



**TURUN  
YLIOPISTO**

VARIAATIOLASKENTAA: SOVELLUKSIA JA NUMEERISIA  
MENETELMIÄ

LuK Katariina Rantanen

Pro gradu -tutkielma  
Toukokuu 2023

Tarkastajat:  
Prof. Marko Mäkelä  
Dos. Yury Nikulin

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KATARIINA RANTANEN: Variaatiolaskentaa: sovelluksia ja numeerisia menetelmiä

Pro gradu -tutkielma, 42 s.

Sovellettu matematiikka

Toukokuu 2023

---

Tässä Pro-Gradu tutkielmassa käsitellään variaatiolaskentaa ja siihen liittyviä käsitteitä. Variaatiolaskenta on matemaattisen analyysin osa-alue, jossa ratkotaan erilaisia ongelmia tarkastelemalla funktionaalien ääriarvokohtia.

Tutkielman alussa perehdytään yleisesti funktionaalianalyysiin ja funktionaalien käsitteeseen. Tämän jälkeen käsitellään yksi variaatiolaskennan tärkeimmistä tuloksista, Eulerin–Lagrangen yhtälö. Tutkielmassa tutustutaan muutamaan muun muassa fysiikkaan liittyvään minimointiongelmaan, joilla on tietyt reunaehdot. Näiden ehtojen ja Eulerin–Lagrangen yhtälön avulla voidaan muodostaa ratkaistavissa oleva differentiaaliyhtälö. Tutkielman loppupuolella perehdytään variaatiolaskennassa käytettäviin numeerisiin menetelmiin, jotka voidaan jakaa suoriin ja epäsuoriin menetelmiin. Tutkielmassa käsitellään vain suorita menetelmiä. Rayleigh–Ritz -menetelmä ja Galerkin -menetelmä tuottavat usein samoja tuloksia ja elementtimenetelmä on näiden pohjalta luotu, nykyään yksi käytetyimmistä numeerisista menetelmistä.

Asiasanat: Variaatiolaskenta, Eulerin–Lagrangen -yhtälö, brakistokroni, numeeriset menetelmät, Rayleigh–Ritz -menetelmä, Galerkin -menetelmä, elementtimenetelmä.



# Sisälllys

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Johdanto</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Funktionaalianalyysiä</b>                             | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Apulauseita ja lemmoja</b>                            | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>Eulerin–Lagrangen yhtälö</b>                          | <b>12</b> |
| 4.1      | Eulerin differentiaaliyhtälön erikoistapaukset . . . . . | 16        |
| 4.1.1    | $f(x, u, u') = f(x)$ . . . . .                           | 16        |
| 4.1.2    | $f(x, u, u') = f(u)$ . . . . .                           | 16        |
| 4.1.3    | $f(x, u, u') = f(u')$ . . . . .                          | 16        |
| 4.1.4    | $f(x, u, u') = f(x, u)$ . . . . .                        | 16        |
| 4.1.5    | $f(x, u, u') = f(x, u')$ . . . . .                       | 16        |
| 4.1.6    | $f(x, u, u') = f(u, u')$ . . . . .                       | 17        |
| 4.2      | Esimerkkejä . . . . .                                    | 17        |
| <b>5</b> | <b>Brakistokroni</b>                                     | <b>21</b> |
| 5.1      | Matemaattisen mallin luominen . . . . .                  | 21        |
| 5.2      | Funktionaalin minimointi . . . . .                       | 23        |
| <b>6</b> | <b>Numeerisia menetelmiä</b>                             | <b>26</b> |
| 6.1      | Suorat menetelmät . . . . .                              | 26        |
| 6.1.1    | Rayleigh–Ritz -menetelmä . . . . .                       | 26        |
| 6.1.2    | Galerkin -menetelmä . . . . .                            | 32        |
| 6.1.3    | Rayleigh–Ritz -menetelmään pohjautuva elementtimenetelmä | 34        |
| <b>7</b> | <b>Yhteenveto</b>  | <b>41</b> |
|          | <b>Lähteet</b>   | <b>42</b> |



# 1 Johdanto

Variaatiolaskenta on matemaattisen analyysin osa-alue, jossa tarkastellaan funktionaalien ääriarvokohtia. Funktionaalit ovat kuvauksia funktioavaruudesta reaaliluvuille eli ne ovat funktioista riippuvaisia, ja ne ilmaistaan usein määrättyinä integraaleina. Funktionaaleja voidaan kutsuakin useiden lähteiden mukaan "funktioiden funktioiksi". Niiden avulla voidaan mallintaa erilaisia ongelmia, joihin voidaan etsiä ratkaisu variaatiolaskentaa hyödyntäen. Ääriarvokohdilla tarkoitetaan minimi- ja maksimiarvoja ja niiden etsimisessä tarvitaan differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä. Tämä Pro gradu -tutkielma pohjautuu kandidaatintutkielmaan [12], joka käsitteli Eulerin–Lagrangen funktiota ja sen sovelluksia. Tutkielmassa perehdytään aiheeseen lisää ja käsitellään lisäksi variaatiolaskennan numeerisia menetelmiä.

Variaatiolaskennan teoria alkoi muodostua, kun Isaac Newton (1642–1727) ja Gottfried Leibniz (1646–1716) alkoivat kehittää 1600-luvun puolen välin jälkeen matemaattista analyysiä, joka on variaatiolaskennan perustana. 1680-luvulla Newton tutki, minkä muotoinen jonkin kappaleen tulisi olla, jotta se minimoisi vastuksen väliaineessa. Tätä ennen vain Pierre de Fermat (1607–1665) oli tutkinut muutamia yksittäisiä optimointiongelmia. Myöhemmin 1600-luvun lopulla Leibniz sekä veljekset Johann (1667–1748) ja Jakob Bernoulli (1654–1705) tutkivat brakistokroniongelmaa. Siinä halutaan löytää käyrä, joka minimoi jonkin kappaleen kulkeman ajan kahden pisteen välillä. Jacob Bernoulli onnistui ensimmäisenä osoittamaan, että ratkaisu on sykloidin kaari. Vasta vuonna 1736 Leonard Euler esitti oman ratkaisumetodinsa ongelmalle teoksessaan *Mechanica* ja nykyään tämä metodi tunnetaan nimellä Eulerin–Lagrangen yhtälö. Nämä löydökset loivat pohjan modernimmalle variaatiolaskennalle. [8] Klassisen variaatiolaskennan ongelmat ovat usein geometriaan tai fysiikkaan liittyviä, kun taas modernimmassa variaatiolaskennassa ongelmat ovat usein taloustieteeseen tai tietotekniikkaan liittyviä.

Tutkielma koostuu kuudesta luvusta. Toisessa luvussa käsitellään variaatiolaskennan läheistä matematiikan alaa, funktionaalianalyysiä. Luvussa esitellään funktionaalianalyysin perusperiaatteita ja tutustutaan funktionaalin käsitteeseen. Luvussa määritellään funktioavaruudet, funktionaali ja sen jatkuvuus sekä lineaarinen funktionaali ja esitetään näistä muutama esimerkki.

Kolmannessa luvussa esitellään tutkielman kannalta tärkeitä perustuloksia. Ensimmäisessä tarkastellaan osittaisintegrointia sekä variaatiolaskennan peruslausetta ja tämän jälkeen esitetään huomioita funktioiden konveksisuudesta. Luvun lopuksi määritellään vielä sykloidi, jotta sitä voidaan käyttää apuna brakistokroniongelman ratkaisussa.

Luku 4 käsittelee yhtä variaatiolaskennan tärkeimmistä tuloksista, Eulerin–Lagrangen yhtälöä ja sen todistusta. Yleinen Eulerin yhtälö on toisen kertaluvun epälineaarinen differentiaaliyhtälö, joka ei ratkea suljetussa muodossa. Luvussa käsitellään kuitenkin sen erikoistapauksia, joille on mahdollista löytää ratkaisu. Näistä on hyötyä erilaisten variaatiolaskennan ongelmien ratkaisussa. Luvussa 5 tutustutaan tarkemmin yhteen variaatiolaskennan tunnetuimmista ongelmista brakistokroniongelmaan ja esitetään sille ratkaisu.

Viimeisessä luvussa, tutustutaan variaatiolaskennassa käytettäviin numeerisiin menetelmiin. Variaatiolaskennassa käsiteltävät ongelmat voivat olla joskus hyvinkin

työläitä ratkaista ja tällöin niiden ratkaisemiseen voidaan soveltaa numeerisesta analyysistä tunnettuja numeerisia menetelmiä. Numeeriset menetelmät voidaan jakaa suoriin ja epäsuoriin menetelmiin niiden ratkaisutavan mukaan. Epäsuorien menetelmien ratkaisut perustuvat välttämättömiin optimaalisuusehtoihin, joita ei käsitellä tässä tutkielmassa. Tämän vuoksi tutkielmassa käsitellään vain suoria menetelmiä ja ratkaistaan niiden avulla muutama variaatio-ongelma. Tutkielmassa käsitellyt menetelmät, Rayleigh–Ritz -menetelmä ja Galerkin –menetelmä, antavat usein toisiaan vastaavia ratkaisuja kokeilufunktioiden valinnasta riippuen. Viimeisenä käsitellään vielä Ryaleigh–Ritz -menetelmään pohjautuva elementtimenetelmä ja siihen liittyvä esimerkki.

## 2 Funktionaalianalyysiä

Tässä kappaleessa käydään läpi funktionaalianalyysiin ja funktioavaruuksiin liittyviä määritelmiä ja käsitteitä.

**Määritelmä 2.1** (Lineaariavaruus, [7]). *Lineaariavaruudella* tarkoitetaan mielivaltaisista alkioista  $x, y, z, \dots$  koostuvaa joukkoa  $X$ , jolle on määritelty reaalilukujen  $\alpha, \beta, \dots$  yhteen- ja kertolasku ja joka toteuttaa seuraavat aksioomat:

1.  $x + y = y + x$ ;
2.  $(x + y) * z = x * (y + z)$ ;
3. On olemassa nollavektori  $0$ , jolla  $x + 0 = x \quad \forall x \in X$ ;
4. On olemassa sellainen alkio  $-x$ , jolle pätee  $x + (-x) = 0 \quad \forall x \in X$ ;
5.  $1 * x = x$ ;
6.  $\alpha(\beta * x) = (\alpha * \beta) * x$ ;
7.  $(\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$ ;
8.  $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$ .

Lineaariavaruutta voidaan kutsua myös *vektoriavaruudeksi*. Jos  $X = \mathbb{R}$ , niin tällöin kyseessä on reaalinen vektoriavaruus. Jos  $X = C$ , niin tällöin kyseessä on kompleksinen vektoriavaruus.

**Määritelmä 2.2** (Funktion normi, [11]). Kahden funktion läheisyyttä voidaan mitata *normilla*

$$\|\bar{x}\|_p = \left( \sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Kun  $p = 1$ , normia kutsutaan *summanormiksi* tai  $L_1$ -normiksi. Normia käytetään kerran jatkuvasti differentioituvien funktioiden etäisyyksien määrittämiseen.
- Kun  $p = l$ , normia kutsutaan  $L_l$ -normiksi. Normia käytetään  $k$ -kertaa jatkuvasti differentioituvien funktioiden etäisyyksien määrittämiseen, kun  $l > k$ .
- Kun  $p = \infty$ , normia kutsutaan *maksiminormiksi*, joka on itseasiassa niin sanottu  $l_0$ -normi. Normia käytetään mittaamaan kahdesti jatkuvasti differentioituvien funktioiden etäisyyttä.

Yksinkertaisesti normi voidaan ilmaista muodossa  $\|\bar{x} - \bar{y}\|$ . Kun  $\bar{x} = \bar{y}$ , niin  $\bar{x} - \bar{y} = 0$ , eli funktioiden välinen etäisyys on tässä tapauksessa 0. Voidaan siis sanoa, että kahden funktion välisen etäisyyden normi on nolla, jos funktiot ovat identtiset, normi pieni, jos funktiot ovat lähellä toisiaan ja normi on suuri, jos funktiot ovat kaukana toisistaan. [7]

**Määritelmä 2.3** (Normitettu lineaariavaruus, [7]). Lineaariavaruuden  $X$  sanotaan olevan *normitettu*, jos jokaiselle  $x \in X$  on määritetty ei-negatiivinen  $\|x\|$ , joka on funktion  $x$  normi, siten että se toteuttaa ehdot:

1.  $\|x\| = 0$  jos ja vain jos  $x = 0$ ;
2.  $\|\alpha * x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Määritelmä 2.4** (Funktionaali, [10]). *Funktionaali*  $J$  on kuvaus  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , joka kuvaa funktion  $x \in X$  reaalilukujen joukkoon.

**Esimerkki 2.5.** Olkoon  $x$  jatkuva ja muuttujasta  $t$  riippuva funktio, joka on määritetty välillä  $[t_0, t_f]$  ja

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} x(t) dt.$$

Funktionaalin  $J[x]$  antama reaalinen arvo on käyrän  $x(t)$  alapuolelle jäävä alue.

**Määritelmä 2.6** (Funktionaalin jatkuvuus, [7]). Olkoon  $X$  normitettu lineaariavaruus. Funktionaalin  $J[y]$  sanotaan olevan jatkuva pisteessä  $\hat{y} \in X$ , jos kaikille  $\varepsilon > 0$  on olemassa  $\delta > 0$  siten, että

$$|J[y] - J[\hat{y}]| < \varepsilon, \tag{1}$$

kun  $\|y - \hat{y}\| < \delta$ .

Epäyhtälö (1) voidaan kirjoittaa itseisarvo huomioon ottaen kahtena epäyhtälönä seuraavasti

$$J[y] - J[\hat{y}] > -\varepsilon \quad \text{ja} \quad J[y] - J[\hat{y}] < \varepsilon.$$

**Määritelmä 2.7** (Lineaarinen funktionaali, [7]). Olkoon  $\varphi[h]$  normitetussa lineaariavaruudessa  $X$  määritetty funktionaali. Sanotaan, että  $\varphi[h]$  on jatkuva *lineaarinen funktionaali*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Homogeenisuus:  $\varphi[\alpha h] = \alpha \varphi[h] \quad \forall h \in X$  ja  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. Additiivisuus:  $\varphi[h_1 + h_2] = \varphi[h_1] + \varphi[h_2] \quad \forall h_1, h_2 \in X$
3.  $\varphi[h]$  on jatkuva  $\forall h \in \mathbb{R}$

Käsitellään seuraavaksi kaksi funktionaalien lineaarisuuteen liittyvää esimerkkiä, joista ensimmäisessä funktionaali on lineaarinen ja toisessa funktionaali on epälineaarinen. Esimerkit 2.8 ja 2.9 pohjautuvat Donald E. Krikin kirjaan *Optimal Control Theory: an Introduction* [10].

**Esimerkki 2.8.** Tarkastellaan funktionaalia

$$J[h] = \int_{t_0}^{t_f} h(t)dt, \quad (2)$$

missä  $h$  on jatkuva ja muuttujasta  $t$  riippuva funktio. Tutkitaan seuraavaksi toteuttaako funktionaali homogeenisuuden ja additiivisuuden periaatteet.

