



**TURUN
YLIOPISTO**

STOKASTINEN MALLI LÄMPÖTILAJOHdannaisen HINNOITTELUSSA

LuK Roni Karjanlahti

LuK-tutkielma
Joulukuu 2025

Tarkastajat:
Prof. Jukka Lempa.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

RONI KARJANLAHTI: Stokastinen malli lämpötilajohdannaisten hinnoittelussa
LuK-tutkielma, 39 s., 12 liites.
Matematiikka
Joulukuu 2025

Tässä LuK-tutkielmassa käsitellään lämpötilajohdannaisten hinnoittelua ja niihin liittyvää stokastista mallinnusta. Lämpötilajohdannaisten ovat rahoitusinstrumentteja, joiden arvo perustuu lämpötilasta johdettuihin indekseihin, ja niitä käytetään suojaamaan toimijoita sään aiheuttamalta taloudelliselta riskiltä erityisesti energia- ja maataloussektoreilla.

Tutkielman tavoitteena on esitellä lämpötilajohdannaisten hinnoittelun keskeinen matemaattinen viitekehys. Erityinen painopiste on lämpötilamallin rakentamisessa, riskineutraalin todennäköisyysmitan määrittämisessä sekä lämpötilasta johdettujen johdannaisten hinnoittelussa.

Tutkielmassa yhdistetään stokastisen analyysin teoria käytännön esimerkkiin, jossa lämpötilajohdannaisten hinnoittelua havainnollistetaan Turun lämpötiladatan avulla.

Asiasanat: Sääjohdannainen, Stokastiikka, Matemaattinen rahoitus.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Käsitteistöä	2
3	Malli	4
3.1	Hinnoittelu	6
4	Esimerkki Turusta ja tilastoa	8
5	Loppupäätelmät	10

1 Johdanto

Yhdysvalloissa vuosina 1997 ja 1998 El Niño -ilmiön seurauksena poikkeuksellisen lämpimänä talvena monet energiayhtiöt pyrkivät suojautumaan sään aiheuttamista riskeistä käyttämällä uutta lämpötilajohdannaisinstrumenttia. Yhtiöt pystyivät ostamaan johdannaisia, jotka takasivat korvauksen, jos lämpötila olisi liian korkea, mikä vähentäisi tavanomaista energian tarvetta. Lämpötilajohdannaisten avulla kyettiin siirtämään yhtiöiden kohtaamia riskejä, mutta kauppaa rajoittivat säännellyn kauppapaikan puuttumisesta johtuvat luottoriskit. Kasvattaakseen lämpötilajohdannaismarkkinan kokoa ja vähentääkseen luottoriskiä Chicago Mercantile Exchange järjesti sopimuksille julkisen kauppapaikan. Uudenlaiset lämpötilajohdannaissopimukset herättivät akateemista kiinnostusta, sillä itse lämpötilalla ei voida käydä kauppaa, minkä seurauksena oikean hinnan löytämiseksi johdannaisille tarvittiin uutta teoriaa. Johdannaisten laajempaa käyttöönottoa rajoittivat yhdysvaltalaisen energiajätti Enronin konkurssi, ja myöhemmin vuoden 2008 finanssikriisistä seurannut kritiikki johdannaisten käytöstä. Lämpötilajohdannaisten käyttöä Euroopassa hankaloitti myös luotettavan datan puuttuminen. Kaupankäynnin määrän vähene-
misen seurauksena johdannaistuotteista tehty tutkimus väheni. [1, 2]

Sääjohdannainen on sopimus, joka johtaa arvonsa halutun sääilmiön päälle rakennetusta indeksistä, kuten kuukauden kokonaissademäärästä. Tuotteet suunniteltiin sään volatiliteltilta suojautumiseksi, mutta ne mahdollistavat myös sääilmiöillä spekuloinen. Erona vakuutukseen maksun suoritus tapahtuu, jos indeksi ylittää tietyn rajan, eikä vahinkoa tarvitse erikseen arvioida. Tämän vuoksi johdannainen on kuluiltaan vakuutusta tehokkaampi ratkaisu, joka vaatii maksuun erillisen arvioimisprosessin. Johdannaisilla käydään kauppaa Chicago Mercantile Exchange -pörssissä, mutta suurin osa kaupasta tapahtuu edelleen over the counter -muodossa, eli sopimus tehdään pörssin ulkopuolella ja voidaan rakentaa asiakkaan tarpeen mukaan. Johdannaisen myynyt toimija voi kantaa johdannaisen riskin itse tai myydä sen eteenpäin. Myynti tapahtuu ostamalla rahoitusmarkkinoilta vastaava tuote, jolla alkuperäisen sopimuksen myynyt taho saa katettua maksuvelvoitteensa. [3]

Tutkielmassa käytetään lämpötilasta laskettavia indeksejä, joista tyypillisimmät ovat nimetty lämmityspäiviksi (HDD, joka tulee sanoista heating degree days) ja viilennyspäiviksi (CDD, cooling degree days). Tämä on seurausta ajattelusta, jossa päivän keskilämpötilan alittaessa 18 celsiusasteen rajan ajatellaan kotitalouksien käyttävän lämmitystä, ja ylittäessään 18 asteen rajan ajatellaan kotitalouksien käyttävän viilennystä. HDD-indeksi lasketaan summaamalla päivittäin, kuinka paljon päivän keskilämpötila on alittanut tyypillisesti 18 celsiusasteen rajan jonkin ennalta sovitun mittausjakson ajalta. CDD-indeksin laskemiseksi summataan 18 celsiusasteen rajan ylitykset yhteen vastaavalla tavalla sovitun mittausjakson ajalta. Kolmas yleinen indeksi, jota käytetään, on nimeltään CAT. Tämä indeksi lasketaan yksinkertaisesti summaamalla jokaisen päivän keskilämpötila mittausjakson ajalta. Näitä indeksejä käytetään juuri CME:ssä. Indeksien määrittäminen matemaattisesti tapahtuu luvussa 2.

