio, joka on  $\vec{t}$ -permutatiivinen jollekin nollasta eroavalle vektorille  $\vec{t}$ . Tällöin  $G$  on sekoittuva.

*Todistus.* Koska soluautomaattifunktio  $G$  on  $\vec{t}$ -permutatiivinen, on olemassa naapuri  $\vec{n}_i \in N$ , jossa  $G$  on permutatiivinen ja jolle pätee epäyhtälöt

$$\forall j \neq i: \vec{t} \cdot \vec{n}_i > \vec{t} \cdot \vec{n}_j.$$

Olkoot  $U, V \subset S^{\mathbb{Z}^d}$  avoimia  $2^{-r}$  säteisiä palloja, jollekin kokonaisluvulle  $r \geq 1$ . Tällöin sylinterit  $U$  ja  $V$  ollaan määritelty  $(2r+1)^d$  kokoisessa hyperkuutiossa  $D$ . Olkoon  $m \geq 0$  pienin sellainen kokonaisluku, että  $(\vec{t} \cdot \vec{n}_i)m > 2(\vec{t} \cdot \vec{x})$  kaikilla  $\vec{x} \in D$ . Määritellään kaikille  $n \geq m$  sellainen konfiguraatio  $b_n \in U$ , että  $G^n(b) \in V$ . Olkoon  $N_n$  soluautomaattifunktion  $G^n$  naapurustovektori ja  $f_n$  sen paikallinen päivytysfunktio. Tällöin  $f_n$  on permutatiivinen naapurissa  $n\vec{n}_i$ , ja kaikille naapureille  $\vec{m} \in N_n$ , joilla  $\vec{m} \neq n\vec{n}_i$ , pätee

$$n(\vec{t} \cdot \vec{n}_i) > \vec{t} \cdot \vec{m}.$$

Olkoot  $c \in U$  ja  $d \in V$  konfiguraatioita. Lemmasta 4.33 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $b_n$ , että

$$\begin{aligned} b_n(\vec{x}) &= c(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot \vec{x} < n(\vec{t} \cdot \vec{n}_i), \\ G^n(b)(\vec{x}) &= d(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} + n\vec{n}_i) \geq 0. \end{aligned}$$

Kaikille soluille  $\vec{x} \in D$  pätee äskeiset ehdot, joten konfiguraatio  $b_n \in U$  ja konfiguraatio  $G^n(b_n) \in V$ . Näin ollen soluautomaattifunktio  $G$  on sekoittuva.  $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi vahvaa transitiivisuutta Alaosion 4.3 soluautomaattifunktiolle. Translaatio  $\tau_{\vec{n}}$  on esimerkki oikeanpuoleisesta soluautomaattifunktiosta, joka ei ole vahvasti transitiivinen, joten Määritelmän 4.20 soluautomaattifunktiot eivät välttämättä ole vahvasti transitiivisia. Permutatiivisille soluautomaattifunktiolle saadaan seuraava lause.

**Lause 5.29.** Vasen- ja oikea-permutatiivinen soluautomaattifunktio  $G$ , jolla  $|N| \geq 2$ , on vahvasti transitiivinen.

*Todistus.* Olkoon soluautomaattifunktio  $G$  permutatiivinen naapureissa  $n_1$  ja  $n_m$ . Olkoon  $U \subset S^{\mathbb{Z}}$  välillä  $[-r+1, r-1]$  määritelty  $2^{-(r-1)}$  säteinen avoin pallo, ja olkoot konfiguraatiot  $c \in U$  ja  $d \in S^{\mathbb{Z}}$  mielivaltaisia. Olkoon  $k \geq 1$  sellainen kokonaisluku, että epäyhtälö  $k(n_m - n_1) > 2r$  on voimassa. Tällöin pätee  $-r - kn_1 > r - kn_m$ . Lemmasta 4.30 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $e$ , että

$$\begin{aligned} e(x) &= c(x) && \text{kaikilla } x > -r, \\ G^k(e)(x) &= d(x) && \text{kaikilla } x \leq -r - kn_1. \end{aligned}$$

Lisäksi Lemmasta 4.29 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $b$ , että

$$\begin{aligned} b(x) &= e(x) && \text{kaikilla } x < r, \\ G^k(b)(x) &= d(x) && \text{kaikilla } x \geq r - kn_m. \end{aligned}$$

Nyt konfiguraatiolle  $b$  pätee  $b(x) = e(x) = c(x)$  kaikilla soluilla  $-r < x < r$ , joten konfiguraatio  $b \in U$ . Koska  $b(x) = e(x)$  kaikilla  $x < r$ , niin  $G^k(b)(x) = G^k(e)(x)$  pätee kaikilla  $x < r - kn_m$ . Toisaalta  $G^k(e)(x) = d(x)$  kaikilla  $x \leq -r - kn_1$ . Näin ollen epäyhtälöstä  $-r - kn_1 > r - kn_m$  seuraa, että  $G^k(b)(x) = d(x)$  kaikilla  $x < r - kn_m$ . Lisäksi  $G^k(b)(x) = d(x)$  kaikilla  $x \geq r - kn_m$ . Näin ollen  $G^k(b) = d$ . On osoitettu, että mistä tahansa avoimesta pallosta päästään mihin tahansa konfiguraatioon, joten  $G$  on vahvasti transitiivinen.  $\square$

Yleistetään tämä lause seuraavasti.

**Lause 5.30.** Soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$ , jolla  $|N| \geq 2$ , on vahvasti transitiivinen, jos jollekin nollassa eroavalle vektorille  $\vec{t}$  soluautomaattifunktio  $G$  on  $\vec{t}$ -permutatiivinen ja  $-\vec{t}$ -permutatiivinen.

*Todistus.* Soluautomaattifunktio  $G$  on  $\vec{t}$ -permutatiivinen, joten on olemassa sellainen naapuri  $\vec{n}_i \in N$ , että  $G$  on permutatiivinen naapurissa  $\vec{n}_i$  ja sille pätee epäyhtälöt

$$\forall j \neq i: \vec{t} \cdot \vec{n}_i > \vec{t} \cdot \vec{n}_j.$$

Lisäksi soluautomaattifunktio  $G$  on  $-\vec{t}$ -permutatiivinen, joten on olemassa sellainen naapuri  $\vec{n}_p \in N$ , että  $G$  on permutatiivinen naapurissa  $\vec{n}_p$  ja sille pätee epäyhtälöt

$$\forall j \neq p: \vec{t} \cdot \vec{n}_p < \vec{t} \cdot \vec{n}_j.$$

Olkoon  $U \subset S^{\mathbb{Z}^d}$  avoin  $2^{-(r-1)}$  säteinen pallo. Tällöin sylinterin  $U$  tilat on määritelty  $(2(r-1)+1)^d$  kokoisessa origo-keskisessä hyperkuutiossa  $D$ . Olkoon  $E$  origo-keskinen  $(2r+1)^d$  kokoinen hyperkuutio. Olkoot konfiguraatiot  $c \in U$  ja  $d \in S^{\mathbb{Z}^d}$  mielivaltaisia. Olkoon  $k$  sellainen kokonaisluku, että epäyhtälö

$$\vec{t} \cdot (\vec{n}_i - \vec{n}_p) k > \vec{t} \cdot \vec{x} - \vec{t} \cdot \vec{y}$$

on voimassa kaikilla soluilla  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . Tästä seuraa, että epäyhtälö

$$-k(\vec{t} \cdot \vec{n}_p) - \vec{t} \cdot \vec{x} > -k(\vec{t} \cdot \vec{n}_i) - \vec{t} \cdot \vec{y} \tag{13}$$

on voimassa kaikilla soluilla  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . Olkoot  $\vec{z} \in E$  ja  $\vec{v} \in E$  sellaisia soluja, että epäyhtälöt

$$\begin{aligned}\forall \vec{y} \in E: \vec{t} \cdot \vec{z} &\leq \vec{t} \cdot \vec{y}, \\ \forall \vec{y} \in E: \vec{t} \cdot \vec{v} &\geq \vec{t} \cdot \vec{y}\end{aligned}$$

ovat voimassa. Tällöin epäyhtälöt

$$\begin{aligned}\forall \vec{y} \in D: \vec{t} \cdot \vec{z} &< \vec{t} \cdot \vec{y}, \\ \forall \vec{y} \in D: \vec{t} \cdot \vec{v} &> \vec{t} \cdot \vec{y}\end{aligned}$$

ovat voimassa. Lemmasta 4.33 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $e$ , että

$$\begin{aligned}e(\vec{x}) = c(\vec{x}) &\quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{z}) > 0, \\ G^k(e)(\vec{x}) = d(\vec{x}) &\quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{z}) \leq -k(\vec{t} \cdot \vec{n}_p).\end{aligned}$$

Lisäksi Lemmasta 4.33 seuraa, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $b$ , että

$$\begin{aligned}b(\vec{x}) = e(\vec{x}) &\quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{v}) < 0, \\ G^k(b)(\vec{x}) = d(\vec{x}) &\quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot (\vec{x} - \vec{v}) \geq -k(\vec{t} \cdot \vec{n}_i).\end{aligned}$$

Koska alueen  $D$  soluille on voimassa epäyhtälöt

$$\forall \vec{x} \in D: \vec{t} \cdot \vec{z} < \vec{t} \cdot \vec{x} < \vec{t} \cdot \vec{v},$$

konfiguraatio  $b(\vec{x}) = e(\vec{x}) = c(\vec{x})$  kaikilla  $\vec{x} \in D$ . Täten konfiguraatio  $b \in U$ . Konfiguraatio  $b(\vec{x}) = e(\vec{x})$  kaikissa sellaisissa soluissa  $\vec{x}$ , että  $\vec{t} \cdot \vec{x} < \vec{t} \cdot \vec{v}$ . Näin ollen konfiguraatiolle  $b$  on voimassa yhtälöt

$$G^k(b)(\vec{x}) = G^k(e)(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot \vec{x} < \vec{t} \cdot \vec{v} - k(\vec{t} \cdot \vec{n}_i).$$

Toisaalta konfiguraatiolle  $e$  on voimassa yhtälöt

$$G^k(e)(\vec{x}) = d(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot \vec{x} \leq \vec{t} \cdot \vec{z} - k(\vec{t} \cdot \vec{n}_p).$$

Näin ollen kohdasta (13) seuraa, että

$$G^k(b)(\vec{x}) = d(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot \vec{x} < \vec{t} \cdot \vec{v} - k(\vec{t} \cdot \vec{n}_i).$$

Toisaalta konfiguraatiolle  $b$  on voimassa yhtälöt

$$G^k(b)(\vec{x}) = d(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d: \vec{t} \cdot \vec{x} \geq \vec{t} \cdot \vec{v} - k(\vec{t} \cdot \vec{n}_i).$$

Näin ollen  $G^k(b) = d$ . On osoitettu, että soluautomaattifunktio  $G$  on vahvasti transitiivinen.  $\square$

### 5.3 Ketjutransitiivisuus

Tämän alaosion tarkoituksena on esitellä ketjutransitiivisuus ja osoittaa, että se on soluautomaattifunktioilla transitiivisuutta aidosti heikompi sekoittuvuusominaisuus. Seuraukseen 5.45 asti alaosio perustuu lähteeseen [8].