Homogeenisuus:

$$\begin{aligned} \alpha J[h] &= \alpha \int_{t_0}^{t_f} h(t)dt \\ J[\alpha h] &= \int_{t_0}^{t_f} \alpha h(t)dt \end{aligned}$$

Näin ollen saadaan:

$$J[\alpha h] = \alpha J[h] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \forall h, \alpha h \in X.$$

Additiivisuus:

$$\begin{aligned} J[h_1 + h_2] &= \int_{t_0}^{t_f} [h_1(t) + h_2(t)]dt, \\ J[h_1] &= \int_{t_0}^{t_f} h_1(t)dt, \\ J[h_2] &= \int_{t_0}^{t_f} h_2(t)dt, \end{aligned}$$

ja näin ollen

$$J[h_1 + h_2] = J[h_1] + J[h_2] \quad \forall h_1, h_2, h_1 + h_2 \in X.$$

Koska funktionaali (2) toteuttaa sekä additiivisuuden että homogeenisuuden periaatteet, sen voidaan sanoa olevan lineaarinen.

**Esimerkki 2.9.** Tarkastellaan funktionaalia

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt, \quad (3)$$

missä  $x$  on jatkuva muuttujasta  $t$  riippuva funktio.

Tutkitaan seuraavaksi toteuttaako funktionaali homogeenisuuden ja additiivisuuden periaatteet.

Homogeenisuus:

$$\begin{aligned} J[\alpha x] &= \int_{t_0}^{t_f} [\alpha x(t)]^2 dt \\ &= \alpha^2 \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt \\ \alpha J[x] &= \alpha \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt \end{aligned}$$

Nähdään nyt selkeästi, että

$$J[\alpha x] \neq \alpha J[x] \quad \forall \alpha \neq 0,$$

joten näin ollen funktionaali (3) ei toteuta homogeenisuusperiaatetta, eikä se näin ollen ole lineaarinen. Additiivisuusperiaatetta ei tarvitse käsitellä erikseen, sillä funktionaalin lineaarisuus vaatii kummankin ehdon toteutumisen.

### 3 Apulauseita ja lemmoja

Käsitellään seuraavaksi muutamia tutkielman kannalta tärkeitä funktioiden sileyteen ja osittaisintegrointiin liittyviä perustuloksia. Osittaisintegroinnin avulla voidaan laskea kahden tai useamman funktion tulona muodostetun funktion integraaleja. Lauseen todistus pohjautuu kirjaan *Analyysiä reaaliluvuilla* [9].

**Määritelmä 3.1.** Sanotaan, että funktio on *sileä*, jos se on jatkuvasti derivoituva. Jos funktio  $f$  on sileä välillä  $[a, b]$ , merkitään  $f \in C^1([a, b])$ , ja jos funktio  $f$  saa lisäksi pisteissä  $a$  ja  $b$  arvon 0, merkitään  $f \in C_0^1([a, b])$ . Jos funktio on  $k$  kertaa jatkuvasti derivoituva, merkitään  $C^k([a, b])$ .

Klassisessa variaatiolaskennassa tarkastellaan yleensä sileitä funktioita. Tulokset voidaan kuitenkin yleistää myös epäsileille funktioille, jolloin tarvitaan yleistettyjä derivaattoja ja aligradiennteja. [1]

**Esimerkki 3.2.** Funktio  $f(x) = e^x$  on sileä, sillä se on määritelty  $\mathbb{R}$ :ssä, se on jatkuva ja voidaan osoittaa, että  $f'(x) = e^x$ . Tällöin funktion jokaisen kertaluvun derivaatta on sama.

**Lause 3.3** (Osittaisintegrointi). Olkoot funktiot  $f$  ja  $g$  sileitä välillä  $[a, b]$ . Tällöin

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \quad (4)$$

*Todistus.* Olkoot funktiot  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivoituvia pisteessä  $x \in [a, b]$ . Tiedetään, että funktioiden  $f$  ja  $g$  tulo on siis derivoituva ja tulon derivaatta pisteessä  $x$  on

$$D_x(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Funktio  $f$  ja  $g$  ovat derivoituvia, joten ne ovat myös jatkuvia välillä  $[a, b]$  ja tällöin ne ovat myös integroituvia. Nyt voidaan integroida yllä oleva kaava puolittain välillä  $[a, b]$ , ja saadaan

$$\int_a^b D_x(f(x)g(x))dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Kun järjestetään termit uudelleen, saadaan

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b D_x(f(x)g(x))dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Tiedetään, että funktion  $fg$  derivoituvuudesta seuraa sen jatkuvuus, jolloin  $f(x)g(x)$  on funktion  $D_x(f(x)g(x))$  integraalifunktio. Analyysin peruslauseen nojalla saadaan

$$\int_a^b D_x(f(x)g(x))dx = \int_a^b f(x)g(x).$$

Kun tämä sijoitetaan edelliseen yhtälöön, saadaan haluttu tulos, eli

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \quad \square$$

Käsitellään seuraavaksi yksi variaatiolaskennan keskeisimmistä lauseista, variaatiolaskennan peruslause (engl. *The fundamental lemma of the calculus of variations*). Lauseen todistus pohjautuu Wanin teokseen *Introduction to the calculus of variations and its applications* [14].

**Lause 3.4** (Variaatiolaskennan peruslause, [14]). Jos funktio  $g$  on jatkuva välillä  $[a, b]$  ja toteuttaa yhtälön  $\int_a^b g(x)h(x)dx = 0$  kaikilla sileillä funktioilla  $h$ , joille  $h(a) = h(b) = 0$ , niin  $g(x) \equiv 0$  välillä  $[a, b]$ .

*Todistus.* Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että on olemassa jokin sellainen piste  $\bar{x} \in [a, b]$ , että  $g(\bar{x}) \neq 0$ . Voidaan olettaa, että  $g(\bar{x}) > 0$ . Koska funktio  $g$  on jatkuva välillä  $[a, b]$ , niin on olemassa jokin sellainen  $\delta > 0$ , että

$$g(x) > \frac{g(\bar{x})}{2} > 0$$

kaikilla  $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap [a, b]$ .

Ideana on luoda sellainen funktio  $h \in C_0^1([a, b])$ , että  $h > 0$  välillä  $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$  ja muulloin 0. Jos  $h$  olisi tällainen funktio, niin tällöin saataisiin

$$0 = \int_a^b g(x)h(x)dx = \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} g(x)h(x)dx > \frac{g(\bar{x})}{2} \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} h(x)dx > 0.$$

Koska tämä ei ole mahdollista, voidaan päätellä, että  $g \equiv 0$  välillä  $[a, b]$ .

Muodostetaan nyt funktio  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$h := \begin{cases} (x - (\bar{x} - \delta))^2(\bar{x} + \delta - x)^2, & x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Jotta  $h$  toteuttaisi kaikki sille asetetut rajoitteet, sen tulee olla sileä ja välin  $[a, b]$  päätepisteissä nolla. Tiedetään, että  $h$  on paloittain määritelty funktio, joka koostuu polynomeista. Sen jatkuvuutta voidaan tutkia tarkastelemalla, mitä arvoja se saa välin  $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$  päätepisteissä. Lasketaan ensin oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä  $\bar{x} - \delta$ . Saadaan

$$((\bar{x} - \delta) - (\bar{x} - \delta))^2(\bar{x} + \delta - (\bar{x} - \delta))^2 = 0,$$

sillä huomataan, että funktion ensimmäinen termi saa arvon nolla. Kun lasketaan vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä  $\bar{x} + \delta$ , saadaan

$$((\bar{x} + \delta) - (\bar{x} - \delta))^2(\bar{x} + \delta - (\bar{x} + \delta))^2 = 0,$$

sillä funktion toinen termi saa arvon nolla. Funktio on nyt siis jatkuva välillä  $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$  ja välin päätepisteissä sekä välin ulkopuolella välillä  $[a, b]$ . Seuraavaksi tarkastellaan funktion derivaatan jatkuvuutta. Derivoidaan funktio käyttämällä tulon derivoimissääntöä. Sen mukaan, kun  $h(x) = f(x)g(x)$ , niin  $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ . Saadaan

$$h'(x) = (x - \bar{x} + \delta)^2 \left( \frac{d}{dx} (-x + \bar{x} + \delta)^2 \right) + \frac{d}{dx} ((x - \bar{x} + \delta)^2) (-x + \bar{x} + \delta)^2.$$

Nyt voidaan käyttää yhdistetyn funktion derivoimissääntöä, jonka mukaan  $D[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$ . Lasketaan ensin derivaatta  $(\frac{d}{dx}(-x + \bar{x} + \delta)^2)$ , jossa ulkofunktio on  $f(x) = x^2$  ja sisäfunktio on  $g(x) = -x + \bar{x} + \delta$ . Funktioiden derivaatat ovat  $f'(x) = 2x$  ja  $g'(x) = -1$ . Nyt nämä voidaan sijoittaa yhdistetyn funktion kaavaan ja saadaan  $2(-x + \bar{x} + \delta)$ . Lasketaan funktion  $\frac{d}{dx}((x - \bar{x} + \delta)^2)$  derivaatta samalla tavalla kuin äskeinen. Kun saadut derivaatat sijoitetaan tulon derivoimisesta saatuun yhtälöön, saadaan

$$(x - \bar{x} + \delta)^2 2(-x + \bar{x} + \delta)(-1) + (-x + \bar{x} + \delta)^2 2(x - \bar{x} + \delta).$$

Muuttamalla termien järjestystä saadaan

$$-2(-x + \bar{x} + \delta)(x - \bar{x} + \delta)^2 + 2(x - \bar{x} + \delta)(-x + \bar{x} + \delta)^2.$$

Lasketaan saadun derivaattafunktion arvot välin  $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$  päätepisteissä. Lasketaan oikeanpuoleinen raja-arvo, kun  $x$  lähestyy pistettä  $\bar{x} - \delta$ . Tällöin saadaan

$$-2(-(\bar{x} - \delta) + \bar{x} + \delta)((\bar{x} - \delta) - \bar{x} + \delta)^2 + 2((\bar{x} - \delta) - \bar{x} + \delta)(-(\bar{x} - \delta) + \bar{x} + \delta)^2.$$

Huomataan, että  $((\bar{x} - \delta) - \bar{x} + \delta)^2 = 0$  ja  $2((\bar{x} - \delta) - \bar{x} + \delta) = 0$ , mikä tarkoittaa, että funktio on oikealta jatkuva. Lasketaan seuraavaksi vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä  $\bar{x} + \delta$ , jolloin saadaan

$$-2(-(\bar{x} + \delta) + \bar{x} + \delta)((\bar{x} + \delta) - \bar{x} + \delta)^2 + 2((\bar{x} + \delta) - \bar{x} + \delta)(-(\bar{x} + \delta) + \bar{x} + \delta)^2.$$

Huomataan, että  $-2(-(\bar{x} + \delta) + \bar{x} + \delta) = 0$  ja  $(-(\bar{x} + \delta) + \bar{x} + \delta)^2 = 0$ . Tästä tiedetään, että funktio on myös vasemmalta jatkuva.

Nyt on osoitettu, että funktio on derivoituva ja sen derivaatta on jatkuva. Määritelmän 3.1 perusteella tiedetään, että näin ollen funktio on myös sileä, joten nyt  $h$  toteuttaa kaikki sille annetut rajoitteet.  $\square$

Seuraavaksi esitetään konveksin joukon ja konveksin funktion määritelmät ja niihin oleellisesti liittyvä lemma, jonka käsittelemiseen tarvitaan pistetulon, gradientin ja osittaisderivaatan määritelmää.

**Määritelmä 3.5** (Pistetulo, [12]). Vektoreiden  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ja  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  pistetuloa merkitään

$$\langle \bar{x}; \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Määritelmä 3.6** (Gradientti, [5]). Olkoon  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eli  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  on funktio, jolla on  $n$  muuttujaa. Funktion  $f$  gradientti on tällöin vektori

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T,$$

jossa termit  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ovat funktion  $f$  osittaisderivaattoja.

**Määritelmä 3.7** (Konvekssi joukko, [5]). Joukko  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  on *konvekssi*, jos se sisältää kaikki sen kahta mielivaltaista pistettä  $\bar{x}, \bar{y} \in Q$  yhdistävät janat, eli

$$\alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y} \in Q \quad \text{kaikilla } \bar{x}, \bar{y} \in Q \quad \text{ja} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

**Määritelmä 3.8** (Konvekssi funktio, [5]). Jatkuvasti derivoituva funktio  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  on konvekssi konveksissa joukossa  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ , jos jollekin  $\bar{x}, \bar{y} \in Q$  ja kaikille  $\alpha \in [0, 1]$  pätee

$$f(\alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y}) \leq \alpha f(\bar{x}) + (1 - \alpha)f(\bar{y}). \quad (5)$$

Funktion sanotaan olevan *aidosti konvekssi*, jos

$$f(\alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y}) < \alpha f(\bar{x}) + (1 - \alpha)f(\bar{y}), \quad (6)$$

kun  $\bar{x} \neq \bar{y}$  ja  $0 < \alpha < 1$ .

**Lemma 3.9.** [12] Konveksille funktiolle pätee,

$$f(\bar{y}) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{y}); \bar{x} - \bar{y} \rangle \quad (7)$$

kaikilla  $\bar{x}, \bar{y} \in Q$ .

*Todistus.* Oletetaan, että (5) on tosi kaikille  $\bar{x}, \bar{y} \in Q$  ja  $\alpha \in [0, 1]$ . Valitaan jokin  $\alpha \in [0, 1)$  ja merkitään  $x_\alpha = \alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y}$ . Kun järjestetään epäyhtälön termit uudelleen, saadaan

$$\begin{aligned} f(\bar{y}) &\geq \frac{1}{1 - \alpha} [f(x_\alpha) - \alpha f(\bar{x})] = f(\bar{x}) + \frac{1}{1 - \alpha} [f(x_\alpha) - f(\bar{x})] \\ &= f(\bar{x}) + \frac{1}{1 - \alpha} [f(\bar{x} + (1 - \alpha)(\bar{y} - \bar{x})) - f(\bar{x})]. \end{aligned} \quad (8)$$

Merkitään  $1 - \alpha = h$  ja otetaan epäyhtälöstä raja-arvo, kun  $h$  lähestyy nollaa. Tällöin saadaan viimeisen termin suunnattu derivaatta suuntaan  $\bar{y} - \bar{x}$ , joka on

$$f'_{\bar{y}-\bar{x}}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h(\bar{y} - \bar{x})) - f(\bar{x})}{h}.$$

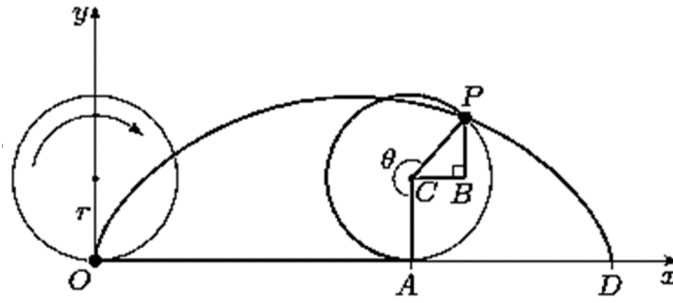
Tiedetään, että  $f'_u(x) = \langle \nabla f(x); u \rangle$ , joten saadaan

$$f'_{\bar{y}-\bar{x}}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h(\bar{y} - \bar{x})) - f(\bar{x})}{h} = \langle \nabla f(\bar{x}); \bar{y} - \bar{x} \rangle.$$

Kun tämä sijoitetaan epäyhtälöön (8), saadaan (7)

$$f(\bar{y}) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{y}); \bar{x} - \bar{y} \rangle. \quad \square$$

Käsitellään seuraavaksi sykloidikäyrää, jota tarvitaan brakistokroniongelman ratkaisussa luvussa 5.