Esiteltyyn CAT-indeksiin keskitytään työssä sen yksinkertaisen laskutavan vuoksi ja hinnoitellaan esimerkinomaisesti lämpötilajohdannainen käyttämällä Turun lämpötiladataa. Koska CME:ssä käytettävät indeksit eivät pohjaudu Turun läm-

pötilaan, tutkielmassa hinnoiteltu johdannainen on täysin kuvitteellinen.

Lämpötilajohdannaisen hinnoittelu koostuu kolmesta vaiheesta. Jotta lämpötilasta voidaan laskea indeksi, täytyy rakentaa lämpötilalle ensin matemaattinen malli. Jos kaikki osapuolet lämpötilan futuuri-markkinalla haluaisivat suojautua lämpötilan nousua tai laskua vastaan, nousisi tämän suojauksen hinta. Tämän vuoksi futuurin hinnan mallintamisessa haasteena on löytää sopiva muunnos indeksistä, mikä ottaa edellä mainitun ilmiön huomioon. Matemaattista terminologiaa käyttäen ongelma on riskineutraalin todennäköisyysmitan löytäminen lämpötilan indeksille. Jos futuurin hintaprosessi kyetään mallintamaan, voidaan futuurin päälle rakennetulle johdannaiselle johtaa hinta. Mallintamista kuvataan luvussa 3.

Lämpötilamallin parametrit johdetaan erottamalla deterministinen ja satunnainen osa päivittäisistä keskilämpötiloista. Jäljelle jäänyttä satunnaista osaa lämpötilasta voidaan tutkia aikasarja-analyysin menetelmillä. Tutkielman tapauksessa käytetään Turun lentokentältä saatua lämpötiladataa.

Tämän tutkielman kirjoituksessa on hyödynnetty ChatGPT-tekoälytyökalua kielihuoltoon.

2 Käsitteistöä

Tutkielmassa käytetään määritelmiä, joita kohdeyleisön ei voida olettaa tietävän. Luvussa selitetään näitä käsitteitä tarkemmin.

Määritelmä 2.1. Kantavektori e_i on d -dimensioinen vektori, jonka komponentti i on yksi ja muut komponentit ovat nollia.

Johdannossa esiteltyjen lämpötilaindeksien määritelmät voidaan kirjoittaa matemaattisesti.

Määritelmä 2.2. CDD, HDD ja CAT-indeksit määritellään

$$\begin{aligned} HDD(alku, loppu) &= \sum_{i=alku}^{loppu} \max(c - T_i, 0) \\ CDD(alku, loppu) &= \sum_{i=alku}^{loppu} \max(T_i - c, 0) \\ CAT(alku, loppu) &= \sum_{i=alku}^{loppu} T_i \end{aligned}$$

Tässä alku tarkoittaa mittausjakson ensimmäistä päivää ja loppu viimeistä. Vakio c on johdannossa esitelty rajalämpötila, joka on tyypillisesti 18-celsiusastetta. T_i on päivän i keskilämpötila.

Määritelmä 2.3. Stokastinen prosessi on aikaindeksöity joukko satunnaismuuttujia

Määritelmä 2.4. Stokastinen prosessi $B(t)$ on standardi Brownin liike jos [11].

1. $B(0) = 0$ melkein varmasti

2. Kaikilla t_1, \dots, t_n lisäykset $B(t_n) - B(t_{n-1}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia.
3. Kaikilla $0 \leq s < t$ lisäykset $B(t) - B(s)$ ovat normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden varianssi on $t - s$ ja odotusarvo on nolla.
4. kuvaus $t \rightarrow B(t)$ on jatkuva melkein varmasti.

Määritelmä 2.5. Stokastinen prosessi $B^H(t)$ on standardi fraktionaalinen Brownin liike, jos [14].

1. $B(0) = 0$ melkein varmasti
2. Kaikilla $0 \leq s < t$ $B(t)$ ja $B(s)$ ovat normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden kovarianssi on $\mathbb{E}[B^H(t)B^H(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$ ja odotusarvo on nolla.
3. kuvaus $t \rightarrow B(t)$ on jatkuva melkein varmasti.

Fraktionaalisessa brownin liikkeessä vakiota H kutsutaan Hurstin vakioksi. Kun vakio $H = 0.5$, on kyseessä tavanomainen Brownin liike. Fraktionaalinen Brownin liike on täten yleistys Brownin liikkeestä, missä erona Brownin liikkeeseen on auto-kovarianssifunktio.

