

Esipuhe

Matematiikan oppiminen ja opettaminen -kirja on itsenäinen jatko edelliselle suuren suosion saaneelle Niilo Mäki Instituutin kustantamalle kirjalle Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Se julkaistiin yli 20 vuotta sitten, ja uudistettu painos siitä otettiin reilut kymmenen vuotta sitten. Paljon on tapahtunut opetusmaailmassa ja eritoten suomalaisessa matematiikan oppimisen tutkimuksessa, joten oli perusteltua lähteä toimittamaan kirjaa kokonaan puhtaalta pöydältä. Tämä kirja ilmestyy koulumaailmassa tärkeään nivelkohtaan, jossa sekä perusopetuksen että lukiokoulutuksen opettajat ovat uudistamassa opetustaan uusien opetussuunnitelman perusteiden linjausten mukaisesti. Muutoksille on tarvetta, sillä kansainvälisten ja kansallisten matematiikan osaamista mittaavien testien tulokset ovat olleet laskusuunnassa. Kaikilla koulutusjärjestelmän tasoilla esiopetuksesta yliopisto-opetukseen ollaankin kiinnittämässä erityistä huomiota matematiikan opetuksen kehittämiseen ja toisaalta matematiikan oppimisvaikeuksien riittävän varhaiseen tunnistamiseen sekä niiden voittamiseen.

Kirja pyrkii avaamaan sitä, mitä tavoiteltu ”matematiikan osaaminen” on ja mitä sen pitäisi olla. Matematiikan osaaminen on muutakin kuin mekaanisen laskemisen ja sanallisten tehtävien ratkaisemisen osaamista – näitä taitoja väheksymättä. Matematiikan opetus- ja oppimiskulttuuri on uudistumassa sekä sisällöllisesti että menetelmällisesti. Opetuksen kehittäjinä ovat olleet sekä yksittäiset alan tutkijat että valtakunnalliset järjestöt, kuten esimerkiksi LUMA-Suomi, Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseura ja MAOL, mutta ennen kaikkea kentällä toimivat innovatiiviset, matematiikan opettamisesta innostuneet aineen- ja luokanopettajat. Tämä kirja asiantuntija-artikkeleineen on tarkoitettu tukemaan tätä kehittämistyötä. Luvut perustuvat uusimpaan tutkimustietoon, mutta kirjaa ei ole suunnattu vain tutkijoille, vaan ennen kaikkea matematiikan opetuksen parissa toimiville opettajille ja opiskelijoille sekä kaikille aiheesta kiinnostuneille lukijoille.

Teos on ryhmitelty neljään päälukuun. Ensimmäinen pääluku tarkastelee erityisesti matematiikan oppimista ja osaamista sekä opintojen kautta oppijoille syntyvää matematiikkakuvaa eli mielikuvaa matematiikasta, matematiikan opiskelusta ja oppimisesta. Toinen pääluku avaa matematiikan oppimisvaikeuksien problematiikkaa ja oppimisen tukemisen mahdollisuuksia silloin, kun oppijalla on erityisiä haasteita matematiikan oppimisessa. Kolmas pääluku tarkastelee matematiikan oppimista opettajien ja oppikirjojen näkökulmista. Neljäs pääluku pohtii matematiikan opettamiseen ja oppimisympäristöjen muutokseen liittyviä kysymyksiä. Ensimmäisen pääluvun aloittaa Kuparin ja Hiltusen katsaus suomalaisten oppilaiden matemaattisista taidoista kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Kuparin ja Hiltusen katsaus tarjoaa erityisesti kahdesta perusopetuksen ikäluokasta (neljäsluokkalaisten ja 15-vuotiaat) poikittaistutkimuksen näkökulman siihen, miten hyvin suomalaiset oppilaat hallitsevat matematiikkaa verrattuna muiden maiden samanikäisiin oppilaisiin. Aunola ja Nurmi valottavat vastaavasti luvussaan Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä pitkittäistutkimusten näkökulmasta matemaattisten taitojen kehitystä esiopetus- ja kouluvuosien aikana sekä taitojen kehitystä ennakoivia tiedollisia ja motivaatiotekijöitä. Tämän kokonaisuuden seuraavat kolme lukua tarkastelevat matematiikan osaamisen kehittymistä lähemmin yksittäisiltä tiedonalueilta. Laine, Huhtala ja Kaasila tarkastelevat jakolaskun oppimista erilaisissa konteksteissa ja oppimispolun vaiheissa, ja Hähkiöniemi puolestaan tarjoaa esimerkkejä derivaatta-käsitteen ymmärryksen vahvistamisesta. Hän pohjaa tarkastelunsa derivaatan ymmärtämisen teoreettisiin lähtökohtiin. Silfverberg tarkastelee geometrisen käsitteenmuodostuksen ja sen ohjaamisen