Kuva 1: Ympyrän pyöriessä muodostama sykloidikaari. [13]

**Määritelmä 3.10** (Sykloidi [13]). Sykloidi on ympyrän kehältä valitun pisteen muodostama käyrä, joka muodostuu, kun ympyrä pyörii niin, että akseli on ympyrän pyöriessä sitä vasten koko ajan ilman liukumista. Havainnollistetaan tätä kuvan 1 avulla. Kuvassa ympyrä, jonka säde on  $r$ , pyörii vasten  $x$ -akselia. Ympyrän pyöriessä sen kehäpiste  $P$  muodostaa kaaren origosta  $O$  pisteeseen  $D$ .

Sykloidin yhtälö saadaan pisteen  $P$  koordinaattien avulla. Ympyrän kehäpisteen  $P$  pyöriessä muodostama kulma on  $\theta$ . Tiedetään, että pisteiden  $O$  ja  $A$  välinen pituus on yhtä suuri kuin pisteiden  $A$  ja  $P$  välinen ympyrän kaaren pituus  $r\theta$ . Tästä seuraa, että pisteen  $C$  koordinaatit ovat  $(r\theta, r)$ . Ympyrään muodostuvasta kolmiosta  $P, B, C$  saadaan

$$PB = -r \cos \theta \quad \text{ja} \quad BC = -r \sin \theta,$$

joten pisteen  $P$  koordinaatit ovat

$$x = r(\theta - \sin \theta) \quad \text{ja} \quad y = r(1 - \cos \theta). \quad (9)$$

Tämä on sykloidikäyrän parametrimuoto.

## 4 Eulerin–Lagrangen yhtälö

Eulerin–Lagrangen yhtälö on eräs variaatiolaskennan keskeisimmistä tuloksista. Variaatiolaskennassa tarkastellaan funktionaaleja, jotka ovat tavallisesti muotoa

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \quad (10)$$

ja saavuttavat minimikohdan sellaisella funktiolla  $u$ , joka toteuttaa Eulerin–Lagrangen yhtälön. Kun funktionaalille löydetään jokin ratkaisufunktio, sen tulee aina toteuttaa Eulerin–Lagrangen yhtälö ollakseen funktionaalin ääriarvo. Lauseen 4.1 esityksessä ja todistuksessa mukaillaan Bernard Dacorognan kirjaa *Introduction to the Calculus of Variations* [4].

**Lause 4.1.** Olkoot  $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  $f = f(x, u, \xi)$  ja

$$\inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \right\} = m, \quad (11)$$

missä  $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$ .

**Osa 1.** Jos  $\bar{u} \in X \cap C^2([a, b])$  on funktionaalin (11) minimoija, niin silloin

$$\frac{d}{dx} [f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))] = f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)), x \in (a, b), \quad (12)$$

missä

$$f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi} \text{ ja } f_u = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Tämä on niin sanottu *välttämätön ehto*.

**Osa 2.** Jos  $\bar{u}$  toteuttaa yhtälön (12) ja  $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$  on konvekssi kaikilla  $x \in [a, b]$ , niin  $\bar{u}$  on funktionaalin (11) minimoija. Tämä on niin sanottu *riittävä ehto*.

**Osa 3.** Olkoon funktio  $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$  aidosti konvekssi (6) kaikilla  $x \in [a, b]$ . Tällöin, jos funktionaalin (11) minimoija on olemassa, se on yksikäsitteinen. Tämä on niin sanottu *ainutlaatuisuuden takaava ehto*.

*Todistus.* Osa 1. Koska  $\bar{u}$  on minimoija joukossa  $X$ , saadaan

$$I(\bar{u}) \leq I(\bar{u} + hv)$$

kaikilla  $h \in \mathbb{R}$  ja kaikilla  $v \in C_0^1([a, b])$ . Toisin sanoen muutetaan funktionaalin minimointi funktion minimoinniksi, eli asetetaan  $\Phi(h) = I(\bar{u} + hv)$ , kun tiedetään, että  $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$  ja  $\Phi(0) \leq \Phi(h)$  kaikilla  $h \in \mathbb{R}$ . Tiedetään, että funktio saa ääriarvonsa derivaatan nollakohdissa. Voidaan päätellä, että

$$\Phi'(0) = \frac{d}{dh} I(\bar{u} + hv)|_{h=0} = 0$$

eli

$$\int_a^b \left[ f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v'(x) + f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v(x) \right] dx = 0. \quad (13)$$

Näin saatua integraalin muotoa kutsutaan Eulerin–Lagrangen funktion heikoksi muodoksi. Integroidaan seuraavaksi yhtälö (13) osittaisintegrointia (4) käyttämällä. Tiedetään, että  $\int f(x) + g(x)dx$  voidaan kirjoittaa muodossa  $\int f(x)dx + \int g(x)dx$ , joten yhtälö (13) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_a^b f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v'(x)dx + \int_a^b f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v(x)dx = 0.$$

Kun osittaisintegroidaan ensimmäinen termi, saadaan

$$\begin{aligned} & \int_a^b f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v(x) - \int_a^b f'_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v(x) \\ & + \int_a^b f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Koska  $v(a) = v(b) = 0$ , yhtälön ensimmäinen termi menee nolaksi ja saadaan

$$\int_a^b \left[ -\frac{d}{dx} f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v(x) + f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))v(x) \right] dx = 0.$$

Nyt  $v(x)$  voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan haluttu muoto

$$\int_a^b \left[ -\frac{d}{dx} [f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))] + f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) \right] v(x)dx = 0.$$

Nyt variaatiolaskennan peruslauseen (lauseen 3.4) mukaan, on saatu muodostettua Eulerin–Lagrangen yhtälö (12).

Osa 2. Olkoon  $\bar{u}$  yhtälön (12) ratkaisu, kun  $\bar{u}(a) = \alpha$  ja  $\bar{u}(b) = \beta$ . Koska  $(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$  on konvekksi kaikilla  $x \in [a, b]$ , tiedetään lemmän 3.9 perusteella, että tällöin on voimassa

$$f(x^*) \geq f(y^*) + \langle \nabla f(y^*); x^* - y^* \rangle. \quad (14)$$

Valitaan, että  $f(x^*) = f(x, u, u')$  ja  $f(y^*) = f(x, \bar{u}, \bar{u}')$ . Gradientti on tällöin

$$\nabla f(y^*) = \left[ \frac{\partial f(y^*)}{\partial x}, \frac{\partial f(y^*)}{\partial u}, \frac{\partial f(y^*)}{\partial \xi} \right].$$

Lasketaan ensin vektoreiden vähennyslasku, josta saadaan  $x^* - y^* = (x - x, u - \bar{u}, u' - \bar{u}')$ . Kun tästä otetaan pistetulo gradienttivektorin kanssa, saadaan

$$\langle \nabla f(y^*); x^* - y^* \rangle = \left[ \frac{\partial f(y^*)}{\partial x}(x - x) + \frac{\partial f(y^*)}{\partial u}(u - \bar{u}) + \frac{\partial f(y^*)}{\partial \xi}(u' - \bar{u}') \right].$$

Nyt yllä oleva yhtälö (14) saadaan muotoon

$$f(x, u, u') \geq f(x, \bar{u}, \bar{u}') + \left[ \frac{\partial f(y^*)}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f(y^*)}{\partial u}(u - \bar{u}) + \frac{\partial f(y^*)}{\partial \xi}(u' - \bar{u}') \right].$$

Huomataan, että termi  $x - \bar{x} = 0$ , jolloin myös  $\frac{\partial f(y^*)}{\partial x}(x - \bar{x}) = 0$  ja kun merkitään, että  $\frac{\partial f(y^*)}{\partial u} = f_u(x, \bar{u}, \bar{u}')$  ja  $\frac{\partial f(y^*)}{\partial \xi} = f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')$ , saadaan

$$f(x, u, u') \geq f(x, \bar{u}, \bar{u}') + f_u(x, \bar{u}, \bar{u}')(u - \bar{u}) + f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')(u' - \bar{u}')$$

kaikilla  $u \in X$ . Kun integroidaan yllä oleva epäyhtälö, saadaan

$$I(u) \geq I(\bar{u}) + \int_a^b [f_u(x, \bar{u}, \bar{u}')(u - \bar{u}) + f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')(u' - \bar{u}')] dx, \quad (15)$$

sillä tiedämme, että  $I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx$ . Tarkastellaan seuraavaksi yllä olevan epäyhtälön (15) integraalin toista termiä

$$\int_a^b f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')(u' - \bar{u}') dx.$$

Kun tämä osittaisintegroidaan kaavan (4) mukaan, saadaan

$$\int_a^b f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')(u - \bar{u}) - \int_a^b \frac{d}{dx} f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')(u - \bar{u}) dx. \quad (16)$$

Kaavan (16) ensimmäinen termi saa arvon nolla, koska tiedetään, että  $u(a) - \bar{u}(a) = u(b) - \bar{u}(b) = 0$ , jolloin epäyhtälön (15) integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_a^b f_u(x, \bar{u}, \bar{u}')(u - \bar{u}) dx - \int_a^b \frac{d}{dx} f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}')(u - \bar{u}) dx.$$

Termi  $(u - \bar{u})$  voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan

$$\int_a^b \left[ f_u(x, \bar{u}, \bar{u}') - \frac{d}{dx} f_\xi(x, \bar{u}, \bar{u}') \right] (u - \bar{u}) dx.$$

Yhtälön (12) mukaan

$$\frac{d}{dx} [f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))] = f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)),$$

kaikilla  $x \in (a, b)$ , joten saadaan

$$I(u) \geq I(\bar{u}) + \int_a^b [f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))] (u - \bar{u}) dx.$$

Integraali menee nolaksi, kun  $f_u$ -termit kumoavat toisensa, ja näin ollen saadaan  $I(u) \geq I(\bar{u})$ .

Osa 3. Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Ratkaisuja on tällöin vähintään kaksi. Olkoot  $u$  ja  $v$  yhtälön (11) kaksi ratkaisua ja  $m$  funktionaalin minimiarvo. Osoitetaan, että  $u \equiv v$ . Määritellään  $w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ , jossa  $w \in X$ . Kun  $f(u, \xi) \rightarrow f(x, u, \xi)$  on aidosti konvekksi (6), saadaan

$$\frac{1}{2}f(x, u, u') + \frac{1}{2}f(x, v, v') > f\left(x, \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}v'\right) = f(x, w, w')$$

ja siten

$$m = \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) > I(w) \geq m. \quad (17)$$

Päädytään ristiriitaan, jolloin vastaoletus ei ole voimassa. Nyt tiedetään, että yhtälöllä ei voi olla kahta ratkaisua, tällöin yhtälö on yksikäsitteinen ja  $u \equiv v$ .  $\square$

## 4.1 Eulerin differentiaaliyhtälön erikoistapaukset

Eulerin differentiaaliyhtälö on yleensä toisen asteen differentiaaliyhtälö, joten sille ei voida löytää ratkaisuja sen suljetun muodon vuoksi. Käsitellään seuraavaksi Eulerin yhtälön erikoistapauksia, joissa ratkaisuja on mahdollista löytää. [14]

### 4.1.1 $f(x, u, u') = f(x)$

Tässä tapauksessa kyseessä ei ole variaatiolaskennan ongelma, sillä funktionaali ei ole riippuvainen lainkaan funktiosta  $u$ . [14]

### 4.1.2 $f(x, u, u') = f(u)$

Tässä tapauksessa funktio  $u$ :n arvo on vakio ja funktionaalin ääriarvoja ei ole olemassa. Näin ollen funktionaalin ratkaisua ei ole olemassa kuin vain erikoistapauksissa. [14] Näitä erikoistapauksia ei käsitellä tässä tutkielmassa.

### 4.1.3 $f(x, u, u') = f(u')$

Tällaiset ongelmat ovat tyypillisiä luonnontieteissä ja tekniikassa. Nyt Eulerin differentiaaliyhtälö on muotoa

$$\frac{d}{dx}f_{u'} = 0 \quad \text{tai} \quad f_{u'} = c_0,$$

missä  $c_0$  on vakio. Ratkaistaan tästä  $u'$ , jotta saadaan  $u' = c_1$ . Integroinnin avulla saadaan  $u = c_1x + c_2$ . Vakiot  $c_1$  ja  $c_2$  voidaan asettaa niin, että päätepiste-ehdot toteutuvat. Näin saadaan myös seuraava lause.

**Lause 4.2.** [14] Jos variaatio-ongelman kohdefunktio riippuu vain funktiosta  $u'$ , eli on muotoa

$$J[u] = \int_a^b f(u')dx,$$

niin sileät ääriarvot ovat suoria.

### 4.1.4 $f(x, u, u') = f(x, u)$

Eulerin differentiaaliyhtälö on nyt muotoa  $f(x, u) = 0$  ja se voidaan ratkaista  $u$ :lle  $x$ :n funktiona. Nyt  $u$  on määritelty kokonaan, eikä ratkaisussa ole vapaita parametrejä. Näin ollen ratkaisu ei täytä päätepiste-ehtoja. Toisinaan kuitenkin esiintyy variaatiolaskennan ongelmia ilman päätepiste-ehtoja, joissa Lagrangen funktio ei riipu funktiosta  $u'$ . Tällaisiin ongelmiin saadaan ratkaisu Eulerin yhtälön avulla. [14]

### 4.1.5 $f(x, u, u') = f(x, u')$

Nyt funktionaali ei ole riippuvainen funktiosta  $u$  ja näin ollen  $\partial f/\partial u = 0$ . Tällöin Eulerin–Lagrangen yhtälö on muotoa

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right) = 0.$$

Integroimalla  $x$ :n suhteen saadaan  $\frac{\partial f}{\partial u'} = c$ , missä  $c$  on vakio. [7]

#### 4.1.6 $f(x, u, u') = f(u, u')$

Tällaisessa tapauksessa funktionaali ei eksplisiittisesti riipu  $x$ :stä, ja voidaan osoittaa, että Eulerin–Lagrangen funktio voidaan esittää muodossa

$$u' \frac{\partial f}{\partial u'} - f = c,$$

missä  $c$  on reunaehtojen määrittelemä vakio. Lausekkeen vasemmalla puolella olevaa muotoa kutsutaan myös Eulerin–Lagrangen funktion ensimmäiseksi integraaliksi. [13]

## 4.2 Esimerkkejä

Tässä alaluvussa esitellään muutama variaatiolaskennan avulla ratkaistava ongelma. Ensimmäinen esimerkki käsittelee tehdasongelmaa ja toinen kahden pisteen välistä lyhimmän reitin löytämistä tasossa. Kumpikin tämän luvun ongelmista voidaan ratkaista yksiselitteisesti käyttäen Eulerin–Lagrangen yhtälöä.

Tehdasongelma edustaa tyypillistä tuotannon ja kustannusten minimoinnin ongelmaa, jossa halutaan ajoittaa tuotanto siten, että tuotteet voidaan tuottaa minimikustannuksilla ja toimittaa asiakkaalle tietyssä ajassa.

**Esimerkki 4.3** (Tehdasongelma [14]). Yrityksellä on tilaus  $B$ , joka tulee toimittaa asiakkaalle ajassa  $T$ . Yritys haluaa ajoittaa tuotannon siten, että se vastaa tilausta minimikustannuksilla. Olkoon  $u$  tuotantomäärä, joka voidaan tuottaa ajassa  $t$ . Tilauksen kokonaishinta määräytyy kahdesta tekijästä:

1. Tuotantohinta yhtä tuotettua yksikköä kohden  $c_p$ , joka kasvaa lineaarisesti tuotannon tason mukana siten, että  $c_p = ku'$  jollekin positiiviselle vakiolle  $k$ .
2. Kiinteät yksikkövarastointikustannukset aikayksikköä kohden  $c_h$  ennen tilauksen toimitusajankohtaa.