Aloitetaan alaosio esittelemällä sensitiivisyys, ja osoitetaan, että se on soluautomaattifunktioilla transitiivisuutta aidosti heikompi ominaisuus. Lisäksi tarkastellaan sensitiivisyyteen liittyvää ekvijatkuvuutta. Näitä käsitteitä hyödynnetään alaosion lopussa, kun osoitetaan, että on olemassa ketjutransitiivisiä soluautomaattifunktioita, jotka eivät ole transitiivisiä.

**Määritelmä 5.31.** Soluautomaattifunktio  $G$  on **sensitiivinen**, jos on olemassa sellainen  $\varepsilon > 0$ , että jokaista konfiguraatiota  $c$  kohti on olemassa sellainen mielivaltaisen lähellä oleva konfiguraatio  $e$ , että  $d(G^n(c), G^n(e)) > \varepsilon$  jollekin  $n \in \mathbb{N}$ . Toisin sanottuna  $G$  on sensitiivinen, jos ja vain jos

$$\exists \varepsilon > 0, \forall c \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall \delta > 0, \exists e \in B_\delta(c), \exists n \geq 1: \quad d(G^n(c), G^n(e)) > \varepsilon.$$

Sylintereillä ilmaistuna sensitiivisellä soluautomaattifunktiolla  $G$  on olemassa sellainen äärellinen alue  $E \subseteq \mathbb{Z}^d$ , että jokaiselle konfiguraatiolle  $c$  ja äärelliselle alueelle  $D$ , on olemassa sellainen konfiguraatio  $e \in \text{Syl}(c, D)$ , että  $G^n(e) \notin \text{Syl}(G^n(c), E)$  jollekin  $n \geq 1$ .

**Määritelmä 5.32.** Konfiguraatio  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  on soluautomaattifunktion  $G$  **ekvijatkuvuus piste**, jos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall e \in B_\delta(c), \forall n \geq 1: \quad d(G^n(c), G^n(e)) < \varepsilon.$$

Merkitään ekvijatkuvuus pisteiden joukkoa  $\mathcal{E}_G$ .

Konfiguraatio  $c$  kuuluu joukkoon  $\mathcal{E}_G$ , jos ja vain jos jokaiselle äärelliselle alueelle  $E \subseteq \mathbb{Z}^d$  on olemassa sellainen äärellinen alue  $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ , että

$$e \in \text{Syl}(c, D) \implies \forall n \geq 1: G^n(e) \in \text{Syl}(G^n(c), E).$$

**Lause 5.33.** Sensitiiviselle soluautomaattifunktiolle  $G$  ekvijatkuvuus pisteiden joukko  $\mathcal{E}_G = \emptyset$ .

*Todistus.* Vaihtamalla kahden ensimmäisen kvanttorin järjestystä sensitiivisyyden määritelmästä

$$\exists \varepsilon > 0, \forall c \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall \delta > 0, \exists e \in B_\delta(c), \exists n \geq 1: \quad d(G^n(c), G^n(e)) > \varepsilon$$

saadaan kaava

$$\forall c \in S^{\mathbb{Z}^d}, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists e \in B_\delta(c), \exists n \geq 1: \quad d(G^n(c), G^n(e)) > \varepsilon.$$

Tällöin  $\forall c \in S^{\mathbb{Z}^d}: c \notin \mathcal{E}_G$  eli  $\mathcal{E}_G = \emptyset$ . □

Seuraavaksi tarkastellaan, millaisia ekvijatkuvuus pisteet voivat olla yksiulotteisille soluautomaattifunktioille  $m$ -lukitsevien sanojen avulla.

**Määritelmä 5.34.** Olkoon  $G: S^{\mathbb{Z}} \rightarrow S^{\mathbb{Z}}$  yksiulotteinen soluautomaattifunktio. Sana  $u$  on **m-lukitseva sana**, jos jollekin  $p \in \mathbb{Z}$  on voimassa implikaatio

$$c, e \in \text{Syl}(u, 0) \implies G^n(c)(i) = G^n(e)(i) \quad \text{kaikille } n \geq 0 \text{ ja } p \leq i < p + m.$$

**Lemma 5.35.** Olkoon  $G$  yksiulotteinen soluautomaattifunktio,  $N = (n_1, \dots, n_m)$  sen naapurustovektori ja  $r$  soluautomaattifunktion säde. Oletetaan, että soluautomaattifunktiolla  $G$  on  $r$ -lukitseva sana  $u$ . Tällöin konfiguraatio  $c$  on ekvijatkuvuus piste, jos sillä on sana  $u$  äärettömän monta kertaa oikealla ja vasemmalla puolella solua  $0$ .

*Todistus.* Olkoon  $n \geq 1$  mielivaltainen kokonaisluku ja olkoon  $c$  konfiguraatio, jolla on sana  $u$  äärettömän monta kertaa oikealla ja vasemmalla puolella solua  $0$ . Tällöin konfiguraatiolla  $c$  on sana  $u$  oikealla puolella solua  $n$  ja vasemmalla puolella solua  $-n$ . Olkoon  $uvw$  alueessa  $D$  määritelty konfiguraation  $c$  osakuvio, jossa ensimmäinen sana  $u$  on vasemmalla puolella solua  $-n$  ja viimeinen sana  $u$  on oikealla puolella solua  $n$ .

Olkoon  $e \in S^{\mathbb{Z}}$  sellainen konfiguraatio, että  $e|_D = uvw$  pätee. Koska  $u$  on  $r$ -lukitseva, on olemassa sellaiset solujen  $a \leq -n$  ja  $b \geq n$  määräämät alueet  $A = \{a - r + 1, a - r + 2, \dots, a\}$  ja  $B = \{b, b + 1, \dots, b + r - 1\}$ , että  $G^t(e)(i) = G^t(c)(i)$  kaikille  $t \geq 0$  ja kaikille  $i \in A$  ja  $i \in B$ . Koska  $r$  on naapurustovektorin säde, kaikille luvuille  $t \geq 0$  pätee, että jos  $G^t(e)(i) = G^t(c)(i)$  kaikissa soluissa  $i \in [a - r + 1, b + r - 1]$ , niin  $G^{t+1}(e)(i) = G^{t+1}(c)(i)$  kaikissa soluissa  $i \in [a + 1, b - 1]$ . Lisäksi  $G^0(e)(i) = G^0(c)(i)$  kaikilla  $i \in D$ , joten induktiosta luvulle  $t$  seuraa, että  $G^t(e)(i) = G^t(c)(i)$  kaikilla  $t \geq 0$  ja kaikilla  $i \in [-n, n]$ . Täten  $c$  on ekvijatkuvuus piste.  $\square$

Soluautomaattifunktio ei ole siis sensitiivinen, jos sillä on  $r$ -lukitseva sana.

**Lause 5.36.** Transitiivinen soluautomaattifunktio  $G$ , jonka tilajoukko  $|S| \geq 2$ , on sensitiivinen.

*Todistus.* Oletetaan, että  $G$  ei ole sensitiivinen. Koska  $G$  ei ole sensitiivinen, on olemassa sellainen konfiguraatio  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  ja äärellinen alue  $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ , että

$$e \in \text{Syl}(c, D) \implies G^t(e)(\vec{0}) = G^t(c)(\vec{0}) \quad \text{kaikilla } t \geq 0.$$

Merkitään  $C = \text{Syl}(c, D)$ . Olkoon  $\tau_{\vec{n}}$  sellainen translaatio, että  $U = \tau_{\vec{n}}^{-1}(C) \cap C \neq \emptyset$ . Tällöin  $U$  on epätyhjä sylinteri. Olkoon konfiguraatio  $e \in U$ . Tällöin  $e \in C$  ja  $\tau_{\vec{n}}(e) \in C$ . Kaikille luvuille  $t \geq 0$  on voimassa yhtälö

$$G^t(e)(\vec{n}) = \tau_{\vec{n}}(G^t(e))(\vec{0}) = G^t(\tau_{\vec{n}}(e))(\vec{0}) = G^t(c)(\vec{0}) = G^t(e)(\vec{0}).$$

Olkoon  $d \in S^{\mathbb{Z}^d}$  sellainen konfiguraatio, että  $d(\vec{0}) \neq d(\vec{n})$  ja olkoon  $V = \text{Syl}(d, E)$  sellainen sylinteri, että  $E = \{\vec{0}, \vec{n}\}$ . Tällöin  $G^t(U) \cap V = \emptyset$  kaikilla  $t \geq 0$ , joten soluautomaattifunktio  $G$  ei ole transitiivinen.  $\square$

Näytetään seuraavaksi, että käänteinen väite ei ole voimassa. Osoitetaan, että sensitiivisen soluautomaattifunktion  $F$  ja sellaisen soluautomaattifunktion  $H$ , joka ei ole transitiivinen, karteesinen tulo  $F \times H$  on sensitiivinen, mutta ei transitiivinen.

**Lause 5.37.** Olkoon soluautomaattifunktio  $G = F \times H: S^{\mathbb{Z}^d} \times A^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d} \times A^{\mathbb{Z}^d}$  selllaisten soluautomaattifunktioiden  $F$  ja  $H$  karteeseen tulo, että  $F$  on sensitiivinen ja  $H$  ei ole transitiivinen. Tällöin  $G$  on sensitiivinen, mutta ei transitiivinen.