problematiikkaa korostaen esimerkeissään erityisesti prototyyppisen käsitteenmuodostuksen ja figuratiivisuuden keskeisyyttä geometrian oppimisessa. Luvun päättää Hannulan ja Hytösen luku Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä, jossa pitkäkestoista matematiikan oppimisen prosessia tarkastellaan kokonaisvaltaisena tapahtumana, johon ei sisälly pelkästään tietojen ja taitojen lisääntyminen vaan myös moninaisten uskomusten ja tuntemusten kytkeytyminen käsitykseen siitä, mitä matematiikka on. Toinen pääluke alkaa Hannula-Sormusen, Mattisen, Räsäsen ja Ruusuvirran luvulla matematiikan taitojen varhaiskehityksestä. Luvussa ihminen näyttäytyy jo syntymästään lukumäärien hahmottamiseen virittäytyneenä olentona, mutta vasta kulttuurisessa vuorovaikutuksessa hänelle voi kehittyä kyky käsitteelliseen numeeriseen ajatteluun. Tämä varhaiskehitys luo pohjan myöhemmälle taitojen oppimiselle. Varhaiskehitys kertoo toisaalta paljon siitä, millaisia taidot ja oppimispulmat ovat myöhemmin kouluiässä. Tästä jatkavat Björn, Aro ja Koponen kuvauksella matematiikan oppimisvaikeuksien tutkimusperustaisen tuen mahdollisuuksista. Kirjoittajat esittelevät aluksi amerikkalaisille kouluille kehitetyn, tuen vaikuttavuuteen perustuvan arviointimallin (RTI) kaksi sovellusta ja tarkastelevat sitten, mitä yhteistä on RTI-mallilla ja Suomessa käytössä olevalla kolmiportaisen tuen mallilla. Koponen, Mononen ja Puura tarkastelevat tutkimustietoa, jota on saatavissa kielellisten erityisvaikeuksien vaikutuksista matematiikan taitojen kehittymiseen. Luvussa esitellään myös kielelliseen erityisvaikeuteen ja matematiikkaan liittyviä kuntoutustutkimuksia ja kaksi Suomessa kehitettyä ja kokeiltua harjoitusohjelmaa, joilla on pyritty tehostamaan kielihäiriöisten lasten aritmeettisia taitoja ja peruslaskutaidon sujuvuutta. Kyttälä ja Kanerva kuvaavat luvussaan työmuistin ominaisuuksia, toimintaperiaatteita ja sitä, miten toimintaperiaatteet liittyvät matemaattisen tiedon käsittelyyn. He kuvaavat lisäksi tapoja ottaa työmuistirajoitteet huomioon opetustilanteissa.

Toisen pääluvun kahdessa viimeisessä luvussa tarkastellaan matematiikan oppimisvaikeuksia pedagogisen arvioinnin näkökulmasta ja oppimisvaikeuksien vaikutusta nuorten urapolkuihin. Aunio, Hautamäki ja Mononen tarkastelevat luvussaan matematiikan oppimista ja sen vaikeuksia pedagogisen arvioinnin ja arviointivälineiden näkökulmasta. He esittelevät teoreettista ja käytännöllistä tietoa pedagogisesta arviointityöstä, kun kyseessä on matematiikan oppimiseen ja oppimisen vaikeuksiin liittyvä työskentely päiväkodeissa ja kouluissa. Korhonen, Hakkarainen, Holopainen, Linnanmäki, Savolainen ja Taipale tarkastelevat luvussaan matematiikan vaikeuksien ja lukivaikeuksien yhtäaikaista ilmenemistä nuoruusiässä ja sen vaikutusta nuorten koulutuspolkuihin. He kuvaavat myös keskeisimpiä tutkimustuloksia, joita on saatu matematiikan osaamisesta ja kehityksestä nuoruusiässä sekä matematiikan vaikeuksien vaikutuksesta nuoren koulutusvalintoihin ja myöhempään urapolkuihin. Kolmas pääluke käsittelee matematiikan opettajia useasta näkökulmasta sekä matematiikan oppimateriaaleja tutkimuksen kohteena.

Krzywacki ja Portaankorva-Koivisto tarkastelevat luvussaan Suomalainen matematiikan opettaja opettajuutta vuorovaikutteisena kasvun prosessina, jossa kokemuksilla ja niiden tulkitsemisella on keskeinen rooli. Tämä kehitysprosessi opettajana tapahtuu Krzywackin ja Portaankorva-Koiviston mukaan vuorovaikutteisesti osana kouluyhteisöä, jossa erilaiset arvot ja toimintaedellytykset vaikuttavat sekä toimintaan opettajana että käsityksiin tavoiteltavasta opettajuudesta. Tossavaisen ja Leppäähön luvussa tarkastellaan suomalaisten matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden matemaattista osaamista sekä 2010-luvulla tehdyn tutkimuksen että muun käytettävissä olevan aineiston valossa. Lisäksi luvussa pohditaan eräitä opettajankoulutuksen järjestämiseen liittyviä mahdollisuuksia vahvistaa peruskoulun matematiikan opettajien matemaattista osaamista.