Oletetaan, että tuotanto voidaan aloittaa heti ajanhetkellä  $t = 0$  ja sillä hetkellä varasto on tyhjä eli  $u(0) = 0$ . Jotta pysytään tuotteiden toimitusaikataulussa, niin tulee olla  $u(T) = B$ , mikä tarkoittaa, että varastossa olevien tuotteiden määrä tilauksen toimitushetkellä tulee olla  $B$  eli tehdyn tilauksen koko. Oletetaan, että tuotteet eivät ole pilaantuvia tai voi mennä rikki varastoinnin aikana, jolloin  $u(t) \geq 0$  ja  $u'(t) \geq 0$ . Kokonaistuotantohinta ajanjaksolla  $(t, t + dt)$  tälle yritykselle on:

$$c_p du + c_h u(t) dt = k[u'(t)]^2 dt + c_h u(t) dt,$$

josta seuraa, että ajanjaksolla  $[0, T]$

$$I[u] = \int_0^T k[u'(t)]^2 + c_h u(t) dt. \quad (18)$$

Tuotantostrategia halutaan valita siten, että vastaava  $\bar{u}(t)$  minimoi funktionaalin  $I[u]$ , kun  $\bar{u}(0) = 0$  ja  $\bar{u}(T) = B$ . Ratkaistaan ensin yleinen muoto käyttäen Eulerin–Lagrangen yhtälöä. Kun sijoitetaan  $f = k[\bar{u}'(t)]^2 + c_h \bar{u}(t)$  Eulerin–Lagrangen

yhtälöön  $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{u}'} \right) = 0$ , saadaan

$$\frac{\partial \{k[\bar{u}'(t)]^2 + c_h \bar{u}(t)\}}{\partial \bar{u}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \{k[\bar{u}'(t)]^2 + c_h \bar{u}(t)\}}{\partial \bar{u}'} \right) = 0.$$

Kun lasketaan osittaisderivaatat, saadaan

$$c_h - \frac{d}{dt}(2k\bar{u}'(t)) = 0$$

ja kun toinen termi derivoidaan, saadaan  $c_h - 2k\bar{u}''(t) = 0$ . Termejä uudelleen järjestämällä saadaan  $\bar{u}''(t) = \frac{c_h}{2k}$ , joka on lineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Se voidaan ratkaista integroimalla, jolloin saadaan

$$\bar{u}'(t) = \frac{c_h}{2k}t + b_1.$$

Integroidaan uudelleen ja saadaan

$$\bar{u}(t) = \frac{c_h t^2}{4k} + b_1 t + b_2.$$

Koska  $\bar{u}(0) = 0$  huomataan, että jotta funktio voisi saada arvon 0, niin integroimisvakion  $b_2$  tulee olla nolla. Ratkaistaan seuraavaksi  $\bar{u}(T) = B$ , joten sijoitetaan  $t$ :n paikalle  $T$  ja merkitään, että yhtälö on yhtä suuri kuin  $B$ , jolloin saadaan

$$\bar{u}(T) = \frac{c_h T^2}{4k} + b_1 T = B.$$

Ratkaistaan  $b_1$ , jolloin saadaan

$$b_1 = \frac{B}{T} - \frac{c_h T}{4k}.$$

Sijoitetaan saatu  $b_1$  funktion  $\bar{u}$  lausekkeeseen, jolloin saadaan

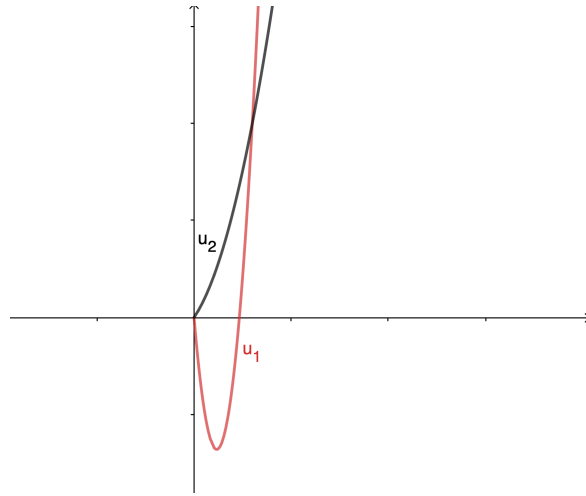
$$\bar{u}(t) = \frac{c_h t^2}{4k} + \left( \frac{B}{T} - \frac{c_h T}{4k} \right) t.$$

Tämä on nyt siis kysytty funktio  $\bar{u}$ . Kun tämä yhtälö derivoidaan ja ratkaistaan  $B$ , kun  $\bar{u}'(t) \geq 0$ , saadaan vielä reunaehto

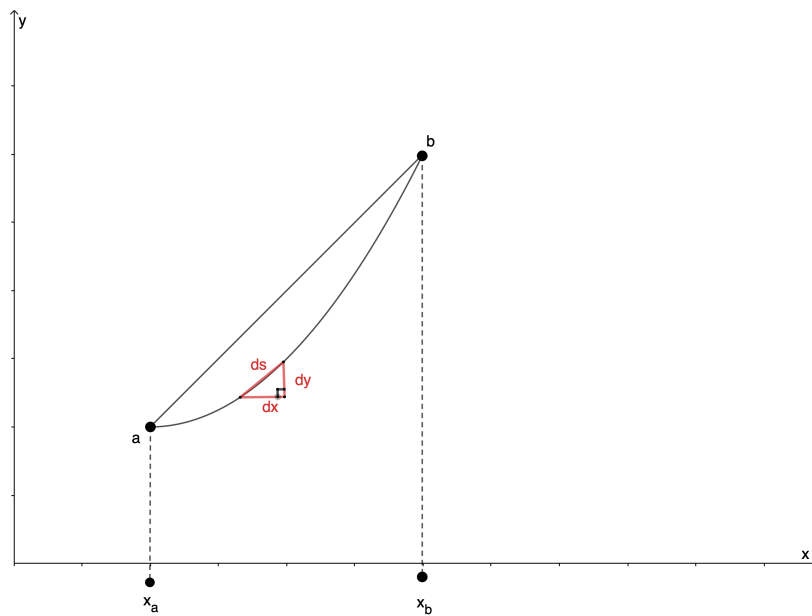
$$\bar{u}'(t) = \frac{c_h t}{2k} + \left( \frac{B}{T} - \frac{c_h T}{4k} \right),$$

joka helpottaa muuttujien arvojen valinnassa. Tästä voidaan nyt päätellä, että  $B \geq \frac{c_h T^2}{4k}$ . Tarkastellaan kuvaa 2, jossa on funktion  $\bar{u}$  mahdollisia kuvaajia. Funktio  $u_2$  toteuttaa annetut rajoitteet ja funktio  $u_1$  ei toteuta annettuja rajoitteita.

**Esimerkki 4.4** (Lyhin reitti kahden pisteen välillä tasossa [2]). Osoitetaan Eulerin–Lagrangen yhtälöä käyttäen, että kahden pisteen välinen lyhin reitti tasossa on suora. Halutaan siis löytää sellainen käyrä, joka minimoi kahden pisteen välisen etäisyyden. Tarkastellaan kuvaa 3, jossa esitellään funktion mahdollisia kuvaajia.



Kuva 2: Funktion  $\bar{u}$  kuvaajia. Funktio  $u_2$  toteuttaa annetut rajoitteet, mutta  $u_1$  ei toteuta.



Kuva 3: Funktion kuvaajia.

Pythagoraan lauseen avulla saadaan, että  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  ja voidaan kirjoittaa

$$I = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Järjestetään seuraavaksi neliöjuuren sisällä olevat termit uudelleen ja saadaan

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Tämä voidaan nyt sijoittaa integrandiin, jolloin saadaan

$$I = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (19)$$

Merkitään, että yllä oleva neliöjuuri-termi on funktio  $f$ . Käytetään Eulerin–Lagrangen yhtälöä. Koska funktio  $f$  ei ole riippuvainen funktiosta  $y$ , Eulerin differentiaaliyhtälöiden erikoistapauksen 4.1.5 perusteella voidaan päätellä, että  $\frac{\partial f}{\partial y'} = m$ , jossa  $m$  on vakio. Lasketaan osittaisderivaatta  $y'$ :n suhteen käyttäen yhdistetyn funktion derivaattaa, ja saadaan

$$\frac{\partial \{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}\}}{\partial y'} = \frac{1}{2}(1 + (y'(x))^2)^{-\frac{1}{2}} 2y'(x).$$

Nyt voidaan merkitä

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} = m$$

ja kun muokataan termien järjestystä, saadaan

$$y'(x) = m(1 + (y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Korotetaan yhtälö puolittain neliöön, jolloin saadaan

$$y'(x)^2 = m^2(1 + (y'(x))^2) = m^2 + m^2(y'(x))^2.$$

Muokataan termien järjestystä ja otetaan  $y'(x)^2$  yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan

$$y'(x)^2(1 - m^2) = m^2.$$

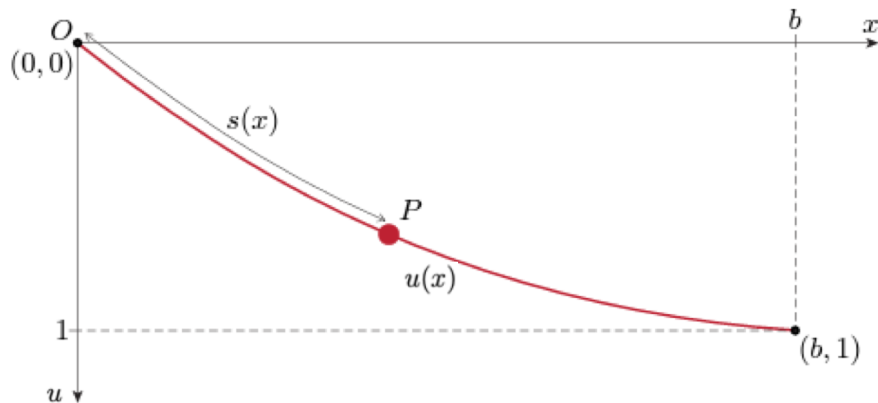
Ratkaistaan saadusta yhtälöstä funktion  $y'(x)$  lauseke

$$y'(x) = \sqrt{\frac{m^2}{1 - m^2}}.$$

Koska  $m$  on vakio, niin myös  $\sqrt{\frac{m^2}{1 - m^2}}$  täytyy olla vakio, jota merkitään  $c_1$ . Koska  $y'(x)$  on vakio, niin integroimalla saadaan kahden pisteen välisen matkan minimoiva funktio

$$y(x) = c_1 x + c_2,$$

missä  $c_1$  ja  $c_2$  ovat vakioita. Nähdään, että kyseessä on suoran yhtälö, joten on osoitettu, että lyhin matka tasossa kahden pisteen välillä on suora.



Kuva 4: Tyypillinen brakistokronikäyrä  $u(x)$ , jossa on merkitty matka  $s(x)$  origosta käyrän pisteeseen  $P$ . [13]

## 5 Brakistokroni

Seuraavaksi käsitellään variaatiolaskennan klassikkoesimerkkiä, brakistokroniongelmaa. Brakistokroniongelmassa tutkitaan ajan funktiota, joka joltakin kappaleelta kuluu sen siirtyessä pisteestä A pisteeseen B. Jokin voima, esimerkiksi painovoima, saa kappaleen liikkumaan. Ongelmassa etsitään kyseisen ajan minimiä. Kappaleen alkunopeuden oletetaan olevan nolla ja kappaleen oletetaan liikkuvan kitkattomasti.[14] Brakistokroniongelman muotoilu ja ratkaisu pohjautuvat teokseen *Introduction to the Calculus of Variations* [13].

Ongelman esitti alkujaan matemaatikko Johann Bernoulli vuonna 1696 ja ratkaisun ongelmaan löysivät lukuisat ajan matemaatikot. Ratkaisukäyrän muoto langalle on sykloidin kaari, jonka määritellään olevan vierintäkäyrä, joka syntyy jollakin ympyrällä olevan pisteen piirtämänä, kun kyseinen ympyrä vierii suoraan tasaisella alustalla. Käyrän muodostavat siis pisteen sijainnit eri ajanhetkinä. [13]

Brachistokroniongelma on tärkeä osa matematiikan historiaa, koska Eulerin–Lagrangen menetelmä tämän ongelman ratkaisemiseksi tarjosi puitteet myös useiden muiden optimointiongelmien ratkaisemiseen. Ratkaisun löytyminen vauhditti variaatiolaskennan syntyä ja variaatiolaskenta on siitä lähtien kietoutunut tiiviisti tieteen ja tekniikan kehitykseen. [8]

### 5.1 Matemaattisen mallin luominen

Fysiikasta tunnetun energian säilymislain eli energiaperiaatteen mukaan energia ei voi kadota eikä syntyä, se voi vain muuttaa muotoaan. Jos kappaleeseen ei vaikuta kitkaa tai vastusvoimia, sen energia pysyy muuttumattomana. Muodostetaan ongelmalle funktionaali annettujen pisteiden  $P_a = (a, A)$  ja  $P_b = (b, B)$  väliselle ajankululle narua eli käyrää  $u(x)$  pitkin.

Käytetään selkeyden vuoksi koordinaattijärjestelmää, jossa  $u$ -akseli on käännetty vertikaalisesti. Oletetaan, että kappale on alkutilassa levossa, paikassa  $a = 0$  ja  $A = 0$ . Ongelman yksinkertaistamiseksi voidaan olettaa, että narun pää on yksikköetäisyyden päässä aloituspisteen alapuolella, eli että päätepiste on  $P_b = (b, 1)$ , jossa  $b$

saa positiivisia arvoja. Oletetaan myös, ettei kappaleeseen vaikuta kitka- tai vastusvoimia. Brakistokroniongelman tyypillinen ratkaisukäyrä  $u(x)$  on esitetty kuvassa 4. Kuvassa on esitetty matka  $s(x)$  käyrää  $u(x)$  pitkin origosta käyrän pisteeseen  $P$ .

Fysiikasta tiedetään, että nopeus ilmaisee tietyssä ajassa edetyn matkan pituuden. Tästä suhteesta voidaan ratkaista myös aika. Kappaleen nopeus pisteessä  $P = (x, u(x))$  on näin ollen  $v = \frac{ds}{dt}$ , missä  $s$  =matka ja  $t$  =aika. Kappaleen potentiaalienergia pisteessä  $P$  on  $-mgu$  ja kappaleen kineettinen energia eli liike-energia kyseisessä pisteessä on  $\frac{1}{2}mv^2$ , missä  $m$ =massa,  $g$ =putoamiskiihtyvyyys ja  $u$ =paikka. Potentiaalienergia saa negatiivisen etumerkin, koska  $u$ -akseli on valittu normaalista poikkeavasti ylösalaisin ja näin ollen potentiaalienergian odotetaan laskevan, kun  $u$  kasvaa.

