



**TURUN
YLIOPISTO**

DERIVAATAN SOVELLUSTEHTÄVIIN LIITTYVÄT VIRHEET JA
VIRHEKÄSITYKSET YLIOPIILASKIRJOITUKSISSA

Hilma Laitinen

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:

Prof. Vesa Halava

FM, DI Mikko Jaskari

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Pääaine: Matematiikka

Tekijä: Hilma Laitinen

Otsikko: Derivaatan sovellustehtäviin liittyvät virheet ja virhekäsitykset ylioppilaskirjoituksissa

Ohjaaja: Prof. Vesa Halava

Sivumäärä: 47 sivua

Aika: Toukokuu 2026

Tässä tutkielmassa tarkastellaan opiskelijoiden tekemiä virheitä ja niihin liittyviä virhekäsityksiä ylioppilaskokeiden derivaatan sovellustehtävissä sekä muita virheisiin mahdollisesti vaikuttaneita tekijöitä, kuten luetun ymmärtämistä ja ongelmanratkaisutaitoja. Lisäksi esitellään eri teorioita matemaattisen tiedon rakentumiselle ja tarkastellaan ratkaisuihin esiintyviä virheitä kyseisten teorioiden näkökulmista. Tarkastellut teoriat ovat konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto sekä prosessi–objekti-teoriat.

Tutkielma perustuu neljään derivaatan sovellustehtävään ylioppilaskokeista vuosilta 2020-2022. Koetehtävät on laadittu vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman pohjalta. Kutakin tehtävää kohden analysoidaan sadan satunnaisen opiskelijan anonymi ratkaisu. Opiskelijoiden ratkaisut tehtäviin ovat osa Ylioppilastutkintolautakunnalta saatua tutkimuskäyttöön tarkoitettua korpusaineistoa. Aineistoon kuuluu opiskelijoiden ratkaisujen lisäksi heidän saamansa pisteet kyseisistä tehtävistä sekä kaikkien kyseisen tehtävän tehneiden opiskelijoiden saamat pisteet. Tutkielman tavoitteena on tunnistaa kussakin tehtävässä yleisimmin esiintyviä virheitä sekä tehtävän ratkaisun että derivaatan ymmärtämisen kannalta ja pohtia mahdollisia syitä virheiden taustalla.

Tutkielman perusteella sanallisissa ääriarvotehtävissä funktion muodostaminen oli monelle haastavampaa, kuin itse ääriarvojen etsiminen derivaatan avulla. Monet kokelaat derivoivat mitä tahansa tehtävänannossa mainittua yhtälöä, vaikka tarkoituksena oli muodostaa oma funktio. Monet eivät myöskään derivoineet mitään, vaan taulukoivat eri arvoja tai käyttivät muita puuttellisia perusteluja ratkaisussaan. Lisäksi yksi tehtävä mittasi tietoa derivaatan ja muutosnopeuden yhteydestä. Suurin osa kyseisen tehtävän tehneistä sadasta kokelaasta ei ymmärtänyt, mitä funktion vähennismisnopeustarkoittaa. Sekä sanallisissa ääriarvotehtävissä että funktion vähennismisnopeutta tutkivassa tehtävässä luetun ymmärtäminen ja ongelmanratkaisutaidot olivat avainasemassa.

Asiasanat: Derivaatta, ääriarvotehtävä, muutosnopeus, virhe, virhekäsitys, konseptuaalinen tieto, proseduraalinen tieto, prosessi, objekti, APOS, sanallinen tehtävä, matematiikan ylioppilaskoe

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Derivaatta lukion opetussuunnitelmassa	3
3	Teoreettinen viitekehys	5
3.1	Virheet ja virhekäsitykset	5
3.2	Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto	7
3.3	Prosessi-objekti-teoriat tai APOS-teoria	9
3.4	Ongelmanratkaisusta ja luetun ymmärtämisestä	10
4	Tutkimuksen toteutus	14
4.1	Tutkimusaineisto ja tutkimuskysymykset	14
4.2	Analyysiprosessin kuvaus	14
4.3	Tehtävänannot ja mallivastaukset	15
4.3.1	Kevät 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 4 (A-osa). Suurin etäisyys	15
4.3.2	Kevät 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 5 (B-osa). Rantatontti .	18
4.3.3	Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 8 (B-osa). Funktion väheneminen	20
4.3.4	Syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 13 (B-osa). Suurin pinta-ala	20
5	Tulokset	23
5.1	Kevät 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 4. Suurin etäisyys	23
5.2	Kevät 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Rantatontti	27
5.3	Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 8. Funktion väheneminen	31
5.4	Syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 13. Suurin pinta-ala	35
6	Tulosten tarkastelua ja luotettavuus	42
6.1	Johtopäätökset	42
6.2	Luotettavuus	44
	Viitteet	45

1 Johdanto

Ylioppilastutkinnon sähköistymisen myötä matematiikan pitkän ja lyhyen oppimäärän B-osioiden tehtävät ovat muuttuneet yhä soveltavimmiksi, jotta tehtävät eivät olisi suoraan ratkaistavissa ohjelmistojen avulla (Rissanen, 2020). Aihe on puhututtanut jo ennen sähköisiä ylioppilaskokeita, ja muun muassa Heikki Kärki kirjoitti CAS-laskinten käyttöönotosta vuonna 2013 kolumnissaan *Skandaali muhii matematiikan yo-kokeissa – paras arvosana ilman osaamista* (15.4.2013, Keski-suomalainen). Tuolloin käytössä oli vuoden 2003 lukion opetussuunnitelma ja esimerkiksi kurssin MAA7, Derivaatta, kohdalla ainoa maininta sovellusongelmista oli tavoite ”opiskelija osaa määrittää rationaalifunktion suurimman ja pienimmän arvon sovellusongelmien yhteydessä” (Opetushallitus, 2003). Samoin matematiikan lyhyen oppimäärän kurssilla kurssilla MAB4, Matemaattinen analyysi, sovellustehtävät mainitaan vain muodossa ”kurssin tavoitteena on, että opiskelija oppii sovellusten yhteydessä määrittämään polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon” (Opetushallitus, 2003). Teknologian käyttö on mainittu kyseisessä opetussuunnitelmassa vain kolmesti: pitkän matematiikan yleisissä tavoitteissa (”opiskelija osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä”), pitkän matematiikan kurssilla MAA12, Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (”opiskelija harjaantuu käyttämään nykyaikaisia matemaattisia välineitä”) sekä lyhyen matematiikan kurssilla MAB8, Matemaattisia malleja III (”Kurssin tavoitteena on, että opiskelija laajentaa käsitystään teknologisoituvassa yhteiskunnassa tarvittavasta matematiikasta.”) (Opetushallitus, 2003).

Sen sijaan vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmassa vastaavien kurssien kohdalla on tavoitteina, että ”opiskelija osaa käyttää teknisiä apuvälineitä raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa ja rationaaliyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisemisessa sekä polynomi- ja rationaalifunktion derivaatan määrittämisessä sovellusongelmissa” (MAA6, Derivaatta) ja ”opiskelija osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kulun tutkimisessa ja funktion derivaatan sekä suljetun välin ääriarvojen määrittämisessä sovellustehtävissä” (MAB7, Matemaattinen analyysi) (Opetushallitus, 2015). Teknisiä apuvälineitä on tuotu siis huomattavasti enemmän esille seuraavassa opetussuunnitelmassa. Tämä vaikuttaa myös luonnollisesti koetehtävien laatimiseen, jotta tehtävät vaatisivat muitakin taitoja kuin laskimen ominaisuuksien hyvää tuntemusta. Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteita derivaattaa koskien käydään tarkemmin läpi luvussa 2.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan opiskelijoiden tekemiä derivaattaa ja ääriarvot tehtäviin liittyviä virheitä sekä niihin liittyviä virhekäsityksiä ylioppilaskirjoituksissa. Tutkielmaa varten valittiin kaksi lyhyen ja kaksi pitkän oppimäärän tehtävää vuosilta 2020-2022 ja kutakin tehtävää kohden analysoitiin sadan satunnaisen opiskelijan ratkaisua. Tehtävät on laadittu vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman pohjalta, sillä seuraava opetussuunnitelma (LOPS 2019) otettiin käyttöön vasta 1.8.2021. Tällöin ensimmäiset vuoden 2019 opetussuunnitelmalla aloittaneet opiskelijat ovat todennäköisesti olleet ylioppilaskokeessa ensimmäistä kertaa keväällä 2023 tai syksyllä 2023, eivätkä tässä tutkielmassa tarkasteltavat tehtävät kosketa siis heitä. Kolme tarkasteltavista tehtävistä on hieman soveltavampia sanallisia ääriarvot tehtäviä, joiden tarkoituksena on mitata sitä, osaako opiskelija käyttää derivaattaa oikein ja

onnistuuko hän luomaan sanallisen tehtävänannon pohjalta oikean funktion, jota derivoida. Neljäs tehtävä mittaa opiskelijoiden ymmärrystä derivaatan yhteydestä funktion muutosnopeuteen. Tutkimuksen toteutus sekä valitut tehtävät ja niiden malliratkaisut esitellään luvussa 4.

Luvussa 3 esitellään matematiikan oppimiseen liittyviä teorioita ja tarkastellaan eri tutkimuksissa esiintyneitä virheitä ja virhekäsityksiä myös derivaatan näkökulmasta. Lisäksi tarkastellaan erilaisia ongelmanratkaisuun ja luetun ymmärtämiseen liittyviä seikkoja, sillä kyseiset taidot ovat tärkeässä roolissa soveltavammissa sanallisissa tehtävissä.

Luvussa 5 analysoidaan kussakin tehtävässä esiintyneitä virheitä ja luvussa 6 tarkastellaan tuloksia käsitellyn kirjallisuuden valossa sekä pohditaan tutkielman luotettavuuteen liittyviä seikkoja.

2 Derivaatta lukion opetussuunnitelmassa

Tässä tutkielmassa tarkasteltavat tehtävät on laadittu lukion opetussuunnitelman 2015 pohjalta, joten tarkastellaan sen sisältöjä ja tavoitteita.

Pitkässä matematiikassa kurssi MAA6, Derivaatta, liittyy vahvasti tutkielmaan valittuihin tehtäviin. Sen tavoitteet ja keskeiset sisällöt on listattu opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2015) seuraavasti.

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa määrittää rationaalifunktion nollakohdat ja ratkaista yksinkertaisia rationaaliepäyhtälöitä
- omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta
- osaa määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat
- osaa tutkia derivaatan avulla polynomifunktion kulkua ja määrittää sen ääriarvot
- tietää, kuinka rationaalifunktion suurin ja pienin arvo määritetään
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa ja rationaaliyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisemisessa sekä polynomi- ja rationaalifunktion derivaatan määrittämisessä sovellusongelmissa.

Keskeiset sisällöt

- rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö
- funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
- polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen
- polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen.

Lisäksi derivaatan käyttöä ja sovelluksia kerrataan ja syvennetään muilla pitkän matematiikan kursseilla lisää. Esimerkiksi pakollisen kurssin MAA7, Trigonometriset funktiot, tavoitteissa on mainittu, että opiskelija ”osaa derivoida yhdistettyjä funktioita” sekä ”tutkia trigonometrisiä funktioita derivaatan avulla”. Samoin pakollisen kurssin MAA8, Juuri- ja logaritmfunktiot, tavoitteissa on, että opiskelija ”osaa tutkia juuri-, eksponentti- ja logaritmfunktioita derivaatan avulla” ja ”osaa käyttää teknisiä apuvälineitä juuri-, eksponentti- ja logaritmfunktioiden tutkimisessa ja juuri-, eksponentti- ja logaritmiyhtälöiden ratkaisemisessa sekä juuri-, eksponentti- ja logaritmfunktion derivaattojen määrittämisessä sovellusongelmissa”. Opiskelija voi käydä myös valtakunnallisen syventävän kurssin MAA13, Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi, jolla entisestään syvennetään ja vahvistetaan derivaatan käsitettä. (Opetushallitus, 2015)

Lyhyessä matematiikassa derivaattaa sen sijaan käsitellään vain yhdellä valtakunnallisella syventävällä kurssilla MAB7, Matemaattinen analyysi (Opetushallitus, 2015). Opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2015) on listattu kurssin tavoitteet ja keskeiset sisällöt seuraavasti.

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- tutkii funktion muutosnopeutta graafisin ja numeerisin menetelmin
- ymmärtää derivaatan käsitteen muutosnopeuden mittana
- osaa tutkia polynomifunktion kulkua derivaatan avulla
- osaa määrittää sovellusten yhteydessä polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kulun tutkimisessa ja funktion derivaatan sekä suljetun välin ääriarvojen määrittämisessä sovellustehtävissä.

Keskeiset sisällöt

- graafisia ja numeerisia menetelmiä
- polynomifunktion derivaatta
- polynomifunktion merkin ja kulun tutkiminen
- polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen suljetulla välillä

Derivaattaan ja ääriarvojen määrittämiseen liittyvät sovellustehtävät jäävät siis lyhyessä matematiikassa huomattavasti vähemmälle huomiolle kuin pitkässä matematiikassa. Toki derivaattaan ja sen sovelluksiin liittyviä tehtäviä on myös vähemmän lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa, minkä lisäksi tehtävät ovat luonteeltaan helpompia.

3 Teoreettinen viitekehys

Tässä tutkielmassa tarkasteltavat näkökulmat matematiikan oppimisesta kuuluvat pitkälti konstruktivistisen oppimiskäsityksen alle. Sen mukaan uusi tieto rakentuu vanhan päälle ja oppija itse osallistuu aktiivisesti uuden tiedon konstruoimiseen (Leino, 2004; Olivier, 1989; Piaget, 1970; Smith, 1993). Lisäksi oppija voi lajitella tai liittää uuden ja vanhan tietonsa osaksi laajempia kokonaisuuksia, joita kutsutaan psykologiassa *skeemoiksi* (Olivier, 1989). Skeemat voivat siis muun muassa olla henkilön käsityksiä siitä, miten tietyissä tilanteissa tulisi yleensä toimia tai mitä seurauksia tietyillä toiminnoilla on. Kun opitaan jotain uutta, pyritään se liittämään osaksi jo olemassa olevaa skeemaa vastaavasta tilanteesta (Olivier, 1989). Jos uusi asia ei sellaisenaan sovi osaksi mitään skeemaa, täytyy skeemaa hieman muokata (Olivier, 1989). Skeemat eivät siis ole aina pysyviä, vaan ne voivat muovautua oppimisen myötä, ja tällöin oppiminenkaan ei ole vain ulkoa opettelua vaan tiedon konstruoimista (Leino, 2004). Erilaisiin matematiikan oppimiseen ja derivaattaan liittyviin skeemoihin palataan tarkemmin luvussa 3.3.

Matematiikan oppimista on tarkasteltu kirjallisuudessa monelta eri kannalta. Olivier (1989) puhuu virheistä ja virhekäsityksistä, ja monissa muissakin tutkimuksissa (Ojose 2015; Orton, 1983a; Orton, 1983b; Siyepu, 2013) on lajiteltu opiskelijoiden virheitä esimerkiksi eri kategorioihin (ks. luku 3.1).

Toinen tapa tarkastella matematiikan oppimista on tiedon rakentumisen kautta. Luvussa 3.2 tarkastellaan konseptuaalista ja proseduraalista tietoa ja niihin liittyvää tutkimusta. Luvussa 3.3 tarkastellaan derivaatan oppimista APOS-teorian (action, process, object, schema) näkökulmasta, josta on joissain suomenkielisissä lähteissä (esim. Hähkiöniemi, 2018) käytetty myös nimeä prosessi–objekti-teoria.

Lopuksi luvussa 3.4 esitellään muutamia ongelmanratkaisuun ja luetun ymmärtämiseen liittyviä tekijöitä.

3.1 Virheet ja virhekäsitykset

Tässä luvussa puhutaan *virheistä* ja *virhekäsityksistä*. Olivier (1989) halusi erottaa toisistaan huolimattomuusvirheet (engl. slips), virheet (engl. errors) ja virhekäsitykset (engl. misconceptions). Olivierin (1989) mukaan huolimattomuusvirheet johtuvat juurikin huolimattomuudesta; ne ovat helposti huomattavissa ja korjattavissa, ne eivät ole systemaattisia ja sekä noviisit että asiantuntijat tekevät niitä satunnaisesti. Virheet sen sijaan ovat systemaattisempia ja johtuvat taustalla olevista virhekäsityksistä (Olivier, 1989). Virhekäsitysten synty liittyy usein aiemmin opitun tiedon yleistämiseen (Olivier, 1989; Ojose, 2015; Nesher, 1987) ja opiskelijoiden voi olla hankala huopua niistä, vaikka heille olisi näytetty oikea tapa (Smith, 1993). Olivier (1989) kertoo esimerkiksi lineaariseen ekstrapolointiin (engl. linear extrapolation) liittyvistä virheistä, joissa opiskelijat virheellisesti yleistävät säännön $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pätemään myös muille kuin lineaarisille funktioille. Tällöin opiskelija saattaa esimerkiksi sieventää $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ tai $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ (Olivier, 1989). Ojosen (2015) mukaan virhekäsityksiin tulisi puuttua ja korvata ne oikeilla käsityksillä, sillä muutoin ne vaikuttavat negatiivisesti matematiikan oppimiseen tulevaisuudessa.