Lause 1. *Olkoon $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ ito-prosessi, jonka dynamiikka \mathbb{R}^m alaisuudessa on*

$$dY(t) = \beta(t, \omega)dt + \theta(t, \omega)dB(t),$$

missä $\beta(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ ja $\theta(t, \omega) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Oletetaan, että on olemassa prosessit $u(t, \omega) \in \mathcal{W}_H^m$ ja $\alpha(t, \omega) \in \mathcal{W}_H^n$ joilla

$$\theta(t, \omega)u(t, \omega) = \beta(t, \omega) - \alpha(t, \omega)$$

Oletetaan myös että prosessi $u(t, \omega)$ täyttää Novikovin ehdon

$$\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T u^2(s, \omega)ds)] < \infty.$$

Olkoon

$$M(t) = \exp(-\int_0^t u(s, \omega)dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s, \omega)ds),$$

$$t \leq T.$$

ja

$$dQ(\omega) = M(T, \omega)dP(\omega) \text{ sigma-algebrassa } \mathcal{F}(t)^{(m)}.$$

Tällöin

$$\hat{B}(t) := \int_0^t u(s, \omega)ds + B(t),$$

$$t \leq T$$

on Brownin liike mitan Q suhteen ja prosessilla $Y(t)$ on esitys

$$dY(t) = \alpha(t, \omega)dt + \theta(t, \omega)d\hat{B}(t).$$

Todistus [11] Teoreema 8.6.4

Lause 2. *Ito–Doebelinin lause. Oletetaan, että $x(t)$ on ito-prosessi. Olkoon funktio $\phi(x(t), t)$ johdettu prosessista $x(t)$. Tällöin funktiolla on stokastinen differentiaaliyhtälö, kun osittaisderivaatat ovat olemassa [15].*

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + (\nabla_x\phi)'dx + \frac{1}{2}((\nabla_x\nabla'_x\phi)dx dx)'$$

3 Malli

Lämpötilajohdannaisen hinnoitteluun tarvitaan malli. Klassinen menetelmä hinnoitteluun on burn analysis. Burn analysis -menetelmässä ideana on tarkastella, kuinka paljon menetyksiä olisi syntynyt historiallisesti halutulla johdannaisella, ja määrittellä hinta historiallisena keskiarvona. Menetelmä tuottaa tilastollisesti epävarman hinnan datan vähyden vuoksi. Koska tällä tavalla johdettu hinta on vain vakio, ei myöskään hinnan dynamiikkaa pystytä tutkimaan. [12]

Suosittu tapa lämpötilajohdannaisen hinnoittelussa on rakentaa lämpötilasta stokastinen malli, jonka avulla lasketaan sopimukselle hinta. Ensimmäisenä Ornstein–Uhlenbeck -prosessia lämpötilan mallintamisessa käyttivät Dornier ja Queruel [8]. Mallissa volatilitiiteetti parametrina käytettiin vakiota. Peter Alatonin malli oli tästä yleistys, sillä mallissa prosessin volatilitiiteetti vaihtelee kuukauden keski volatiliteetin mukaan. [6] Mallia kuvaa yhtälö

$$dT(t) = \left(\frac{d\Lambda(t)}{dt} + \alpha(\Lambda(t) - T(t))\right)dt + \sigma(t)dB(t).$$

Yhtälössä deterministinen muuttuja Λ joka muodostuu lämpötilan kausivaihtelusta sekä ilmaston lämpenemisestä, määritellään seuraavasti

$$\Lambda(t) = A + Bt + \omega C \sin(\omega t + D). \tag{1}$$

Lämpötilan dynamiikan tarkempaan mallintamiseen on käytetty fraktionaalista Brownin liikettä [9]. Benth todisti arbitraasittomuuden fraktionaalisen Brownin liikkeen tapauksessa [13]. Fraktionaalista Brownin liikettä käytetään, koska halutaan saada malliin mukaan lämpötilan pitkän aikavälin ajallinen riippuvuus. Ongelma fraktionaalista Brownin liikettä käytettäessä on, että malliin pohjautuvat kaksi identtistä sopimusta voivat saada eri hinnan, jos toinen sopimus ottaa huomioon lämpötiladataa pidemmältä ajalta. Tämä johtuu juuri mallin pitkän aikavälin ajallisista riippuvuuksista. Alfonsin ja Vadillon artikkelissa [10] Hurstin vakiot vaihtelevat molemmin puolin lähellä arvoa 0.5.

Benth & Saltyte-Benth tarkastelevat artikkelissaan residuaalien normaalisuutta [4]. Artikkelissa käy ilmi, että lämpötilan residuaaleilla on "paksut hännät", eli keskiarvosta voimakkaasti poikkeavat havainnot ovat yleisempiä kuin normaalikaumassa. Artikkelissa argumentoidaan, että yleistetty hyperbolinen Lévy-prosessi

selittää residuaaleja paremmin, kun satunnaisuus pohjautuu hyperboliseen jakaumaan. Jakaumalla on hyvin määritellyt momentit, joten prosesseille saadaan johdettua hinnat, vaikka malli on monimutkaisempi kuin Brownin liikkeen tapauksessa.

Monissa julkaisuissa Ornstein–Uhlenbeck -prosessin volatilitietin argumentoidaan olevan stokastinen. Stokastista volatilitietettä käyttämällä kyetään myös selittämään "paksuja häntiä" ([12], luku 6.1).

Benth käyttää artikkelissaan lämpötilan pysyvyysominaisuudelle CARMA(3,0) prosessia lyhyemmin merkittynä CAR(3) [7]. Tämä prosessi ottaa lämpötilan ajallisen riippuvuuden huomioon kolmelta päivältä. Alfonsi ja Vadillo argumentoivat CAR(3) mallia vastaan, perustelemalla Pariisin tapauksessa termien saavan pienen tilastollisen merkitsevyyden ja olevan epävakaita [10]. Artikkelissa dataa on kuitenkin huomattavasti lyhyemmältä ajalta, joka selittää termien heikkoa tilastollista merkittävyyttä. Tutkielmassa käytetään 28000 datapistettä, jolloin kolmella ensimmäisellä termillä on selvä tilastollinen merkitsevyys, kuten kuvasta 2 huomataan.