Fysiikan lakien mukaan kappaleen kokonaisenergia  $E$  on sen kineettisen energian ja potentiaalienergian summa. Kappaleen kokonaisenergia voidaan ilmaista seuraavasti

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgu.$$

Alussa kappaleen kokonaisenergia on oletettavasti nolla, sillä kappale on paikallaan lähtöpisteessä, eli  $v = 0$  ja  $u = 0$ . Lisäksi, koska oletettiin ettei kitka- ja vastusvoimia huomioida, niin energian säilymislain mukaan kappaleen energia säilyy. Tällöin kokonaisenergia  $E$  on aina 0,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgu = 0. \quad (20)$$

Kahden pisteen välinen etäisyys  $s$  saadaan Pythagoraan lauseen avulla  $\delta s^2 = \delta x^2 + \delta u^2$ , jossa  $\delta$  kuvaa  $N$  segmenttiin jaetun käyrän yhden segmentin alku- ja päätöspisteen välistä pituutta. Ketjusäännön

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt}$$

mukaan saadaan

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \\ &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + (u')^2). \end{aligned}$$

Kun nopeus  $v = ds/dt$ , missä  $ds$  on matkan muutos ja  $dt$  on ajan muutos, niin yhtälö (20) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + (u')^2) - mgu = 0.$$

Järjestetään termit uudelleen, jolloin saadaan

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2gu}{1 + (u')^2}.$$

Kappaleen liukumiseen kulunut aika lähtöpisteestä  $x = 0$ , ajanhetkellä  $t = 0$ , päätepisteeseen  $x = b$ , ajanhetkellä  $t = T$ , saadaan integraalista

$$T = \int_0^T dt = \int_0^b \frac{1}{dx/dt} dx = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + (u')^2}{2gu}} dx.$$

Näin ollen kappaleen liukuessa sen kulkema optimaalisin käyrä  $u(x)$  saadaan funktionaalista

$$T[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + (u')^2}{u}} dx, \quad u(0) = 0, u(b) = 1. \quad (21)$$

## 5.2 Funktionaalien minimointi

Ongelman ratkaisemiseksi luotu funktionaali (21) tulee minimoida. Huomataan, että integrandi

$$f(u, u') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + (u')^2}{u}}$$

ei ole lainkaan riippuvainen muuttujasta  $x$ . Tällöin voidaan hyödyntää luvussa 4.1.6 esiteltyä Eulerin-Lagrangen yhtälön ensimmäistä integraalia  $u' \frac{\partial f}{\partial u'} - f = \text{vakio}$  ja saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{(u')^2}{\sqrt{u(1 + (u')^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + (u')^2}{u}} = c,$$

missä  $c = \text{vakio}$ . Yksinkertaistamalla yhtälön vasen puoli ja kertomalla se luvulla  $-1$ , saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{u(1 + (u')^2)}} = \frac{1}{c},$$

missä  $c$  on vakio. Kerroin  $\frac{1}{\sqrt{2g}}$  voidaan sisällyttää vakioon. Korotetaan saatu yhtälö toiseen ja uudelleen järjestetään termit, ja saadaan  $u(1 + (u')^2) = c^2$  ja edelleen

$$\frac{du}{dx} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{u} - 1} = \pm \frac{c^2 - u}{u}. \quad (22)$$

Saatu differentiaaliyhtälö (22) on separoituva ja näin ollen se voidaan ratkaista. Differentiaaliyhtälön tulee olla positiivinen  $u$ -akselin kääntämisen vuoksi, kun oletettavasti funktio  $u(x)$  saa suurempia arvoja muuttujan  $x$  arvon kasvaessa. Separoimalla differentiaaliyhtälö (22) saadaan

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{u}{c^2 - u}} du,$$

missä yhtälön vasemman puolen integraali on  $x + \text{vakio}$ . Vakio voidaan kuitenkin sisällyttää yhtälön oikean puolen vakioon ja näin ollen se voidaan jättää merkittömättä. Ratkaistaan seuraavaksi yhtälön oikealla puolella oleva integraali. Merkitään  $u = c^2 \sin^2 \phi$ , josta seuraa, että  $du = 2c^2 \sin \phi \cos \phi d\phi$ . Saadaan

$$\int \frac{u}{c^2 - u} du = 2c^2 \int \sin \phi \cos \phi \sqrt{\frac{c^2 \sin^2 \phi}{c^2 - c^2 \sin^2 \phi}} d\phi.$$

Trigonometrian kaavoja  $1 - \sin^2 \phi = \cos^2 \phi$  ja  $\sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)$  käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} \int \frac{u}{c^2 - u} du &= 2c^2 \int \sin \phi \cos \phi \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}} d\phi \\ &= 2c^2 \int \sin^2 \phi d\phi \\ &= c^2 \int (1 - \cos 2\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2}c^2(2\phi - \sin 2\phi) + d, \end{aligned}$$

missä  $d$  on vakio. Funktionaalille saadaan parametrimuotoiset ratkaisut seuraavasti

$$x = \frac{1}{2}c^2(2\phi - \sin 2\phi) + d \text{ ja } u = c^2 \sin^2 \phi = \frac{1}{2}c^2(1 - \cos 2\phi). \quad (23)$$

Kun parametri  $\phi = 0$ , yhtälöistä (23) saadaan  $x = d$ , kun  $u = 0$ . Akselit valittiin siten, että  $x = 0$ , kun  $u = 0$  ja tällöin myös  $d = 0$ . Näin ollen yhtälöistä (23) saadaan

$$x = \frac{1}{2}c^2(2\phi - \sin 2\phi) \quad \text{ja} \quad u = \frac{1}{2}c^2(1 - \cos 2\phi). \quad (24)$$

Vakio  $c$  määräytyy sen mukaan, että käyrä kulkee origon ja pisteen  $(b, 1)$  kautta. Oletetaan, että  $\phi = \phi_b$ , kun  $(x, u) = (b, 1)$ , jolloin

$$b = \frac{1}{2}c^2(2\phi_b - \sin 2\phi_b) \quad \text{ja} \quad 1 = \frac{1}{2}c^2(1 - \cos 2\phi_b),$$

joten

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{(1 - \cos 2\phi_b)}.$$

Näin ollen parametrimuotoisista yhtälöistä (23)

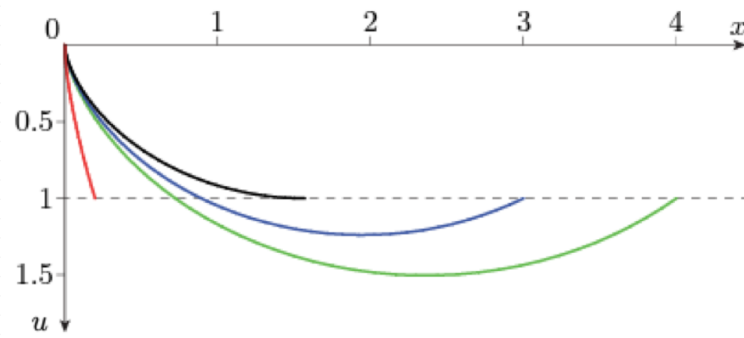
$$x = \frac{2\phi - \sin 2\phi}{1 - \cos 2\phi_b} \quad \text{ja} \quad u = \frac{1 - \cos 2\phi}{1 - \cos 2\phi_b}, \quad 0 \leq \phi \leq \phi_b, \quad (25)$$

missä  $\phi_b$  voidaan ratkaista yhtälöstä

$$b = \frac{2\phi_b - \sin 2\phi_b}{1 - \cos 2\phi_b}. \quad (26)$$

Jos  $\phi = 0$ , niin  $(x, u) = (0, 0)$  ja jos  $\phi = \phi_b$ , niin  $(x, u) = (b, 1)$  Yhtälöä (26) ei voida ratkaista analyttisesti, joten se tulee ratkaista numeerisesti. Voidaan osoittaa, että  $b$  kasvaa  $\phi_b$ :n kasvaessa ja että jokaiselle arvolle  $b$  voidaan löytää sitä vastaava arvo  $\phi_b$ . Yhtälön (26) avulla voidaan myös osoittaa, että  $b \rightarrow \infty$ , kun  $\phi \rightarrow \pi$ .

Brakistokroniongelman ratkaisu mille tahansa muuttujan arvoille  $b$  saadaan ainoastaan ratkaisemalla yhtälö (26) arvolle  $\phi_b$  ja sen jälkeen sijoittamalla tämä parametrimuotoihin (25). Erilaisia ratkaisuja voidaan havainnollistaa muun muassa



Kuva 5: Brakistokronikäyriä eri muuttujan  $b$  arvoilla,  $b = 0.2$  (punainen),  $b = \pi/2$  (musta),  $b = 3$  (sininen) ja  $b = 4$  (vihreä). [13]

jonkin matemaattisen ohjelman avulla. Kuva 5 havainnollistaa eri muuttujan  $b$  arvoilla saatavia erilaisia mahdollisia käyriä, jotka alkavat origosta  $(0, 0)$  ja päättyvät pisteeseen  $(b, 1)$ .

Verrataan muodostettuja parametrimuotoisia yhtälöitä (25) ja sykloidikäyrän parametrimuotoa (9). Huomataan, että parametrimuotoiset funktiot vastaavat toisiaan ja näin ollen on osoitettu, että brakistokronikäyrä on sykloidikäyrä.

## 6 Numeerisia menetelmiä

Variaatiolaskennan ongelmat voivat olla hyvin työläitä ratkaista tarkasti ja toisinaan tarkkaa ratkaisua ei saada. Tällaisissa tapauksissa ongelmien ratkaisuun voidaan soveltaa numeerisen analyysin menetelmiä.

Numeerinen analyysi on matematiikan ala, joka pyrkii löytämään mahdollisimman tarkkoja approksimaatioita matemaattisten ongelmien ratkaisuille, joiden tarkka ratkaisu on työlästä tai mahdotonta löytää. [6]

Variaatiolaskennan numeeriset menetelmät voidaan jakaa kahteen pääluokkaan: suorat menetelmät ja epäsuorat menetelmät. Epäsuorien menetelmien käyttö perustuu välttämättömien optimaalisuusehtojen käyttöön, joiden avulla alkuperäinen ongelma voidaan yksinkertaistaa raja-arvo-ongelmaksi. Epäsuorien menetelmien käytön laskennalliset edut ja haitat määräytyvät tämän vuoksi kunkin ongelman ominaisuuksien mukaan. Suorien menetelmien etu on se, että funktionaalien ääriarvot löytyvät välittömästi. Numeeristen menetelmien jako kahteen luokkaan ei ole yksikäsitteistä, sillä jotkin algoritmit käyttävät molempia, suoraa ja epäsuoraa, lähestymistapoja. Lisäksi joitakin menetelmiä ei voida luokitella kumpaankaan luokkaan ja tämän vuoksi riittäviin optimaalisuusehtoihin perustuvat menetelmät muodostavat oman luokkansa. [6]

Tässä tutkielmassa käsitellään vain variaatiolaskennan suoraa menetelmiä ja esitetään niihin liittyviä esimerkkejä. Epäsuorien menetelmien esittely vaatisi useiden välttämättömien optimaalisuusehtojen läpikäyntiä.

### 6.1 Suorat menetelmät

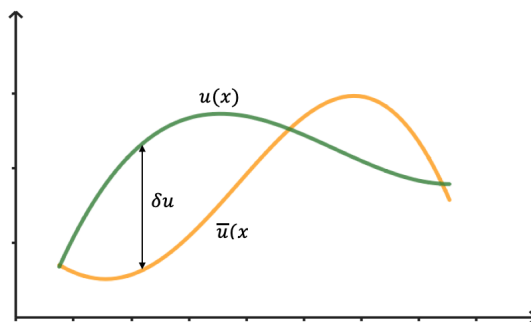
Esitellään tässä luvussa kolme variaatiolaskennan suoraa menetelmää ja esimerkkejä niiden käytöstä. Käsitellään ensin variaatiolaskennan suoriin numeerisiin menetelmiin yleisimmin luokiteltu Rayleigh–Ritz -menetelmä ja sen avulla ratkaistava esimerkki. Tämän jälkeen käsitellään Galerkin -menetelmä ja siihen liittyvä esimerkki. Lopuksi käsitellään vielä Rayleigh–Ritz -menetelmään pohjautuva elementtimenetelmä ja sen avulla ratkaistava esimerkkitapaus.

#### 6.1.1 Rayleigh–Ritz -menetelmä

Rayleigh–Ritz -menetelmän esitteli ensimmäisen kerran matemaatikko Lordi Rayleigh (1842-1919) vuonna 1877 ja sitä täydensi matemaatikko Walther Ritzin (1842-1909) lisäys vuonna 1909. Menetelmän esittely ja sitä havainnollistava esimerkki pohjautuvat Kevin W. Casselin teokseen *Variational Methods with Applications in Science and Engineering* [3].

Rayleigh–Ritz -menetelmää voidaan hyödyntää suoraan variaatiomuotoisen ongelman ratkaisuun differentiaalimuotoisen ongelman sijaan. Menetelmää voidaan käyttää niin itsenäisenä approksimatiivisena menetelmänä, kuin myös perustana jollekin yleiselle menetelmälle, esimerkiksi elementtimenetelmälle. [3]

Variaatiolaskennassa on toisinaan järkevää käyttää merkintää  $\delta$ , jotta voidaan hyödyntää sen samankaltaisuuksia merkintöjen  $\partial$  ja  $d$  kanssa. Näin voidaan myös yksinkertaistaa kaavojen mahdollisesti monimutkaisiakin merkintöjä. Merkinnät  $\partial$  ja  $d$  eroavat merkinnästä  $\delta$  siten, että ne kuvaavat funktion muutosta pisteestä



Kuva 6: Stationäärisen funktion ja sen lähellä olevan funktion ero  $\delta u$ .

pisteeseen, kun taas  $\delta$  kuvaa muutosta funktiosta funktioon. Stationäärisen funktion ja sen lähellä olevan funktion eroa kuvaa  $\delta u$ . Eroa on havainnollistettu kuvassa 6. Funktionaalinen stationäärinen funktio  $u(x)$  on funktio, joka aiheuttaa variaation katoamisen, eli  $\delta I = 0$ . [3]

Etsitään stationäärinen funktio funktionaalille  $I[u] = \int f(x, u, u', \dots) dx$ . Stationäärinen funktio löydetään, kun funktionaali kerrotaan variaatiolla  $\delta$  ja asetetaan nolaksi. Oletetaan siis, että variaatio-ongelma on muotoa

$$\delta \int_a^b f(x, u, u', \dots) dx = 0, \quad (27)$$

mistä pyritään määrittämään stationäärinen funktio  $u(x)$ . Approksimoidaan nyt stationääristä funktiota  $u(x)$  funktiolla  $\bar{u}$  ja käytetään  $n$ -kappaletta ennalta valittuja kantafunktioita  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  seuraavasti:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i(x) = \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) + \dots + c_i \phi_i(x) + \dots + c_n \phi_n(x), \quad (28)$$

missä  $c_0 = 1$ . Luotua funktiota (28) kutsutaan yleisesti kokeilufunktioksi.

Metodin ratkaisumenetelmä perustuu kertoimien  $c_i$  määrittämiseen, jotka antavat lähimmän mahdollisimman approksimaation tarkalle stationääriselle funktiolle  $u(x)$  ennalta valittujen kantafunktioiden suhteen. Vakioiden  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ratkaisut ovat uniikkeja, jos kantafunktiot ovat lineaarisesti riippumattomia.

Oletetaan, että päätepiste-ehdot ovat

$$u(a) = u_0 \text{ ja } u(b) = u_1.$$

Tällöin valitaan ensimmäinen kantafunktio  $\phi_0(x)$  siten, että se toteuttaa molemmat reunaehdot. Loput kantafunktiot valitaan vastaavasti päätepisteissä

$$\begin{aligned} \phi_0(a) &= u_0, \phi_1(a) = \phi_2(a) = \dots = \phi_n(a) = 0 \\ \phi_0(b) &= u_1, \phi_1(b) = \phi_2(b) = \dots = \phi_n(b) = 0. \end{aligned}$$

Voidaan esimerkiksi valita  $0 \leq x \leq l$ ,  $u(0) = 0$  ja  $u(l) = h$ . Tällöin kantafunktioksi  $\phi_0(x)$  saadaan  $\phi_0(x) = \frac{h}{l}x$ , joka on päätepiste-ehtojen välinen suora. Määritely- ja reunaehdot kutsutaan välttämättömiksi reunaehdoiksi, koska on välttämätöntä,

että kokeilufunktio toteuttaa ne. Kun yhdistetään aiemmin määritelty funktionaali (27) ja kokeilufunktio (28), saadaan seuraava variaatio-ongelma

$$\delta \int_a^b f(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx = 0,$$

missä vakiot  $c_i$  vaihtelevat.