Opettajan voi olla vaikea huomata oppilaan virhekäsityksiä, sillä ne saattavat

toisinaan vahingossa johtaa oikeaan vastaukseen (Nesher, 1987). Opettajan ei siis tulisi vain keskittyä oppilaan tekemiin virheisiin, vaan yrittää ymmärtää syvemmin oppilaan omaamia käsityksiä, joihin hän nojaa päättelyssään (Nesher, 1987). Toisaalta virhekäsityksiä ei tarvitse ajatella puhtaasti negatiivisina asioina, jotka on kitkettävä välittömästi, vaan uusi tieto tulisi liittää oppijan jo olemassa olevaan tietoon (Nesher, 1987; Olivier, 1989). Smith ym. (1993) ovat melko samoilla linjoilla; heidän mukaansa noviisien ja asiantuntijoiden tieto voi olla hyvinkin samankaltaista, sillä konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan uusi tieto rakentuu vanhan tiedon avulla. Sen mukaan opettaja ei voi ”kaataa” tietoa oppilaan päähän, vaan kunkin oppilaan on rakennettava oma ymmärryksensä aiheesta (Olivier, 1989). Tällöin ajatus siitä, että virhekäsitykset tulisi ”korvata” oikeilla käsityksillä ei Smithin ym. (1993) mukaan välttämättä aina päde, vaan riittäisi, jos oppija tunnistaa käyttämänsä nyrkkisäännön rajat ja ymmärtää, missä tilanteissa se toimii ja missä ei. Smithin ym. (1993) mukaan asiantuntijatkaan eivät aina toimi vain taidokkaasti ja automaatiolla, vaan hekin jatkuvasti rakentavat uudelleen omaa tietämystään ja logiikkaansa. He toimivat joustavasti tilanteissa, joista heillä ei ole aikaisempaa kokemusta ja tekevät myös satunnaisia virheitä, mutta kykenevät korjaamaan ne sujuvasti (Smith, 1993). Virheet ja virhekäsitykset ovat siis luonnollinen osa oppimista, eivätkä ne johdu oppilaan tyhmyydestä, vaan aiemmin opitun tiedon virheellisestä yleistämisestä uuteen asiaan (Olivier, 1989). Virhekäsitykset saattavat näyttäytyä oppilaalle hyvinkin loogisina seurauksina aiemmin opitusta ja tästä syystä virheet ovatkin hyvin hedelmällisiä oppimisen paikkoja (Olivier, 1989).

Monet muut tutkimukset ovat keskittyneet tarkemmin virheiden lajitteluun. Tutkimusten välillä on eroja siinä, miten virhekategorioiden nimetty, mutta niiden kuvailussa on paljon samaa. Esimerkiksi Orton (1983a) luokitteli virheet kolmeen kategoriaan: rakenteellinen virhe (engl. structural error), mielivaltainen virhe (engl. arbitrary error) ja toteutukseen liittyvä virhe (engl. executive error). Myös Ojose (2015) käytti kyseisiä virhekatteorioita, mutta hänen mukaansa rakenteelliset ja mielivaltaiset virheet ovat käsitteellisiä virheitä (engl. conceptual errors), jotka johtuvat ymmärryksen puutteesta, ja toteutukseen liittyvät virheet ovat oma kategoriansa. Siyepu (2013) sen sijaan lajitteli virheitä viiteen eri kategoriaan: käsitteelliset virheet (engl. conceptual errors), tulkinnalliset virheet (engl. interpretation errors), lineaariset ekstrapolaatiovirheet (engl. linear extrapolation errors), proseduraaliset virheet (engl. procedural errors) ja mielivaltaiset virheet (engl. arbitrary errors). Hänen kategoriansa perustuivat pitkälti muihin tutkimuksiin virhekäsityksistä, kuten Ortonin (1983b) ja Olivierin (1989).

Ortonin (1983a) ja Ojosen (2015) mukaan rakenteelliset virheet syntyvät, kun opiskelija ei ymmärrä tai osaa ottaa huomioon tehtävän kannalta tai tehtävänannossa esiintyviä oleellisia suhteita tai toimintaperiaatteita. Tällöin opiskelija saattaa esimerkiksi käsitellä ∞ -merkkiä yhtälössä kuin kyseessä olisi reaali-luku tai jakaa yhtälön $3x(x - 6) = 0$ muuttujalla x ottamatta huomioon, että $x = 0$ on yksi ratkaisu (Orton, 1983b). Hän myös luokitteli rakenteelliseksi virheeksi sen, jos opiskelija antoi funktion arvon vastaukseksi, kun kysyttiin muutosnopeutta tietyssä pisteessä, tai jos opiskelija sievensi virheellisesti $3(a + h)^2 = 3a^2 + 3h^2$, mikäli oletetaan, että opiskelija on avannut sulut väärin ($(a + h)^2 = a^2 + h^2$) (Orton, 1983b). Toisaalta jälkimmäisessä sievennysvirheessä on myös nähtävissä Olivierin (1989) kuvailema

lineaarinen ekstrapolaatiovirhe, joten näissäkin kategorioissa on hieman päällekkäisyyttä eri tutkimusten välillä.

Mielivaltainen virhe viittaa siihen, että opiskelija on toiminut mielivaltaisella tavalla, eikä onnistunut esimerkiksi ottamaan huomioon kaikkia tehtävänannon rajoitteita (Ojose, 2015; Orton, 1983a). Siyepun (2013) mukaan esimerkiksi vastaus, jossa opiskelija ei ole derivoinut funktion kaikkia termejä, olisi mielivaltainen virhe, tai vastaavasti tilanne, jossa opiskelija on kopioinut osan tehtävänannon informaatiosta virheellisesti, jolloin vastauskin on ollut virheellinen. Ojosen (2015) mukaan esimerkiksi virhe, jossa epäyhtälö-merkki ei käänny negatiivisella luvulla kerrottaessa, on huonteeltaan mielivaltainen, ja siihen liittyy käsitteellisen ymmärryksen puute. Toteutukseen liittyvissä virheissä opiskelija on epäonnistunut laskutoimituksissa, vaikka tehtävän toimintaperiaatteet olisikin ymmärretty (Ojose, 2015; Orton, 1983a).

Siyepu (2013) kuvailee käsitteellisiä virheitä hyvin samoilla tavoin, kuin Ojose (2015) ja Orton (1983a) rakenteellisia virheitä; niissä opiskelija ei ymmärrä tehtävässä tarvittavia käsitteitä tai tehtävänantoon liittyvien asioiden välisiä suhteita. Tulkinnallisten virheiden taustalla on usein virheellisesti yleistetty skeema, jonka avulla opiskelija tulkitsee väärin tehtävänannon käsitteitä. Lineaariset ekstrapolaatiovirheet liittyivät lineaarisille funktioille pätevien skeemojen yleistämiseen, kuten $f(a + b) = f(a) + f(a)$. Proseduraalisia virheitä Siyepu (2013) kuvaili hyvin samoilla tavoin, kuin Ojose (2015) ja Orton (1983a) toteutukseen liittyviä virheitä; niissä opiskelija on epäonnistunut laskutoimituksissaan, vaikka käsitteet niiden taustalla ymmärrettäisiinkin. Mielivaltaisten virheiden kuvailussa Siyepu (2013) viittaakin Ortoniin (1983b) ja kuvailee niitä samoin. (Siyepu, 2013)

Ojose (2015) kuvailee lisäksi muita algebrallisia virheitä, mutta ei jaa niitä mihinkään tiettyihin kategorioihin. Yksi näistä on esimerkiksi osamäärän $(x + 5)/5$ virheellinen sieventäminen muotoon x . Ojosen (2015) mukaan yksi selitys tällaiselle virheelle voisi esimerkiksi olla se, että oppilaalla on tarve sieventää ”loppuun asti” ja antaa jokin lopullinen vastaus.

Kuten huomataan, virhekategorioissa on paljon päällekkäisyyksiä eri tutkimusten välillä, eivätkä kaikki tutkimukset viittaa samoihin muihin tutkimuksiin virhekategorioita kuvaillessaan, vaikka kuvaus olisi lähes sanasta sanaan sama. Tästä huolimatta ne antavat kuitenkin suhteellisen hyvän kuvan eri näkökulmista, joilla opiskelijoiden tekemiä virheitä tai virheiden alkuperää voi lähteä tarkastelemaan.

3.2 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Matematiikan oppimista voi tarkastella myös tiedon rakentumisen kautta. Kirjallisuudessa (esim. Haapasalo 2004; Hiebert & Lefevre, 1986; Hähkiöniemi, 2018; Rittle-Johnson & Alibali, 1999) on toisinaan erotettu proseduraalinen (engl. procedural knowledge) ja konseptuaalinen (engl. conceptual knowledge) tieto. Karkeasti eroteltuna proseduraalisen tiedon voidaan ajatella olevan tietoa siitä, *miten* jokin asia tehdään, ja konseptuaalisen tiedon olevan ymmärrystä siitä, *miksi* niin tehdään (Hähkiöniemi, 2018; Luneta & Makonye, 2010).

Proseduraalinen tieto tai ymmärrys liittyy mekaanisempaan laskemiseen sekä esimerkiksi kaavojen, merkintöjen ja operaatioiden hallintaan (Haapasalo, 2004; Hiebert & Lefevre, 1986; Hähkiöniemi, 2018; Luneta & Makonye, 2010; Rittle-Johnson

& Alibali, 1999). Monet opiskelijat hallitsevat esimerkiksi mekaanisen derivoinnin ja tietävät, että $Dx^3 = 3x^2$, sillä tätä harjoitellaan lukiossa paljon. Haapasalon (2004) antaman määritelmän mukaan proseduraalinen tieto edellyttää usein esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta toiminta voi olla myös automatisoitunutta, jolloin se ei välttämättä vaadi ominaisuuksien tietoista ajattelemista.

Konseptuaalinen tieto sen sijaan on yleisempää, sillä siinä yhdistyvät tiedon eri osa-alueet (Haapasalo, 2004; Hiebert & Lefevre, 1986; Hähkiöniemi, 2018; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Tällöin opiskelija esimerkiksi ymmärtää, mihin derivaattaa käytetään ja mitä funktion derivaatta kertoo itse funktiosta. Konseptuaalista tietoa on kuvailtu myös solmujen ja linkkien muodostamana semanttisena tietoverkkona, jonka yksilö rakentaa itselleen (Haapasalo, 2004; Hiebert & Lefevre, 1986). Solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä, toimintoja, näkökulmia tai jopa ongelmia, eikä niiden tarvitse olla perinteisiä esitystapoja, vaan ne ovat yksilön omia mentaalisia konstruktioita (Haapasalo, 2004).

Haapasalon (2004; ks. myös Haapasalo & Kadijevich, 2000) mukaan tärkein ero proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välillä on lähinnä se, onko suoritus automatisoitunutta ja kuinka tietoisesti yksilö perustelee tai joutuu perustelemaan toimintojensa vaiheet. Hän myös kritisoi Hiebertin ja Lefevren (1986) kuvausta konseptuaalisesta ja proseduraalisesta tiedosta ja sanoi sen olevan ”yksipuolinen ja karkea”. Haapasalo ja Kadijevich (2000) huomauttivat, että kirjallisuudessa on käytetty paljon erilaisia termejä, jotka lähemmin tarkasteltuna ovat usein osittain päällekkäisiä. Lisäksi Haapasalon (2004) mukaan proseduraalista ja konseptuaalista tietoa on toisinaan vaikea lähteä erottamaan, eikä esimerkiksi matemaattisten tehtävien jakaminen näihin kategorioihin ole ollenkaan mielekäästä. Haapasalo (2004) esittelee eri näkökulmia proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon väliselle yhteydelle ja huomauttaa, että tutkijoiden välillä on eriäviä mielipiteitä siitä, ovatko nämä kaksi riippumattomia toisistaan, vai onko toisella vaikutusta toiseen ja missä määrin. Rittle-Johnsonin ym. (1999) mukaan nämä kaksi tiedon muotoa ovat oikeastaan yhden jatkumon kaksi eri päätä, ja he ovat samoilla linjoilla Haapasalon (2004) sekä Hiebertin ja Lefevren (1986) kanssa siitä, ettei niitä pysty aina erottamaan toisistaan. Rittle-Johnson ym. (1999; 2015) argumentoivat tutkimuksissaan, että konseptuaalisen tiedon kehittyminen vaikuttaa myös proseduraalisen tiedon kehitykseen ja päin vastoin.

Luneta ja Makonye (2010) totesivat tutkimuksessaan, että puutteelliset tiedot differentiaali- ja integraalilaskennan osaamisessa johtuivat pitkälti heikosta algebrallisesta osaamisesta. Heidän mukaansa monet virheet liittyivät liialliseen proseduraalisen tiedon hyödyntämiseen ilman konseptuaalista pohjaa. Tällainen voisi esimerkiksi olla tapaus, jossa tehtävänä oli vain derivoida funktio, mutta opiskelija yritti myös etsiä derivaatan nollakohtia (Luneta & Makonye, 2010). Tällaisen opiskelijan proseduraaliset taidot ovat siis olleet hyvät, mutta konseptuaalinen ymmärrys siitä, mitä pyydettiin tekemään, oli heikkoa. Toisaalta osalla opiskelijoista oli kyllä hyvä konseptuaalinen ymmärrys derivoinnista ja funktion ääriarvojen etsimisestä, mutta puutteelliset proseduraaliset taidot, kuten virheellinen tekijöihin jako, johtivat virheisiin (Luneta & Makonye, 2010).

3.3 Prosessi–objekti-teoriat tai APOS-teoria

Matematiikan oppimista voi tarkastella myös prosessien ja objektien kautta (Dubinsky, 1991; Sfard, 1991). Hähkiöniemi (2018) antaa esimerkin lukujen 2 ja 5 summasta. Ensinnäkin se voidaan ymmärtää prosessina, jossa on tehtävä laskutoimitus $2 + 5$, ennen kuin summa voidaan esimerkiksi kertoa kolmella. Toisaalta summan $2 + 5$ voi ymmärtää myös itsenäisenä objektina, jolloin sen voi kertoa luvulla kolme, vaikka yhteenlaskua ei oltaisiakaan vielä suoritettu. Tämä liittyy oleellisesti tilanteisiin, joissa sulkujen sisällä olevaa summaa ei pysty suoraan laskemaan, esimerkiksi $3(x + 2)$. Sfardin (1991) mukaan sekä matematiikan historiassa että yksilön oppimisen kohdalla prosessit usein edeltävät objekteja (poikkeuksena esimerkiksi geometria, jossa monet asiat ymmärretään ensin objekteina).

Monet tutkimukset (esim. Asiala, 1997; Maharaj, 2013; Siyepu, 2013) viittaavat prosessi–objekti-teoriaan usein Dubinskyn (1991) APOS-teorian, joka tulee sanoista action, process, object ja schema. Teorian käytännössä sama, kuin yllä annettu Hähkiöniemen (2018) kuvaus prosessi–objekti-teoriasta, mutta siinä kuvataan lisäksi toimintoja ja skeemoja. Myös Sfard (1991) puhuu prosesseista ja objekteista, mutta viittaa niihin myös *operationaalisena* (engl. operational) ja *rakenteellisena* (engl. structural) tietona. Sfardin (1991) mukaan uusi matemaattinen asia opitaan usein ensin yksittäisenä toimintona, joita eri objekteille voi tehdä. Derivoinnin tapauksessa opiskelija osaisi esimerkiksi mekaanisesti derivoida funktion $f(x) = x^3$ (Maharaj, 2013). Harjoittelun ja reflektoinnin myötä toiminto sisäistetään ja siitä tulee prosessi, jonka voi yhdistää muihin toimintoihin (Dubinsky, 1991). Prosessit ovat dynaamisia ja etenevät askel askeleelta (Sfard, 1991). Tällöin opiskelija osaa kuvitella mielessään miten esimerkiksi funktio $f(x) = (x^2 - 1)^2$ derivoidaan: avataan ensin sulkeet ja derivoidaan jokainen termi erikseen (Maharaj, 2013). Vähitellen prosessi tiivistyy ja siitä voi jättää esimerkiksi välivaiheita tai yksityiskohtia pois (Sfard, 1991). Lopulta asia, joka on aikaisemmin käsitetty dynaamisena prosessina, muuttuukin staattiseksi objektiksi (Sfard, 1991). Tällöin esimerkiksi funktion derivaattaa tietyssä pisteessä on mahdollista ajatella omana konseptinaan ilman, että sitä tarvitsee erikseen laskea. Maharaj (2013) antoi myös toisenlaisen esimerkin: funktion $f(x) = (x^2 - 1)^{100}$ voi ajatella derivoivansa sisä- ja ulkofunktion derivoimissäännöillä sen sijaan, että pitäisi avata kaikki sulut ja derivoida jokainen termi erikseen.

Uusilla objekteilla on edelleen mahdollista suorittaa erilaisia toimintoja, luoda uusia prosesseja ja edelleen uusia objekteja (Dubinsky, 1991; Sfard, 1991). Lisäksi Dubinskyn (1991) mukaan olemassa olevien prosessien avulla oppija voi luoda uusia prosesseja: esimerkiksi opiskelija, joka on sisäistänyt mekaanisen derivoimisen prosessin, voi hyödyntää sitä luodessaan prosessin mekaaniselle integroimiselle ”käänteisen derivaatan” kautta. Lisäksi monissa tilanteissa on myös tärkeää, että oppija pystyy samanaikaisesti ajattelemaan jotain matemaattista ilmiötä sekä objektina että prosessina (Sfard, 1991).