Ornstein–Uhlenbeck -prosessi vastaa CAR(3) mallia, kun se on muotoa

$$dX(t) = AX(t)dt + e_3\sigma(t)dB(t). \quad (2)$$

Tässä $\sigma(t)$ on ajasta riippuva deterministinen funktio ja matriisi A on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Mallissa lämpötila koostuu siis deterministisestä termistä 1 ja stokastisesta komponentista.

$$T(t) = \Lambda(t) + X_1(t). \quad (3)$$

Tässä stokastinen komponentti $X_1(t)$ on $e_1'X(t)$. Stokastisella differentiaaliyhtälöllä 2 on ratkaisu

$$X(s) = \exp(A(s-t))X(t) + \int_t^s \exp(A(s-u))e_3\sigma(u)dB(u). \quad (4)$$

Todistus. Differentioidaan ensin stokastinen funktio käyttäen Ito-Doebelin kaavaa.

$$\begin{aligned} d(\exp(-At)X(t)) &= -A \exp(-At)X(t)dt + (\nabla \exp(-At)X(t))' dX(t) \\ &= -A \exp(-At)X(t)dt + A \exp(-At)X(t)dt + \exp(-At)e_3\sigma(t)dB(t) \\ &= \exp(-At)e_3\sigma(t)dB(t). \end{aligned}$$

Käyttämällä analyysin peruslausetta haluttu termi $X(s)$ saadaan esille.

$$\begin{aligned} \exp(-As)X(s) - \exp(-At)X(t) &= \int_t^s \exp(-At)e_3\sigma(t)dB(t) \\ \implies \exp(-As)X(s) &= \exp(-At)X(t) + \int_t^s \exp(-At)e_3\sigma(t)dB(t) \\ \implies X(s) &= \exp(A(s-t))X(t) + \int_t^s \exp(A(s-t))e_3\sigma(t)dB(t). \end{aligned}$$

□

Prosessi $X(t)$ on stationaarinen, jos matriisin A kaikki ominaisarvot ovat negatiivisia ja $\sigma(t)$ on rajoitettu [7].

Riskineutraali todennäköisyysmitta on reaalimaailman todennäköisyysmitan kanssa ekvivalentti mitta, jonka alla nykyarvoitettu hintaprosessi on martingaali. Intuitiivisempi tulkinta on, että riskineutraalin mitan alla hintaprosessista poistetaan riskilisä. Koska itse lämpötilalla ei voida käydä kauppaa, on markkina epätäydellinen, mistä seuraa, että jokainen ekvivalentti todennäköisyysmitta on riskineutraali [5]. Artikkelissa Benth (2007) merkitään Girsanovin muunnoksesta saatua parametrisoitua luokkaa riskineutraaleja mittoja merkinnällä Q^θ . Tämän mitan alla Brownin liike on muotoa

$$B^\theta(t) := B(t) - \int_0^t \theta(u) du.$$

Nyt uudeksi dynamiikaksi saadaan

$$dX(t) = (e_3\theta(t)\sigma(t) + AX(t))dt + e_3\sigma(t)dB^\theta(t)$$

Todistus. Seuraa Itô-Doeblin kaavasta.

$$\begin{aligned} dX(t) &= AX(t)dt + e_3\sigma(t)dB(t) \\ &= AX(t)dt + e_3\sigma(t)dB^\theta(t) + e_3\sigma(t)d\left(\int_0^t \theta(u)du\right) \\ &= AX(t)dt + e_3\sigma(t)dB^\theta(t) + e_3\sigma(t)\theta(t)dt \\ &= (e_3\theta(t)\sigma(t) + AX(t))dt + e_3\sigma(t)dB^\theta(t). \end{aligned}$$

□

Käyttäen Iton kaavaa saadaan $X(s)$ ratkaisuksi

$$\begin{aligned} X(s) &= \exp(A(s-t))X(t) + \int_t^s \exp(A(s-u))e_3\theta(u)du + \\ &\quad \int_t^s \exp(A(s-u))e_3\sigma(u)dB^\theta(u) \end{aligned}$$

Vertaa yhtälö (2).

3.1 Hinnoittelu

Johdannaisen hinnoittelemiseksi indeksit voidaan kirjoittaa integraalimuodossa [7]

$$HDD(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(c - T(s), 0) ds.$$

$$CDD(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(T(s) - c, 0) ds.$$

$$CAT(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} T(s) ds.$$

Koska

$$\max(T_i - c, 0) - \max(c - T_i, 0) = T_i - c.$$

Indeksien välillä pätee yhteys

$$CDD(\tau_1, \tau_2) - HDD(\tau_1, \tau_2) = CAT(\tau_1, \tau_2) - c(\tau_2 - \tau_1).$$

Määritellään futuurin hinta ja käytetään merkintää Y indeksin satunnaisesta tulevaisuuden maksusta.

$$F(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{Q^\theta}[Y|\mathcal{F}(t)]$$

Tarkastellaan CAT-indeksiä.