*Todistus.* Koska soluautomaattifunktiolle  $F$  on voimassa kaava

$$\exists \varepsilon > 0, \forall c \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall \delta > 0, \exists e \in B_\delta(c), \exists n \geq 1: \quad d(F^n(c), F^n(e)) > \varepsilon,$$

on myös voimassa kaava

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0, \forall (c, a) \in S^{\mathbb{Z}^d} \times A^{\mathbb{Z}^d}, \forall \delta > 0, \exists (e, b) \in B_\delta((c, a)), \exists n \geq 1: \\ d(G^n((c, a)), G^n((e, b))) > \varepsilon. \end{aligned}$$

Funktio  $G$  on siis sensitiivinen. Toisaalta on olemassa sellaiset epätyhjät avoimet joukot  $U_H, V_H \subseteq A^{\mathbb{Z}^d}$ , että  $H^n(U_H) \cap V_H = \emptyset$  kaikilla  $n \geq 0$ . Näin ollen kaikille avoimille epätyhjille  $U_F, V_F \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$ , leikkaus  $G^n(U_F \times U_H) \cap V_F \times U_H$  on tyhjä, joten  $G$  ei ole transitiivinen.  $\square$

Transitiivisuus on sensitiivisyyttä aidosti vahvempi ominaisuus soluautomaattifunktiolle. Yleisesti tämä ei ole aina totta, vaan on olemassa dynaamisia systeemejä, jotka ovat transitiivisia, mutta eivät sensitiivisiä.

Siirrytään seuraavaksi alaosion päätutkimuskohteeseen eli ketjutransitiivisyyteen.

**Määritelmä 5.38.** Soluautomaattifunktio  $G$  on **ketjutransitiivinen**, jos jokaisille konfiguraatioille  $c, e \in S^{\mathbb{Z}^d}$  ja äärelliselle alueelle  $D$  on olemassa sellainen ketju konfiguraatioita  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , että  $c_0 = c$  ja  $c_n = e$  ja konfiguraatio  $G(c_{i-1}) \in \text{Syl}(c_i, D)$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Merkitään konfiguraatioiden ketjua merkinnällä  $c_0 \rightarrow c_n$ .

Ketjutransitiivisuus voidaan esittää myös suunnattujen multigraafien avulla.

**Määritelmä 5.39.** **Suunnattu multigraafi** on nelikko  $(V, E, t, h)$ , jossa  $V$  on äärellinen joukko **solmuja** ja  $E$  on toinen äärellinen joukko **kaaria**. Funktiot  $t: E \rightarrow V$  ja  $h: E \rightarrow V$  määräävät jokaiselle kaarelle  $e \in E$  lähtösolmun  $t(e) \in V$  ja päätesolmun  $h(e) \in V$ . Multigraafi on **vahvasti yhtenäinen**, jos jokaisesta solmusta on olemassa kaarien muodostama reitti mihin tahansa muuhun solmuun.

Ketjutransitiivisella soluautomaattifunktiolla  $G$  seuraava suunnattu multigraafi  $(C_V, C_E, t, h)$  on vahvasti yhtenäinen kaikille äärellisille alueille  $D$ : Multigraafin  $(C_V, C_E, t, h)$  solmujoukko  $C_V$  koostuu kaikista alueessa  $D$  määritellyistä sylinteristä  $C_1, \dots, C_n$ . Kaarijoukkoon  $C_E$  kuuluu sellainen kaari  $e_{i,j}$ , jolle  $t(e_{i,j}) = C_i$  ja  $h(e_{i,j}) = C_j$ , jos ja vain jos  $G(C_i) \cap C_j \neq \emptyset$ .

**Lause 5.40.** Ketjutransitiivinen soluautomaattifunktio  $G$  on surjektiivinen.

*Todistus.* Oletetaan, että  $G$  ei ole surjektiivinen. Tällöin on olemassa sylinteri  $C_j$ , joka on orpo. Näin ollen leikkaus  $G(C_i) \cap C_j$  on tyhjä kaikille  $i$ , joten suunnattu multigraafi  $(C_V, C_E, t, h)$  ei ole vahvasti yhtenäinen.  $\square$

**Lause 5.41.** Transitiivinen soluautomaattifunktio  $G$  on ketjutransitiivinen.

*Todistus.* Olkoon  $D$  äärellinen alue, ja olkoot  $C_i$  ja  $C_j$  alueessa  $D$  määriteltyjä sylindereitä. Koska  $G$  on transitiivinen, leikkaus  $G^n(C_i) \cap C_j$  on epätyhjä jollekin  $n \geq 1$ . On siis olemassa reitti solmusta  $C_i$  solmuun  $C_j$ , joten multigraafi  $(C_V, C_E, t, , h)$  on vahvasti yhtenäinen.  $\square$

Seuraavaksi on tarkoitus esitellä esimerkki soluautomaattifunktiosta  $G$ , joka on ketjutransitiivinen, mutta ei transitiivinen. Seuraava esimerkki tunnetaan Covenin automaattina ja sen esitys perustuu lähteeseen [4].

**Esimerkki 5.42.** (Coven) Olkoon  $A$  soluautomaatti, jossa  $d = 1$ ,  $S = \{0, 1\}$ ,  $N = (0, 1, 2)$  ja  $f: S^3 \rightarrow S$

$$\begin{aligned} f(s_1, 1, 0) &= s_1 + 1 \pmod{2}, \\ f(s_1, s_2, s_3) &= s_1, \quad \text{kun } s_2 \neq 1 \text{ tai } s_3 \neq 0. \end{aligned}$$

Sluautomaatin  $A$  määräämä soluautomaattifunktio  $F$  muuttaa solun tilan, jos ja vain jos sitä seuraa sana 10.

Oletetaan alaosion loppuun asti, että soluautomaattifunktio  $F$  on sama kuin Esimerkissä 5.42. Alueen  $D = \{1, 2, \dots, n\}$  naapurusto on  $N(D) = \{1, 2, \dots, n+2\}$ . Näin ollen soluautomaattifunktio  $F$  kuvaa sanan  $w \in S^{n+2}$  alueessa  $N(D)$  sanaksi  $w' \in S^n$  alueessa  $D$ . Merkitään tästä eteenpäin kuvausta  $F^{(N(D) \rightarrow D)}(w) = w'$  yksinkertaisesti merkinnällä  $F(w) = w'$ , kun asiayhteys on selvä.

Koska paikallinen päivitysfunktio  $f$  on vasen-permutatiivinen, Lauseesta 4.31 seuraa, että  $F$  on surjektiivinen. Näytetään seuraavaksi, että  $F$  ei ole sensitiivinen, eikä täten myöskään transitiivinen. Tämän osoittamiseen tarvitaan seuraavaa lemmaa.

**Lemma 5.43.** Olkoon  $n \geq 0$ . Soluautomaattifunktiolla  $F$  sanan  $w = 00(11)^n 10$  ainoa 00-alkuinen alkukuva on  $00(11)^{n+1} 10$ .

*Todistus.* Olkoon  $w' = 00s_3s_4 \dots s_{2n+4}$  sellainen sana, että  $F(w') = w$ , kun  $s_i \in \{0, 1\}$  kaikilla  $i \in \{3, 4, \dots, 2n+4\}$ . Jos sanan 01 alkukuva on muotoa  $0s_i s_j s_k$ , sen täytyy olla muotoa  $0s_i 1s_k$ , sillä tapauksen  $0s_i 0s_k$  kuva on joko 00 tai 10 riippuen tilasta  $s_i$ . Näin ollen  $w' = 00s_3 1s_5 \dots s_{2n+4}$ . Lisäksi, jos sanan 11 alkukuva on muotoa  $1s_i s_j s_k$ , sen täytyy olla  $1s_i 1s_k$ , sillä tapauksen  $1s_i 0s_k$  kuva on joko 01 tai 10 riippuen tilasta  $s_i$ . Tämän vuoksi sanan  $w'$  jokaisella parillisella alaindeksillä  $i \leq 2n+2$  täytyy olla tila  $s_i = 1$  eli  $w' = 00s_3 1s_5 \dots 1s_{2n+1} 1s_{2n+3} s_{2n+4}$ . Lisäksi tilan  $s_{2n+2} = 1$  täytyy muuttua, joten  $w' = 00s_3 1s_5 \dots 1s_{2n+1} 110$ . Koska tilan 1 ainoa muotoa  $s_i 11$  oleva alkukuva on 111, määräytyvät sanan  $w'$  loput tilat yksikäsitteisesti, kun edetään oikealta vasemmalle.  $\square$

**Lause 5.44.** Soluautomaattifunktio  $F$  ei ole sensitiivinen.

*Todistus.* Osoitetaan, että kaikille konfiguraatioille  $c \in \text{Syl}(000, 0)$  konfiguraatio  $F^n(c) \in \text{Syl}(00, 0)$  kaikilla  $n \geq 0$ . Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että on olemassa sellainen konfiguraatio  $c \in \text{Syl}(000, 0)$  ja ajanhetki  $t$ , että  $F^t(c) \notin \text{Syl}(00, 0)$ . Olkoon  $t > 0$  pienin tällainen ajanhetki. Tällöin ajanhetkellä  $t-1$  konfiguraatio  $F^{(t-1)}(c)$  kuuluu sylinteriin  $\text{Syl}(00, 0)$ , mutta sen kuva ei enää kuulu siihen. Näin ollen konfiguraation  $F^{(t-1)}(c)$  täytyy kuulua sylinteriin  $\text{Syl}(0010, 0)$ .

Oletetaan induktiolla luvun  $n$  suhteen, että  $F^{t-n}(c) \in \text{Syl}(00(11)^{n-1}10, 0)$  pätee kaikilla  $n \geq 1$ . Tapaus  $n = 1$  on voimassa, koska  $F^{(t-1)}(c)$  kuuluu sylinteriin  $\text{Syl}(0010, 0)$ . Induktioaskel seuraa Lemmasta 5.43, koska kaikilla ajanhetkillä  $k \in \{0, 1, \dots, t-1\}$  konfiguraatio  $F^k(c)$  kuuluu sylinteriin  $\text{Syl}(00, 0)$ . Kun  $n = t$ , saadaan  $F^{t-t}(c) = c \in \text{Syl}(00(11)^{t-1}10, 0)$ , mikä on ristiriidassa oletuksen  $c \in \text{Syl}(000, 0)$  kanssa. Näin ollen soluautomaattifunktiolla  $F$  on 2-lukitseva sana 00, joten  $F$  ei ole sensitiivinen.  $\square$

Nyt Lauseesta 5.36 seuraa, että  $F$  ei ole transitiivinen.

**Seuraus 5.45.** Soluautomaattifunktio  $F$  ei ole transitiivinen.

Näytetään seuraavaksi, että soluautomaattifunktio  $F$  on ketjutransitiivinen. Osoitetaan ensin, että jokaisesta sanan  $w \in \{0, 1\}^l$  määräämästä sylinteristä  $\text{Syl}(w, 0)$  on olemassa ketju sylinteriin  $\text{Syl}(1^l, 0)$ , kun  $l \in \mathbb{N}$ . Toisin sanoen jokaisesta sanasta  $w$  on ketju sanaan  $1^l$ . Lemmaan 5.48 asti alaosio perustuu lähteeseen [2].