Skeema on kokoelma erilaisia prosesseja, objekteja ja aiemmin luotuja skeemoja (Asiala, 1997; Dubinsky, 1991). Dubinskyn (1991) mukaan skeema tulisi ymmärtää dynaamisena asiana, jota ei voi erottaa sen jatkuvasta muokkauksesta ja uudelleen rakentamisesta. Eräs derivaattaan liittyvä skeema voisi esimerkiksi olla se, että opiskelija ymmärtää mitä funktion derivaatta kertoo itse funktiosta ja osaa hyödyntää sitä ääriarvojen etsimisessä (Maharaj, 2013). Maharaj (2013) kuitenkin huomaut-

taa, että APOS-teorian tarjoamat selitykset ovat vain mahdollisia kuvauksia siitä, mihin yksittäinen henkilö kykenee, ja siihen liittyvät analyysit ovat tarkoitettu ennemminkin sopivan pedagogisen strategian valintaa tukemaan. On mahdotonta tietää pelkkää vastausta tulkitsemalla, minkälaisia skeemoja yksittäisellä opiskelijalla on tietystä aiheesta. Monet asiat, kuten motivaatio, emootiot tai käytettävissä olevat strategiat ja resurssit vaikuttavat valintaan käyttää jotain tiettyä skeemaa (Maharaj, 2013).

Toisaalta derivaatan nollakohtien etsiminen voi toisinaan kuulua myös prosessitasolle. Tällöin osataan kyllä mekaanisesti derivoida funktio ja tiedetään, että nollakohdat tulisi löytää, mutta ei välttämättä ymmärretä, mitä funktiota tulisi derivoida. Opiskelija on ehkä opetellut ulkoa tutun litanian (derivoi, etsi nollakohdat, tee kulkukaavio, etsi suurin tai pienin arvo), mutta käyttää sitä mielivaltaisesti vain johonkin tehtävänannossa esiintyvään funktioon, jos hän ei tiedä tarkalleen, mikä funktion ääriarvoja kysytään. Erityisesti soveltavammissa sanallisissa tehtävissä tämä tuntuu nousevan pintaan ja ilmiötä tarkastellaankin lähemmin sekä ongelmanratkaisun yhteydessä että tutkielman tuloksia analysoidessa (ks. luvut 3.4, 5 ja 6.1). Tavallaan myös Luneta (2010) mainitsi samasta asiasta tarkastellessaan opiskelijoiden proseduraalista ja konseptuaalista tietoa derivaatasta. Hän huomasi opiskelijoiden etsivän funktion ääriarvoja, vaikka niitä ei kysytty, ja totesi sen luultavasti johtuvan siitä, että opiskelija muisti opettajan usein etsineen derivaatan nollakohdista oppitunnilla (Luneta, 2010). Tällöin opiskelija on mahdollisesti ajatellut, että derivaatan nollakohdat tulee etsiä aina derivoinnin yhteydessä (Luneta, 2010). Lunetan (2010) mukaan opiskelijalla oli siis puutteellinen konseptuaalinen ymmärrys derivaatasta, mutta ilmiötä voisi yhtä hyvin ajatella APOS-teorian kautta: kenties tällaisella opiskelijalla on derivoinnin prosessi hallussa, mutta siihen liittyvä skeema on vielä puutteellinen, sillä opiskelija ei selvästi ymmärrä miksi tai milloin derivaatan nollakohdat tulisi selvittää.

Kuten muutkin tässä tutkielmassa esitellyt teoriat, prosessi–objekti-teoriakin on saanut kritiikkiä käsitteiden rajanvedon vaikeudesta muun muassa Sfardilta (1991). Kuten Hiebert ja Lefevre (1986) sekä Haapasalo (2004) huomauttivat konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tiedon kohdalla, tässäkin tapauksessa käsitteitä on toisinaan hankala erottaa toisistaan (Sfard, 1991). Lisäksi monissa tässä tutkielmassa esitellyissä teorioissa on jossain määrin päällekkäisyyttä tai samankaltaisuutta termien ja ilmiöiden välillä (katso esim. Haapasalo & Kadijevich, 2000). Se ei sinänsä haittaa, sillä tarkoituksena on vain valaista erilaisia lähestymistapoja matematiikan oppimisen tutkimukseen ja mistä eri kulumista opiskelijoiden tekemiä virheitä ja syitä niiden taustalla voi tarkastella.

3.4 Ongelmanratkaisusta ja luetun ymmärtämisestä

Tässä luvussa tarkastellaan ongelmanratkaisuun liittyviä seikkoja. Kirjallisuudessa (esim. Haapasalo, 2011; Leppäaho, 2018; Pólya, 1945) tarkastellaan usein myös ongelmanratkaisun opettamista, mutta tässä tarkastellaan vain muutamia ongelmanratkaisun kannalta oleellisia seikkoja ja ongelmanratkaisuprosesseja.

Tehtävän sanotaan olevan ongelma, jos oppilaan tulee ratkaisussaan yhdistää tuttua tietoa hänelle uudella tavalla (Leppäaho, 2018). Sama tehtävä voi ratkaisijan

osaamistasosta riippuen olla yhdelle ongelmatehtävä ja toiselle rutiinitehtävä (Leppäaho, 2018). Tällöin siis tehtävä, johon ratkaisijalla on valmiiksi tiedossaan jokin ratkaisumenetelmä, on luonteeltaan rutiinitehtävä (Haapasalo, 2011). Yleensä matematiikassa ongelmat jaotellaan *avoimiin* ja *suljettuihin* ongelmiin (esim. Haapasalo, 2011; Leppäaho, 2018). Suljetussa ongelmassa alku- ja lopputilanne ovat yksiselitteisesti määriteltyjä, kun taas avoimessa ongelmassa voi olla useita eri alku- ja/tai lopputilanteita (Haapasalo, 2011; Leppäaho, 2018).

Matemaattiseen ongelmanratkaisutaitoon vaikuttavat monet tekijät, kuten yksilön motivaatio, luku- ja kirjoitustaito, matemaattiset taidot sekä taito käyttää ongelmanratkaisustrategioita. Leppäahon (2018) mukaan näillä ei ole varsinaisesti tärkeysjärjestystä, mutta motivaatio on hyvin oleellinen sen kannalta, että tehtävän ylipäättään aloittaa.

Nunokawan (2005) mukaan ongelmanratkaisu on prosessi, jossa ratkaisija soveltaa matemaattista tietoaan ongelmaan ja pyrkii hankkimaan siitä uutta tietoa ratkaistakseen sen. Se koostuu kahdesta osasta: ensinnäkin ratkaisija pyrkii soveltamaan matemaattista tietoaan käsillä olevaan ongelmaan ja toisaalta myös saa ongelmasta tietoa itselleen (Nunokawa, 2005). Jos ongelma ei heti ratkea, ratkaisija jatkaa ongelman tutkimista ja ongelman tarjoaman tiedon keräämistä (Nunokawa, 2005). Tällöin prosessi voi johtaa myös siihen, että ratkaisija oivaltaa ongelman kautta uusia matemaattisia kokonaisuuksia, jotka hän voi lisätä omaan matemaattiseen tietoonsa (Nunokawa, 2005). Leppäahon (2018) mukaan ongelmanratkaisuprosessi voi olla oppilaalle hyödyllinen, vaikka hän ei saisikaan ongelmaa ratkaistua, mikäli hän on vain kiinnostunut kuulemaan oikean ratkaisun.

Pólyan (1945) ongelmanratkaisumallissa ratkaisuprosessi koostuu seuraavista vaiheista: ongelman ymmärtäminen, suunnitelman tekeminen, suunnitelman toteuttaminen ja ratkaisun tarkasteleminen. Pólyan (1945) mukaan ongelman ymmärtämisessä on erityisen tärkeää, että oppilas ymmärtää ongelman sanallisen esityksen. Hegartyn ym. (1995) mukaan heikommilla ongelmanratkaisijoilla onkin taipumusta turvautua pinnallisiin ratkaisustrategioihin, joissa oppilas perustaa ratkaisunsa tehtävänannossa mainittuihin arvoihin tai avainsanoihin. Taitavammat ongelmanratkaisijat sen sijaan luovat tehtävänannon informaation perusteella mielessään kuvan tai kuvitelman tilanteesta (mentaalinen malli tai mentaalinen representaatio; ks. esim. De Corte, 1985) ja perustavat ratkaisunsa siihen (Hegarty ym., 1995).

Spencerin ym. (2020) mukaan varhaiset kielelliset taidot, kuten sanavarasto ja luetun ymmärtäminen, liittyvät vahvasti lapsen myöhempään kykyihin ratkaista sanallisia tehtäviä. Hyvien luetun ymmärtämisen taitojen lisäksi myös yleisesti hyvät kielentämisen taidot ovat tärkeitä matematiikassa (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Kielentämiseen liittyvät esimerkiksi matematiikan symbolikieli, kuviokieli sekä luonnollinen kieli (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Joutsenlahden ja Tossavaisen (2018) mukaan kielentäminen hyödyntää ensisijassa oppijaa itseään, sillä se auttaa ajatusten ja argumenttien jäsentämisessä ja näin myös loogisten kokonaisuuksien hahmottamisessa.

Boonen ym. (2016) tuovat myös esille luetun ymmärtämisen taidon tärkeyden sanallisia tehtäviä ratkaistaessa. He tutkivat johdonmukaisten ja epäjohdonmukaisten tehtävänantojen sekä tehtävänannon semanttisen kompleksisuuden (engl. semantic complexity) yhteyttä siihen, miten hyvin oppilaat ratkaisivat tehtäviä. Heidän mu-

kaansa johdonmukainen tehtävänanto olisi esimerkiksi seuraava: ”Oliiviöljy maksaa seitsemän euroa kaupassa A. Kaupassa B oliiviöljy maksaa kaksi euroa enemmän kuin kaupassa A. Kuinka paljon maksaa seitsemän pulloa oliiviöljyä kaupassa B?” (Boonen ym., 2016). Vastaavasti epäjohdonmukainen tehtävänanto olisi seuraava: ”Oliiviöljy maksaa seitsemän euroa kaupassa A, joka on kaksi euroa enemmän, kuin kaupassa B. Kuinka paljon maksaa seitsemän pulloa oliiviöljyä kaupassa B?” (Boonen ym., 2016). Epäjohdonmukaisuus syntyy siis siitä, että oppilaan täytyy ymmärtää vähentää kaupan A (yhden pullon) hinnasta kaksi euroa saadakseen kaupan B hinnan, vaikka tehtävänannossa onkin sanat ”kaksi euroa *enemmän*”. Semanttinen kompleksisuus sen sijaan viittaa tekstin rakenteeseen ja siihen, kuinka helposti tekstin merkitykset ovat ymmärrettävissä.

Boonen ym. (2016) mukaan sekä johdonmukaisten ja epäjohdonmukaisten tehtävänantojen välillä on eroja niiden semanttisessa kompleksisuudessa. Heidän tutkimuksessaan heikommat ongelmanratkaisijat selvisivät huonommin (kaikissa) epäjohdonmukaisissa tehtävänannoissa, kun taas lahjakkaammat ongelmanratkaisijat selvisivät hyvin sellaisista epäjohdonmukaisista tehtävänannoista, jotka eivät olleet semanttisesti kompleksisia. Sen sijaan semanttisesti kompleksiset epäjohdonmukaiset tehtävänannot tuottivat vaikeuksia myös lahjakkaammille ongelmanratkaisijoille (Boonen ym., 2016). Boonen ym. (2016) mukaan tämä kertoo siitä, että virheet semanttisesti kompleksisissa (epäjohdonmukaisissa) tehtävänannoissa liittyvät enemmän heikkoon luetun ymmärtämiseen kuin kykyyn luoda mentaalinen representaatio tilanteesta.

Tässä tutkielmassa esiintyvät tehtävät ja yo-koetehtävät yleensäkin ovat suljettuja ongelmia (tai mahdollisesti rutiinitehtäviä), sillä niiden alku- ja lopputilanteet ovat tarkasti määriteltäviä. Lopputilanteeseen on toki mahdollista päästä useampaa eri reittiä, mutta niiden kaikkien tulisi johtaa samaan vastaukseen, mikäli ratkaisu on oikea. Lisäksi monet tutkielmassa esiintyvistä tehtävistä edellyttävät ratkaisijaltaan hyviä luetun ymmärtämisen ja ongelmanratkaisun taitoja.

Ongelmanratkaisun tärkeys näkyy jo perusopetuksen opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2014) eri luokka-asteilla. Esimerkiksi vuosiluokkien 7-9 oppimistavoite T5 on ”tukea oppilasta loogista ja luovaa ajattelua vaativien matemaattisten tehtävien ratkaisemisessa ja siinä tarvittavien taitojen kehittämisessä”. Tässä tavoitteessa arvosanan kahdeksan kriteeri on, että ”oppilas osaa jäsentää ongelmia ja ratkaista niitä hyödyntäen matematiikkaa” (Opetushallitus, 2014).

Lukion opetussuunnitelmassa (2015) ongelmanratkaisu on keskeinen osa lähes kaikkia kursseja. Pitkän matematiikan yleisissä tavoitteissa mainitaan muun muassa, että opiskelija ”kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan”, ”harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksunia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä” sekä ”harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita”. Lisäksi yleisesti matematiikan opetuksen tavoitteissa (sekä lyhyessä että pitkässä matematiikassa) on mainittu, että ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen

taitoja”, ”Opiskelijaa kannustetaan kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin” ja ”Opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä”. (Opetushallitus, 2015)

Lyhyessä matematiikassa MAB2 kurssilla yksi keskeisistä sisällöistä on ”ongelmien muotoileminen yhtälöiksi”, joka on tärkeä taito esimerkiksi sanallisten ääriarvotehtävien ratkaisemisen kannalta. Muita tapauksia, joissa ongelmanratkaisu on mainittu, ovat esimerkiksi kurssin MAB3 tavoite ”opiskelija osaa ratkaista käytännön ongelmia geometriaa hyväksi käyttäen”, MAB2 kurssin tavoitteet ”opiskelija harjaantuu käyttämään matematiikkaa jokapäiväisen elämän ongelmien ratkaisemisessa ja oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä” ja ”opiskelija osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa” sekä monet muut kurssit, joilla myös mainitaan teknisten apuvälineiden käyttö sovellusongelmissa. (Opetushallitus, 2015)

4 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa esitellään tutkimusaineisto ja tutkimuskysymykset (luku 4.1), tutkimuksen analyysiprosessin kuvaus (luku 4.2) sekä analysoitavien ylioppilastehtävien tehtävänannot, malliratkaisut ja Ylioppilastutkintolautakunnan hyvän vastauksen piirteet kullekin tehtävälle (luku 4.3). Malliratkaisut on tehty YTL:n hyvän vastauksen piirteiden pohjalta tätä tutkielmaa varten.

4.1 Tutkimusaineisto ja tutkimuskysymykset

Tässä tutkielmassa tarkastellaan opiskelijoiden tekemiä derivaattaan ja sen soveluksiin liittyviä virheitä ylioppilaskokeissa. Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

- Minkälaisia virheitä esiintyy sanallisissa ääriarvotehtävissä pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa?
- Ymmärtääkö lukion päättävä lyhyen matematiikan opiskelija derivaatan ja muutosnopeuden yhteyden?

Tutkielmaan valittiin kaksi pitkän ja kaksi lyhyen oppimäärän tehtävää matematiikan ylioppilaskokeista vuosilta 2020-2022. Koetehtävät on laadittu vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman pohjalta. Kutakin tehtävää kohden analysoitiin sadan satunnaisen opiskelijan anonyymi vastaus kyseiseen tehtävään. Opiskelijoiden anonymoidut vastaukset tehtäviin ovat osa Ylioppilastutkintolautakunnalta saatua tutkimuskäyttöön tarkoitettua korpusaineistoa. Aineistoon kuuluu opiskelijoiden ratkaisujen lisäksi heidän saamansa pisteet kyseisistä tehtävistä.

Tutkielmaan valikoituneista tehtävistä yksi (kevät 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 4) on A-osiosta, jossa koejärjestelmän laskinohjelmia on rajoitettu. Opiskelijoilla ei siis tällöin ole ollut käytössä esimerkiksi CAS-laskinta, eivätkä he ole pystyneet piirtämään kuvaajia ohjelmistojen avulla. Loput tehtävistä ovat B1- ja B2-osiosta, joissa kaikki laskinohjelmat ovat olleet käytössä. Sekä A- että B-osiassa opiskelijoilla on ollut käytössä koejärjestelmässä oleva taulukkokirja ja perusohjelmat. A-osiassa on neljä tehtävää, joista kaikki ovat pakollisia. B1-osiassa on viisi tehtävää, joista valitaan kolme, ja B2-osiassa neljä tehtävää, joista valitaan kolme. (YLE abitreenit)

Analysoitaviksi tehtäviksi valikoituivat sellaiset tehtävät, jotka eivät mittaa vain opiskelijan osaamista mekaanisen derivoinnin suhteen, vaan niissä pitää myös soveltaa derivaattaa hieman. Kolmessa tehtävässä kysytään funktion suurinta tai pienintä arvoa, mutta opiskelija joutuu itse muodostamaan kyseisen funktion ratkaistakseen tehtävän. Yhdessä tehtävässä (kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 8) opiskelija joutuu soveltamaan tietoaan funktion muutosnopeudesta annettuun funktioon.