Lause 3. *Futuurin $F_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2)$ hinta hetkellä t on*

$$\begin{aligned} F_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbb{E}_{Q^\theta} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T(s) ds | \mathcal{F}(t) \right] = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda(u) du + a(t, \tau_1, \tau_2) X(t) \\ &+ \int_t^{\tau_2} \theta(u) \sigma(u) a(t, \tau_1, \tau_2) e_3 du \\ &+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta(u) \sigma(u) e_1' A^{-1} (\exp(A(\tau_2 - u)) - I_3) e_3 du, \end{aligned}$$

missä I_3 on 3x3 identiteettimatriisi ja

$$a(t, \tau_1, \tau_2) = e_1' A^{-1} (\exp(A(\tau_2 - t)) - \exp(A(\tau_1 - t))).$$

Todistus. [7], sivu 12. □

Lause 4. *Futuurin $F_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2)$ riskineutraalin mitan Q^θ alainen dynamiikka on*

$$dF_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2) = \Sigma_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2) dB^\theta(t).$$

Tässä kovarianssimatriisi on

$$\Sigma_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2) = \sigma(t) e_1' A^{-1} (\exp(A(\tau_2 - t)) - \exp(A(\tau_1 - t))) e_p.$$

Todistus. Seuraa Ito-Doebelin -kaavasta

$$\begin{aligned}
dF_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{\partial}{\partial t} F_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2) dt + \nabla_x (F_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2))' dX_t + \frac{1}{2} (dX_t)' (H_X f) dX_t \\
&= (-Aa(t, \tau_1, \tau_2)X(t) - \theta(t)\sigma(t)a(t, \tau_1, \tau_2)e_3) dt + a(t, \tau_1, \tau_2) dX_t \\
&= -Aa(t, \tau_1, \tau_2)X(t) dt - \theta(t)\sigma(t)a(t, \tau_1, \tau_2)e_3 dt \\
&\quad + a(t, \tau_1, \tau_2)(e_3\theta(t)\sigma(t) + AX(t)) dt + e_3\sigma(t)dB^\theta(t) \\
&= a(t, \tau_1, \tau_2)e_3\sigma(t)dB^\theta(t).
\end{aligned}$$

□

Lause 5. *Mittausjakson $[\tau_1, \tau_2]$ CAT-futuurista johdetun osto-option, jonka toteutushinta on K , ja toteutushetki on $\tau \leq \tau_1$, hinta hetkellä $t \leq \tau$ on*

$$\begin{aligned}
&C_{CAT}(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = \exp(-r(\tau - t)) \\
&\times \left((F_{CAT}(t, \tau_1, \tau_2) - K)\Phi(\omega(t, \tau, \tau_1, \tau_2)) + \int_t^\tau \Sigma_{CAT}^2(s, \tau_1, \tau_2) ds \Phi'(\omega(t, \tau, \tau_1, \tau_2)) \right),
\end{aligned}$$

missä

$$\omega(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = \frac{F_{CAT}(t, \tau, \tau_2) - K}{\sqrt{\int_t^\tau \Sigma_{CAT}^2(s, \tau_1, \tau_2) ds}}.$$

4 Esimerkki Turusta ja tilastoa

Data on kerätty Turun lentokentän mittausasemalta. Vuosi 2011 puuttui datasta kokonaan, joten se imputoitiin Artukaisten aseman datalla. Data koostuu 23 870 datapisteestä ajalta 01.01.1959-09.05.2024. Dataan sovitettiin pienimmän neliösumman menetelmällä funktio.

$$a_1 + a_2 t + a_3 \sin\left(\frac{2\pi t}{365.25}\right) + a_4 \cos\left(\frac{2\pi t}{365.25}\right)$$

Vakioiksi saadaan arvot

$$\begin{aligned}
a_1 &= 4.384 \\
a_2 &= 0.0000865 \\
a_3 &= -3.818 \\
a_4 &= -10.589.
\end{aligned}$$

Nyt mallin deterministiseen osaan 1 voidaan laskea vakiot.

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &= A + Bt + \omega C \sin(\omega t + D) \\
A &= a_1 = 4.384 \\
B &= a_2 = 0.0000865 \\
C &= \sqrt{a_3^2 + a_4^2} = 11.256 \\
D &= \arctan\left(\frac{a_4}{a_3} - \pi\right) = -1.917.
\end{aligned}$$

Tutkiakseen lämpötilan stokastista osaa, poistetaan trendi sekä syklinen osa lämpötiladatasta.

$$\begin{aligned} T(t) &= \Lambda(t) + X_1(t) \\ \implies X_1(t) &= T(t) - \Lambda(t). \end{aligned}$$

Koska pacf-funktion mukaan 3 ensimmäistä jäännöstermiä ovat merkittäviä, residuaaleihin sovitetaan AR(3) regressio, jonka arvot ovat

$$\beta_{i=1}^3 = (0.9021, -0.1846, 0.0901).$$

Koska volatiliteetissä on kausittaista vaihtelua, voidaan jokaiselle vuoden päivälle laskea residuaalien toisen potenssin keskiarvo, ja tätä tulkitaan kausittaisena volatiliteettinä. Sovitetaan tähän Fourier-summa, jolloin mallin kausittaiselle volatiliteetille pystytään johtamaan lukuarvot.

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= c_1 + \sum_{k=1}^6 (c_{2k} \cos(2k\pi t/366) + c_{2k+1} \sin(2k\pi t/366)) \\ c_{k=1}^5 &= (114.5034, 9.1382, 45.5854, 8.5362, 16.5852) \\ c_{k=6}^9 &= (12.7466, 5.3290, 0.8740, -2.2308) \\ c_{k=10}^{13} &= (-0.8261, 1.5521, -0.4817, 1.1113) \end{aligned}$$

Lopuksi voidaan laskea matriisille A arvot

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 3 - \beta_1 = 2.097855 \\ \alpha_2 &= 2\alpha_1 + \beta_2 - 3 = 1.380273 \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + 1 - \alpha_1 - \beta_3 = 0.1922934. \end{aligned}$$