Tillalle  $s \in \{0, 1\}$  merkitään  $\bar{s} = s + 1 \pmod{2}$ . Sanalle  $w = w_1 w_2 \dots w_n$ , jossa  $w_i \in S$  kaikilla  $i \leq n$ , merkitään  $\bar{w} = w_1 w_2 \dots \bar{w}_n$ .

**Lemma 5.46.** Olkoot  $\alpha \in \{0, 1\}$ ,  $k \in \{0, 1\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$  ja  $D = \{0, 1, \dots, 2l + k\}$ . On olemassa sellainen  $l + 2$  pituinen ketju  $c_1, \dots, c_{l+2}$ , että  $c_1 \in \text{Syl}(\alpha(11)^{l+1}1^k, 0)$  ja  $c_{l+2} \in \text{Syl}(\bar{\alpha}(11)^{l+1}1^k, 0)$  ja konfiguraatio  $F(c_{i-1}) \in \text{Syl}(c_i, D)$  kaikille  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Todistus.* Näytetään ensin, että on olemassa sellaiset sanat  $w \in \{10, 11\}^l$  ja  $u \in \{10, 11\}$ , että  $F^l((11)^l w) = (10)^l$ ,  $F^{l+1}((11)^l w u) = (11)^l$  ja  $F^i((11)^l w)_{|\{0,1\}} = 11$  kaikilla  $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ . Soluautomaattifunktiolle  $F$

$$\begin{aligned} F(1111) &= 11, \\ F(1110) &= 10, \\ F(1011) &= 10, \\ F(1010) &= 11. \end{aligned}$$

Soluautomaattifunktio  $F$  toimii siis XOR-soluautomaattifunktion tavoin, kun rajoitetaan sanoille  $w \in \{10, 11\}^*$ , jos kuvataan ne funktiolla

$$\begin{aligned} 11 &\mapsto 0, \\ 10 &\mapsto 1. \end{aligned}$$

Näin ollen soluautomaattifunktio  $F$  voidaan ajatella oikea-permutatiivisena soluautomaattifunktiona, kun rajoitetaan avaruuteen  $\{10, 11\}^{\mathbb{Z}}$ . Oikea-permutatiivisuudesta seuraa, että on olemassa sellainen  $w \in \{10, 11\}^l$ , että  $F^l((11)^l w) = (10)^l$ . Koska  $F((10)^l) = (11)^{l-1}$ , oikea-permutatiivisuudesta seuraa, että voidaan valita sellainen  $u \in \{10, 11\}$ , että  $F^{l+1}((11)^l w u) = (11)^l$ . Lisäksi kaikilla sanoilla  $w$  pätee, että  $F^i((11)^l w)_{|\{0,1\}} = 11$ , kun  $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ .

Näiden nojalla on olemassa sellaiset sanat  $w$  ja  $u$ , että  $F^l(\alpha(11)^l w) = \alpha(10)^l$  ja  $F^{l+1}(\alpha(11)^l w u) = \bar{\alpha}(11)^l$ . Tästä seuraa, että on olemassa ketju  $\alpha(11)^l \rightarrow \bar{\alpha}(11)^l$ . Lisäksi tila 1 pysyy muuttumattomana sanan perällä, eikä vaikuta mihinkään tilaan, jolloin saadaan tapaus  $k = 1$ . Väite on todistettu.  $\square$

**Lause 5.47.** Olkoon  $w \in \{0, 1\}^{2l+k}$  sellainen sana, että  $l \geq 0$  ja  $k \in \{0, 1\}$ . Tällöin on olemassa ketju  $w \rightarrow (11)^l 1^k$ .

*Todistus.* Osoitetaan tämä induktiolla. Kun  $|w| = 1$ , on olemassa ketju  $w \rightarrow 1$ , koska joko  $w = 1$  tai  $F(w10) = 1$ . Oletetaan, lause pätee kaikille  $n \geq 1$  pituisille sanoille. Olkoon  $w \in \{0, 1\}^{n+1}$  sellainen sana, että  $n = 2l + k$  ja  $k \in \{0, 1\}$ . Tällöin  $w = a\hat{w}$ , kun  $a \in \{0, 1\}$  ja  $\hat{w} \in \{0, 1\}^n$ . Induktiohypoteesista seuraa, että on olemassa ketju  $a\hat{w} \rightarrow a_0(11)^l 1^k$ , jollekin  $a_0 \in \{0, 1\}$ . Lemmasta 5.46 seuraa, että on olemassa ketju  $a\hat{w} \rightarrow 1(11)^l 1^k$ .  $\square$

On osoitettu, että jokaisesta sanasta  $w \in S^n$  on olemassa ketju sanaan  $1^n$ . Näytetään seuraavaksi, että tämä riittää ketjutransitiivisuuteen. Seuraava lemma on lähteestä [7].

**Lemma 5.48.** Olkoon  $G$  surjektiivinen yksiulotteinen soluautomaattifunktio. Jos on olemassa sellainen sana  $v \in S^n$ , että kaikilla  $w \in S^n$  on olemassa ketju  $w \rightarrow v$ , niin myös kaikilla  $w \in S^n$  on olemassa ketju  $v \rightarrow w$ .

*Todistus.* Oletetaan, että  $v \in S^n$  on sellainen sana, että kaikilla  $w \in S^n$  on olemassa ketju  $w \rightarrow v$ . Olkoon  $r$  soluautomaattifunktion naapurustovektorin säde. Olkoon  $(V, E, t, h)$  sellainen suunnattu multigraafi, että solmut ovat joukko  $V = S^n$  ja kaari  $e_{uws,y}$ , jolle  $t(e_{uws,v}) = w$  ja  $h(e_{uws,y}) = y$ , on olemassa, jos ja vain jos  $G(uws) = y$ . Olkoon  $g_{out}(w)$  solmusta  $w \in V$  lähtevien kaarien lukumäärä ja  $g_{in}(w)$  solmuun  $w$  sisääntulevien kaarien lukumäärä. Lähtevien kaarien lukumäärä on  $g_{out}(w) = |S|^{2r}$  kaikille solmuille  $w \in V$ . Koska soluautomaattifunktio  $G$  surjektiivinen, Lauseesta 4.16 seuraa, että sisääntulevien kaarien lukumäärä on  $g_{in}(w) = |S|^{2r}$  kaikille  $w \in V$ . Näin ollen  $g_{out}(w) = g_{in}(w)$  kaikille solmuille  $w \in V$ .

Näytetään seuraavaksi, että multigraafi  $(V, E, t, h)$  on vahvasti yhtenäinen. Olkoon  $A \subseteq S^n$  niiden sanojen joukko, joihin on olemassa ketju sanasta  $v$  eli

$$A = \{w \in S^n \mid v \rightarrow w\}.$$

Jos sana  $u$  kuuluu joukkoon  $A$  ja on olemassa ketju  $u \rightarrow x$ , niin myös sana  $x$  kuuluu joukkoon  $A$ . Täten ei ole olemassa sellaista kaarta  $e_{uws,y}$ , että  $w \in A$ , mutta  $y \notin A$ . Toisaalta kaikille sanoille  $w \in V$  pätee  $g_{out}(w) = g_{in}(w)$ , joten ei ole olemassa sellaista kaarta  $e_{uws,y}$ , että  $w \notin A$ , mutta  $y \in A$ . Oletuksen mukaan kaikilla sanoilla  $w \in S^n$  on olemassa ketju  $w \rightarrow v$ . Tästä seuraa, että joukko  $A = S^n$ . On osoitettu, että kaikilla  $w \in S^n$  olemassa ketju  $v \rightarrow w$ .  $\square$

**Lause 5.49.** Soluautomaattifunktio  $F$  on ketjutransitiivinen, mutta ei transitiivinen.

*Todistus.* Lauseen 5.45 mukaan  $F$  ei ole transitiivinen. Lauseesta 5.47 seuraa, että kaikista sanoista  $w \in S^l$  on olemassa ketju  $w \rightarrow 1^l$ , josta Lemman 5.48 mukaan seuraa, että soluautomaattifunktio  $F$  on ketjutransitiivinen.  $\square$

## 6 Ergodiateoria

Tässä osiossa tarkastellaan soluautomaattifunktioiden ominaisuuksia mittateorian näkökulmasta. Osion päätarkoituksena on esitellä ergodisia sekoittuvuusominaisuuksia sekä vertailla niitä toisiinsa ja topologisiin sekoittuvuusominaisuuksiin.

## 6.1 Uniformi todennäköisyysmitta

Tässä alaosiossa määritellään uniformi todennäköisyysmitta ja osoitetaan, että se säilyy muuttumattomana surjektiivisten soluautomaattifunktioiden iteroinnin suhteen. Lisäksi alaosiossa esitellään toistuvat pisteet ja Poincarén rekurrenssilause.

Alaosio aloitetaan mittateorian perusteista. Määritellään ensin  $\sigma$ -algebra. Lauseeseen 6.6 asti alaosio perustuu lähteeseen [12]. Lauseen 6.3 ja Lauseen 6.6 todistukset löytyvät samasta lähteestä.

**Määritelmä 6.1.** Olkoon  $X$  joukko. Kokoelma  $\mathcal{D}$  joukon  $X$  osajoukkoja on  $\sigma$ -algebra, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1.  $X \in \mathcal{D}$ ,
2. jos  $D \in \mathcal{D}$ , niin  $X \setminus D \in \mathcal{D}$ ,
3. jos  $(D_i)_{i=1}^{\infty}$  on sellainen jono, että  $D_n \in \mathcal{D}$  kaikilla  $n \geq 1$ , niin  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$ .

**Määritelmä 6.2.** Olkoon  $\mathcal{A}$  kokoelma joukon  $X$  osajoukkoja. Tällöin kokoelman  $\mathcal{A}$  virittämä  $\sigma$ -algebra  $\sigma(\mathcal{A})$  on kaikkien kokoelman  $\mathcal{A}$  sisältävien  $\sigma$ -algebroyen leikkaus. **Borel  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$**  on topologian  $\mathcal{T}$  virittämä  $\sigma$ -algebra. Borel  $\sigma$ -algebra on pienin kaikki avoimet joukot sisältävä  $\sigma$ -algebra. Joukkoja  $U \in \mathcal{B}$  kutsutaan **Borel-joukoiksi** tai **mitallisiksi joukoiksi**.

**Lause 6.3.** Olkoon  $\mathcal{A}$  kokoelma joukon  $X$  osajoukkoja. Tällöin  $\sigma$ -algebra  $\sigma(\mathcal{A})$  on olemassa.

**Lause 6.4.** Sylinterien perhe  $\mathcal{S}$  virittää Borel  $\sigma$ -algebran eli  $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$ .