4.2 Analyysiprosessin kuvaus

Analyysiprosessi aloitettiin tarkastelemalla tehtävän ratkaisemisen kannalta oleellisia asioita ja pyrittiin keksimään erityisesti derivaattaan liittyviä mahdollisia virhekattegorioita, kuten ”ei derivoinut” tai ”oma väärä funktio derivoitu väärin”. Kun alustavat virhekattegoriat oli päätetty tietylle tehtävälle, käytiin sen tehtävän kukin

ratkaisu läpi ja lajiteltiin ratkaisut sopiviin kategorioihin. Tämän lisäksi ratkaisusta ja siinä esiintyneistä virheistä kirjattiin ylös lyhyt sanallinen kuvaus ja tarkasteltiin, voisiko ratkaisu lisäksi kuulua kategorioihin ”oikea idea” tai ”lähes oikein”. Jos opiskelija oli saanut tehtävästä täydet pisteet, merkittiin sekin ylös, mutta ratkaisua ei kuvailtu, mikäli se ei herättänyt erityistä huomiota.

Kun kaikki tehtävät oli käyty kerran läpi, poimittiin kuvausten perusteella samankaltaisia tehtäviä lähempään tarkasteluun ja varmistettiin, että samantyyppiset virheet oli lajiteltu aina samoin. Lisäksi tutkittiin, jos niiden pohjalta löytyisi uusia virhekatteorioita, joita ei ollut aluksi osattu ottaa huomioon tai jos monissa tehtävissä toistui muuten vain samankaltaisia virheitä. Lisäksi joitain virhekatteorioita karsittiin, jos huomattiin, etteivät ne oikeastaan sopineet tehtävään tai olleet oleellisia derivaatan ymmärtämisen kannalta. Toisinaan myös liian epätarkkoja virhekatteorioita jätettiin pois, mikäli niihin kuului laaja kirjo erilaisia vastauksia, eivätkä ne siis erotelleet vastauksia tai virhekatteoryksiä juurikaan toisistaan. Tällainen oli esimerkiksi kategoria ”puutteellinen perustelu”, sillä siihen kuului usein sekä lähes oikeita ratkaisuja että sellaisia ratkaisuja, joissa ei ollut juuri minkäänlaisia perusteluja (oikealle tai väärälle) vastaukselle.

Tutkimusaineistoa analysoitaessa otettiin huomioon myös tehtävän pistejakauma, sillä se antoi hyvän kuvan siitä, missä määrin sadan opiskelijan aineisto vastasi kaikkien tehtävän tehneiden opiskelijoiden pistejakaumaa. Lisäksi vertaamalla pistejakaumaa Ylioppilastutkintolautakunnan hyvän vastauksen piirteisiin saa melko hyvän kokonaiskuvan siitä, mikä koettiin kussakin tehtävässä helpoksi tai vaikeaksi.

4.3 Tehtävänannot ja mallivastaukset

Seuraavat mallivastaukset on tehty tätä tutkielmaa varten. Ne saattavat olla hieman eri muodossa kuin Ylioppilastutkintolautakunnan hyvän vastauksen piirteet, jotta lukijalla olisi nähtävissä useampi eri tapa päästä samaan ratkaisuun.

4.3.1 Kevät 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 4 (A-osa). Suurin etäisyys

Tehtävänanto: Piste (x, y) toteuttaa epäyhtälön $x^4 + y^2 \leq 1$. Määritä pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta.

Mallivastaus, tapa 1: Pisteen (x, y) etäisyys origosta on $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Koska $x^4 + y^2 \geq 0$, niin ehdosta $x^4 + y^2 \leq 1$ seuraa, että $-1 \leq x \leq 1$.

Tarkastellaan reunaa

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 &= 1 \\ \iff y^2 &= 1 - x^4 \end{aligned}$$

ja sijoitetaan saatu y^2 arvo etäisyyden kaavaan, jolloin saadaan $d = \sqrt{x^2 + 1 - x^4}$.

Koska neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, riittää, että maksimoidaan etäisyyden neliö $x^2 + 1 - x^4$. Merkitään

Pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{x^2 + y^2}$ TAI lauseke $x^2 + y^2$ TAI laskettu jonkin pisteen etäisyys origosta.	1
∇ (Tarkasteltu reunaan) $x^4 + y^2 = 1$.	(2)
Tällöin $y^2 = 1 - x^4$, joten maksimoidaan etäisyyden neliö $x^2 + 1 - x^4$	1
\odot välillä $-1 \leq x \leq 1$.	1
Lausekkeen derivaatta on $2x - 4x^3$ TAI idea derivoimista.	1
Derivaatan nollakohdat $x = 0$ / $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.	1+1
Kulkukaavio tai tapaustarkastelu (jos rajoitus $-1 \leq x \leq 1$ puuttuu, tästä max1)	2
\Rightarrow suurin etäisyys on $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.	2
Myös väli $-1 < x < 1$ käy	
TAI	
Etäisyys on suurin, kun käyrän $x^4 + y^2 = 1$ normaali kulkee origon kautta.	1
Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^4}$	1
derivaatta on $f'(x) = -\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$, joka on tangentin kulmakerroin.	2
Kohta $x = 0$ on yksi ratkaisu, jolloin etäisyys on 1.	1
Maksimikohdassa normaalin kulmakerroin on $\frac{\sqrt{1-x^4}}{x}$,	2
joten saadaan yhtälö $-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{x} = -1$.	2
Tällöin $2x^2 = 1$, joten $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.	1
\Rightarrow suurin etäisyys on $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.	2
Rivistä 4 alkaen voidaan laskea y :n avulla	
Vastaus vain likiarvona.	-2
Vastaus $\approx 1,12$ TAI $\approx 1,1$ kokeilemalla.	2
HUOM: ratkaisussa voi käyttää myös muuttujanvaihtoa ($u = x^2$ ja $v = y^2$).	

Kuva 1: Lopulliset hyvän vastauksen piirteet, YTL 2020. Lähde: YLE abitreinit

$$f(x) = x^2 + 1 - x^4, \quad \text{jolloin}$$

$$f'(x) = 2x - 4x^3.$$

Derivaatan nollakohdat ovat

$$2x - 4x^3 = 0$$

$$\iff x(2 - 4x^2) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{tai} \quad 2 - 4x^2 = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Koska funktio f on polynomifunktiona jatkuva suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 1$ ja derivoituva avoimella välillä $-1 < x < 1$, saa se tällöin suurimman arvonsa joko derivaatan nollakohdissa tai välin $-1 \leq x \leq 1$ päätepisteissä.

$$f(-1) = 1$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{4}$$

$$f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{4}$$

$$f(1) = 1$$

Huomataan, että arvoilla $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ on sama etäisyys, jolloin pisteen (x, y) suurin etäisyys origosta on siis

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

V: Pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta on $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Mallivastaus, tapa 2: Tarkastellaan käyrän reunaa. Huomataan, että halutussa käyrän $x^4 + y^2 = 1$ pisteessä (x, y) olevan tangentin normaalin tulee kulkea origon kautta. Selvästi nähdään, että käyrällä $x^4 + y^2 = 1$ on ainakin tangentit $y = \pm 1$, joiden normaali on suora $x = 0$, ja etäisyys on tällöin siis 1. Lisäksi käyrällä $x^4 + y^2 = 1$ on tangentit $x = \pm 1$, joiden normaali on suora $y = 0$ ja etäisyys on tällöin myös 1.

Tutkitaan seuraavaksi käyrän positiivista osaa $f(x) = \sqrt{1 - x^4}$, sillä käyrä on symmetrinen x -akselin suhteen. Funktion $f(x)$ derivaatta on

$$f'(x) = -\frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}},$$

joka on siis tangentin kulmakerroin. Nyt sellaisen suoran kulmakerroin, joka kulkee origon ja jonkin käyrän $f(x) = \sqrt{1 - x^4}$ pisteen $(x, f(x))$ kautta, on

$$\begin{aligned} k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ k &= \frac{f(x) - 0}{x - 0} \\ k &= \frac{\sqrt{1 - x^4}}{x}. \end{aligned}$$

Koska tämän suoran tulee olla tangentin normaali, niin

$$\begin{aligned} k \cdot f'(x) &= -1 \\ \frac{\sqrt{1 - x^4}}{x} \cdot \left(-\frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}}\right) &= -1. \end{aligned}$$

Tällöin $2x^2 = 1$, joten $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Suurin etäisyys on siis $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (katso tapa 1).

4.3.2 Kevät 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 5 (B-osa). Rantatontti

Tehtävänanto: Matti omistaa järven rannalla suorakulmaisen kolmion muotoisen metsäpalstan, jonka kateettien pituudet ovat 150 m ja 120 m. Pidempi kateetti on suoralla rantaviivalla. Matti myy palstastaan Marjalle pinta-alaltaan mahdollisimman suuren suorakulmion muotoisen rantatontin, jonka kaksi sivua ovat metsäpalstan kateeteilla. Mitkä ovat Marjan ostaman rantatontin sivujen pituudet?

Olkoort suorakulmion sivut x ja y , joista y on rantaviivaa myöten oleva sivu TAI piirretty tilanteesta kuva (kolmio ja suorakaide hahmoteltu).	1
Komplementaariset janat, pituudet $120 - x$ TAI $150 - y$	1
Yhdenmuotoisuuden nojalla päätelty, että	1
$\frac{y}{150} = \frac{120-x}{120}$ TAI $\frac{150-y}{150} = \frac{x}{120}$ (tms)	2
$\Rightarrow x = \frac{150-y}{150} \cdot 120$.	1
Pinta-ala on $A(y) = \frac{150-y}{150} \cdot 120 \cdot y = \frac{120(150-y)y}{150}$.	2
Derivaatta on $A'(y) = \frac{120}{150}(150 - 2y)$.	1
$A'(y) = 0$, kun $y = 75$, ja perustelu, että tämä on maksimi.	1
Tällöin $x = 60$.	1
• Kysytyt sivujen pituudet ovat siis 75 (m) ja 60 (m).	1
TAI	
Olkoort suorakulmion sivut x ja y , joista y on rantaviivaa myöten oleva sivu TAI piirretty tilanteesta kuva (kolmio ja suorakaide hahmoteltu).	1
Oikea kuva on oikeassa mittakaavassa.	(1)
Kuvaan merkitty kriittisten pisteiden koordinaatit (tms.), esim. suorakulmainen kolmio, jonka kärkinä ovat origo, $(120, 0)$ ja $(0, 150)$.	1
Hypotenuusasoran yhtälö on $y = -\frac{150}{120}(x - 120) = -\frac{5}{4}x + 150$.	2
Kärjen koordinaatit ovat siis $(x, -\frac{5}{4}x + 150)$.	1
Rivit 6–10 kuten yllä.	6
Maksimoinnin voi tehdä ohjelmistolla, kun lauseke on löytynyt.	
Maksimointipisteet (4 p.) saa (myös ohjelmistolla), jos $y \mapsto A(y)$ on alaspäin aukeava paraabeli, joka antaa mielekkään ratkaisun.	
Likiarvot ok, liiallinen pyöristys yleisohjeen mukaisesti.	
Graafinen ratkaisu kokeilemalla TAI taulukointi.	+0

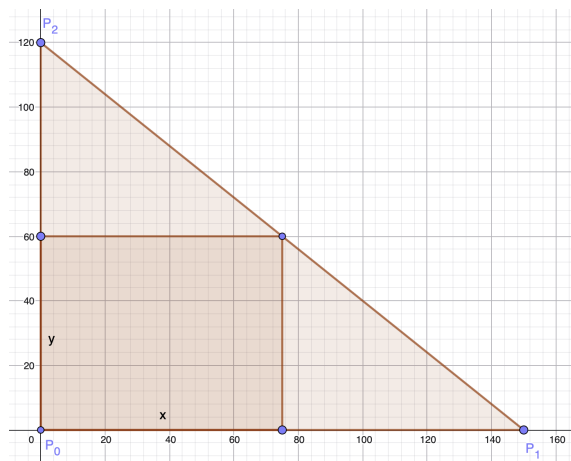
Kuva 2: Lopulliset hyvän vastauksen piirteet, YTL 2021. Lähde: YLE abitreinit

Mallivastaus: Piirretään havainnollistava kuva 3 tilanteesta. Olkoon suorakulmion sivujen pituudet x ja y , joista sivu x on rantaviivaa vasten (x -akseli) kuvan 3 mukaisesti. Tällöin kolmion kärkipisteet ovat $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (150, 0)$ ja $P_2 = (0, 120)$. Nyt pisteiden P_1 ja P_2 kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\begin{aligned} k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{120 - 0}{0 - 150} \\ &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Kulmakertoimen avulla saadaan suoran yhtälö

$$\begin{aligned} y - y_1 &= k(x - x_1) \\ \iff y - 0 &= -\frac{4}{5}(x - 150) \\ \iff y &= -\frac{4}{5}x + 120. \end{aligned}$$



Kuva 3: Havainnollistus metsäpalstasta ja mahdollisesta rantatontista

Nyt suorakulmion pinta-ala on $A = yx$, johon voidaan muuttujan y paikalle sijoittaa $-\frac{4}{5}x + 120$ ja pinta-alaksi saadaan funktio

$$A(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 120x. \quad (1)$$

Derivoidaan funktio (1) ja etsitään sen nollakohdat:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ \iff -\frac{8}{5}x + 120 &= 0 \\ \iff x &= 75. \end{aligned}$$

Koska funktio f on polynomifunktiona jatkuva suljetulla välillä $0 \leq x \leq 150$ ja derivoituva avoimella välillä $0 < x < 150$, saa se tällöin suurimman arvonsa joko derivaatan nollakohdissa tai välin $0 \leq x \leq 150$ päätepisteissä.

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(75) &= 4500 \\ A(150) &= 0 \end{aligned}$$

Huomataan siis, että $x = 75$ on maksimi, jolloin suorakulmion korkeus on

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{5} \cdot 75 + 120 \\ y &= 60. \end{aligned}$$

V: Suorakulmion sivujen pituudet ovat 75 m ja 60 m.

Huomio: Tehtävän voi ratkaista myös kolmioiden yhdenmuotoisuutta hyödyntäen (ks. kuva 2). Olkoon tilanne sama kuin edellä (kuva 3). Suorakulmion sivut ovat yhdensuuntaisia kolmion kateettien kanssa, joten ne rajaavat kolmiosta kaksi pienempää yhdenmuotoista kolmiota. Jos verrataan esimerkiksi alempaa pikkukolmiota isoon kolmioon, saadaan yhdenmuotoisuuden nojalla suhde

$$\frac{y}{120} = \frac{150 - x}{150},$$

josta voidaan ratkaista y ja saadaan $y = -\frac{4}{5}x + 120$. Tästä ratkaisu jatkuisi kuten yllä olevassa mallivastauksessa.

4.3.3 Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 8 (B-osa). Funktion väheneminen

Tehtävänanto: Selvitä derivaatan avulla, missä välin $-1 \leq x \leq 3$ kohdassa funktio $f(x) = 2x^2 - x + 5$ vähenee nopeimmin.

$f'(x) = 4x - 1$ (2 p. per kerroin)	4
perustelu derivaatan minimille	2
\Rightarrow derivaatta saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -1$.	2
∇ Funktio vähenee nopeimmin, kun derivaatta on mahdollisimman pieni.	2
\Rightarrow Funktio vähenee nopeimmin kohdassa $x = -1$.	2
Piirretty funktion kuvaaja ja päätelty siitä tulos.	max 3
Piirretty derivaatan kuvaaja, josta päätelty rivit 2 ja 3.	max 12

Kuva 4: Lopulliset hyvän vastauksen piirteet, YTL 2020. Lähde: YLE abitreeneit

Mallivastaus: Funktio f vähenee nopeimmin silloin, kun sen derivaattafunktio saa mahdollisimman pieniä (negatiivisia) arvoja. Funktion f derivaattafunktio on

$$f'(x) = 4x - 1,$$

joka on nouseva suora. Derivaattafunktiolla on yksi nollakohta $x = \frac{1}{4}$, jolloin se siis saa negatiivisia arvoja, kun $x < \frac{1}{4}$, ja positiivisia, kun $x > \frac{1}{4}$. Tällöin se saa pienimmän arvonsa välin $[-1, 3]$ päätepisteessä $x = -1$, jolloin myös funktio f vähenee nopeimmin.

V: Funktio f vähenee nopeimmin välin $-1 \leq x \leq 3$ kohdassa $x = -1$.