Kaasila ja Laine esittävät luvussaan, miten tulevien luokanopettajien matematiikkakuvaan voidaan vaikuttaa. Kouluuikaisilla kokemuksilla on keskeinen merkitys tulevien luokanopettajien matematiikkakuvan muodostumisessa, mutta matematiikkakuvaan voidaan vaikuttaa vielä opettajankoulutuksenkin aikana. Kaasila ja Laine esittävät luvussaan matematiikkakuvan muuttumisen mallin. Metsämuuronen ja Räsänen pohtivat luvussaan oppimistulosten mittaamista teoreettisista näkökulmista. Luvussa tarkastellaan muun muassa hyvän koulukokeen laadinnan psykometrisia perusteita. Perkkilä, Joutsenlahti ja Sarenius esittelevät luokkien 1–6 matematiikan oppikirjojen ja opettajanoppaiden haasteita ja mahdollisuuksia oppimateriaalitutkimuksen valossa. Luvussa kuvataan oppimateriaalitutkimuksen yleisimpiä lähestymisnäkökulmia ja kysymyksenasetteluita.

Neljäs pääluku kuvaa matematiikan opettamista ja oppimisympäristöjä. Ensimmäisessä luvussa Leppäaho tarkastelee ongelmanratkaisua luovana prosessina ja määrittelee siihen liittyvää käsitteistöä. Ongelmanratkaisun opetuksen lähtökohtana toimivat matemaattisen ongelmanratkaisutaidon osa-alueet ja oppimisympäristön huomioiminen. Luvussa esitellään opetusmenetelmiä, joiden avulla oppilaan ongelmanratkaisutaidon oppimista voidaan tukea. Silfverberg esittää luvussaan, että oppimisteknologialle on tullut yhä vahvempi rooli myös matematiikan opetuksessa. Hän kuvaa, miten teknologinen kehitys on muuttanut ja muuttaa matematiikan opetuksen ja oppimisen kulttuuria kouluissa ja vapaa-aikana. Joutsenlahti ja Tossavainen tarkastelevat luvussaan Matematiikka ja kieli matemaattista ajattelua sekä sen ilmaisemiseen liittyviä mahdollisuuksia. Luvussa kuvataan matemaattisen ajattelun kielentämisen merkitystä oppimiselle sekä esitellään kielentämisen malleja ja variaatioteoriaan perustuva learning study -malli. Keranto tarkastelee luvussaan Rakentavan argumentaation sekä todistusajattelun kehittämismahdollisuuksista koulumatematiikassa matemaattisen todistamisen ottamista keskeiseksi tavoitteeksi jopa alakoulun matematiikassa. Keranto etsii argumentaation ja todistusajattelun käsitteellisten erittelyjen jälkeen vastauksia muun muassa kysymykseen, onko niiden ottaminen opetusohjelmaan realistista ja järkevää, ja pohtii, millaisia valmiuksia opettajilla tulisi siinä tapauksessa olla.

Pohjolainen, Rasila ja Silius kuvaavat matematiikan opetuksen kehittämistä teknillisissä yliopistoissa. Tässä luvussa tarkastellaan opiskelijoiden matematiikan osaamiseen vaikuttavia tekijöitä ja matematiikan opetuksen kehittämistoimia sekä arvioidaan niiden vaikutusta matematiikan osaamisen kehittymiseen teknillisessä yliopistokoulutuksessa. Vanhakantainen käsitys koulun toiminnasta on ollut se, että opettaja opettaa ja oppilaan tehtävä on oppia. Nykyisin asetelmaa käännetään myös toisinpäin. Sen lisäksi, että oppilas aktiivisen osallisuutensa kautta oppii, hän myös toiminnallaan opettaa opettajaa ohjaamaan ja opettamaan paremmin. Perinteisten oppikirjojen lisäksi ovat opettajan ja oppijan oppimisvuorovaikutuksen tärkeäksi osaksi tulleet digitaaliset apuvälineet. Nykyisin onkin mahdollista käyttää rikkaaseen tutkimukseen perustuvia opetusmenetelmiä, ja opettajat voivat hyödyntää monipuolisia oppimisympäristöjä matematiikan opetuksessaan. Tämän saavuttamisessa kansallinen opettajankoulutus on keskeisessä asemassa. Matematiikan oppiminen ei luonnollisestikaan ole pelkästään tiedollinen prosessi. Kaikki eivät koe matematiikkaa samoin, eivät suhtaudu siihen samoin eivätkä opi sitä samalla tavoin. Siksi nykyaikainen matematiikan opetus ottaa monin eri tavoin huomioon myös oppijoiden erilaisuuden. Kaikille meille oppimistilanteet inhimillisinä vuorovaikutustilanteina synnyttävät sekä ohimeneviä tunteita että pysyvämpiä tuntemuksia, asenteita ja uskomuksia. Näiden moninaisten haasteiden keskellä opetuksen keskeinen tavoite on edelleen matematiikan ymmärryksen ja osaamisen

kartuttaminen. Näiden aiheiden äärelle tämän kokoomateoksen kirjoittajat luvuissaan lukijan vievät. Viihtyisiä ja opettavaisia lukuhetkiä! Kirjan toimittajat Jorma Joutsenlahti, Harry Silfverberg ja Pekka Räsänen. Kaikki kirjan luvut ovat kahden asiantuntijan vertaisarvioimia.