Etsitään siis vakioita  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  kokeilufunktiosta (28), joka vastaa funktionaalin stationääristä funktiota, joka on approksimaatio funktionaalin (27) tarkasta stationäärisestä funktiosta. Kun  $n$ :ää kasvatetaan, niin approksimaatio on tarkempi tarkkaan stationääriseen funktioon  $u(x)$  verrattuna, mutta tämä vaatii enemmän työtä vakioiden  $c_i$  löytämiseksi kokeilufunktiosta  $\bar{u}(x)$ . Rayleigh–Ritz -menetelmä vaatii  $n \times n$  muotoisen yhtälöryhmän ratkaisua, missä  $n$  on kokeilufunktiossa etsittyjen vakioiden lukumäärä.

Käsitellään seuraavaksi variaatio-ongelma, joka voidaan ratkaista numeerisesti Rayleigh–Ritz -menetelmän avulla.

**Esimerkki 6.1.** [3] Ratkaistaan variaatio-ongelma, joka on muotoa

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x, \quad (29)$$

ja sen tulee toteuttaa päätepiste-ehdot  $u(0) = 0$  ja  $u(l) = 0$ .

Differentiaaliyhtälö (29) tulee ensin muokata variaatiomuotoon, jotta valitun metodin käyttö on mahdollista ongelman ratkaisemiseksi. Luodaan ongelmasta niin sanottu käänteinen ongelma. Aloitetaan yhtälön muokkaaminen kertomalla sen molemmat puolet variaatiolla  $\delta u(x)$  ja integroidaan määrittelyjoukon yli, jolloin saadaan

$$\int_0^l (u'' - u + x) \delta u dx = 0.$$

Osittaisintegroidaan saatu yhtälö  $u$ :n suhteen ja saadaan

$$\int_0^l u' \delta u + \int_0^l (-u' \delta u' - u \delta u + x \delta u) dx = 0.$$

Tiedetään, että päätepiste-ehdot ovat määrättyt, joten tästä seuraa, että yllä olevan lausekkeen ensimmäinen termi  $[u' \delta u]_0^l$  katoaa. Variaatio  $\delta$  voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle, jolloin saadaan

$$\delta \int_0^l \left( -\frac{1}{2}(u')^2 - \frac{1}{2}u^2 + xu \right) dx = 0.$$

Saatu yhtälö voidaan kirjoittaa variaatiomuodossa seuraavasti

$$\delta \int_0^l ((u')^2 + u^2 - 2xu) dx = 0. \quad (30)$$

Nyt on luotu Rayleigh–Ritz -menetelmän käytön mahdollistava variaatiomuoto. Valitaan seuraavaksi kantafunktio, joka toteuttaa alussa määrättyt päätepiste-ehdot

(29). Yksinkertaisin vaihtoehto esimerkin tapauksessa on valita  $\phi_0(x) = 0$ . Valitsemalla kantafunktiot tällä tavoin, varmistetaan, että ne saavat päätepisteissä  $x = 0$  ja  $x = l$  arvon 0. Merkitään loppuja kantafunktioita seuraavasti:

$$\phi_1(x) = x(l - x), \phi_2(x) = x^2(l - x), \dots, \phi_n(x) = x^n(l - x).$$

Nämä kantafunktiot ovat ekvivalentteja myös kokeilufunktiolle

$$\bar{u}(x) = \phi_0(x) + x(l - x)(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_nx^{n-1}). \quad (31)$$

Havainnollistetaan seuraavaksi Rayleigh–Ritz -menetelmän käyttöä. Oletetaan, että  $l = 1$  ja  $n = 1$ . Sijoitetaan parametrien arvot kokeilufunktioon (31), jolloin saadaan

$$\bar{u}(x) = c_1x(1 - x). \quad (32)$$

Derivoidaan yhtälö käyttäen tulon derivoimissääntöä ja saadaan

$$\begin{aligned} \bar{u}'(x) &= c_1 \left[ (1 - x) \left( \frac{\partial}{\partial x}(x) \right) + x \left( \frac{\partial}{\partial x}(1 - x) \right) \right] \\ &= c_1(-x + 1(1 - x)) \\ &= c_1(1 - 2x). \end{aligned}$$

Sijoitetaan saadut kokeilufunktio ja sen derivaattafunktio variaatiomuotoon (30), ja integroidaan saatu yhtälö seuraavasti

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 [c_1^2(1 - 2x)^2 + c_1^2x^2(1 - x)^2 - 2c_1x^2(1 - x)] dx &= 0 \\ \delta \int_0^1 [c_1^2(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1) + 2c_1(x^3 - x^2)] dx &= 0 \\ \delta \int_0^1 \left[ c_1^2 \left( \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + x \right) + 2c_1 \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right) \right] dx &= 0 \\ \delta \left[ \frac{11}{30}c_1^2 - \frac{1}{6} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Muuttuja  $c_1$  on yhtälön ainoa muuttuja, joten lauseketta voidaan arvioida seuraavasti

$$\frac{11}{30}(2c_1\delta c_1) - \frac{1}{6}\delta c_1 = 0 \quad \text{eli} \quad \delta c_1 \left( \frac{11}{15}c_1 - \frac{1}{6} \right) = 0.$$

Muuttujan  $c_1$  variaatio  $\delta c_1$  on mielivaltainen, joten sen kertoimet voidaan poistaa. Näin saadaan

$$\frac{11}{15}c_1 - \frac{1}{6} = 0,$$

ja kun tästä ratkaistaan muuttujan  $c_1$  arvo, saadaan  $c_1 = \frac{5}{22}$ . Nyt approksimatiivinen ratkaisu kantafunktiolle (30), kun  $n = 1$ , on

$$\bar{u}(x) = \frac{5}{22}x(1 - x). \quad (33)$$

Saatu approksimatiivinen ratkaisu toteuttaa nyt myös eksplisiittisesti määrätyt reunaehdot.

Esimerkissä käsitellyn ongelman approksimatiivista ratkaisua voidaan verrata ongelman tarkkaan ratkaisuun, joka voidaan ratkaista seuraavasti, kun alkuehdot ovat  $u(0) = 0$  ja  $u(1) = 0$ . Ratkaisu saadaan komplementaarisen ja partikulaarisen ratkaisun summana.

Oletetaan, että ongelman (29) ratkaisu on verrannollinen termille  $e^{\lambda x}$  jollakin vakiolla  $\lambda$ . Merkitään, että  $u(x) = e^{\lambda x}$  ja saadaan

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{\lambda x}) - e^{\lambda x} = 0.$$

Merkitään seuraavaksi, että  $\frac{d^2}{dx^2}(e^{\lambda x}) = \lambda^2 e^{\lambda x}$  ja otetaan termi  $e^{\lambda x}$  yhteiseksi tekijäksi. Saadaan

$$(\lambda^2 - 1)e^{\lambda x} = 0.$$

Tiedetään, että  $e^{\lambda x} \neq 0$  kaikille äärellisille muuttujille  $\lambda$ . Tällöin voidaan merkitä  $\lambda^2 - 1 = 0$ , ja saadaan  $\lambda = -1$  tai  $\lambda = 1$ . Ratkaisu  $\lambda = -1$  antaa  $u_1(x) = c_1 e^{-x}$ , missä  $c_1$  on mielivaltainen vakio. Ratkaisu  $\lambda = 1$  antaa  $u_2(x) = c_2 e^x$ , missä  $c_2$  on mielivaltainen vakio. Komplementaarinen ratkaisu saadaan näiden ratkaisujen summana seuraavasti

$$u_c(x) = u_1(x) + u_2(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x.$$

Oletetaan, että ongelman (29) partikulaarinen ratkaisu on muotoa  $u_p(x) = a_1 + a_2 x$ . Ratkaistaan seuraavaksi tuntemattomat vakiot  $a_1$  ja  $a_2$ . Saadaan

$$\frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(a_1 + a_2 x) = 0.$$

Sijoitetaan partikulaarinen ratkaisu  $u_p(x) = a_1 + a_2 x$  differentiaaliyhtälöön ja saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} - u_p(x) &= -x \\ -(a_1 + a_2 x) &= -x. \end{aligned}$$

Näin ollen voidaan merkitä, että  $-a_1 = 0$  ja  $-a_2 = -1$  ja saadaan  $a_1 = 0$  ja  $a_2 = 1$ . Sijoitetaan nämä yhtälöön  $u_p(x) = a_1 + a_2 x$  ja saadaan  $u_p(x) = x$ . Yleinen ratkaisu on tällöin

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x) = x + c_1 e^{-x} + c_2 e^x.$$

Ratkaistaan tuntemattomat vakiot sijoittamalla alkuehdot  $u(0) = 0$  ja  $u(1) = 0$  yleiseen ratkaisuun ja saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ \frac{c_1}{e} + e c_2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöpari ja saadaan

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{e}{-1 + e^2} \\ c_2 &= \frac{e}{-1 + e^2}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan saadut vakioiden arvot yleiseen ratkaisuun  $u(x) = x + c_1 e^{-x} + c_2 e^x$  ja uudelleen järjestetään termejä. Saadaan ongelman (29) tarkaksi ratkaisuksi

$$u(x) = \frac{e}{e^2 - 1}(e^{-x} - e^x) + x. \quad (34)$$

Kuva 7 osoittaa, että Rayleigh–Ritz -menetelmän avulla saatu approksimatiivinen ratkaisu on melko lähellä todellista tarkkaa ratkaisua. Kuvassa tarkkaa ratkaisua  $u(x)$  on merkitty katkoviivalla ja approksimatiivista ratkaisua  $\bar{u}(x)$  yhtenäisellä viivalla.

Differentiaalioperaattorin  $L$  sanotaan olevan *itseadjungoitu*, jos

$$\langle u, Lv \rangle = \langle v, Lu \rangle,$$

missä funktiot  $v(x)$  ja  $u(x)$  ovat mielivaltaisia. Jotta differentiaalioperaattori olisi itseadjungoitu, sen tulee olla *Sturm–Liouville* -muotoa

$$Lu = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u = f(x).$$

Muunnetaan tämä variaatiomuotoon kertomalla lauseke notaatiolla  $\delta u$  ja integroimalla määrittelyalueen yli

$$\int_a^b (Lu - f) \delta u dx = 0.$$

**Esimerkki 6.2.** [3] Differentiaaliyhtälö on vastaava kuin esimerkissä 6.1, eli se on muotoa

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x, \quad u(0) = 0 \text{ ja } u(1) = 0.$$

Määritetään kahden vakion Rayleigh–Ritz approksimaatio stationääriselle funktiolle pelkistetyn variaatiomuodon avulla. Kun  $p(x) = 1$  ja  $q(x) = -1$  sekä  $f(x) = -x$ , pelkistetyksi variaatiomuodoksi saadaan

$$\int_0^1 (u'' - u + x) \delta u dx = 0. \quad (35)$$

Olkoon  $\phi_0(x) = 0$ , jotta päätepiste-ehdot toteutuvat ja  $n = 2$ , tällöin

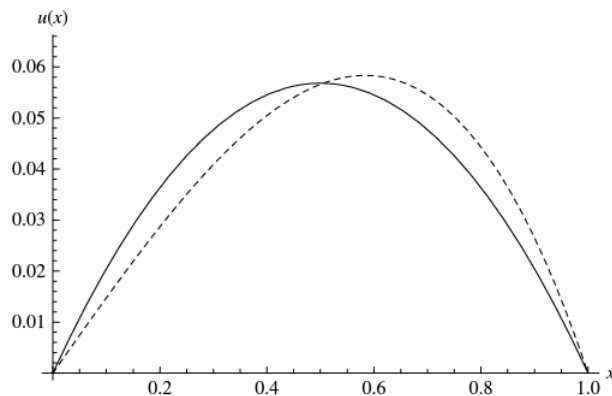
$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= x(1-x)(c_1 + c_2 x) \\ &= (x - x^2)c_1 + (x^2 - x^3)c_2. \end{aligned}$$

Derivoidaan tämä kahdesti ja saadaan

$$\begin{aligned} \bar{u}'(x) &= -2c_1 x + c_1 + (2 - 3x)c_2 \\ \bar{u}''(x) &= -2c_1 + 2(1 - 3x)c_2. \end{aligned}$$

Kun  $\delta u = \frac{\partial u}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial u}{\partial c_2} \delta c_2$  yhtälö (35) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \int_0^1 [-2c_1 + 2(1 - 3x)c_2 - (x - x^2)c_1 - (x^2 - x^3)c_2 + x] \\ \cdot [(x - x^2)\delta c_1 + (x^2 - x^3)\delta c_2] dx = 0. \end{aligned}$$



Kuva 7: Tarkan ratkaisun  $u(x)$  ja approksimatiivisen ratkaisun  $\bar{u}(x)$  vertailu, kun  $n = 1$ . [3]

Kertomalla ja yhdistelemällä termejä saadaan

$$\int_0^1 \{ [2(c_2 - c_1)x + (c_1 - 8c_2 + 1)x^2 + (2c_1 + 5c_2 - 1)x^3 + (2c_2 - c_1)x^4 - c_2x^5] \delta c_1 + [2(c_2 - c_1)x^2 + (c_1 - 8c_2 + 1)x^3 + (2c_1 + 5c_2 - 1)x^4 + (2c_2 - c_1)x^5 - c_2x^6] \delta c_2 \} dx = 0.$$

Integroidaan lauseke  $x$ :n suhteen ja saadaan

$$\left( -\frac{11}{30}c_1 - \frac{11}{60}c_2 + \frac{1}{12} \right) \delta c_1 + \left( -\frac{11}{60}c_1 - \frac{1}{7}c_2 + \frac{1}{20} \right) \delta c_2 = 0.$$

Termit  $\delta c_1$  ja  $\delta c_2$  ovat mielivaltaisia, joten saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} 22c_1 + 11c_2 &= 5 \\ 77c_1 + 60c_2 &= 21. \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöpari ja saadaan  $c_1 = \frac{69}{473}$  ja  $c_2 = \frac{7}{43}$ . Approksimatiivinen ratkaisu on tällöin

$$\bar{u} = \frac{69}{473}(x - x^2) + \frac{7}{43}(x^2 - x^3). \quad (36)$$

### 6.1.2 Galerkin -menetelmä

Esitellään seuraavaksi matemaatikko Boris Galerkinin (1871-1945) vuonna 1915 esittämä ja hänen mukaansa nimetty suora numeerinen variaatiolaskennan menetelmä, Galerkin -menetelmä, joka perustuu painotettujen residuaalien menetelmään. Galerkin -menetelmän etu on, ettei ongelmaa tarvitse välttämättä kirjoittaa variaatiomuodossa, eikä sen välttämättä tule olla edes mahdollista toisin kuin Rayleigh–Ritz -menetelmää käytettäessä. Tämä etu mahdollistaa kyseisen menetelmän laajemman käyttömahdollisuuden ja sopivuuden. Menetelmän esittely ja sitä havainnollistava esimerkki pohjautuvat kirjaan *Variational Methods with Applications in Science and Engineering* [3].