4.3.4 Syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 13 (B-osa). Suurin pinta-ala

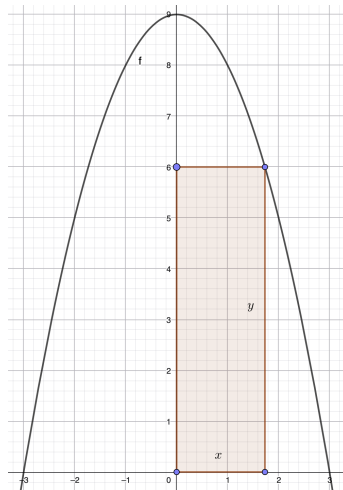
Tehtävänanto: Suorakulmion alareuna on positiivisella x -akselilla, vasen pystyreuna positiivisella y -akselilla ja oikea yläkulma paraabelilla $y = -x^2 + 9$. Määritä derivaatan avulla suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

Kuva, jossa on paraabeli JA suorakulmio oikein piirrettyinä tai suorakulmion kärkipisteet.	1 p.
Käy ilmi, että suorakulmion korkeus on $9 - x^2$.	(1 p.)
Suorakulmion pinta-ala on $x \cdot (9 - x^2)$	2 p.
ja avattu sulut.	(1 p.)
Laskettu pinta-alafunktion derivaatta ($f'(x) = 9 - 3x^2$).	2 p.
Laskettu derivaatan nollakohdat ($x = \pm\sqrt{3}$),	1 p.
joista vain positiivinen kelpaa.	1 p.
Kulkukaavio TAI rajoitettu tarkastelemaan funktiota f suljetulla välillä $[0, 3]$ ja aloitetaan laskemaan funktion arvoja päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa (1 p.) ja laskettu kaikki nämä arvot.	2 p.
Siispä suurin pinta-ala on täsmälleen $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}(9 - 3) = 6\sqrt{3}$.	1 p.

Tehtävän erillisohjeet

Pinta-alan lausekkeesta riviltä 3 puuttuu sulut ja loppu väärin (1+1+1).	max 3 p.
Ääriarvo etsitty pelkästään laskimella ilman derivaattaa (1+1+2+1+0+0+0+0).	max 5 p.
Derivaatan nollakohdat likiarvoina (1+1+2+1+2+0+1+2+0).	max 10 p.
Derivoitu tehtävänannon funktio $-x^2 + 9$.	+0 p.
Käsitteet suorakulmio ja suorakulmainen kolmio menneet sekaisin.	+0 p.
$f(x) = x(9 + x^2)$: 0 + 1 + 2 + 1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0	max 6 p.

Kuva 5: Lopulliset hyvän vastauksen piirteet, YTL 2022. Lähde: YLE abitreenit



Kuva 6: Havainnollistava kuva tilanteesta

Mallivastaus: Piirretään tilanteesta kuva (6). Merkitään suorakulmion leveyttä muuttujalla x , jolloin suorakulmion korkeus on paraabelin $y = -x^2 + 9$ arvo pisteessä x . Suorakulmion pinta-alaa kuvaa tällöin funktio

$$\begin{aligned} f(x) &= x(-x^2 + 9) \\ \iff f(x) &= -x^3 + 9x. \end{aligned}$$

Huomataan, että paraabeli $y = -x^2 + 9$ leikkaa y -akselin, kun $x = 0$ ja (positiivisen) x -akselin kun $x = 3$, joten suorakulmion pinta-alan funktion rajoitteena on ehto $0 \leq x \leq 3$. Derivoidaan funktio f ja etsitään sen nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \iff -3x^2 + 9 &= 0 \\ \iff x &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Otetaan vain positiivinen arvo huomioon. Koska funktio f on polynomifunktiona jatkuva suljetulla välillä $0 \leq x \leq 3$ ja derivoituva avoimella välillä $0 < x < 3$, saa se tällöin suurimman arvonsa joko derivaatan nollakohdissa tai välin $0 \leq x \leq 3$ päätepisteissä.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(\sqrt{3}) &= 6\sqrt{3} \\ f(3) &= 0. \end{aligned}$$

V: Suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on $6\sqrt{3}$.

5 Tulokset

5.1 Kevät 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 4. Suurin etäisyys

Tässä tehtävässä tuli määrittää pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta, kun piste toteuttaa epäyhtälön $x^4 + y^2 \leq 1$. Ideana on siis ollut muodostaa etäisyydelle funktio, derivoida se, ja selvittää funktion suurin arvo derivaatan nollakohtien ja muuttujan x määrittelyvälin avulla. Tehtävänannossa ei mainittu, missä muodossa vastaus tulee antaa, mutta Ylioppilastutkintolautakunnan hyvän vastauksen piirteissä (ks. kuva 1) on mainittu kahden pisteen vähennys, jos vastaus on annettu vain likiarvona. Ensimmäisen pisteen on saanut, jos on onnistunut ilmaisemaan jotenkin pisteen (x, y) etäisyyden origosta, toisen ja kolmannen, jos on ymmärtänyt tarkastella käyrän reunaa, ja neljännen, jos on osannut muodostaa etäisyyden funktion yhden muuttujan avulla. Loput pisteistä tulivat muuttujan x rajojen huomioinnista (1 piste), oikein derivoidusta funktiosta tai derivoinnin ideasta (1 piste) sekä derivaatan nollakohdista, funktion kulkukaaviosta ja oikeasta vastauksesta (pisteet 7-12) (ks. kuva 1). Tietenkään kaikkien kohtien pisteytys ei vaadi sitä, että kaikki sitä edeltäneet vaiheet olisivat täysin oikein, mutta luonnollisesti esimerkiksi oikean pituuden funktion keksiminen vaikuttaa siihen, pääseekö lopulta oikeaan vastaukseen.

Tässä tarkasteltujen sadan opiskelijan pistejakauma on kuvattuna taulukossa 1. Lisäksi kuvassa 7 on vertailtu tarkasteltujen sadan opiskelijan pisteiden jakautumista prosenttiosuuksina kaikkien kokelaiden ($N = 11\,693$) pisteprosentteihin. Kuten taulukosta 1 näkee, kukaan aineiston sadasta opiskelijasta ei saanut täysiä pisteitä, ja vain kaksi opiskelijaa sai 11/12 pistettä. Pisteosuuksien prosentuaalinen jakauma (kuva 7) on ollut hyvin samankaltainen myös kaikkia kokelaita tarkasteltaessa, mikä kertoo mahdollisesti siitä, että tässä tehtävässä oikean funktion muodostaminen on ollut suurelle osalle opiskelijoista erityisen haastavaa. Toki kyseessä on myös A-osan tehtävä, jolloin se on ollut kaikille opiskelijoille pakollinen, mikä varmasti osaltaan vaikuttaa pistejakaumaan.

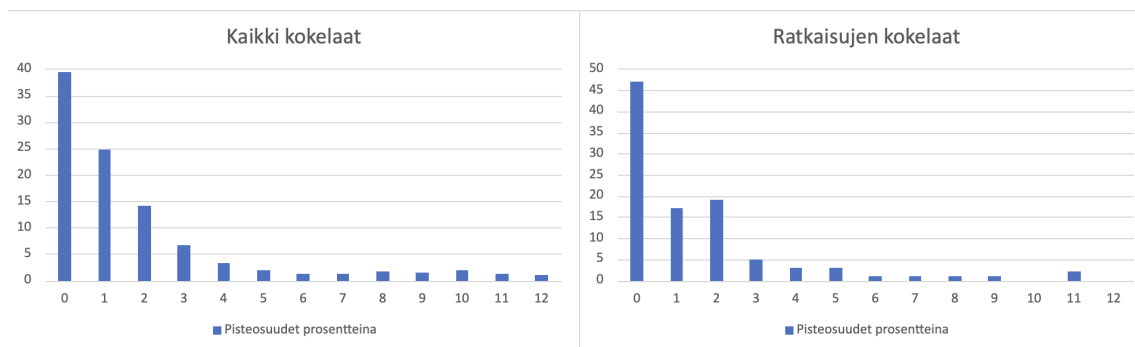
Alla olevan taulukon 2 virhekategorioiden on hieman päällekkäisyyksiä. Jos halutaan erottaa kukin opiskelija tarkalleen yhteen kategoriaan, niin selvästi toisistaan eriyviä ovat ne

- 59 opiskelijaa, jotka eivät derivoineet mitään,
- 17 opiskelijaa, jotka derivoivat (epä)yhtälöä,
- 10 opiskelijaa, joilla meni jokin oikean funktion muodostamisessa ja/tai derivoinnissa pieleen, mutta eivät käyrää kuitenkaan derivoineet,
- 6 opiskelijaa, joilla oli oikea idea tai lähes oikea vastaus, eivätkä he kuulu mihinkään edellä mainituista kategorioista,
- sekä loput 8 opiskelijaa, joilla oli (lähes) tyhjä vastaus.

Vaikka osa opiskelijoista osasi sinänsä derivoida oikein, monet eivät tuntuneet tietävän, mitä derivoivat. Tällöin heillä luultavasti on kyllä hyvät proseduraaliset

Pistemäärä	Esiintyvyys (lkm)
0	47
1	17
2	19
3	5
4	3
5	3
6	1
7	1
8	1
9	1
10	0
11	2
12	0

Taulukko 1: Tarkasteltujen ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet (N=100).



Kuva 7: Kaikkien kokelaiden pisteosuudet prosentteina (vas.) sekä tarkasteltujen ratkaisujen kokelaiden pisteosuudet prosentteina (oik.)

taidot, mutta heikompi konseptuaalinen ymmärrys tilanteesta. Tästä esimerkkinä ovat ne 17 opiskelijaa (tai 16, jos opiskelijaa 62 (kuva 10) ei lasketa, mutta tähän palataan myöhemmin), jotka yrittivät derivoida alkuperäisen käyrän yhtälöä halutessaan selvittää suurimman etäisyyden. Tällöin opiskelijoilla on luultavasti ollut jokin käsitys siitä, että derivoimalla voi löytää suurimpia ja pienimpiä arvoja, mutta ei ole tiedetty mihin yhtälöön sitä tässä kohtaa tulisi soveltaa ja mitä arvoa yritetäänkään nyt maksimoida. Tämä on linjassa Hegarty ym. (1995) tutkimuksen kanssa, jonka mukaan heikommilla ongelmanratkaisijoilla on taipumusta turvautua pinnallisiin keinoihin, joissa ratkaisija vain poimii tehtävänannossa annetut arvot (tai tässä tapauksessa yhtälön) ja avainsanat, ja perustaa ratkaisustrategiansa niiden varaan. Toki mekaanisiakin derivaattaan liittyviä virheitä esiintyi, kuten käyrän derivointi tyyllillä $f'(x) = 4x^3 + 2y$.

Lisäksi virheitä tehtiin paljon myös muilla osa-alueilla kuin derivaatassa. Esimerkkinä näistä ovat virheet (epä)yhtälöiden pyörittelyssä tai Olivierinkin (1989) mainitsemat lineaariseen ekstrapolaatioon liittyvät virheet, kuten $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$. Peruslaskusäännöt ja erityisesti epäyhtälömerkit osoittautuivat hankalaksi konse-

Virhe	Esiintyvyys (lkm)
Ei derivoinut	59
Derivoi (epä)yhtälöä	17
Oma väärä funktio derivoitu oikein	14
Oma väärä funktio derivoitu väärin	8
Oikea funktio derivoitu väärin	5
Lineaarinen ekstrapolaatio	27
Muu virhe yhtälönratkaisussa	33

Taulukko 2: Tehtävän ratkaisussa esiintyneet oleelliset virheet ja niiden lukumäärät.

Ratkaistaan $x^4 + y^2 \leq 1$

$$(x^2 + y)^2 \leq 1$$

$$x^2 + y = \pm 1$$

$$y = \pm 1 - x^2$$

Pisteen $(x, 1 - x^2)$ tai $(x, -1 - x^2)$ etäisyys origosta:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + ((1-x^2)-0)^2}$$

$$= x + (1 - x^2) = -x^2 + x + 1$$

JÄ

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + ((-1-x^2)-0)^2}$$

$$= x + (-1 - x^2) = -x^2 + x - 1$$

Derivoidaan, jotta voidaan ratkaista suurin mahdollinen etäisyys:

$$D(-x^2 + x + 1) = -2x + 1 \quad \text{ja} \quad D(-x^2 + x - 1) = -2x + 1$$

Huomataan, että derivaatat ovat samat, joten jatketaan vain toisella:

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

ile://utu.fi/taltio/Matematiikan_YTL-data/DATA/2020KM_4.html

5/21/25, 10:52 AM

SA:

$$-2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Tämä on maksimikohta.

Suurin mahdollinen etäisyys:

$$\left| -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 \right| = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad \left| -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 \right| = 1$$

Näistä arvo 1 on suurempi, joten suurin mahdollinen etäisyys on 1.

Kuva 8: Opiskelijan 16 vastaus. Ratkaisu kuului kategorioihin ”oma väärä funktio derivoitu oikein”, ”lineaarinen ekstrapolaatio” ja ”oikea idea”.

tiksi. Epäyhtälömerkkiä käsiteltiin usein kuin tavallista yhtäsuuruusmerkkiä; se ei vaihtanut suuntaa, vaikka epäyhtälön kertoi negatiivisella luvulla, ja jos yhtälöstä ratkaistiin y^2 , niin monesti unohdettiin \pm vaihtoehdot tai mitä epäyhtälömerkille tällöin tapahtuu (esimerkiksi $y^2 \leq 1 - x^4 \iff y \leq \pm\sqrt{1 - x^4}$ esiintyi vastauksissa silloin tällöin). Nämä ovat Ojosen (2015) mukaan esimerkkejä mielivaltaisista virheistä, joihin liittyy käsitteellisen ymmärryksen puute.

Opiskelijan 16 vastauksesta (kuva 8) on nähtävissä, että hänellä on ollut oikea idea siitä huolimatta, että toteutuksessa on mennyt paljon pieleen (lineaarinen

Muokataan epäyhtälöä ja muodostetaan funktio
 $y^2 = 1 - x^4$
 $y = \sqrt{1 - x^4}$ kun $x \leq 1$
 Derivoidaan funktio
 $f'(x) = D(1 - x^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x^3) = -2x^3(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$
 Funktio saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa. Ratkaistaan nollakohdat:
 $f'(x) = 0$
 $-2x^3(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = 0$
 $-2x^3 = 0$ tai $(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = 0$
 $x = 0$ tai $-\sqrt{1 - x^4} = 0$
 $-(1 - x^4)(1 - x^4) = 0$
 $-1 + x^4 = 0$ tai $1 - x^4 = 0$
 $x = \sqrt[4]{1} = 1$ tai $x = \sqrt[4]{1} = 1$
 Funktio saa suurimman arvonsa kun $x=0$ tai $x=1$.
 Ratkaistaan y -koordinaatit
 $f(0) = \sqrt{1 - 0^4} = 1$
 $f(1) = \sqrt{1 - 1^4} = 0$
 Suora saa suurimman mahdollisen pituuden, kun piste on $(0,1)$ ja $(1,0)$.
 Lasketaan suoran pituus
 $d_1 = \sqrt{(0 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = 1$
 $d_2 = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 1$
 Vast. pisteen (x,y) suurin mahdollinen etäisyys origosta on 1.

Kuva 9: Opiskelijan 45 vastaus. Ratkaisu kuului kategorioihin ”derivoi (epä)yhtälöä”, ”oma väärä funktio derivoitu oikein” ja ”muu virhe yhtälönratkaisussa”.

$x^4 + y^2 \leq 1$
 suurin etäisyys origosta kyseiseen funktioon muodostuu funktion derivaatan ja origosta lähtevän suoran välille
 $y^2 = 1 - x^4$
 $y = \sqrt{1 - x^4}$ nimetään funktio
 $f(x) = \sqrt{1 - x^4}$
 derivoidaan
 $f'(x) = \frac{4x^3}{2}(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}x^3$
 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1}}x = x$
 origosta lähtevä suora on kohtisuorassa tätä kohtaan, joten sen funktion kulmakerroin on
 $k \cdot 1 = -1$
 $k = -1$
 $y - 0 = -1(x - 0)$
 $y = -x$ suora leikkaa funktion kohdassa
 $x = 1$ ja $y = -3$
 etäisyys pisteestä saadaan kaavalla
 $\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}$

file:///utu.fi/talio/Matematiikan_YTL-data/DATA/2020KM_4.html

5/21/25, 10:52 AM

SAS Output

etäisyys on siis
 = 2

Kuva 10: Opiskelijan 62 vastaus. Ratkaisu kuului kategorioihin ”derivoi (epä)yhtälöä”, ”oikea funktio derivoitu väärin”, ”lineaarinen ekstrapolaatio” ja ”muu virhe yhtälönratkaisussa”.

ekstrapolaatio useammassa eri vaiheessa, peruslaskutoimituksiin liittyvät virheet). Toisin kuin monissa muissa vastauksissa, siinä on nähtävissä oikea idea halutusta funktiosta, ja että juuri pituuden funktio on se, jota tulisi derivoida ja jonka maksimi-arvoja selvitetään. Vastaavanlaisia ratkaisuja, joissa oli nähtävissä idea oikeasta funktiosta, oli yhteensä 15, ja lähes oikeita ratkaisuja oli 5.