*Todistus.* Olkoon  $\mathcal{T}$  avaruuden  $S^{\mathbb{Z}^d}$  topologia ja joukko  $U \in \mathcal{T}$  avoin. Koska  $\mathcal{S}$  on avaruuden  $S^{\mathbb{Z}^d}$  kanta, joukko  $U$  voidaan esittää unionina  $U = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i$ , kun  $B_i \in \mathcal{S}$  kaikilla  $i \in \mathcal{I}$ . Näin ollen  $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$ , joten  $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$ . Toisaalta jokainen sylinteri on avoin, joten  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{B}$ . Näin ollen yhtäsuuruus  $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$  on voimassa.  $\square$

**Määritelmä 6.5. Borel-todennäköisyysmitta** on sellainen funktio  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , että seuraavat ehdot täyttyvät:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,  $\mu(X) = 1$  ja  $\mu(B) \geq 0$  kaikille  $B \in \mathcal{B}$ .
2. ( $\sigma$ -additiivisuus) Jos  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on sellainen numeroituva jono pareittain erillisiä joukkoja, että  $B_i \in \mathcal{B}$  kaikilla  $i \geq 1$ , niin  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$ .

**Lause 6.6.** Olkoon  $\mu_1: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $\mu_2: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  sellaisia Borel-todennäköisyysmittoja, jotka saavat samat arvot kokoelmalla  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ . Jos kokoelma  $\mathcal{A}$  on suljettu äärellisen leikkauksen suhteen ja virittää Borel  $\sigma$ -algebran  $\mathcal{B}$ , niin  $\mu_1 = \mu_2$ .

**Seuraus 6.7.** Olkoot  $\mu_1: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $\mu_2: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-todennäköisyysmittoja avaruudessa  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Jos  $\mu_1(U) = \mu_2(U)$  kaikilla sylintereillä  $U$ , niin  $\mu_1 = \mu_2$ .

Seuraavaksi määritellään surjektiivisille soluautomaattifunktiolle muuttumaton todennäköisyysmitta. Alaosion loppu perustuu lähteeseen [8].

**Lause 6.8.** Olkoon  $G: X \rightarrow X$  jatkuva funktio. Borel-joukon  $U$  alkukuva  $G^{-1}(U)$  on Borel-joukko.

*Todistus.* Olkoon  $\mathcal{B}$  Borel  $\sigma$ -algebra ja  $\Sigma$  niiden joukkojen  $A \subseteq X$  kokoelma, joille  $G^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ . Näytetään, että  $\Sigma$  on  $\sigma$ -algebra.

1.  $G^{-1}(X) = X \in \mathcal{B}$ , joten  $X \in \Sigma$ .
2. Jos joukko  $A \in \Sigma$ , niin alkukuva  $G^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ . Tällöin  $G^{-1}(X \setminus A) = X \setminus G^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ , joten  $X \setminus A \in \Sigma$ .
3. Jos  $(A_i)_{i=1}^{\infty}$  on jono sellaisia joukkoja, että  $A_n \in \Sigma$  kaikilla  $n \geq 1$ , niin alkukuvat  $G^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$  kaikilla  $n \geq 1$ . Täten unionin alkukuva  $G^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$ . Tästä seuraa, että  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ .

Jos joukko  $U$  on avoin, niin alkukuva  $G^{-1}(U)$  on avoin ja siis  $G^{-1}(U) \in \Sigma$ . Näin ollen joukko  $U \in \Sigma$ , joten  $\Sigma$  sisältää kaikki avoimet joukot. Tästä seuraa, että  $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$ .  $\square$

**Määritelmä 6.9.** Olkoon  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-todennäköisyysmitta ja  $G: X \rightarrow X$  jatkuva funktio. Määritellään mitta  $G(\mu): \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  seuraavasti:

$$G(\mu)(A) = \mu(G^{-1}(A)) \text{ kaikilla } A \in \mathcal{B}.$$

**Lemma 6.10.** Mitta  $G(\mu): \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  on Borel-todennäköisyysmitta.

*Todistus.* Lause seuraa suoraan faktoista  $G^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ,  $G^{-1}(X) = X$ ,  $G^{-1}(X \setminus A) = X \setminus G^{-1}(A)$  ja

$$G^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = G^{-1}(A_1) \cup G^{-1}(A_2) \cup \dots$$

Huomataan, että jos joukot  $A_j$  ja  $A_i$  ovat erillisiä, niin joukot  $G^{-1}(A_i)$  ja  $G^{-1}(A_j)$  ovat myös erillisiä.  $\square$

**Määritelmä 6.11.** Mitta  $\mu$  on  $G$ -muuttumaton, jos  $G(\mu) = \mu$  kaikilla Borel joukoilla  $A \in \mathcal{B}$ .

**Määritelmä 6.12.** Olkoon  $S$  äärellinen tilajoukko. Olkoon  $p: S \rightarrow [0, 1]$  sellainen todennäköisyysjakauma, että  $\sum_{a \in S} p(a) = 1$ . **Bernoulli todennäköisyysmitta**  $\mu_p$  määrittää sylinterille  $U = \text{Syl}(c, D)$  arvon

$$\mu_p(U) = \prod_{\vec{n} \in D} p(c(\vec{n})).$$

**Uniformi todennäköisyysmitta**  $\mu$  on sellainen Bernoulli todennäköisyysmitta, että  $p(a) = \frac{1}{|S|}$  kaikilla  $a \in S$ . Tällöin

$$\mu(U) = \left( \frac{1}{|S|} \right)^{|D|},$$

kun  $U = \text{Syl}(c, D)$ . Kaikilla samalla alueella määritellyillä sylintereillä on siis sama mitta.

Molemmat Määritelmän 6.12 mitat täyttävät Määritelmän 6.5 ehdot sylintereille. Lähteessä [17] osoitetaan, että tällainen määrittely sylintereille laajenee yksikäsitteisesti Borel-todennäköisyyksimitaksi.

**Lause 6.13.** Olkoon soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  surjektiivinen, ja olkoon  $\mu$  uniformi todennäköisyyksimita. Tällöin  $G(\mu) = \mu$ .

*Todistus.* Seurauksen 6.7 mukaan riittää osoittaa, että  $G(\mu)(C) = \mu(C)$  kaikille alueessa  $D'$  määritellyille sylintereille  $C = \text{Syl}(c, D')$ . Lauseen 4.16 mukaan sylinterin  $C$  alkukuva on

$$G^{-1}(C) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n,$$

missä sylinterit  $C_i$  ovat erillisiä, määritelty alueessa  $D$ , ja  $n = |S|^{|D|-|D'|}$ . Borel-mitan  $\sigma$ -additiivisuudesta ja uniformin mitan määritelmästä seuraa yhtälö

$$\mu(G^{-1}(C)) = \mu(C_1) + \mu(C_2) + \dots + \mu(C_n) = n \left( \frac{1}{|S|} \right)^{|D|} = \left( \frac{1}{|S|} \right)^{|D'|} = \mu(C).$$

On johdettu tulos  $G(\mu) = \mu$ . □

Esitetään seuraavaksi **Poincarén rekurrensilause**.

**Lause 6.14.** Olkoon soluautomaattifunktio  $G$  surjektiivinen, ja olkoon  $\mu$  uniformi todennäköisyyksimita. Olkoon jokaiselle Borel-joukolle  $A$  joukko

$$B = \{c \in A \mid \exists k : \forall n > k : G^n(c) \notin A\}$$

niiden pisteiden joukko, jotka palaavat joukkoon  $A$  vain äärellisen monta kertaa. Tällöin  $\mu(B) = 0$ .

*Todistus.* Olkoon  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sellaisten joukkojen  $A_k$  jono, että

$$A_k = G^{-k}(A) \cup G^{-k-1}(A) \cup G^{-k-2}(A) \cup \dots$$

Tällöin joukot  $A_k$  ovat niiden pisteiden joukkoja, jotka päätyvät joukkoon  $A$ , kun funktiota  $G$  on iteroitu vähintään  $k$  kertaa. Tällaiset joukot muodostavat sisältymisen suhteen vähenevän jonon

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

Jokainen  $A_k$  on numeroituvan monen Borel-joukon  $G^{-i}(A)$  unioni, joten  $A_k$  on Borel-joukko. Jokaiselle  $k$  pätee  $G^{-1}(A_k) = A_{k+1}$ . Lauseen 6.13 mukaan  $\mu(A_k) = \mu(A_{k+1})$ , joten kaikilla joukoilla  $A_k$  on sama mitta  $\mu(A_k) = \mu(A_0)$ . Koska  $A \subseteq A_0$ , kaikille  $k \in \mathbb{N}$  pätee  $A \setminus A_k \subseteq A_0 \setminus A_k$ . Tästä ja  $\sigma$ -additiivisuudesta seuraa epäyhtälö

$$\mu(A \setminus A_k) \leq \mu(A_0 \setminus A_k) = \mu(A_0) - \mu(A_k) = 0.$$

Joukossa  $B$  on tarkalleen ne joukon  $A$  pisteet, jotka eivät kuulu mihinkään joukkoon  $A_k$  eli

$$B = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A \setminus A_k).$$

Väite seuraa epäyhtälöstä

$$\mu(B) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A \setminus A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0.$$

□

Edellisestä lauseesta seuraa, että niiden pisteiden joukkolla, jotka kuuluvat joukkoon  $A$  eivätkä koskaan palaa takaisin joukkoon  $A$ , mitta on 0.

**Määritelmä 6.15.** Konfiguraatio  $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$  on **toistuva**, jos se palaa jokaiseen avoimeen joukkoon  $U$ , johon konfiguraatio  $c$  kuuluu. Toistuvien pisteiden joukko on

$$\mathcal{R}_G = \{c \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid \text{kaikille avoimille joukoille } U: c \in U \implies \exists n \geq 1 : G^n(c) \in U\}.$$

**Lause 6.16.** Jos soluautomaattifunktio  $G$  on surjektiivinen, toistuvien pisteiden joukko  $\mathcal{R}_G$  on numeroituvan monen avoimen 1-mittaisen joukon leikkaus. Tällöin joukko  $\mathcal{R}_G$  on residuaali ja  $\mu(\mathcal{R}_G) = 1$ .

*Todistus.* Olkoon  $U_1, U_2 \dots$  kaikkien sylinterien luettelo. Olkoon  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sellaisten joukkojen  $X_k$  jono, että

$$X_k = \{c \in U_k \mid \forall n \geq 1 : G^n(c) \notin U_k\}.$$

Lauseesta 6.14 seuraa, että joukon  $X_k$  mitta  $\mu(X_k) = 0$ . Joukko  $X_k$  on suljettu, koska sille pätee yhtäsuuruus

$$X_k = U_k \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G^{-n}(U_k),$$

jossa  $U_k$  on sylinterinä avoin ja suljettu.