Option hinnoitteluun tarvitaan informaatiota kaikista prosessin $X(t)$ komponenteista, mutta lämpötilasta voidaan havaita vain sen ensimmäinen komponentti $e_1'X(t)$. Benth ja Saltyte Benth (2013) esittelevät hyvänä tapana approksimoida prosessin muut komponentit L^1 -filterillä, jota myös työssä käytetään. Filterin idea perustuu Euler-Maruyama -menetelmään

$$X(t + \Delta) = X(t) + AX(t)\Delta + e_3\sigma(t)\Delta B(t).$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$X(t + \Delta) = \exp(A\Delta)X(t) + \int_t^{t+\Delta} \exp(A(t + \Delta - u))e_3\sigma(u)dB(u).$$

Valitaan nyt $\Delta = 1$ ja käytetään integraalista merkintää $z(t)$. Yhtälö voidaan diskretisoida käyttäen Euler-Maruyaman menetelmää

$$X(n) = \exp(A)X(n-1) + z(n).$$

Kun $y(n) = e_1X(n)$ ja $X(n-1)$ oletetaan tunnetuiksi, voidaan kirjoittaa

$$e_1z(n)|y(n), X(n-1) = y(n) - e_1 \exp(A)X(n-1). \quad (5)$$

Approksimoidaan stokastista integraalia $z(n)$

$$z(n) \approx g(n)\Delta B(n),$$

missä $g(n) = \exp(A(n-u)e_3\sigma(u), u \in [n-1, n]$ ja $\Delta B(n) = B(n) - B(n-1)$.
Hyödynnetään tätä odotusarvoon

$$\mathbb{E}[z(n)|y(n), x(n-1)] \approx \mathbb{E}[\Delta B(n)|y(n), x(n-1)]g(n). \quad (6)$$

Soveltamalla yhtälöä 5 saadaan yhtälö

$$\mathbb{E}[\Delta B(n)|y(n), x(n-1)] \approx \frac{y(n) - e_1 \exp(A)X(n-1)}{e_1 g(n)}. \quad (7)$$

Sijoitetaan yhtälön 7 tulos yhtälöön 6

$$\mathbb{E}[z(n)|y(n), x(n-1)] \approx g(n) \frac{y(n) - e_1 \exp(A)X(n-1)}{e_1 g(n)}. \quad (8)$$

Näin saatiin ratkaistua L^1 filtteri

$$\mathbb{E}[x(n)|y(n), x(n-1)] \approx g(n) \frac{y(n) - e_1 \exp(A)X(n-1)}{e_1 g(n)} + \exp(A)X(n-1).$$

Kohtuullinen valinta funktiolle $g(n)$ on sen vasen raja

$$g(n) = \exp(A)e_3\sigma(n-1).$$

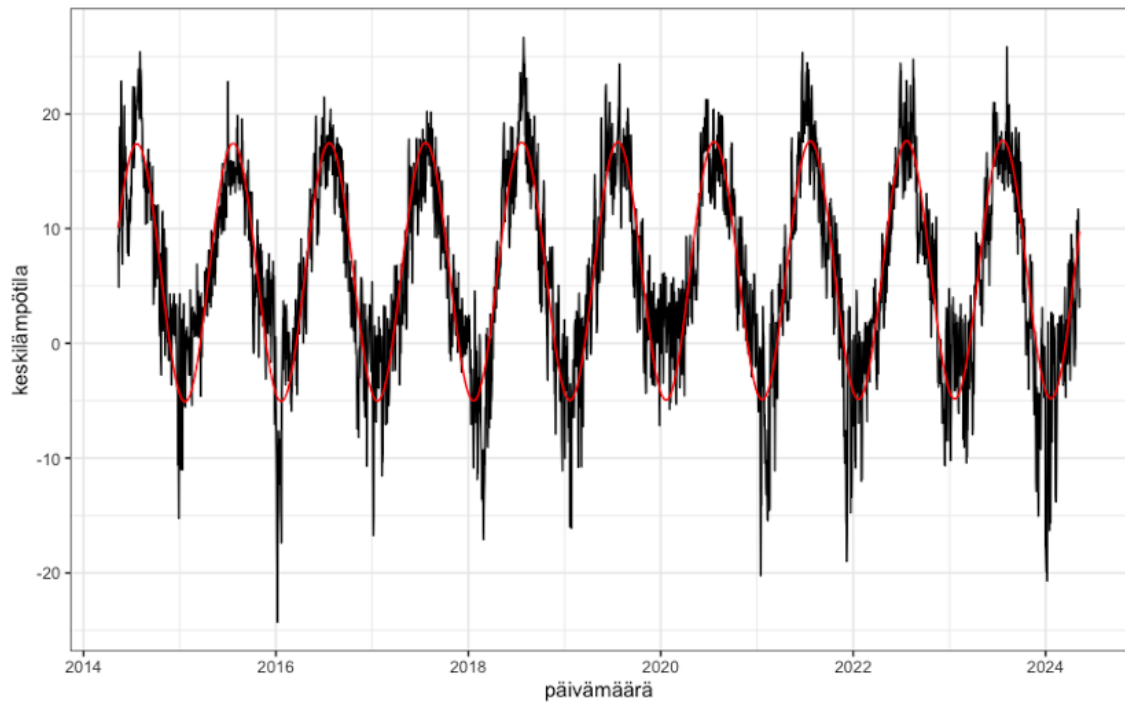
Hinnoitellaan esimerkin vuoksi CAT-call optio kesäkuun ensimmäiselle viikolle 3-9.06.2024. Olkoon option toteutushinta 70 ja toteutuspäivä 31.05.2024. Käytetään korkoindeksinä Euribor 12kk, joka oli 09.05.2024 3,628%. Option hinta päivänä 09.05.2024 on 31,44862€.