Monet taulukon 2 virhekategoriosta ovat osittain päällekkäisiä. Esimerkiksi jokainen opiskelija, joka derivoi (epä)yhtälöä jollain tapaa, kuuluu automaattisesti myös joko ryhmään ”oma väärä funktio derivoitu oikein” tai ”oma väärä funktio derivoitu väärin” (lukuun ottamatta opiskelijaa 62, tästä myöhemmin lisää). Virhekatgorioita olisi voinut olla myös enemmän, sillä yhteen kategoriaan sisältyy laajasti erilaisia virheitä. Esimerkiksi epäyhtälön derivoimiseksi on laskettu kaikki sellaiset vastaukset, joissa yritettiin derivoida käyriä $x^4 + y^2 - 1$ tai $f(x) = \sqrt{1 - x^4}$. Monet epäyhtälöä oikein tai väärin derivoineista kuuluvat myös ryhmään ”lineaarinen ekstrapolaatio”, jos he sievensivät esimerkiksi $\sqrt{1 - x^4} = 1 - x^2$ ja derivoivat sitten funktiota $f(x) = 1 - x^2$. Esimerkiksi opiskelija 45 (kuva 9) kuuluu virhekatgorioihin ”derivoi (epä)yhtälöä”, ”oma väärä funktio derivoitu oikein”, ”muu virhe yhtälönratkaisussa”.

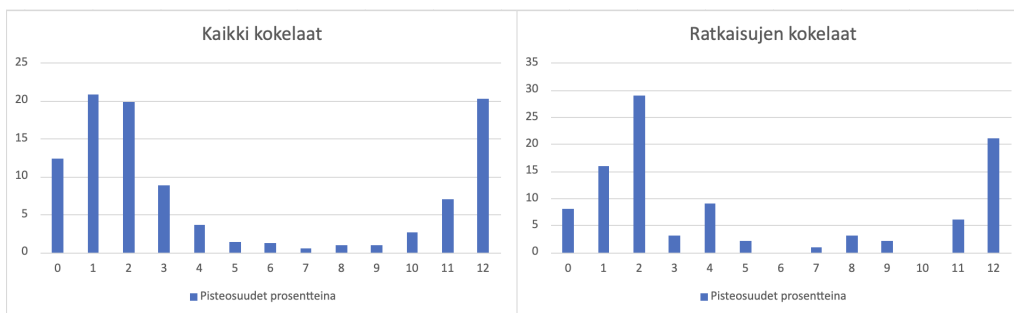
Teoriassa funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^4}$ derivaattaa olisi voinut hyödyntää (katso malliratkaisu, tapa 2), mutta ei siten kuin opiskelijan 45 vastauksessa (kuva 9). Toinen tapa ratkaista olisi ollut se, että huomataan pisteen (x, y) etäisyyden origosta olevan suurin, kun käyrän $x^4 + y^2 = 1$ normaali kulkee origon kautta. Tätä tapaa ei kuitenkaan juuri kukaan yrittänyt käyttää, vaan suurin osa käyrää derivoineista oli luultavasti derivoinut vain jotain. Ainoastaan opiskelijan 62 vastauksessa (kuva 10) oli viitteitä siihen, että hän mahdollisesti yritti kyseistä tapaa, mutta epäonnistui siinä. Aluksi hän derivoi melkein oikein, mutta muuten yhtälönratkaisussa on mennyt paljon pieleen: opiskelijalla näkyy Olivierin (1989) mainitsema lineaarinen ekstrapolaatio sekä Ojosen (2015) mainitsema virheellinen sieventäminen ”loppuun asti”. Lopussa ilmoitetun suoran $y = -x$ ja käyrän $y = \sqrt{1 - x^4}$ leikkauspiste $(1, -3)$ ei ensinnäkään ole kyseisellä suoralla tai käyrällä ollenkaan, minkä lisäksi tämän ”leikkauspisteen” etäisyydeksi origosta on laskettu 2, mikä ei myöskään pidä paikkaansa.

5.2 Kevät 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Rantatonntti

Tässä tehtävässä tuli määrittää suurimman mahdollisen suorakulmion sivujen pituudet, kun sitä rajaa suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 120 ja 150 ja suorakulmion kaksi sivua ovat näillä kateeteilla. Ideana on ollut muodostaa suorakulmion pinta-alan funktio, derivoida se ja etsiä derivaatan nollakohtien sekä muuttujan rajojen avulla suurimman mahdollisen suorakulmion sivujen pituudet.

Tässä tarkasteltujen sadan opiskelijan pisteiden esiintyvyyksiä on kuvattuna taulukossa 3. Lisäksi kuvassa 11 on vertailtu tarkasteltujen sadan opiskelijan pisteiden jakautumista prosentiosuuksina kaikkien kokelaiden ($N = 12\,485$) pisteprosentteihin.

Taulukosta 3 huomataan, että suurin osa opiskelijoista on saanut joko 1-2 pistettä tai 12 pistettä ja kuvasta 11 nähdään, että kaikkien tehtävän tehneiden opiskelijoiden pistejakauma on hyvin samantyyppinen. Tämä todennäköisesti johtuu siitä,



Kuva 11: Kaikkien kokelaiden pisteosuudet prosentteina (vas.) sekä tarkasteltujen ratkaisujen kokelaiden pisteosuudet prosentteina (oik.).

että YTL:n hyvän vastauksen piirteiden mukaan (kuva 2) opiskelijan on mahdollista saada 2 pistettä, jos osaa esimerkiksi piirtää tilanteesta kuvan (kolmio ja suorakulmio hahmoteltu), merkitä kuvaan suorakulmion sivujen pituudet (esim. y ja x) ja kolmion kärjet on aseteltu oikein mittakaavaan (kärkipisteinä esim. origo, $(0, 150)$ ja $(120, 0)$). Jos lisäksi osaa muodostaa oikean funktion pinta-alalle, niin tämän jälkeen on suhteellisesti helpompaa saada täydet 12 pistettä. Syynä lienee se, että monille opiskelijoille funktion ääriarvojen selvittäminen on vastauksien perusteella tutumpaa, mutta itse funktion keksiminen on osoittautunut muissakin tämän tutkielman tehtävissä haastavaksi.

Pistemäärä	Esiintyvyys (lkm)
0	8
1	16
2	29
3	3
4	9
5	2
6	0
7	1
8	3
9	2
10	0
11	6
12	21

Taulukko 3: Tarkasteltujen ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet ($N=100$).

Taulukossa 4 on listattuna tehtävässä esiintyneet derivaattaan ja funktionmuodostukseen liittyneet virheet. Muut tehtävissä esiintyneet virheet olivat hyvin kirjavia ja niistä nostetaan muutamia erillisiä esimerkkejä esiin myöhemmin. Niiden taulukointi oli kuitenkin haastavaa, sillä oli vaikea löytää yhtenäisiä kategorioita, jotka kuitenkin erottelisivat vastauksia toisistaan. Esimerkiksi ”puutteellinen perustelu” voi tarkoittaa käytännössä sitä, että opiskelija on muuten ratkaissut tehtävän oikein, mutta unohtanut tarkastella funktion kulkua tai välin päätepisteitä, ja vain

Virhe	Esiintyvyys (lkm)
Ei derivoinut	60
Oma väärä funktio derivoitu oikein	9
Oma väärä funktio derivoitu väärin	1
Oikea funktio derivoitu väärin	0
Virheellinen pinta-alan funktio	26
Ei funktiota pinta-alalle	43

Taulukko 4: Tehtävän ratkaisussa esiintyneet derivaattaan ja funktion muodostamiseen liittyneet virheet.

ilmoittanut derivaatan nollakohdan oikeaksi ratkaisuksi. Toisaalta se voi myös tarkoittaa sitä, että opiskelija on ilmoittanut maksimiarvon löytyvän, kun suorakulmion sivut ovat puolet kateettien pituudesta (mikä on totta), ja laskenut tästä pinta-alan ilman mitään perusteluja miksi näin on.

Jos halutaan erottaa kukin opiskelija tarkalleen yhteen kategoriaan, niin selvästi toisistaan eriäviä ovat ne

- 60 opiskelijaa, jotka eivät derivoineet mitään
- 10 opiskelijaa, jotka derivoivat väärää funktiota (oikein tai väärin)
- kahdeksan opiskelijaa, joilla oli lähes oikea vastaus, eivätkä he kuulu kumpaankaan yllä olevista kategorioista
- 21 opiskelijaa, jotka saivat täydet pisteet
- sekä yksi opiskelija, jolla oli täysin tyhjä vastaus.

26 opiskelijalla oli selkeästi jokin virhe funktiossa. Osa oli yrittänyt muodostaa pinta-alalle funktiota, mutta heillä oli kaksi muuttujaa (esim. $A = xy$ tai $A = (150 - x)(120 - y)$), kun taas osalla opiskelijoista oli täysin virheellinen funktio tai tapa funktion muodostamiseen. Esimerkiksi opiskelija 60 (kuva 12) yritti ratkaista pinta-alan funktiosta toisen muuttujan piirin avulla asettamalla piirin ja pinta-alan yhtä suuriksi. Tämän jälkeen hän derivoi saamansa funktion laskimella ja kertoi, että funktio saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Hänen vastauksensa on yksi esimerkki siitä, miten oikean funktion muodostaminen osoittautui monelle suuremmaksi haasteeksi, kuin itse derivointi tai idea ääriarvojen löytämisestä. Lisäksi kolmella opiskelijalla olisi ollut oikea funktio, mutta niistä joko puuttuivat sulut tai ne avattiin väärin, jolloin derivoitavasta funktiostakin tuli väärä. Tästä esimerkkinä on opiskelija 19 (kuva 13). Hänen vastauksestaan näkee, että idea on ollut täysin oikea, mutta oikeaan vastaukseen ei päästy (todennäköisesti) huolimattomuusvirheestä johtuen.

43 opiskelijalla ei ollut minkäänlaista funktiota pinta-alalle. Monet heistä olivat kuitenkin tehneet jotain olettamuksia ilman perusteluja, joiden avulla osa sai oikeita vastauksia. Esimerkiksi 19 opiskelijaa ilmoitti, että suurimman suorakulmion kärjet löytyvät kateettien ja/tai hypotenuusan puolesta välistä perustelematta väitettään

```

Tontin pinta-ala
A=(150-x)(120-y)
Rantatontin piiri : 2x+2y

solve((150-x)·(120-y)=2·x+2·y,y) → y= $\frac{2·(61·x-9000)}{x-152}$ 

f(x):= $\frac{2·(61·x-9000)}{x-152}$  → Valmis

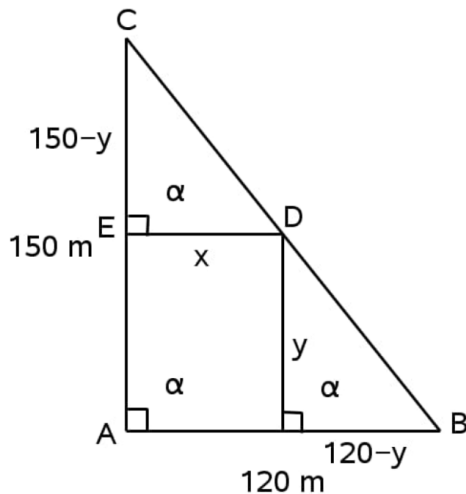
Funktio saa suurimman arvonsa derivaatan nollassa tai välin päätepisteissä.

g(x):= $\frac{d}{dx}(f(x))$  → Valmis

g(x)=0
solve( $\frac{-544}{(x-152)^2}=0,x$ ) → false

```

Kuva 12: Osa opiskelijan 60 vastauksesta. Ratkaisussa on asetettu suorakulmion piiri ja pinta-ala yhtä suuriksi (joista toinen on väärin, sillä sivujen pituuksina on nyt käytetty sekä x ja y että $150 - x$ ja $120 - y$) ja pyritty näin muodostamaan derivoitava funktio. Ratkaisu kuului kategorioihin ”oma väärä funktio derivoitu oikein” ja ”virheellinen pinta-alan funktio”.



```

Kolmiot ABC ja EDC ovat yhdenmuotoiset, koska niillä on yhteinen kulma C ja molemmilla on suorat kulmat (kk-lause).
solve( $\frac{120}{x} = \frac{150}{150-y}$ ,y) → y= $150 - \frac{5·x}{4}$ 
Suorakulmion muotoisen rantatontin pinta-ala on A=x·y
ala(x)=x· $150 - \frac{5·x}{4}$  → Valmis
Funktio saavuttaa suurimman arvonsa derivaatan nollassa.
dala(x)= $\frac{d}{dx}(ala(x))$  → Valmis dala(x) =  $\frac{595}{4}$ 
fMax(ala(x),x)|x<120 → x=120 ⚠

```

Kuva 13: Opiskelijan 19 vastaus. Pinta-alan funktio olisi ollut oikea, jos sulut olisi muistettu merkitä oikein. Ratkaisu kuului kategorioihin ”oma väärä funktio derivoitu oikein”, ”virheellinen pinta-alan funktio” ja ”oikea idea”.

Metsäpalstan hypotenuusa saadaan ratkaistua Pythagoraan lauseen avulla $a^2 + b^2 = c^2$
 $c = \sqrt{150^2 + 120^2} = \sqrt{36900}$

metsäpalstan pinta-ala A on $A = \frac{ab}{2} = \frac{150 \cdot 120}{2} = 9000$

Marjan tontin pinta-ala on suurimmillaan kun suorakulmion kärkipiste on kolmion hypotenuusan ja sen keskinormaalin leikkauspisteessä G (75, 60).

Kuva 14: Osa opiskelijan 79 vastauksesta. Ratkaisussa on oletettu, että suurin pinta-ala löytyy, kun suorakulmion yksi kärki jakaa hypotenuusan kahteen yhtäsuureen osaan. Ratkaisu kuului kategorioihin ”ei derivoitu” ja ”ei funktiota pinta-alalle”.

sen enempää (ks. esim. opiskelija 79, kuva 14). Monet myös vain ilmoittivat suurimmaksi mahdollisesti pinta-alaksi oikean ratkaisun perustelematta sitä mitenkään.

Kuten taulukosta 4 on nähtävissä, tässä tehtävässä ei tullut juurikaan mekaanisia virheitä derivoinnissa. Tämä mitä luultavammin johtuu siitä, että kyseessä on B-osan tehtävä, jossa on kaikki laskinohjelmat käytössä, jolloin mekaanisia laskuvirheitäkään ei pääse juuri syntymään. Yhtälönmuodostus oli monelle selkeästi vaikeaa, sillä vain 33 opiskelijalla oli oikea idea derivoitavasta funktiosta. Lukuun on laskettu mukaan ne kolme opiskelijaa, joilla olisi ollut oikea funktio, jos sulut eivät olisi puuttuneet. Yleisesti vaikutti siltä, että jos osasi muodostaa yhtälön, niin ymmärrettiin derivoida se ja etsiä nollakohdat. Toisaalta myös kokelaat, jotka muodostivat virheellisiä yhtälöitä pinta-alalle, osasivat kuitenkin usein derivoida virheellisen funktion ja etsiä derivaatan nollakohtia (ks. esim. opiskelija 60, kuva 12). Heillä siis tuntui olevan käsitys siitä, mihin ja miten derivaattaa käytetään soveltavammissa tehtävissä.

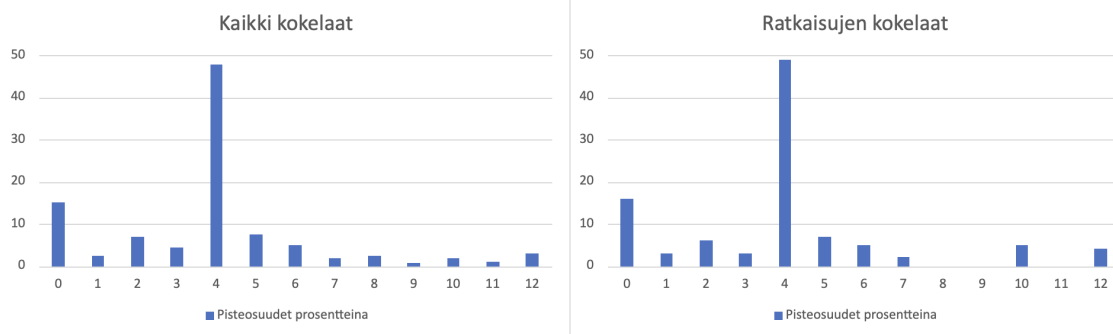
5.3 Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 8. Funktion väheneminen

Tässä tehtävässä tuli määrittää derivaatan avulla, missä välin $-1 \leq x \leq 3$ kohdassa funktio $f(x) = 2x^2 - x + 5$ vähenee nopeimmin. Opiskelijan on pitänyt siis tietää, mitä derivaatan arvo tietyssä pisteessä kertoo funktion vähenemisnopeudesta ja miksi juuri derivaatan minimiä etsitään. Tässä tarkasteltujen sadan opiskelijan pistejakauma on kuvattuna taulukossa 5. Lisäksi kuvassa 15 on vertailtu tarkasteltujen sadan opiskelijan pisteiden jakautumista prosenttiosuuksina kaikkien kokeilaiden ($N = 3748$) pisteprosentteihin.

Pistemäärä	Esiintyvyys (lkm)
0	16
1	3
2	6
3	3
4	49
5	7
6	5
7	2
8	0
9	0
10	5
11	0
12	4

Taulukko 5: Tarkasteltujen ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet ($N=100$).