Etsitään approksimatiivista ratkaisua differentiaaliyhtälölle

$$Lu = f.$$

Kuten Rayleigh–Ritz -menetelmässä, approksimaatio on kokeilufunktio, joka koostuu kantafunktioiden lineaarisesta yhdistelmästä seuraavasti

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i(x) = \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) + \cdots + c_i \phi_i(x) + \cdots + c_n \phi_n(x).$$

Kun approksimatiivinen ratkaisu  $\bar{u}(x)$  on annettu, voidaan määrittellä residuaali

$$R(x) = L\bar{u} - f,$$

joka on approksimaation virheen mitta. Jos  $\bar{u}(x) = u(x)$ , residuaali on nolla. Painotettujen residuaalien menetissä residuaali kerrotaan painofunktioiden joukolla  $w_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  ja integroidaan määrittelyalueen yli seuraavasti

$$\int_{x_0}^{x_1} (L\bar{u} - f)w_i dx = 0.$$

Tämä vastaa residuaalin sisätulon asettamista kullekin painofunktiolle nolllaksi, eli  $\langle R(x); w_i(x) \rangle = 0$ . Tätä voidaan ajatella painotetun differentiaaliyhtälön residuaalin määrittämisenä määrittelyalueen yli. Tarkalla ratkaisulla integrandi on luonnollisesti nolla. Osittaisintegroinnin avulla derivaattafunktiot saadaan muutettua kokeilufunktioista painofunktioiksi ja näin saadaan ongelman heikko muoto. Painotettujen residuaalien yleisessä menetelmässä painofunktioiksi  $w_i(x)$  ja kantafunktioiksi  $\phi_i(x)$  voidaan valita erilaisia funktioita. Galerkin menetissä käytetään painofunktioina kantafunktioita eli  $w_i(x) = \phi_i(x)$ .

**Esimerkki 6.3.** [3] Käsitellään edellisen esimerkin 6.1 differentiaaliyhtälöä (29)

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x, u(0) = 0, u(1) = 0$$

ja etsitään tälle stationäärinen funktio  $u(x)$  käyttäen Galerkin menetelmää ja polynomimuotoista kokeilufunktiota, kun  $n = 2$ . Käytetään kantafunktioita

$$\phi_0(x) = 0, \phi_1(x) = x(1-x) \text{ ja } \phi_2(x) = x^2(1-x),$$

jotka antavat kokeilufunktion

$$\bar{u}(x) = (x - x^2)c_1 + (x^2 - x^3)c_2$$

ja derivoimalla tämä saadaan

$$\bar{u}'(x) = (1 - 2x)c_1 + (2x - 3x^2)c_2.$$

Galerkin -menetelmässä painofunktiot ja kantafunktiot asetetaan ekvivalenteiksi kokeilufunktiossa, eli  $w_i(x) = \phi_i(x)$ . Yleisesti  $\langle R(x); \phi_i \rangle = 0$  tai  $\int_0^1 (L\bar{u} - f)dx = 0$ , eli tässä tapauksessa

$$\int_0^1 (\bar{u}'' - \bar{u} + x)\phi_i dx = 0.$$

Kun yhtälön ensimmäinen termi osittaisintegroidaan ja huomioidaan myös reunaehdot, heikoksi muodoksi saadaan

$$\int_0^1 (-\bar{u}'\phi_i' - \bar{u}\phi_i + x\phi_i)dx = 0.$$

Käytetään heikkoa muotoa, koska se sisältää vain ensimmäisen kertaluvun derivaattafunktioita ja on vähemmän rajoittava derivaattafunktioiden jatkuvuuden suhteen verrattuna pelkistetyssä variaatiomuodossa esiintyviin toisen kertaluvun derivaattafunktioihin. Kun  $i = 1$  ja  $\phi_1(x) = x - x^2$ , saadaan

$$\int_0^1 \{-(1-2x)c_1 + (2x-3x^2)c_2\}[1-2x] - [(x-x^2)c_1 + (x^2-x^3)c_2][x-x^2] + x[x-x^2]\}dx = 0.$$

Polynomeja kertomalla ja termejä yhdistelemällä saadaan

$$\int_0^1 [(-x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)c_1 + (-x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 2x)c_2] - x^2 - x^3]dx = 0.$$

Kun tämä integroidaan muuttujan  $x$  suhteen, saadaan

$$22c_1 + 11c_2 = 5.$$

Toistetaan tämä uudelleen, kun  $i = 2$ , jolloin saadaan

$$77c_1 + 60c_2 = 21.$$

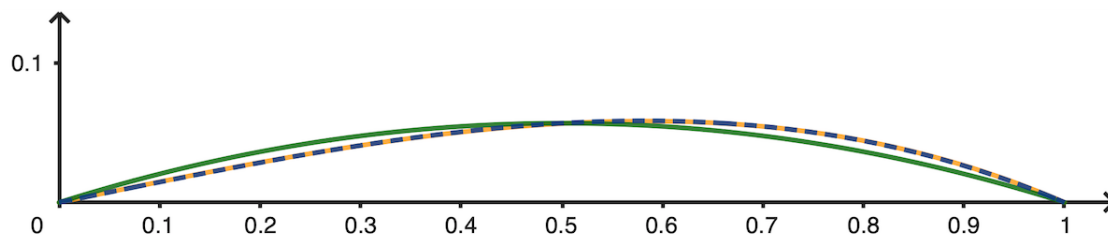
Ratkaistaan saatu yhtälöpari, jolloin saadaan  $c_1 = \frac{69}{473}$  ja  $c_2 = \frac{7}{43}$ . Kun nämä sijoitetaan kokeilufunktioon saadaan

$$\bar{u}(x) = \frac{69}{473}(x - x^2) + \frac{7}{43}(x^2 - x^3). \quad (37)$$

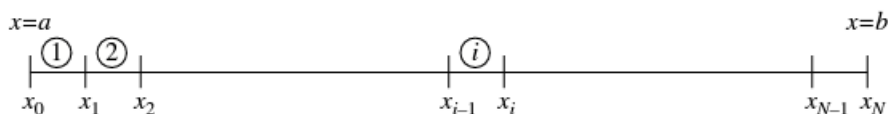
Huomataan, että tämä vastaa toisessa Rayleigh-Ritz -menetelmän esimerkissä 6.2 saatua approksimatiivista ratkaisufunktiota (36). Havainnollistetaan kuvassa 8 Rayleigh-Ritz -menetelmän ja Galerkin -menetelmän avulla ratkaistujen esimerkkien approksimatiivisia ratkaisuja (33) ja (37) ja verrataan niitä ongelman tarkkaan ratkaisuun (34). Kuvasta huomataan, että vihreä, Rayleigh-Ritz -menetelmän ensimmäisen esimerkin 6.1 antama ratkaisu poikkeaa muista, eli sen approksimatiivinen ratkaisu poikkeaa stationäärisestä funktiosta eniten.

### 6.1.3 Rayleigh-Ritz -menetelmään pohjautuva elementtimenetelmä

Elementtimenetelmä on nykyään käytössä olevista numeerisista menetelmistä yksi käytetyimmistä. Laajempaan käyttöön se on levinnyt 1960-luvulta alkaen. Nykyään sitä käytetään laajasti sekä tutkimuksessa että käytännön työssä, ja useat kaupalliset ohjelmistokoodit perustuvat siihen. Käyttökohteita löytyy esimerkiksi rakennemekaniikasta, lämmönsiirtotekniikasta, nesteiden dynamiikasta, sähkötekniikasta ja useilta muilta fysiikan aloilta. [3]



Kuva 8: Approksimatiivisten ratkaisujen vertailua tarkkaan ratkaisuun. Rayleigh–Ritz -menetelmän antama ratkaisu esimerkissä 6.1 =vihreä, Galerkin -menetelmän ja Rayleigh–Ritz -menetelmän toisen esimerkin 6.2 antama ratkaisu=sininen, ongelman tarkka ratkaisu=keltainen.



Kuva 9: Yksiulotteinen määrittelyalue. [3]

Rayleigh–Ritz -menetelmässä kokeilufunktiota sovelletaan koko määrittelyalueelle, kun taas siihen pohjautuvassa elementtimenetelmässä sitä sovelletaan jokaiseen yksittäiseen elementtiin erikseen. Tämän etu on se, että sen avulla voidaan tarkasti approksimoida erilaisia geometrisia alueita, kun kokeilufunktiota sovelletaan jokaiseen elementtiin erikseen. Menetelmän voidaan sanoa olevan hyvin joustava verrattuna Rayleigh–Ritz ja Galerkin -menetelmiin. Joitakin, esimerkiksi nesteiden virtauksiin liittyviä variaatio-ongelmia ei välttämättä voida ratkaista käyttämällä Rayleigh–Ritz pohjaista elementtimenetelmää, sillä differentiaaliyhtälöä ei välttämättä pystytä kirjoittamaan vaaditussa muodossa. Tällöin voidaan kuitenkin mahdollisesti käyttää esimerkiksi Galerkin -menetelmään tai muihin vastaaviin painotettuihin residuaaleihin pohjautuvia elementtimenetelmiä. [3]

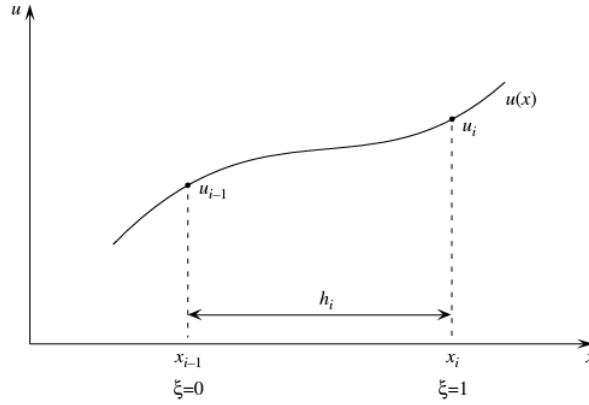
Käytetään tässä tutkielmassa kuitenkin Rayleigh–Ritz -menetelmään pohjautuvaa elementtimenetelmää, vaikka olisikin yleisempää käyttää jotakin painotettujen residuaalien menetelmää. Esitellään Rayleigh–Ritz -menetelmään pohjautuva elementtimenetelmä ja siihen liittyvä esimerkki käyttäen kirjan *Variational Methods with Applications in Science and Engineering* [3] esitystapaa.

Etsitään stationäärinen funktio funktionaalille  $I[u] = \int_a^b f(x, u, u')dx$ . Otetaan siitä variaatio ja asetetaan se nolllaksi seuraavasti

$$\delta \int_a^b f(x, u, u')dx = 0.$$

Jaetaan integraalin määrittelyalue  $a \leq x \leq b$   $N$ :ään yhtä suureen osaan, jolloin pisteissä  $x_i, i = 0, \dots, N$  muodostuu  $N + 1$  kappaletta solmupistettä, kuten kuvassa 9.

Oletetaan, että solmupisteiden  $x_{i-1}$  ja  $x_i$  väli  $i$ , eli  $i$ :s elementti, on kuten kuvassa 10, jossa  $\xi = 0$  vastaa vasenta solmupistettä  $x_{i-1}$ , jossa  $u(x) = u_{i-1}$  ja  $\xi = 1$  vastaa oikeaa solmupistettä  $x_i$ , jossa  $u(x) = u_i$ . Muuttuja  $x$  on globaali muuttuja ja muuttuja  $\xi$  on jokaisen elementin lokaali muuttuja.



Kuva 10: Elementin  $i$  havainnollistus. [3]

Jos  $h_i = x_i - x_{i-1}$ , niin

$$\xi = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

Tällöin saadaan

$$x = x_{i-1} + h_i \xi, \quad dx = h_i d\xi, \quad \frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{h_i} \frac{d}{d\xi}. \quad (38)$$

Funktiota  $u(\xi)$  voidaan approksimoida välillä  $0 \leq \xi \leq 1$  käyttämällä Rayleigh–Ritz -menetelmää kokeilufunktiona. Tätä voidaan kutsua muotofunktioksi, kun sitä sovelletaan yksittäisiin elementteihin. Muotofunktio saadaan seuraavasti:

$$u(\xi) = u_{i-1} \phi_L(\xi) + u_i \phi_R(\xi).$$

Seuraavaksi määritetään muotofunktiot  $\phi_L(\xi)$  ja  $\phi_R(\xi)$  ja etsitään vakioiden  $u_{i-1}$  ja  $u_i$  arvot solmupisteissä.

Muotofunktioksi voitaisiin periaatteessa valita mitkä tahansa funktiot, mutta integroinnin helpottamiseksi valitaan yleensä polynomeja. Yksinkertaisuuden vuoksi käytetään seuraavia lineaarisia muotofunktioita

$$\phi_L(\xi) = 1 - \xi \quad \text{ja} \quad \phi_R(\xi) = \xi,$$

jolloin funktiota  $u(\xi)$  voidaan approksimoida seuraavasti

$$u(\xi) = u_{i-1}(1 - \xi) + u_i \xi = u_{i-1} + \xi(u_i - u_{i-1}) \quad \text{ja} \quad u(a) = u_{i-1}, \quad u(b) = u_i. \quad (39)$$

Tällöin variaatio-ongelma koko ongelmalle on jokaisen elementin Rayleigh–Ritz -menetelmän avulla saatujen approksimaatioiden summa, eli

$$\delta I \approx \sum_{i=1}^N \delta \int_a^b f_i(\xi, u_{i-1}, u_i) d\xi = 0,$$

missä  $I = I(u_0, u_1, \dots, u_N)$ . Rayleigh–Ritz -menetelmä on globaali approksimaatiomenetelmä, jossa käytetään yhtä kokeilufunktiota, kun taas elementtimenetelmä

on lokaali approksimaatiomenetelmä ja siinä jokainen elementti approksimoidaan kokeilufunktiolla erikseen.

Käsitellään seuraavaksi Rayleigh–Ritz -menetelmään pohjautuvaan elementtimenetelmään liittyvä esimerkki.

**Esimerkki 6.4.** [3] Etsitään approksimatiivinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) = -x, \quad (40)$$

kun  $u(1) = 0$  ja  $u'(2) = 0$ . Määrätty reunaehto, kun  $x = 1$ , on välttämätön ja kokeilufunktion tulee toteuttaa se. Derivaattareunaehto, kun  $x = 2$ , on epäolennainen eli kokeilufunktion ei tule toteuttaa sitä, sillä se toteutuu välttämättömän ehdon toteutuessa.