5 Loppupäätelmät

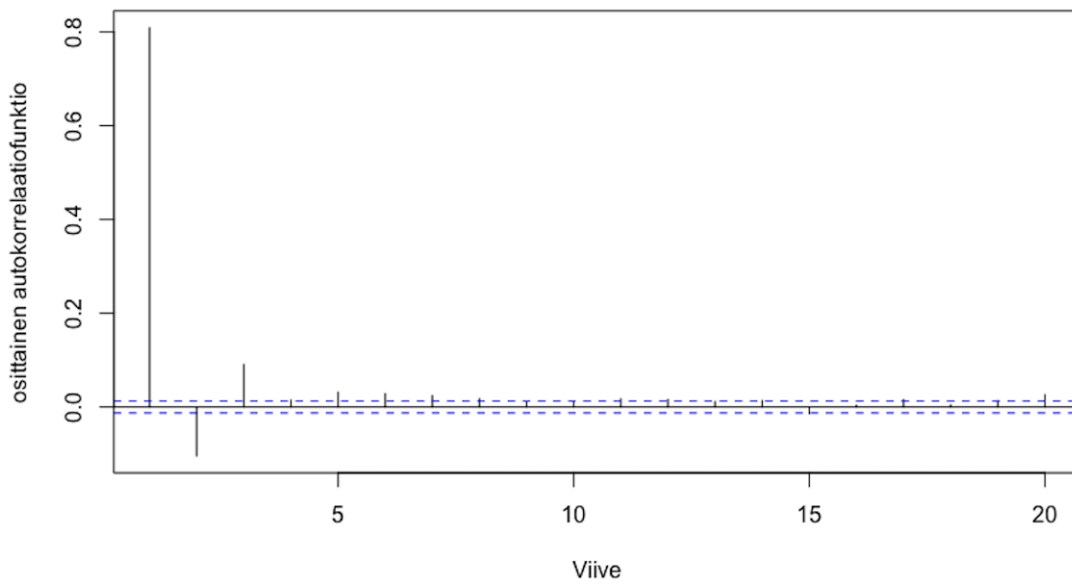
Tässä tutkielmassa rakennettiin CAR(3)-malliin pohjautuva stokastinen malli Turun lämpötilalle. Mallin avulla hinnoiteltiin esimerkkinä call-optio kuvitteelliselle CAT-futuurille. Lämpötilan mallintaminen toteutettiin erottamalla deterministinen osa eli trendi ja kausivaihtelu ja sovittamalla jäännösprosessiin AR(3)-malli. Residuaalien kausittaista volatilitteettia mallinnettiin Fourier-sarjan avulla, mikä mahdollisti stokastisen volatilitteetin huomioimisen.

Mallin valinnassa painotettiin erityisesti pitkän aikavälin ajallisen riippuvuuden huomioimista sekä mallin soveltuvuutta lämpötiladatan ominaisuuksiin, kuten "pak-suihin häntiin" residuaalijakaumissa. Käytetty menetelmä perustui Benthin esittämään lämpötilajohdannaisten hinnoittelumenetelmiin, ja tulosten perusteella rakennettu malli antoi realistisen pohjan johdannaisten arvottamiselle.

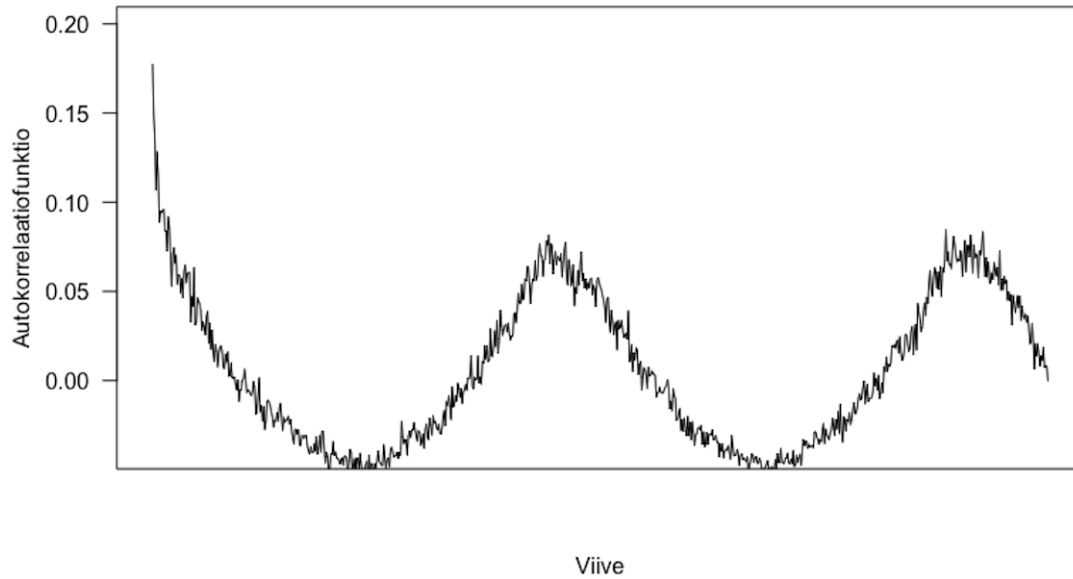
Esimerkkilaskelmassa hinnoiteltiin call-optio CAT-futuurille kesäkuun 2024 ensimmäiselle viikolle. Laskennassa käytettiin ajankohtaista korkotasoa ja sovelletun