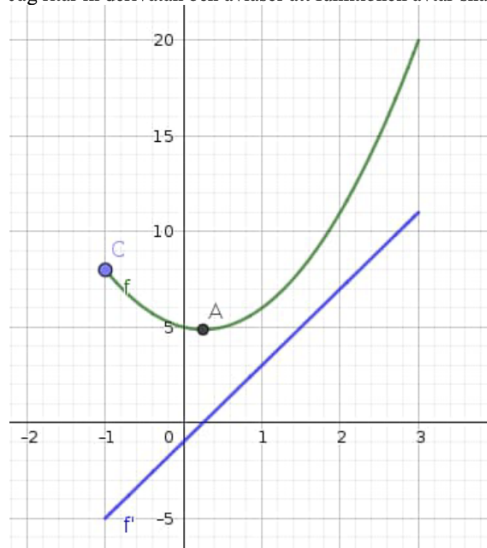
Tehtävästä on ollut 12 pistettä jaossa, joista Ylioppilastutkintolautakunnan hyvän vastauksen piirteiden mukaan (kuva 4) neljä on saanut sillä, että on osannut derivoida annetun funktion oikein (2 pistettä per kerroin). Tämän näkee sekä ratkaisujen kokeilaiden että kaikkien kokeilaiden pistejakaumassa (kuva 15), sillä neljä



Kuva 15: Kaikkien kokelaiden pisteosuudet prosentteina (vas.) sekä tarkasteltujen ratkaisujen kokelaiden pisteosuudet prosentteina (oik.).

pistettä on ollut selvästi yleisin pistemäärä molemmissa ryhmissä (n. 47,87% kaikista 3748 opiskelijasta sai 4 pistettä). Loput pisteistä tulivat perusteluista, miksi $x = -1$ on derivaatan minimi ja miten derivaatan minimi on yhteydessä siihen, miten nopeasti funktio vähenee. YTL:n hyvän vastauksen piirteiden mukaan täydet pisteet oli mahdollista saada myös, jos on derivaattafunktion kuvaajan perusteella osannut perustella, missä kohtaa funktio vähenee nopeimmin. Tällöin ei ole välttämättä tarvinnut osata mekaanisesti derivoida mitään tai edes merkitä vastaukseen derivaattafunktion yhtälöä. Esimerkiksi opiskelija 8 sai täydet pisteet kyseisellä tavalla (kuva 16).

Jag ritar in derivatan och avläser att funktionen avtar snabbast vid punkt C (-1,8) eftersom det är derivatans lägsta punkt i intervallet.



Kuva 16: Osa opiskelijan 8 vastauksesta. Ratkaisu kuului kategoriaan ”ei derivointu”, sillä derivaattafunktion yhtälöä ei mainittu vastauksessa. Vapaa suomennos kuvaajan yllä olevasta tekstistä: ”Piirrän derivaatan, ja näen [kuvaajasta], että funktio vähenee nopeimmin pisteessä C (-1, 8), koska se on derivaatan alin piste [annetulla välillä].” Vastauksesta sai 12 pistettä.

Taulukossa 6 on kuvattu joitain tehtävässä esiintyneitä virheitä ja niiden esiintyvyyttä. Virhekategorioiden valikoitui sen mukaan, mikä oli oleellisinta tehtävän

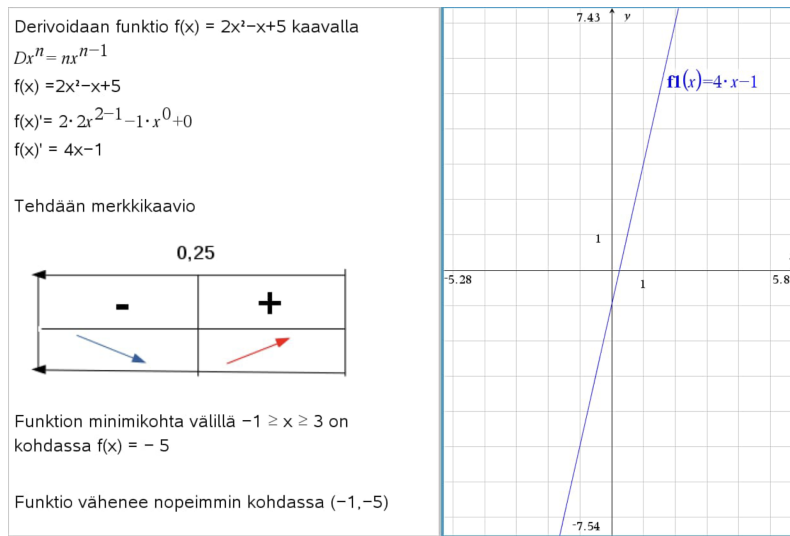
ymmärtämisen kannalta. Paljon muitakin virheitä esiintyi ja monissa tehtävissä oli puutteellisia perusteluja, mutta niistä ei pidetty tarkkaa lukua. Tähän osittain syy-
nä on se, että opiskelija saattoi puutteellisista perusteluista huolimatta saada täydet
tai lähes täydet pisteet (kuten seuraavassa kappaleessa kuvattu opiskelija 38, kuva
17). Lisäksi virhekategorioiden on päällekkäisyyksiä, sillä esimerkiksi kaikki opiskeli-
jat, jotka antoivat ensimmäisen derivaatan nollakohdan tai jonkin muuttujan x välin
ratkaisuksi, kuuluvat myös kategoriaan ”ei ymmärtänyt vähenemisnopeutta”. Melko
tyhjiä vastauksia oli 10. Ne ovat omassa kategoriassaan, sillä niissä oli niin vähän
informaatiota, ettei niitä voinut lajitella kuuluvaksi esimerkiksi ”ei ymmärtänyt vä-
henemisnopeutta” -kategoriaan. Melko tyhjiksi laskettiin kaikki sellaiset vastaukset,
joissa oli esimerkiksi vain kuva paraabelista ja annetuista muuttujan x rajoista tai
vain (oikein tai väärin) derivoidun paraabelin funktio ilman lopullista vastausta tai
mitään selityksiä.

Virhe	Esiintyvyys (lkm)
Ei derivoinut	17
Paraabeli derivoitu väärin	10
Ei ymmärtänyt vähenemisnopeutta	62
Ensimmäisen derivaatan nollakohta vastauksena	16
Muuttujan x väli ratkaisuna	13
Melko tyhjä	10

Taulukko 6: Tehtävän ratkaisuihin esiintyneet oleelliset virheet ja niiden luku-
määrät.

Yleisesti tästä tehtävästä sai helposti pisteitä, vaikka perustelut eivät olisi ol-
leet kovin kummoisia. Neljä pistettä oikein derivoidusta yhtälöstä on melko paljon,
kun kyseessä on B-osion tehtävä, jossa CAS-laskin on käytössä, ja tehtävänanto
itsessään on jo ohjannut tarkastelemaan derivaattaa. Lisäksi tehtävien pisteytys-
ten välillä on satunnaisia eroavaisuuksia opiskelijoiden välillä. Esimerkkinä tästä on
opiskelija 38 (kuva 17), joka sai vastauksestaan 10 pistettä, vaikka siinä on monia
puutteita. Hänen vastauksessaan on esimerkiksi lause ”Funktion minimikohta vä-
lillä $-1 \geq x \geq 3$ on kohdassa $f(x) = -5$ ”, missä hän puhuu funktion minimistä
derivaatan minimin sijaan. Hänellä on epäyhtälömerkit väärinpäin ja hän viittaa
derivaattafunktion arvoon, kun $x = -1$ ($f'(-1) = -5$), mutta merkitsee tätä al-
kuperäisenä funktiona. Lisäksi hän on antanut lopulliseksi vastaukseksi derivaat-
tafunktion pisteen $(-1, -5)$, vaikka tehtävänannossa kysyttiin, missä välin $[-1, 3]$
pisteessä *funktio* vähenee nopeiten. Toisaalta opiskelijan 38 ratkaisun korkea pistey-
tys todennäköisesti johtuu ratkaisussa olleesta derivaatan kuvaajasta, sillä pelkällä
graafisella perustelulla on ollut mahdollista ylittää myös täysiin pisteisiin. Siitä hu-
olimatta opiskelijoiden 38 ja 68 ratkaisuja ja niiden pisteytystä on mielenkiintoista
vertailla. Opiskelija 68 sai ratkaisustaan 6 pistettä, vaikka siinä on selvemmin näh-
tävässä, että hänellä on ollut parempi konseptuaalinen ymmärrys asiasta. Hän on
osannut selittää sanallisesti, miten funktion vähenemisnopeus on yhteydessä deri-
vaattafunktion arvoihin ja perustellut miksi $x = -1$ on derivaattafunktion minimi
(ja täten myös piste, missä alkuperäinen funktio vähenee nopeiten) annettulla välil-
lä. Jotkin sanavalinnat olisi ehkä voitu muotoilla toisin, mutta vastauksesta on silti

nähtävissä, että opiskelija tietää, mistä puhuu, eikä ole esimerkiksi vahingossa tai puutteellisin perustein päätenyt oikeaan ratkaisuun.



Kuva 17: Opiskelijan 38 vastaus. Ratkaisussa on monia puutteita, kuten väärinpäin olevat epäyhtälömerkit. Lisäksi opiskelija puhuu funktion minimistä derivaatan minimin sijaan ja hänen vastauksensa on derivaattafunktion piste $(-1, -5)$ eikä alkuperäisen funktion piste. Vastauksesta on saanut 10 pistettä.

Derivoidaan ensin funktio $f(x) = 2x^2 - x + 5$
 $f'(x) = 2x^2 - x + 5$
 $= 4x - 1$

Koska funktion derivaatta kuvaa funktion paikallista muutosnopeutta, selvittämällä derivaatan nollakohta saadaan selville milloin funktio on kasvavaa ta vähenevää. Selvitetään derivaatan nollakohta:

$$4x - 1 = 0$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Koska funktion derivaatan kulmakerroin on positiivinen, eli suora on nouseva, saa se negatiivisia arvoja ennen nollakohtaa $\frac{1}{4}$. Funktio on siis vähenevä $x \leq \frac{1}{4}$. Mitä negatiivisemmaksi funktion derivaatan nollakohdasta mennään, sitä negatiivisempi on myös funktion paikallinen muutosnopeus. Koska tutkimme funktiota $f(x) = 2x^2 - x + 5$ välillä $-1 \leq x \leq 3$, sekä funktion derivaatta saa yhä negatiivisempia arvoja vähetessään nollakohdasta $\frac{1}{4}$, vähenee funktio nopeiten kohdassa $x = -1$

V: $x = -1$

Kuva 18: Opiskelijan 68 vastaus. Ratkaisussa on selitetty sanallisesti, miten funktion vähenemisnopeus on yhteydessä derivaattafunktion arvoihin ja perusteltu miksi $x = -1$ on derivaattafunktion minimi annetulla välillä. Vastaus kuului kategoriaan ”lähes oikein”. Opiskelija on saanut siitä 6 pistettä.

Monet kokelaat eivät tuntuneet ymmärtävän mitä heiltä kysyttiin. Tehtävänanto ohjasi derivoimaan annetun funktion, mutta usein vaikutti siltä, että opiskelijalla on mennyt funktion suurin tai pienin arvo sekaisin derivaatan suurimman tai pienimmän arvon kanssa. Näistä konkreettisimpana esimerkkinä ovat ne 16 opiskelijaa,

Derivoidaan funktio $f(x) = 2x^2 - x + 5$

$D'f(x) = 4x - x$

$f'(x) = 3x$

Derivaatan mukaan funktio $f(x) = 2x^2 - x + 5$

vähenee nopeimmin kohdassa $f(x) = 3x$, joka pätee $-1 \leq x \leq 3$ kanssa.

Kuva 19: Opiskelijan 34 vastaus. Ratkaisu kuului kategorioihin ”paraabeli derivoitu väärin” ja ”ei ymmärtänyt vähenemisnopeutta”. Vastauksesta on saanut yhden pisteen.

joitka antoivat derivaatan nollakohdan vastaukseksi. Kyseisissä vastauksissa on siis nähtävissä sama rakenteellinen virhe, josta Orton (1983b) mainitsi myös: opiskelijat antoivat funktion arvon pisteessä x_0 vastaukseksi, kun kysyttiin funktion muutosnopeutta pisteessä x_0 . Lisäksi 13 opiskelijaa antoi jonkin muuttujan x välin vastaukseksi. Yleisimpiä näistä olivat ne tapaukset, joissa opiskelija ilmoitti vastaukseksi välin, jolla funktio ylipäättään vähenee, mutta sekaan mahtui myös täysin virheellisiä merkintätapoja ja vastauksia. Esimerkiksi erään opiskelijan lopullinen vastaus oli ”funktio vähenee nopeimmin välillä $-1 \leq 5$ tai $-1 \leq 5 \leq 3$ ” (hän oli laskenut alkuperäisen funktion nollakohdan y -koordinaatiksi 5,375 ja kenties yhdistänyt tämän tuloksen vastaukseensa).

Jotkut opiskelijat tuntuivat hämääntyvän tehtävänannon sanavalinnasta ”funktio vähenee *nopeimmin*”, sillä he etsivät derivaatan suurinta arvoa pienimmän sijaan. Esimerkiksi eräs opiskelija laski derivaatan arvoja eri pisteissä ja päätyi ratkaisuun $x = 3$, sillä se antoi suurimmat arvot derivaatalle. Tämä viittaa siihen, että tehtävänanto on kenties ollut hieman epäjohdonmukainen (ks. Boonen ym., 2016; Hegarty ym., 1995), sillä kyseisillä opiskelijoilla on kuitenkin ollut oikea käsitys siitä, että derivaatan ääriarvoja haetaan. Lisäksi oli muutamia muitakin opiskelijoita, jotka kokeilivat joitain kokonaislukuarvoja derivaattafunktiolle ja päättelivät sitä kautta, että välin päätepisteistä löytyy pienin (tai suurin) arvo. Oikea idea derivaatasta on siis ollut nähtävissä, mutta perustelut ovat olleet puutteelliset.

Paljon oli myös sellaisia vastauksia, joissa ei selkeästi ole ollut juuri minkäänlaisia käsityksiä siitä, mitä tehtävässä tulisi tehdä. Esimerkiksi opiskelijan 34 (kuva 19) vastauksesta näkee, ettei hänellä ollut juurikaan ymmärrystä siitä, mitä derivaatta tarkoittaa, tai miten annettu muuttujan x väli liittyy mihinkään. Vaikka tehtävästä onkin siis saanut suhteellisen helposti pisteitä, suurin osa ei ole silti onnistunut saamaan yli neljää pistettä. Toisaalta lyhyen matematiikan opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2015) on vain yksi derivaattaa käsittelevä valtakunnallinen syventävä kurssi, joten on ymmärrettävää, että sitä osataan myös heikommin.

5.4 Syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 13. Suurin pinta-ala

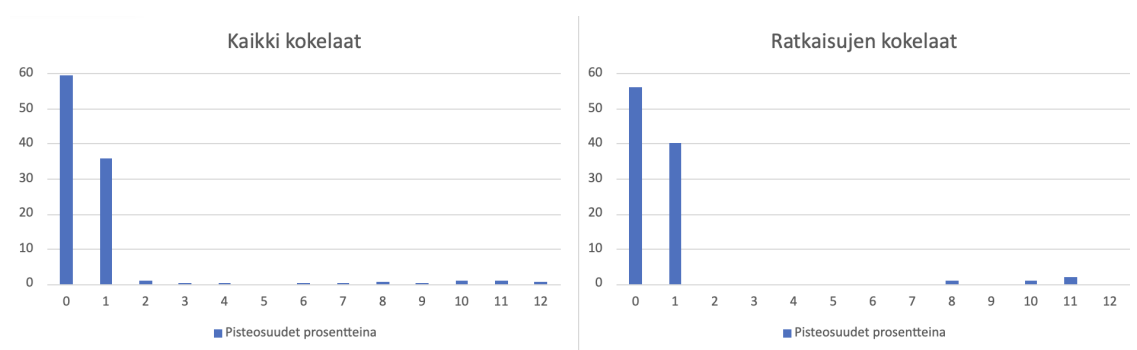
Tehtävänantona oli selvittää derivaatan avulla suorakulmion suurin pinta-ala, kun sitä rajoittavat positiiviset x - ja y -akselit sekä paraabeli $y = -x^2 + 9$. Ideana oli muodostaa pinta-alalle funktio muuttujan x suhteen ja etsiä derivaatan nollakohtien sekä muuttujan x määrittelyvälin avulla kyseisen funktion suurin arvo. Tehtävänan-

nossa ei mainittu, missä muodossa vastaus tulisi antaa, mutta Ylioppilastutkintolautakunnan hyvän vastauksen piirteissä (kuva 5) pisteen sai vain tarkasta arvosta $6\sqrt{3}$.

Tehtävästä oli mahdollista saada 12 pistettä. Tässä tutkielmassa tarkastelluista sadasta opiskelijasta 96 sai tehtävästä 0-1 pistettä ja neljä opiskelijaa 8-11 pistettä (taulukko 7). Kuvasta 20 voi verrata näiden sadan opiskelijan pistejakaumaa kaikkiin 1945 opiskelijaan, jotka olivat tehtävän tehneet. Tässä tarkasteltujen sadan opiskelijan pistejakauma muistuttaa hyvin paljon kaikkien opiskelijoiden pistejakaumaa: n. 59,5 prosenttia (1856/1945) kaikista tehtävän tehneistä opiskelijoista sai 0 pistettä ja n. 35,9 prosenttia (689/1945) sai yhden pisteen. Loput 4,6 prosenttia opiskelijoista (89/1945) saivat 2-12 pistettä; näistä suurin ryhmä oli 10 pisteen luokka, johon kuului 18 opiskelijaa eli n. 0,9% kaikista tehtävän tehneistä opiskelijoista.