Aloitetaan ongelman ratkaiseminen kertomalla differentiaaliyhtälö (40) termillä  $\delta u$  ja integroidaan määrittelyalueen yli

$$\int_1^2 [(xu')' + x]\delta u dx = 0.$$

Osittaisintegroimalla yhtälön ensimmäiseksi termiksi saadaan

$$\int_1^2 (xu')'\delta u dx = \int_1^2 xu'\delta u - \int_1^2 xu'\delta u' dx = - \int_1^2 \frac{1}{2}x\delta(u')^2 dx.$$

Näin differentiaaliyhtälön variaatiomuodoksi saadaan

$$\delta \int_1^2 \left[ \frac{1}{2}x(u')^2 - xu \right] dx = 0.$$

Jaetaan tämä kunkin yksittäisen elementin integraalien summaksi, kun  $x_0 = 1$  ja  $x_N = 2$ , seuraavasti

$$\delta \int_1^{x_1} f dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} f dx + \cdots + \delta \int_{x_{i-1}}^{x_i} f dx + \cdots + \delta \int_{x_{N-1}}^2 f dx = 0,$$

missä  $f = f(x, u, u')$  ja  $i$ :nnes elementti saadaan seuraavasti

$$\delta \int_{x_{i-1}}^{x_i} f dx = \delta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ \frac{1}{2}x\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - xu \right] dx. \quad (41)$$

Muunnetaan lauseke siten, että sen muuttuja on globaalin muuttujan  $x$  sijaan lokaali muuttuja  $\xi$ . Tarkastellaan integrandin (41) ensimmäistä termiä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x\left(\frac{du}{dx}\right)^2 &= \frac{1}{2}(x_{i-1} + h_i\xi) \left\{ \frac{1}{h_i} \frac{d}{d\xi} \left[ u_{i-1} + \xi(u_i - u_{i-1}) \right] \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2h_i^2}(x_{i-1} + h_i\xi)(u_i u_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä sekä aiemmin muodostetut lausekkeet (38) ja (39) yhtälöön (41), ja saadaan

$$\delta \int_0^1 f_i d\xi = \delta \int_0^1 \left[ \frac{1}{2h_i^2} (x_{i-1} + h_i \xi) \Delta u_i^2 - (x_{i-1} + h_i \xi)(u_{i-1} + \xi \Delta u_i) \right] h_i d\xi,$$

missä  $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$  ja  $f_i = f_i(\xi, u_{i-1}, u_i)$ . Muokataan lauseketta ja saadaan

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 f_i d\xi = & \delta \int_0^1 \left[ \frac{1}{2h_i} x_{i-1} \Delta u_i^2 - h_i x_{i-1} u_{i-1} \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{2} \Delta u_i^2 - h_i x_{i-1} \Delta u_i - h_i^2 u_{i-1} \right) \xi - h_i^2 \Delta u_i \xi^2 \right] d\xi. \end{aligned}$$

Integroidaan lauseke ja sovelletaan määrätyn integraalin rajoja, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 f_i d\xi = & \delta \left[ \frac{1}{2h_i} x_{i-1} \Delta u_i^2 - h_i x_{i-1} u_{i-1} + \frac{1}{4} \Delta u_i^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} h_i x_{i-1} \Delta u_i - \frac{1}{2} h_i^2 u_{i-1} - \frac{1}{3} h_i^2 \Delta u_i \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Seuraavaksi voidaan todeta, että hakasuluissa oleva termi  $[\cdot]$  vaihtelee muuttujien  $u_i$  ja  $u_{i-1}$  suhteen ja lausekkeen oikea puoli voidaan ilmaista osittaisderivaattojen avulla seuraavasti

$$\delta[\cdot] = \frac{\partial[\cdot]}{\partial u_{i-1}} \delta u_{i-1} + \frac{\partial[\cdot]}{\partial u_i} \delta u_i.$$

Todetaan, että  $\partial \Delta u_i / \partial u_{i-1} = -1$  ja  $\partial \Delta u_i / \partial u_i = 1$  ja yksinkertaistetaan yhtälöä (42), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 f_i d\xi = & \left[ - \left( \frac{1}{2} \frac{x_{i-1}}{h_i} \right) \Delta u_i - \frac{1}{2} h_i x_{i-1} - \frac{1}{6} h_i^2 \right] \delta u_{i-1} \\ & + \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{x_{i-1}}{h_i} \right) \Delta u_i - \frac{1}{2} h_i x_{i-1} - \frac{1}{3} h_i^2 \right] \delta u_i. \end{aligned}$$

Yksinkertaistetaan saatua muotoa seuraavaksi, jotta lausekkeen käsittely olisi yksinkertaisempaa. Merkitään, että

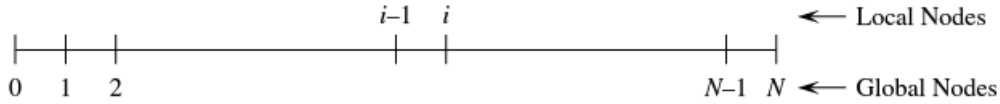
$$a_i = \frac{1}{2} + \frac{x_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{1}{2} h_i x_{i-1} \quad \text{ja} \quad c_i = \frac{1}{2} h_i x_{i-1} + \frac{1}{3} h_i^2,$$

jolloin yhtälö on muotoa

$$\delta \int_0^1 f_i d\xi = (a_i u_{i-1} - a_i u_i - b_i) \delta u_{i-1} + (-a_i u_{i-1} + a_i u_i - c_i) \delta u_i. \quad (43)$$

Johdetaan tästä seuraavaksi  $i$ :nnen elementin lokaali matriisi, joka on muotoa

$$a_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix}.$$



Kuva 11: Lokaalit ja globaalit solmupisteet yksiulotteiselle elementtimenetelmälle. Janan yläpuolelle on merkitty lokaalit solmupisteet ja alapuolelle globaalit solmupisteet. [3]

Ratkaisu yhtälön (43) elementille  $i$  on havainnollistettu kuvassa 11.

Lasketaan yhteen seuraavaksi yhtälön (43) integraalit jokaisella  $i = 1, 2, \dots, N$  arvolla ja asetetaan summa nolllaksi, jotta voidaan muodostaa globaali matriisi

$$\begin{aligned}
& (a_1 u_0 - a_1 u_1 - b_1) \delta u_0 + (-a_1 u_0 + a_1 u_1 - c_1) \delta u_1 \\
& + (a_2 u_1 - a_2 u_2 - b_2) \delta u_1 + (-a_2 u_1 + a_2 u_2 - c_2) \delta u_2 \\
& + (a_3 u_2 - a_3 u_3 - b_3) \delta u_2 + (-a_3 u_2 + a_3 u_3 - c_3) \delta u_3 \\
& \vdots \\
& (a_{N-1} u_{N-2} - a_{N-1} u_{N-1} - b_{N-1}) \delta u_{N-2} + (-a_{N-1} u_{N-2} + a_{N-1} u_{N-1} - c_{N-1}) \delta u_{N-1} \\
& + (a_N u_{N-1} - a_N u_N - b_N) \delta u_{N-1} + (-a_N u_{N-1} + a_N u_N - c_N) \delta u_N = 0.
\end{aligned}$$

Solmupisteiden arvot  $u_0, u_1, \dots, u_N$  ovat mielivaltaisia ja siksi solmupisteiden kertoimet voidaan asettaa nolllaksi. Saadaan seuraavanlainen yhtälöryhmä

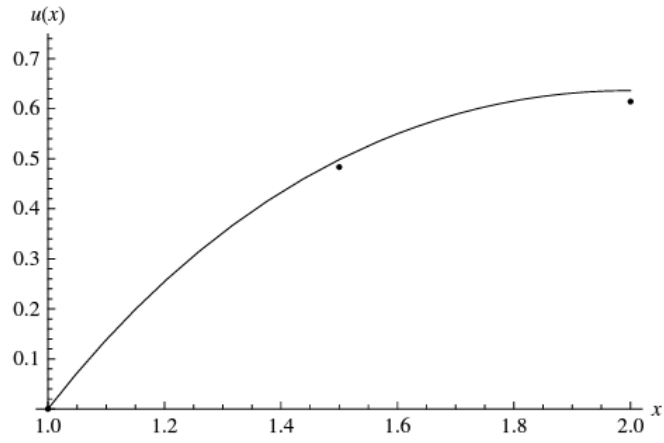
$$\begin{array}{rcccccc}
a_1 u_0 & -a_1 u_1 & & & & = & b_1 \\
-a_1 u_0 & +(a_1 + a_2) u_1 & -a_2 u_2 & & & = & b_2 + c_1 \\
& -a_2 u_1 & +(a_2 + a_3) u_2 & -a_3 u_3 & & = & b_3 + c_2 \\
& & \vdots & & & & \\
& -a_{N-1} u_{N-2} & +(a_{N-1} + a_N) u_{N-1} & -a_N u_N & & = & b_N + c_{N-1} \\
& & -a_N u_{N-1} & +a_N u_N & & = & c_N.
\end{array}$$

Koska esimerkin tapauksessa  $u_0 = u(1) = 0$ , niin ratkaistavaksi jää  $N$  kappaletta yhtälöitä jäljellä oleville tuntemattomille solmupisteille.

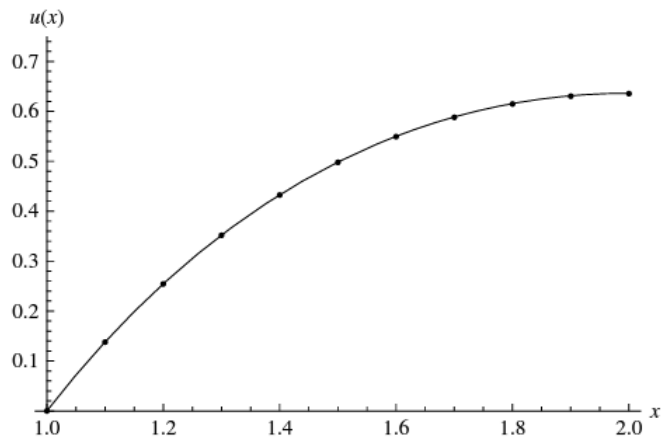
Verrataan seuraavaksi elementtimenetelmän avulla saatavaa ratkaisua esimerkiksi käsitellyn differentiaaliyhtälön (40) tarkkaan ratkaisuun, joka on

$$u(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2 \ln x + \frac{1}{4}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Tarkastellaan elementtimenetelmän sopivuutta vertaamalla sen antamia tuloksia kahdessa eri tapauksessa. Kuvissa 12 ja 13 elementtimenetelmän antamat solmupisteet on merkitty pisteillä ja differentiaaliyhtälön tarkka ratkaisu on merkitty yhtenäisellä viivalla. Kuvasta 12 nähdään, että elementtien määrän ollessa 2, elementtien määrä on riittämätön, eivätkä pisteet asetu käyrälle. Elementtien määrää tulisi siis kasvattaa, jotta approksimatiivinen ratkaisu olisi lähempänä tarkkaa ratkaisua. Kuvasta 13 nähdään, että kun elementtien määrää nostetaan kymmeneen, elementtimenetelmän antama ratkaisu on hyvin verrattavissa tarkkaan ratkaisuun ja pisteet asettuvat käyrälle.



Kuva 12: Tarkka ratkaisu ja approksimatiivinen ratkaisu, kun elementtien määrä on 2. [3]



Kuva 13: Tarkka ratkaisu ja approksimatiivinen ratkaisu, kun elementtien määrä on 10. [3]

## 7 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa käsiteltiin yleisesti variaatiolaskentaa ja siihen liittyviä sovelluksia ja numeerisia menetelmiä. Tutkielma toteutettiin pääosin kirjallisuuskatsauksena ja aiheeseen perehdyttiin etsimällä tietoa alan julkaisuista. Tutkielman aluksi käsiteltiin funktionaalianalyysiä ja sen perustuloksia. Aluksi määriteltiin lineaariavaruus ja funktion normi. Näiden avulla käsiteltiin funktionaalin määritelmää sekä funktionaalin jatkuvuutta ja lineaarisuutta. Funktionaalien lineaarisuuden määritelmää havainnollistettiin myös esimerkkien avulla.

Kolmannessa luvussa käsiteltiin tutkielman kannalta oleellisia perustuloksia. Ensin esitettiin funktion sileyden määritelmä sekä todistettiin osittaisintegroinnin lause. Tämän jälkeen todistettiin yksi keskeisimmistä lauseista variaatiolaskennassa, variaatiolaskennan peruslause. Luvussa määriteltiin myös konveksin joukon ja funktion käsitteet sekä sykloidikäyrän muodostuminen.

Neljännessä luvussa käsiteltiin yhtä variaatiolaskennan tärkeimmistä tuloksista, Eulerin–Lagrangen yhtälöä ja todistettiin se. Eulerin–Lagrangen yhtälö on yleisessä muodossa toisen asteen differentiaaliyhtälö, joten sille ei löydy ratkaisuja suljetussa muodossa. Luvussa käsiteltiin kuusi Eulerin–Lagrangen yhtälön erikoistapausta, joihin voidaan löytää ratkaisu. Tämän jälkeen käsiteltiin kaksi esimerkkitapausta, tehdasongelma ja lyhin reitti kahden pisteen välillä tasossa, joissa kummassakin ratkaisu löydetään käyttäen Eulerin–Lagrangen yhtälöä.

Viidennessä luvussa esitettiin variaatiolaskennan klassikkoesimerkki, brakistokroniongelma. Siinä pyritään löytämään käyrän muoto, joka minimoi ajan, joka käyrrä pitkin liikkuvalla kappaleella kuluu kulkea pisteestä A pisteeseen B. Kappale liikkuu jonkin voiman, esimerkiksi painovoiman, vaikutuksessa. Brakistokroniongelman todettiin olevan tärkeä osa matematiikan historiaa, sillä Eulerin–Lagrangen yhtälö löydettiin ongelman ratkaisemisen yhteydessä ja tämä löydös tarjosi puitteet myös monien muiden ongelmien ratkaisemiseksi.

Tutkielman lopussa perehdyttiin hieman tarkemmin numeerisiin menetelmiin, joiden käyttö voi olla tarpeellista tapauksissa, joissa ongelmien tarkka ratkaisu on hyvin työlästä tai jopa mahdotonta löytää. Numeeriset menetelmät voidaan jakaa karkeasti kahteen luokkaan, suoriin ja epäsuoriin menetelmiin. Tässä tutkielmassa käsiteltiin vain suoriamenetelmiä, joiden avulla ongelmille löydettiin approksimatiiviset ratkaisut. Käsiteltyjä menetelmiä olivat Rayleigh–Ritz -menetelmä ja painotettujen residuaalien menetelmään perustuva Galerkin -menetelmä. Lopuksi käsiteltiin vielä Rayleigh–Ritz menetelmään perustuva elementtimenetelmä. Huomattiin, että Rayleigh–Ritz -menetelmä ja Galerkin menetelmä antavat usein samoja approksimatiivisia ratkaisuja kokeilufunktioiden valinnasta riippuen. Elementtimenetelmän etu on sen laaja käytettävyys ja sen kyky approksimoida tarkasti monimutkaisiakin geometrioita.

## Lähteet

- [1] Bagirov Adil, Karmita Napsu, Mäkelä Marko M.: *Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software*. Springer, Cham, Heidelberg, 2014.
- [2] Bliss Gilbert Ames: *Calculus of Variations*. The Open Court Publishing Company, Chicago, 1925.
- [3] Cassel Kevin W.: *Variational Methods with Applications in Science and Engineering*. Cambridge University Press, 2013
- [4] Dacorogna Bernard: *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College Press, London, 2015.
- [5] Emet Stefan, Joki Kaisa: *Mixed-Integer Non-Linear Programming*. Luentomoniste, Turun yliopisto, 2021.
- [6] Encyclopedia of Mathematics: Variational Calculus, Numerical Methods of. Viitattu 10.3.2023 <<http://encyclopediaofmath.org>>
- [7] Gelfand Israel M., Fomin Sergei V., kääntäjä: Richard A. Silverman : *Calculus of Variations*. Prentice hall, New Jersey, 1963.
- [8] Halava Vesa, Pirttimäki Teemu: *Matematiikan historia*. Luentomoniste. Turun yliopisto, 2018.
- [9] Harjulehto Petteri, Klén Riku, Koskenoja Mika: *Analyysiä reaalityöillä*. Uni-grafia Oy, Helsinki, 2016.
- [10] Kirk Donald E. *Optimal Control Theory: An Introduction*. Dover Publications, New York, 2004.
- [11] Lao Dazhong, Zhao Shanshan: *Fundamental Theories and Their Applications of the Calculus of Variations*. Springer. Singapore, 2021.
- [12] Rantanen Katariina: *Eulerin-Lagrangen yhtälö ja sen sovelluksia*. Kandidaatin-tutkielma, Turun yliopisto, 2021.
- [13] The Open University *Introduction to the Calculus of Variations*. The Open University, Milton Keynes, 2016.
- [14] Wan Frederik Y.M.: *Introduction to the Calculus of Variations and its Applications*. Chapman&Hall, New York, 1995.