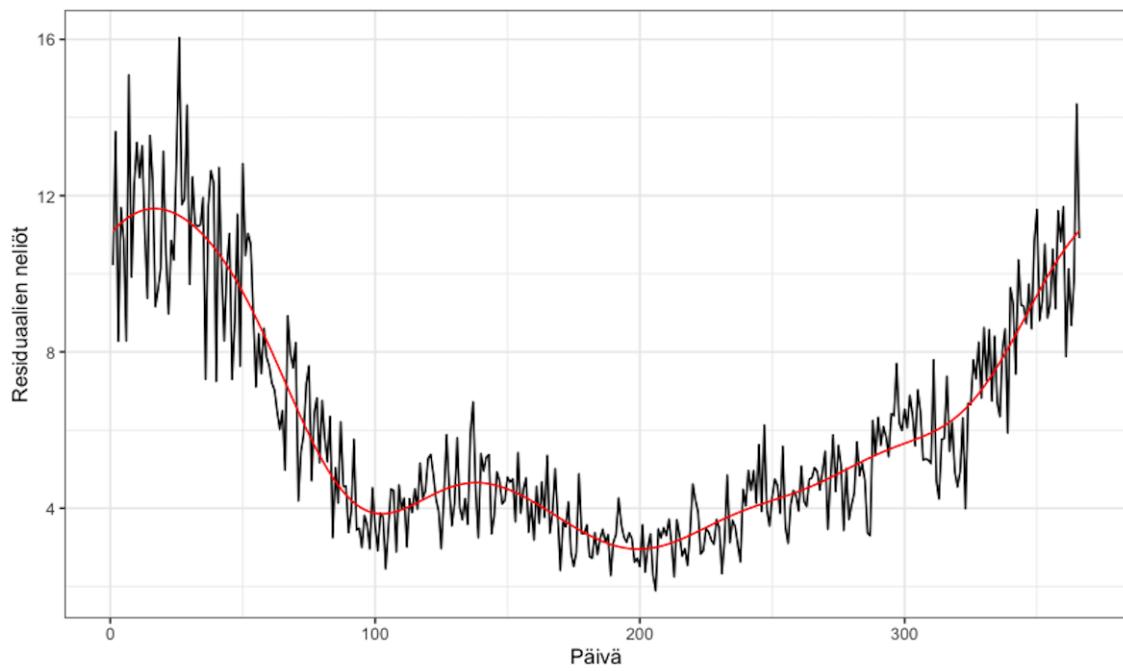
Kuva 1: Lämpötilamallin deterministinen osa



Kuva 2: osittainen autokorrelaatiofunktio



Kuva 3: residuaalien neliön autokorrelaatiofunktio



Kuva 4: volatilitiitin funktio

mallin tuottamaa futuurin dynamiikkaa. Option hinta saatiin numeerisesti approksimoimalla stokastisen prosessin arvoja Euler–Maruyama -menetelmään pohjautuvan L^1 filterin avulla.

Tutkielmassa esiteltyä mallia voi kehittää esimerkiksi käyttämällä stokastisen volatilitietin mallia tai Lévy-prosessien hyödyntämistä lämpötilan residuaalien mallintamisessa. Mallin parametreihin liittyvää epävarmuutta ei tutkielmassa tutkittu. Sopivan riskineutraalin mitan löytämiseksi lämpötilan markkinahintaa tulisi tutkia tarkemmin edustavan sijoittajan näkökulmasta.

Viitteet

- [1] Buckley, N., Hamilton, A., Harding, J., Roche, N., Ross, N., Sands, E., Skelding, R., Watford, N., & Whitlow, H. European Weather Derivatives. The Institute and Faculty of Actuaries; 2000.
- [2] Considine, G. Introduction to Weather Derivatives. CME Group; 2000.
- [3] The World Bank. Product Note – Index-Based Weather Derivative. World Bank; 2023.
- [4] Benth, F. E. & Saltyte-Benth, J. Stochastic modelling of temperature variations with a view towards weather derivatives. Appl. Math. Finance 12; 2005a.
- [5] Benth, F. E. & Saltyte-Benth, J. (2005b). The volatility of temperature and pricing of weather derivatives. E-print, No. 12 March, University of Oslo.
- [6] Alaton, P., Djehiche, B. & Stillberger, D. (2002). On modelling and pricing weather derivatives. Appl. Math. Finance 9, 1–20.
- [7] Benth FE, Benth J, Koekebakker S. Putting a Price on temperature. Scand J Stat. 2007;34:746-767.
- [8] Dornier, F. & Queruel, M. Caution to the Wind, Weather Risk Special Report 2000, Energy & Power Risk Management/Risk Magazine.
- [9] Brody, D. C., Syroka, J. & Zervos, M. (2002). Dynamical pricing of weather derivatives. Quant. Finance 3, 189–198.
- [10] Alfonsi A, Vadillo N. A stochastic volatility model for the valuation of temperature derivatives
- [11] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. 4rd ed. Springer-Verlag; 2000.
- [12] Benth FE, Šaltytė Benth J. Modeling and Pricing in Financial Markets for Weather Derivatives. World Scientific; 2013.
- [13] Benth, FE. On arbitrage-free pricing of weather derivatives based on fractional Brownian motion. Appl. Math. Finance 10; 2003.

- [14] Duncan, T. E., Hu, Y., and Pasik-Duncan, B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory. SIAM Journal of Control Optimisation; 2000.
- [15] Särkkä, S. and Solin, A. Applied Stochastic Differential Equations. Cambridge University Press; 2009
- [16] Karjanlahti, R. Lampotilajohdannaisen hinnoittelu koodi. GitHub; 2025.
<https://github.com/rojji/Lampotilajohdannainen-Turku>