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots = S^{\mathbb{Z}^d} \setminus \mathcal{R}_G. \quad (14)$$

Konfiguraatio  $c \in X_k$  ei voi olla toistuva, koska  $U_k$  on avoin joukko, johon konfiguraatio  $c$  kuuluu, mutta ei koskaan palaa. Käänteisesti oletetaan, että konfiguraatio  $c$  ei ole toistuva. Tällöin on sellainen avoin joukko  $U$ , että  $c \in U$  ja  $G^n(c) \notin U$  kaikille  $n \geq 1$ . Koska sylinterit muodostavat kannan avaruudelle  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , on olemassa sellainen luku  $k$ , että  $c \in U_k \subseteq U$ . Tällöin  $c \in X_k$ . Täten kohta (14) on todistettu, joten saadaan toistuvien pisteiden joukolle yhtäsuuruus

$$\mathcal{R}_G = \bigcap_{k=1}^{\infty} (S^{\mathbb{Z}^d} \setminus X_k).$$

Koska joukkojen  $S^{\mathbb{Z}^d} \setminus X_k$  mitoille pätee  $\mu(S^{\mathbb{Z}^d} \setminus X_k) = 1 - \mu(X_k) = 1$ , toistuvien pisteiden joukko on numeroituvan monen 1-mittaisen avoimen joukon leikkaus. Jos joukko  $A$  ei ole tiheä, sen komplementissa on sylinteri eli mitta  $\mu(A) < 1$ . Lisäksi, jos  $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots$  on numeroituvan monen joukon  $A_i$  leikkaus, joiden mitta  $\mu(A_i) = 1$  kaikille  $i \geq 1$ , on leikkauksen mitta  $\mu(A) = 1$ . Täten toistuvien pisteiden joukko  $\mathcal{R}_G$  on tiheä ja  $\mu(\mathcal{R}_G) = 1$ .

□

## 6.2 Ergodiset sekoittuvuusominaisuudet

Tämän alaosion päätarkoituksena on esitellä soluautomaattifunktioiden ergodisia sekoittuvuusominaisuuksia ja vertailla niitä toisiinsa, sekä topologisiin sekoittuvuusominaisuuksiin. Lisäksi alaosiossa tutkitaan Alaosion 4.3 soluautomaattifunktioiden ergodisia ominaisuuksia.

Aloitetaan alaosio esittelemällä mittateoriassa topologista transitiivisuutta vastaava ominaisuus eli ergodisuus. Ergodisuuden määritelmä ja Lause 6.18 perustuvat lähteeseen [8].

**Määritelmä 6.17.** Soluautomaattifunktio  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  on **ergodinen** uniformin todennäköisyysmitan  $\mu$  suhteen, jos jokaiselle joukolle  $A \in \mathcal{B}$  pätee

$$G^{-1}(A) = A \implies \mu(A) = 1 \text{ tai } \mu(A) = 0.$$

Lauseessa 5.17 todistettiin, että transitiivisella soluautomaattifunktiolla  $G$  transitiivisten pisteiden joukko  $\mathcal{T}_G$  on numeroituvan monen avoimen joukon leikkaus. Täten joukko  $\mathcal{T}_G$  on Borel-joukko. Näytetään seuraavaksi, että joukon  $\mathcal{T}_G$  mitta on 1.

**Lause 6.18.** Olkoon soluautomaattifunktio  $G$  ergodinen uniformin todennäköisyysmitan  $\mu$  suhteen ja  $\mathcal{T}_G$  sen transitiivisten pisteiden joukko. Tällöin  $\mu(\mathcal{T}_G) = 1$ .

*Todistus.* Olkoon  $\mathcal{S} = U_1, U_2, \dots$  sylinterien perhe. Olkoon  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sellaisten joukkojen  $X_k$  jono, että

$$X_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} G^{-i}(U_k).$$

Tällöin joukot  $X_k$  ovat sellaisten pisteiden joukkoja, jotka päätyvät sylinteriin  $U_k$  äärettömän monta kertaa. Tällaiset joukot  $X_k$  ovat Borel-joukkoja ja  $G^{-1}(X_k) = X_k$ . Koska  $G$  on ergodinen, mitta  $\mu(X_k) = 0$  tai  $\mu(X_k) = 1$ . Lauseesta 6.14 seuraa  $\mu(U_k \setminus X_k) = 0$ . Tällöin

$$\mu(X_k) \geq \mu(U_k \cap X_k) = \mu(U_k) - \mu(U_k \setminus X_k) = \mu(U_k) > 0,$$

joten  $\mu(X_k) = 1$ . Transitiivisten pisteiden joukko sisältää pisteet, jotka leikkaavat kaikki sylinterit äärettömän monta kertaa, joten

$$\mathcal{T}_G = X_1 \cap X_2 \cap \dots$$

Lisäksi joukon  $\mathcal{T}_G$  komplementin mitta on

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} (S^{\mathbb{Z}^d} \setminus X_i)\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(S^{\mathbb{Z}^d} \setminus X_i) = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0,$$

joten  $\mu(\mathcal{T}_G) = 1$ . □

**Lause 6.19.** Uniformin todennäköisyysmitan  $\mu$  suhteen ergodinen soluautomaattifunktio  $G$  on transitiivinen.

*Todistus.* Lauseesta 6.18 seuraa, että transitiivisten pisteiden joukon mitta  $\mu(\mathcal{T}_G) = 1$ , joten joukko  $\mathcal{T}_G \neq \emptyset$ . Lauseen 5.17 mukaan soluautomaattifunktio  $G$  on transitiivinen.  $\square$

Ei ole tiedossa, seuraako transitiivisuudesta ergodisuus, vai onko olemassa transitiivisiä soluautomaattifunktioita, jotka eivät ole ergodisia.

Esitellään seuraavaksi ergodinen sekoittuvuus ja ergodinen heikosti sekoittuvuus. Näiden määritelmät ja Lause 6.25 perustuvat lähteeseen [17].

**Määritelmä 6.20.** Olkoon  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  soluautomaattifunktio ja  $\mu$  uniformi todennäköisyysmitta.

1. Funktio  $G$  on mitan  $\mu$  suhteen **ergodisesti sekoittuva**, jos kaikille Borel-joukoille  $U, V \in \mathcal{B}$  on voimassa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G^{-n}(U) \cap V) = \mu(U)\mu(V).$$

2. Funktio  $G$  on mitan  $\mu$  suhteen **ergodisesti heikosti sekoittuva**, jos kaikille Borel-joukoille  $U, V \in \mathcal{B}$  on voimassa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(G^{-k}(U) \cap V) - \mu(U)\mu(V)| = 0.$$

Oletetaan jatkossa, että  $\mu$  on uniformi todennäköisyysmitta ja kaikki osion lauseet ovat uniformin todennäköisyysmitan  $\mu$  suhteen. Vertaillaan seuraavaksi ergodista sekoittuvuutta ja ergodista heikkoa sekoittuvuutta toisiinsa sekä tutkielmassa aiemmin esitettyihin sekoittuvuusominaisuuksiin. Osoitetaan ensin, että ergodisesta sekoittuvuudesta seuraa ergodinen heikko sekoittuvuus.

**Lemma 6.21.** Olkoon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reaalityön suppenee kohti lukua  $a$ . Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a| = 0.$$

*Todistus.* Olkoon  $\varepsilon > 0$  ja luku  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  sellainen, että  $|a_i - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  kaikilla  $i > n_\varepsilon$ . Olkoon

$$b = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_k - a|.$$

Nyt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a| = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_k - a| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1} |a_k - a| \right) < \frac{1}{n} \left( b + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2} \right) < \frac{b}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

kun  $n \in \mathbb{N}$  on sellainen, että  $\frac{b}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $\square$

**Lause 6.22.** Ergodisesti sekoittuva soluautomaattifunktio  $G$  on ergodisesti heikosti sekoittuva.

*Todistus.* Ergodinen sekoittuvuus tarkoittaa, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G^{-n}(U) \cap V) = \mu(U)\mu(V),$$

joten ergodinen heikko sekoittuvuus seuraa suoraan Lemmasta 6.21.  $\square$

**Lause 6.23.** Ergodisesti heikosti sekoittuva soluautomaattifunktio  $G$  on ergodinen.

*Todistus.* Olkoon  $U \in \mathcal{B}$  sellainen Borel joukko, että  $G^{-1}(U) = U$ . Tällöin

$$\mu(G^{-n}(U) \cap U) = \mu(U).$$

Nyt ergodisesta heikosta sekoittuvuudesta seuraa

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(U) - \mu(U)^2| = |\mu(U) - \mu(U)^2|,$$

joten  $\mu(U) = \mu(U)^2$ . Täten  $\mu(U) = 1$  tai  $\mu(U) = 0$ .  $\square$

Muita yhteyksiä ergodisten sekoittuvuusominaisuuksien välillä ei tunneta. Näytetään kuitenkin vielä yksi yhteys ergodisten ja topologisten sekoittuvuusominaisuuksien välillä.

**Lause 6.24.** Ergodisesti sekoittuva soluautomaattifunktio  $G$  on sekoittuva.

*Todistus.* Olkoot  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  epätyhjiä sylintereitä. Olkoon  $\varepsilon > 0$  sellainen, että  $\varepsilon < \mu(U)\mu(V)$ . Ergodisesta sekoittuvuudesta seuraa, että on olemassa sellainen  $n_0 \in \mathbb{N}$ , että

$$|\mu(G^{-i}(U) \cap V) - \mu(U)\mu(V)| < \varepsilon$$

kaikilla  $i \geq n_0$ . Tällöin epäyhtälöstä  $\varepsilon < \mu(U)\mu(V)$  seuraa, että  $\mu(G^{-i}(U) \cap V) > 0$  kaikilla  $i \geq n_0$ . Täten  $G^{-i}(U) \cap V \neq \emptyset$  kaikilla  $i \geq n_0$ .  $\square$

Alaosion lopuksi tarkastellaan Alaosiossa 4.3 esitettyjen soluautomaattifunktioiden ergodisia sekoittuvuusominaisuuksia. Seuraavan lauseen mukaan ergodinen heikko sekoittuvuus ja ergodinen sekoittuvuus riittää tarkistaa sylintereille. Lauseen todistus löytyy lähteestä [17], johon lause perustuu.

**Lause 6.25.** Olkoon  $G$  soluautomaattifunktio ja  $\mu$  uniformi todennäköisyysmitta.

1. Funktio  $G$  on egodisesti sekoittuva, jos kaikille sylintereille  $U$  ja  $V$  on voimassa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G^{-n}(U) \cap V) = \mu(U)\mu(V).$$

2. Funktio  $G$  on egodisesti heikosti sekoittuva, jos kaikille sylintereille  $U$  ja  $V$  on voimassa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(G^{-k}(U) \cap V) - \mu(U)\mu(V)| = 0.$$

Alaosion loppu perustuu lähteeseen [10], mutta todistukset ovat tutkielman omaa tuotosta.

**Lause 6.26.** Surjektiivinen oikeanpuoleinen (*vasemmanpuoleinen*) soluautomaattifunktio  $G$  on ergodisesti sekoittuva.

*Todistus.* Koska soluautomaattifunktio  $G$  on oikeanpuoleinen, sen vasemmanpuoleisimmalle naapurille pätee  $n_1 > 0$ . Olkoot  $U = \text{Syl}(u, a)$  ja  $V = \text{Syl}(v, b)$  sylintereitä. Merkitään sylintereiden  $U$  ja  $V$  alueita kirjaimilla  $D_U$  ja  $D_V$ . Olkoon  $k \geq 1$  sellainen luku, että epäyhtälö  $kn_1 + \min\{D_U\} > \max\{D_V\}$  on voimassa. Tästä seuraa, että alueiden  $N_k(D_U)$  ja  $D_V$  leikkaus on tyhjä, kun  $N_k$  on soluautomaattifunktion  $G^k$  naapurustovektori.

Olkoon  $E$  sellainen äärellinen alue, että  $N_k(D_U) \subseteq E$  ja  $D_V \subseteq E$ . Lauseen 4.16 mukaan sylinterin  $U$  alkukuvat ovat

$$G^{-k}(U) = \bigcup_{i=1}^n \text{Syl}(c_i, E),$$

missä sylinterit  $\text{Syl}(c_i, E)$  ovat erillisiä ja  $n = |S|^{|E|-|D_U|}$  on sylinterien lukumäärä alkukuvassa. Tarkastellaan seuraavaksi leikkauksia  $\text{Syl}(c_i, E) \cap V$ . Leikkaus on epätyhjä, jos ja vain jos  $c_i|_{D_V} = v$ . Koska alueiden  $N_k(D_U)$  ja  $D_V$  leikkaus on tyhjä, epätyhjiä sylintereitä leikkauksessa  $\text{Syl}(c_i, E) \cap V$  on yhteensä  $|S|^{|E|-|D_U|-|D_V|}$  kappaletta. Jokaisen alueessa  $E$  määritellyn sylinterin uniformi todennäköisyysmitta on

$$\mu(\text{Syl}(c_i, E)) = \left(\frac{1}{|S|}\right)^{|E|}.$$

Näiden perusteella saadaan

$$\mu(G^{-k}(U) \cap V) = \left(\frac{1}{|S|}\right)^{|E|} |S|^{|E|-|D_U|-|D_V|} = \left(\frac{1}{|S|}\right)^{|D_U|} \left(\frac{1}{|S|}\right)^{|D_V|} = \mu(U)\mu(V).$$

Täten soluautomaattifunktio  $G$  on ergodisesti sekoittuva.  $\square$

**Lause 6.27.** Olkoon  $G$  sellainen oikea-permutatiivinen (*vasen-permutatiivinen*) soluautomaattifunktio, että oikeanpuoleisin naapuri  $n_m > 0$  (*vastaavasti*  $n_1 < 0$ ). Tällöin  $G$  on ergodisesti sekoittuva.

*Todistus.* Olkoon  $n_m$  soluautomaattifunktion  $G$  oikeanpuolimmaisina naapuri ja  $f$  sen paikallinen päivitysfunktio. Olkoot  $U = \text{Syl}(u, a)$  ja  $V = \text{Syl}(v, b)$  sylintereitä. Merkitään sylintereiden  $U$  ja  $V$  alueita kirjaimilla  $D_U$  ja  $D_V$ . Olkoon  $k \geq 1$  sellainen kokonaisluku, että epäyhtälö  $kn_m + \min\{D_U\} > \max\{D_V\}$  on voimassa. Olkoon  $N_k$  soluautomaattifunktion  $G^k$  naapurustovektori ja  $f_k$  sen paikallinen päivitysfunktio.

Olkoon  $E$  sellainen yhtenäinen alue, että  $D_V \subseteq E$ ,  $N_k(D_U) \subseteq E$ , ja  $\max\{E\} = \max\{N_k(D_U)\}$ . Lauseen 4.16 mukaan sylinterin  $U$  alkukuva on

$$G^{-k}(U) = \bigcup_{i=1}^n \text{Syl}(c_i, E),$$

missä sylinterit  $\text{Syl}(c_i, E)$  ovat erillisiä ja  $n = |S|^{|E|-|D_U|}$  on sylinterien lukumäärä alkukuvassa. Kaikilla sylintereillä  $\text{Syl}(c_i, E)$  leikkaus  $\text{Syl}(c_i, E) \cap V$  on tyhjä, jos konfiguraatiossa  $c_i$  ei ole sanaa  $v$  alueessa  $D_V$ . Kiinnitetään sana  $e$  alueeseen

$E \setminus (kn_m + D_U)$ . Koska funktio  $f_k$  on oikea-permutatiivinen, on olemassa sellainen yksikäsitteinen sana  $w$ , että  $G^k(c_i)_{D_U} = u$ , kun  $c_{i|(kn_m + D_U)} = w$ . Tästä ja epäyhtälöstä  $kn_m + \min\{D_U\} > \max\{D_V\}$  seuraa, että sellaisia sylintereitä  $Syl(c_i, E)$ , joiden leikkaus sylinterin  $V$  kanssa on epätyhjä, on yhteensä  $|S|^{|E|-|D_V|-|D_U|}$  kappaletta. Tällaisten sylintereiden uniformi todennäköisyysmitta on

$$\mu(Syl(c_i, E)) = \left(\frac{1}{|S|}\right)^{|E|}.$$

Muuten mitta on 0. Näiden perusteella saadaan

$$\mu(G^{-k}(U) \cap V) = \left(\frac{1}{|S|}\right)^{|E|} |S|^{|E|-|D_U|-|D_V|} = \left(\frac{1}{|S|}\right)^{|D_U|} \left(\frac{1}{|S|}\right)^{|D_V|} = \mu(U)\mu(V).$$

Täten soluautomaattifunktio  $G$  on ergodisesti sekoittuva.  $\square$

**Esimerkki 6.28.** XOR-soluautomaattifunktio  $G$  ja siirtofunktio  $\sigma$  ovat ergodisesti sekoittuvia.

Lause 6.26 ja Lause 6.27 voitaisiin yleistää korkeampiin ulottuvuuksiin. Jälkimmäisen lauseen yleistys ja sen todistus löytyvät lähteestä [15].

## 7 Syndeettinen transitiivisuus

Palataan vielä topologiaan sekoittuvuusominaisuuksiin. Tässä osiossa esitetään syndeettinen transitiivisuus ja todistetaan, että se on soluautomaattifunktiolle transitiivisuuden kanssa ekvivalentti ominaisuus. Tämän tuloksen avulla osoitetaan, että kahden transitiivisen soluautomaattifunktion karteesinen tulo on transitiivinen. Määritelmät ja Lause 7.5 perustuvat lähteeseen [16]. Muuten osio on tutkielman omaa tuotosta.

**Määritelmä 7.1.** Olkoon  $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}_0$  ääretön joukko, jossa  $a_1 < a_2 < \dots$ . Joukko  $A$  on **syndeettinen**, jos on olemassa sellainen kokonaisluku  $m \geq 1$ , että  $a_1 < m$  ja  $a_{i+1} - a_i < m$  kaikilla  $i \geq 1$ .

Toisin sanoen joukko  $A$  on syndeettinen, jos on olemassa sellainen  $m \in \mathbb{N}$ , että jokainen  $m$ -pituinen lukusegmentti sisältää joukon  $A$  alkion.

**Määritelmä 7.2.** Soluautomaattifunktio  $G$  on **syndeettisesti transitiivinen**, jos jokaiselle epätyhjälle avoimelle joukolle  $U$  ja  $V$  joukko  $N_G(U, V) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid G^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$  on syndeettinen.

Kuten aikaisimmissa sekoittuvuusominaisuuksissa, riittää tarkastella sylintereitä  $U$  ja  $V$ . Syndeettisestä transitiivisuudesta seuraa, että joukko  $N_G(U, V) = \{n \in \mathbb{N} \mid G^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$  on epätyhjä kaikilla epätyhjillä sylintereillä  $U$  ja  $V$ , mikä ekvivalentti ehto transitiivisuuden kanssa. Täten syndeettisesti transitiivinen soluautomaattifunktio on transitiivinen.

**Lemma 7.3.** Olkoon soluautomaattifunktio  $G$  transitiivinen ja olkoot joukot  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  avoimia ja epätyhjiä. Tällöin on olemassa epätyhjä avoin joukko  $A \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  ja sellainen luku  $n \geq 0$ , että  $N_G(A, A) + n$  sisältyy joukkoon  $N_G(U, V)$ .

*Todistus.* Olkoon luku  $n \in N_G(U, V)$  ja joukko  $A = G^{-n}(V) \cap U$ . Jos  $k \in N_G(A, A)$ , niin on olemassa sellainen  $x \in A$ , että  $G^k(x) \in A$ . Tällöin  $x \in U$  ja  $G^{k+n}(x) \in V$  eli  $k+n \in N_G(U, V)$ .  $\square$

**Lause 7.4.** Transitiivinen soluautomaattifunktio  $G$  on syndeettisesti transitiivinen.

*Todistus.* Olkoot  $U, V \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  avoimia ja epätyhjiä ja olkoon  $A \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  sellainen Lemman 7.3 joukko, että  $N_G(A, A) + s$  sisältyy joukkoon  $N_G(U, V)$  jollekin kokonaisluvulle  $s \geq 0$ . Näytetään, että joukko  $N_G(A, A)$  on syndeettinen. Olkoot  $k \geq 0$  ja  $n \geq 1$  kokonaislukuja. Määritellään  $A_{(k,n)} = \bigcup_{k \leq i \leq k+n-1} G^{-i}(A)$ . Olkoon  $\mu$  uniformi todennäköisyyssmitta. Kaikille joukoille  $A_{(k,n)}$  pätee yhtälö

$$A_{(k+1,n)} = \bigcup_{k+1 \leq i \leq k+n} G^{-i}(A) = G^{-1} \left( \bigcup_{k \leq i \leq k+n-1} G^{-i}(A) \right) = G^{-1}(A_{(k,n)}).$$

Täten Lauseesta 6.13 seuraa, että  $\mu(A_{(k,n)}) = \mu(A_{(k+1,n)})$ . Induktiolla saadaan suoraan  $\mu(A_{(0,n)}) = \mu(A_{(k,n)})$ . Olkoon  $B = A_{(0,\infty)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} G^{-i}(A)$  kaikkien alkukuvien joukko. Koska joukko  $A$  on epätyhjä avoin joukko ja sylinterit muodostavat kannan, joukolla  $A$  on epätyhjä sylinteri osajoukkona. Näin ollen mitta toteuttaa epäyhtälön  $\mu(A) > 0$ . Koska joukon  $A$  mitan raja-arvo on  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{(0,n)}) = \mu(B)$ , riittävän suurella luvulla  $m \in \mathbb{N}$  pätee epäyhtälö

$$\mu(A_{(0,m)}) + \mu(A) > \mu(B). \quad (15)$$

Kiinnitetään tämä  $m$ . Oletetaan, että on olemassa sellainen  $k$ , että  $A \cap A_{(k,m)} = \emptyset$ . Nyt epäyhtälöstä (15) ja  $\sigma$ -additiivisuudesta seuraa epäyhtälö

$$\mu(A \cup A_{(k,m)}) = \mu(A) + \mu(A_{(k,m)}) = \mu(A) + \mu(A_{(0,m)}) > \mu(B).$$

Toisaalta  $A \cup A_{(k,m)} \subseteq B$ , joten leikkaus  $A \cap A_{(k,m)}$  on epätyhjä kaikilla luvuilla  $k \geq 0$ . Näin ollen kaikilla luvuilla  $k$  on olemassa sellainen alkio  $x \in A$ , että  $G^{k+i}(x) \in A$  jollekin  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ . Täten  $N_G(A, A)$  on syndeettinen. Koska  $N_G(A, A) + s \subseteq N_G(U, V)$  on voimassa, myös  $N_G(U, V)$  on syndeettinen.  $\square$

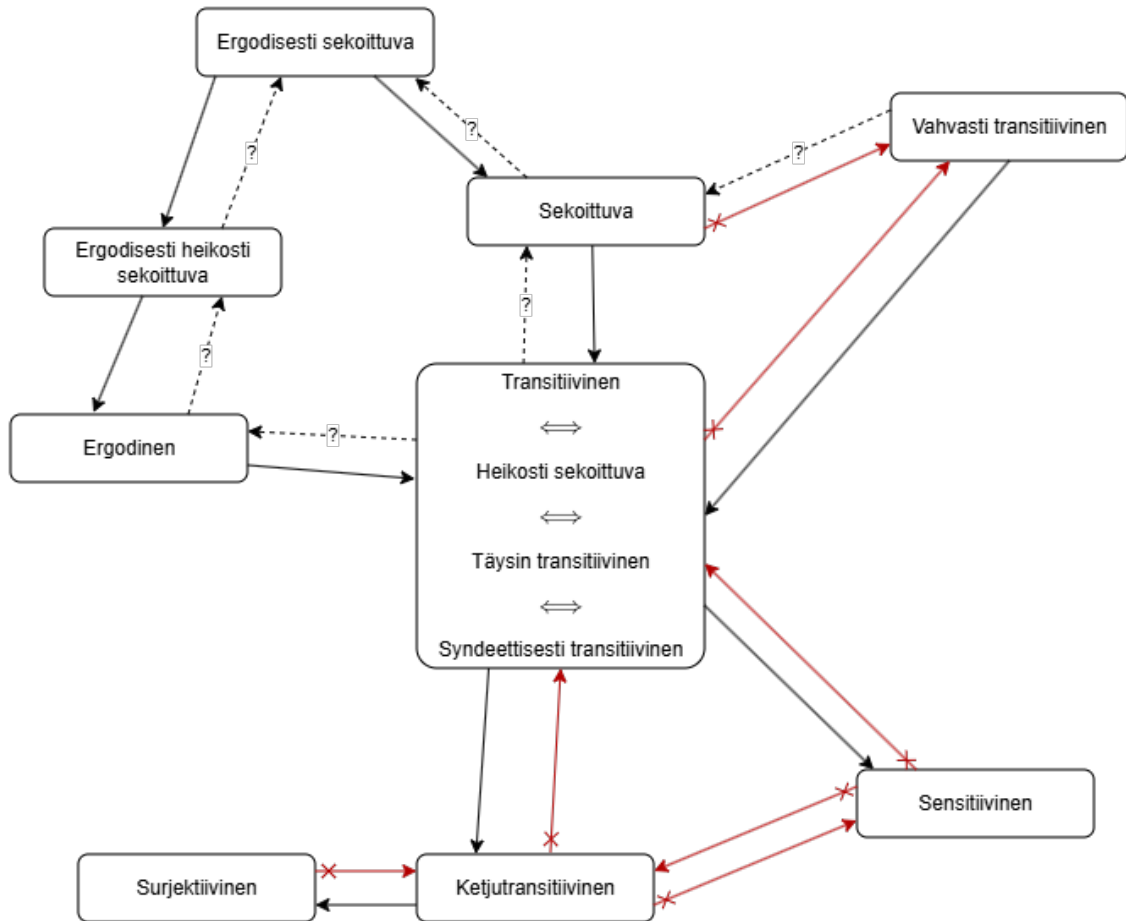
Nyt soluautomaattifunktion  $G$  transitiivisuudesta seuraa, että epätyhjiillä avoimilla joukoilla  $U, V$ , joukko  $N_G(U, V)$  sisältää mielivaltaisen pitkiä pätkiä luonnollisia lukuja, sekä maksimipituuden tyhjälle välille. Näiden avulla voidaan todistaa seuraava lause transitiivisten soluautomaattifunktioiden karteesiselle tulolle.

**Lause 7.5.** Olkoot  $G: S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  ja  $F: A^{\mathbb{Z}^l} \rightarrow A^{\mathbb{Z}^l}$  transitiivisia soluautomaattifunktioita. Karteesinen tulo  $G \times F: S^{\mathbb{Z}^d} \times A^{\mathbb{Z}^l} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d} \times A^{\mathbb{Z}^l}$  on transitiivinen.

*Todistus.* Olkoot joukot  $U_1, V_1 \subseteq S^{\mathbb{Z}^d}$  ja  $U_2, V_2 \subseteq A^{\mathbb{Z}^l}$  avoimia ja epätyhjiä. Lauseen 7.4 mukaan  $G$  on syndeettisesti transitiivinen, joten on olemassa sellainen  $m \in \mathbb{N}$ , että joukon  $N_G(U_1, V_1)$  kaikilla peräkkäisillä alkiolla  $a_i, a_{i+1} \in N_G(U_1, V_1)$  pätee  $a_{i+1} - a_i < m$ . Lauseesta 5.11 seuraa, että on olemassa sellainen  $k \in \mathbb{N}$ , että  $k + \{1, 2, \dots, m\} \subseteq N_F(U_2, V_2)$ . Syndeettisyyden vuoksi on olemassa sellainen  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , että  $m+i \in N_G(U_1, V_1) \cap N_F(U_2, V_2)$ . Koska joukot  $U_1, V_1, U_2$  ja  $V_2$  olivat mielivaltaisia, tulo  $G \times F$  on transitiivinen.  $\square$

## 8 Yhteenveto

Tutkielmassa esiteltiin useita eri topologia ja ergodisia sekoittuvuusominaisuuksia, ja vertailtiin niitä keskenään. Seuraavassa kaaviossa on esitetty nämä ominaisuudet ja niiden väliset suhteet.



Kuva 4: Mustat nuolet kertovat implikaatiosta. Punaiset nuolet kertovat, että on olemassa vastaesimerkki. Kysymysmerkit kertovat, ettei tiedetä, onko olemassa implikaatio, vai onko olemassa vastaesimerkki.

## Viitteet

- [1] F. Blanchard, J. Cervelle, and E. Formenti. Some results about the chaotic behavior of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 349(3):318–336, December 2005.
- [2] F. Blanchard and A. Maass. Dynamical behaviour of Coven’s aperiodic cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 163(1-2):291–302, August 1996.
- [3] Julien Cervelle, Alberto Dennunzio, and Enrico Formenti. Chaotic Behavior of Cellular Automata. In *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, pages 978–989. Springer, New York, NY, 2009.
- [4] Ethan M. Coven. Topological entropy of block maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 78(4):590–594, April 1980.
- [5] Alberto Dennunzio, Enrico Formenti, and Michael Weiss. Multidimensional cellular automata: closing property, quasi-expansivity, and (un)decidability issues. *Theoretical Computer Science*, 516:40–59, January 2014.
- [6] Harry Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Mathematical Systems Theory*, 1(1):1–49, March 1967. Publisher: Springer Science and Business Media LLC.
- [7] Joonatan Jalonen and Jarkko Kari. On Dynamical Complexity of Surjective Ultimately Right-Expansive Cellular Automata. In Jan M. Baetens and Martin Kutrib, editors, *Cellular Automata and Discrete Complex Systems*, pages 57–71, Cham, 2018. Springer International Publishing.
- [8] Jarkko Kari. *Cellular Automata Lecture Notes*. University of Turku, 2024.
- [9] Jarkko Kari. *Symbolic Dynamics Lecture Notes*. University of Turku, 2025.
- [10] Rune Kleveland. Mixing Properties of One-Dimensional Cellular Automata. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(6):1755–1766, 1997. Publisher: American Mathematical Society.
- [11] Oliver Knill. *Dynamical Systems Lecture Notes*. Harvard University, 2005.
- [12] Jukka Lempa. *Todennäköisyysteoria*. Turun yliopisto, 2025.
- [13] T. K. Subrahmonian Moothathu. Diagonal points having dense orbit. *Colloquium Mathematicum*, 120(1):127–138, 2010.
- [14] James Raymond Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River (N. J.), 2nd ed edition, 2000.
- [15] Marcus Pivato. Ergodic Theory of Cellular Automata. In Andrew Adamatzky, editor, *Cellular Automata*, pages 373–418. Springer US, New York, NY, 2009.
- [16] Moothathu Subrahmonian. *Studies in Topological Dynamics with Emphasis on Cellular Automata*. PhD thesis, Uniservity of Hyderabad, Hyderabad, 2006.

- [17] Peter Walters. *An Introduction to Ergodic Theory: 79*. Springer, New York, 2000.
- [18] Kari Ylinen. *Topologian perusteet*. Turun Yliopisto, 2011.