Pistemäärä	Esiintyvyys (lkm)
0	56
1	40
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	1
9	0
10	1
11	2
12	0

Taulukko 7: Tarkasteltujen ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet (N=100).



Kuva 20: Kaikkien kokelaiden pisteosuudet prosentteina (vas.) sekä tarkasteltujen ratkaisujen kokelaiden pisteosuudet prosentteina (oik.)

Hyvin harvat opiskelijat ylsivät siis kahteen tai useampaan pisteeseen. Ratkaisujen sadasta opiskelijasta yhden pisteen saivat käytännössä ne, joilla oli hahmoteltuna tilannetta vastaava kuva, mutta pinta-alan funktiosta ei ollut tietoa (ks. YTL hyvän vastauksen piirteet, kuva 5). Taulukossa 8 on kuvattu keskeisimmät ratkaisuisia

esiintyneet virheet siitä näkökulmasta, onko virhe oleellinen tehtävän ymmärtämisen kannalta. Kyseisissä virhekategorioiden on hieman päällekkäisyyksiä, kuten kaikkien muidenkin tehtävien kohdalla on ollut. Esimerkiksi kategorioiden ”oma väärä funktio derivoitu oikein/väärin” kuuluvat opiskelijat ovat kaikki derivoineet paraabelia ($35 + 16 = 51$). Jos halutaan erottaa kukin opiskelija tarkalleen yhteen kategoriaan, niin selvästi toisistaan eriäviä ovat ne

- 34 opiskelijaa, jotka eivät derivoineet mitään,
- 51 opiskelijaa, jotka derivoivat paraabelia,
- 4 opiskelijaa, joilla oli lähes oikea vastaus
- sekä loput 11 opiskelijaa, joilla oli käytännössä tyhjä vastaus.

Virhe	Esiintyvyys (lkm)
Ei derivoanut	34
Derivoi paraabelia	51
Oma väärä funktio derivoitu oikein	35
Oma väärä funktio derivoitu väärin	16
Oikea funktio derivoitu väärin	0
Kuvaan liittyvät virheet	27

Taulukko 8: Tehtävän ratkaisuisissa esiintyneet oleelliset virheet ja niiden lukumäärät.

Tässä tapauksessa ”lähes oikea vastaus” tarkoittaa käytännössä sitä, että opiskelija oli keksinyt oikean funktion pinta-alalle ja derivoanut sen oikein. Nämä neljä opiskelijaa ovat siis ne, jotka saivat tehtävästä 8-11 pistettä (ks. taulukko 8). Pistevähennyksiä on tullut esimerkiksi muuttujan x rajojen puutteellisesta huomioinnista, likiarvojen käyttämisestä tai muuten hieman vajaista perusteluista. Kaikki neljä opiskelijaa saivat kuitenkin (ainakin suurin piirtein) oikean vastauksen.

Lisäksi viidellä opiskelijalla oli oikea idea siitä, miten oikeaan vastaukseen voisi päästä. Kaksi näistä viidestä oli haarukoimalla päässyt suhteellisen lähelle oikeaa vastausta, kuten opiskelija 99 (kuva 21). Tämä on merkittävää siksi, että he ymmärsivät, että pinta-alan kanta ja korkeus muodostuvat muuttujan x arvosta ja paraabelin arvosta samassa pisteessä x . Monilla muilla taas suorakulmiot (tai toisinaan kolmiot) eivät välttämättä edes pysyneet paraabelin sisällä tai oli mielivaltaisesti kuvasta päätetty jokin suorakulmio tarkistamatta edes lepääkö esim. oikea yläkulma paraabelilla ollenkaan (ks. esim. opiskelija 36, kuva 22 tai opiskelija 56, kuva 23). Loput kolme näistä viidestä olivat sanallisesti selostaneet, miten he laskisivat suurimman pinta-alan, mutta he eivät olleet mitään näistä laskuista suorittaneet (kuten opiskelija 45, kuva 24). He olivat siis selittäneet, että ensin pitäisi muodostaa pinta-alan funktio, derivoita se ja etsiä derivaatan nollakohdat, joista vastaus todennäköisesti löytyisi. Vaikka kukin näistä viidestä opiskelijasta saikin ratkaisustaan korkeintaan yhden pisteen, oli niistä siitä huolimatta silti nähtävissä, että heillä oli ehkä parempi käsitys tehtävän luonteesta ja siitä, mitä kysyttiin.

lasketaan laskimella seuraavasta yhtälöstä missä kohtaa paraabeli leikkaa x-akselin:

$$-x^2 + 9 = 0$$

$$\text{solve}(-x^2+9=0,x)$$

$$x=-3 \text{ or } x=3$$

paraabeli leikkaa x-akselin, kun $x=-3$ ja $x=3$

Lasketaan seuraavaksi, mikä funktion arvo on, kun $x=0$

$$f(0) = -0^2 + 9$$

$$f(0) = 9$$

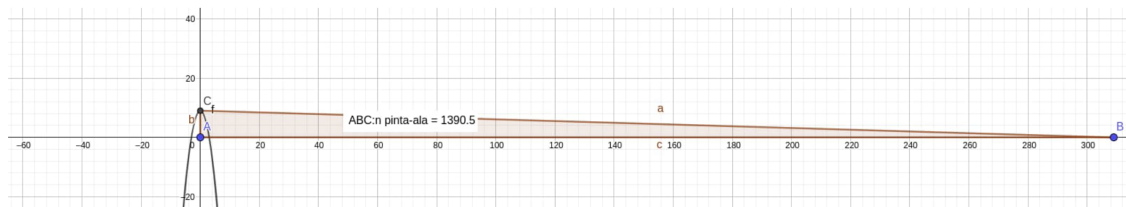
Tästä voidaan päätellä, että suorakulmio voi olla leveydeltään korkeintaan < 3 ja korkeudeltaan < 9 tutkitaan y:n arvo, kun $x=2$

2.1 · 4.59	9.639
-(1.9) ² +9	5.39
1.9 · 5.39	10.241
-(1.8) ² +9	5.76
1.8 · 5.76	10.368
-(1.7) ² +9	6.11
1.7 · 6.11	10.387
-(1.6) ² +9	6.44
1.6 · 6.44	10.304

Kun funktioon sijoitetaan erilaisia arvoja, voidaan havaita, että suurin arvo saadaan, kun x:n arvo lähestyy 1.7

Kuva 21: Osa opiskelijan 99 vastauksesta. Opiskelija on hahmottanut oikein suorakulmion leveyteen ja korkeuteen vaikuttavat rajat, ja taulukoinut pinta-aloja, kun kanta on jokin x_0 ja korkeus $f(x_0) = -x_0^2 + 9$. Ratkaisu kuului kategorioihin ”ei derivoinut” ja ”oikea idea”.

Suorakulmion suurimmaksi pinta-alaksi oli mahdollista saada 1390,5⁴



Vastaus: Suorakulmion ABC, suurin mahdollinen pinta-ala on 1390,5⁵

Kuva 22: Osa opiskelijan 36 vastauksesta. Kuvan yläpuolella lukee ”Suorakulmion suurimmaksi pinta-alaksi oli mahdollista saada 1390,5²”. Kuvassa on kolmio, jonka kärkipisteet ovat origo, (0, 9) ja (309, 0). Ratkaisu kuului kategorioihin ”ei derivoinut” ja ”kuvaan liittyvät virheet”.

Loput 91 opiskelijaa eivät tuntuneet ymmärtävän, mihin derivaattaa tulisi käyttää, vaikka sitä tehtävänannossa erikseen pyydettiin käyttämään. 34 opiskelijaa ei ollut derivoinut mitään ja 51 opiskelijaa oli derivoinut paraabelin funktiota. Iso osa paraabelia derivoineista ei edes yrittänyt käyttää derivaattaa mihinkään, mutta osa näistä 51 opiskelijasta oli yrittänyt käyttää paraabelin derivaattaa jollain tapaa. Muutamat etsivät derivaattafunktion ja paraabelin leikkauspisteitä ja yrittivät niitä hyödyntää suorakulmion oikean yläkulman löytämisessä (ks. esim. opiskelija 47,

Määritetään derivaatta yhtälölle $y = -x^2 + 9$
 $f'(y = -x^2 + 9)$ on $y = -x + 0$

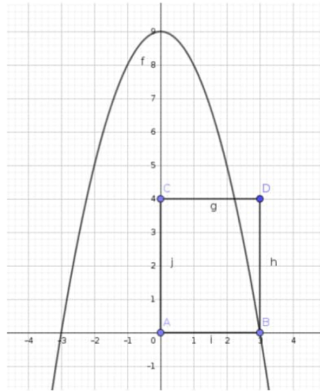
Suorakulmion pinta-ala on $A = a \cdot b$. Joten otetaan pituudet kuvasta, jotka ovat 4×3 , joten suorakulmion pinta-ala on $4 \cdot 3 = 12$.

Yhdistetään pinta-ala derivaatan lausekkeeseen $y = -x + 0$

$$-x + 0 = 12$$

$$-x = 12 \quad // : (-1)$$

$$x = -12$$



V: Suurin mahdollinen pinta-ala on -12 .

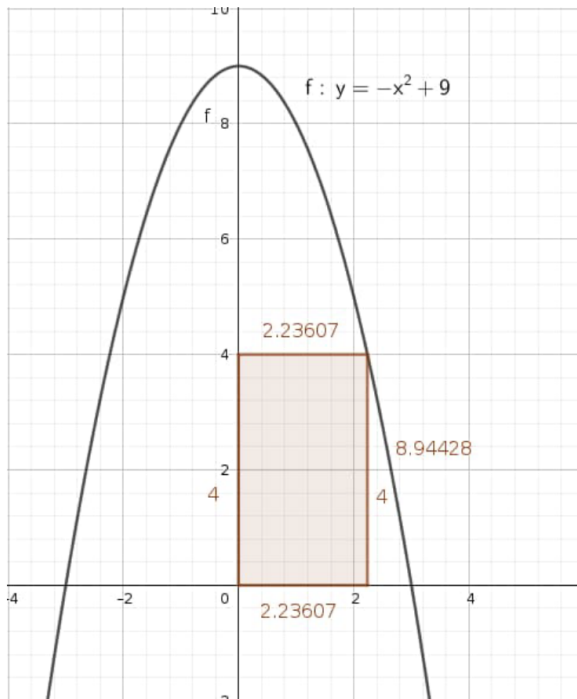
Kuva 23: Opiskelijan 56 vastaus. Ratkaisussa on derivoitu paraabeli väärin, piirretty mielivaltainen suorakulmio, joka ei toteuta tehtävänannon rajoitteita ja laskettu sen pinta-ala. Saatu pinta-ala on asetettu yhtä suureksi kuin derivaattafunktio, minkä jälkeen yhtälöstä on ratkaistu x ja ilmoitettu sen arvo vastaukseksi. Ratkaisu kuului kategorioihin ”derivoi paraabelia”, ”oma väärä funktio derivoitu väärin” ja ”kuvaan liittyvät virheet”.

kuva 25). Tämä ehkä viittaa siihen, että on saatettu osata mekaanisesti derivoida, mutta ei ole ollut käsitystä siitä, mihin derivaattaa käytetään tai mitä se kertoo funktiosta. Toisaalta osa paraabelia derivoineista oli tajunnut etsineensä paraabelin nollakohtia ja mahdollisesti teki kulkukaavion ja kertoi kyseessä olevan alaspäin aukeava paraabeli. Tämä olisi toki ollut nähtävissä myös paraabelin yhtälöstä tai Geogebren kuvaajan perusteella. Tehtävänannossa pyydettiin käyttämään derivaattaa, ja vaikutti siltä, että opiskelijat derivoivat vain jotain, jos eivät tieneet minkä funktion ääriarvoja haetaan. Lisäksi vastaan tuli myös monia mielenkiintoisia merkintätapoja, kuten $f'(y) = -2x$.

Hyvin lyhyitä tai lähes tyhjiä vastauksia oli yhteensä 46, mutta osassa näistä oli kuitenkin nähtävissä jotain opiskelijan omaa ajattelua. Vastaus luokiteltiin kategoriaan ”käytännössä tyhjä”, jos se ei sisältänyt mitään opiskelijan omia laskuja tai ajatuksia. Tällaisia olivat esimerkiksi vastaukset, joissa oli vain kuvakaappauksia Maolin kaavoista, muutama sana tai pelkkä luku sekä kaikki ne vastaukset, joissa oli vain kuvakaappaus piirretystä paraabelista ilman selityksiä tai hahmotelmaa suorakulmiosta, kolmioista tai muistakaan kuvioista.

Vastauksia, joissa oli yritetty hahmotella tilannetta esimerkiksi piirtämällä kuva jostain nelikulmiosta (tai välillä myös kolmiosta) ilman sen kummempia selityksiä

* Kyseessä on derivaatan geometrinen sovellustehtävä eli piirretään ensin annetuilla tiedoilla mallikuva.



* Halutaan ratkaista pinta-ala eli luodaan suorakulmion pinta-alalle funktio, kun suorakulmion pinta-alahan ratkaistaan kanta kerrottuna korkeudella.

* Derivoidaan kyseinen funktio.

* Luodaan kulkukaavio perusteluksi.

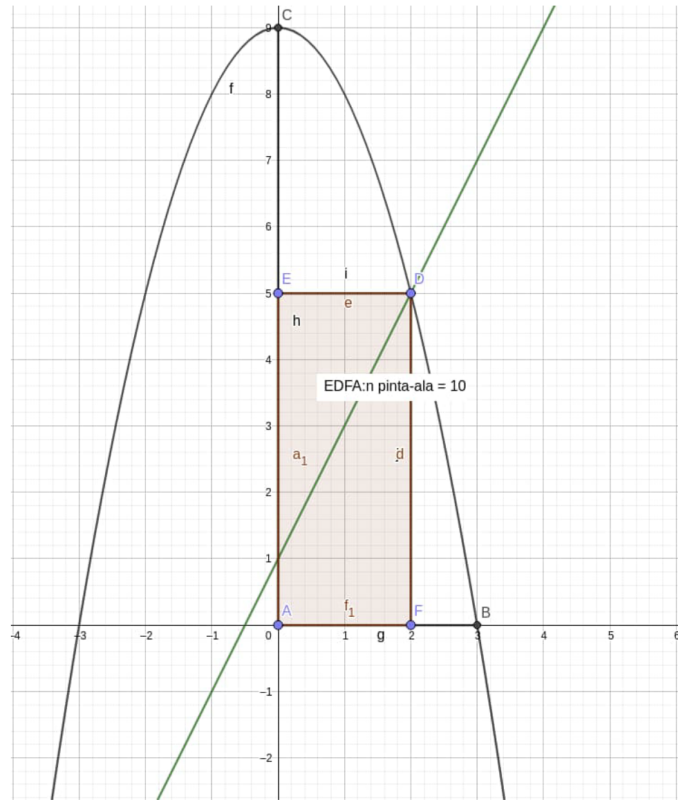
* Määritetään alkuperäisestä funktiosta suurin mahdollinen pinta-ala.

Kuva 24: Opiskelijan 45 vastaus. Ratkaisussa on piirretty mallikuva tilanteesta ja kerrottu sanallisesti, että pinta-alan funktion derivaatan avulla voisi selvittää suurimman pinta-alan. Ratkaisu kuului kategorioihin ”ei derivoinut” ja ”oikea idea”.

oli 12 kappaletta. Kaikki näistä 12 vastauksesta kuuluvat myös kategoriaan ”ei derivoinut”. Tähän jakoon päädyttiin, sillä nämä 12 vastausta sisälsivät kuitenkin jonkin verran opiskelijan omaa ajattelua, vaikka mitään perusteluja niissä ei olisikaan. YTL:n hyvän vastauksen piirteiden mukaan opiskelija on kuitenkin saanut yhden pisteen siitä, jos on onnistunut piirtämään sekä paraabelin että jonkin suorakulmion tehtävänannon mukaisesti.

Lisäksi muista syistä hyvin lyhyitä vastauksia oli lukuisia ($46 - 11 - 12 = 23$), mutta niissä oli usein tehty kuitenkin jotain. Jotkut olivat vain derivoineet paraabelin, osa piirtänyt kuvan paraabelista ja sen derivaattafunktiosta. Niitä ei lajiteltu sen tarkemmin, sillä vastausten joukko oli hyvin kirjava. Usein niitä yhdisti se, että oltiin tehty hyvin vähän ilman mitään perusteluita. Harvalla oli nähtävissä edes oikeaa ideaa siitä, miten tehtävä olisi tarkoitettu ratkaistavan.

Tehtävänannossa käskettiin selvittämään suurin pinta-ala derivaatan avulla, mikä on luultavasti ohjannut opiskelijoita arvaamaan miten derivaattaa tulisi hyödyntää, jos tietoa ei ole ollut. Opiskelijan 56 (kuva 23) sekä opiskelijan 47 (kuva 25) ratkaisut ovat esimerkkejä siitä, ettei välttämättä tiedetty, miten derivaatan avulla voisi selvittää suurimman mahdollisen pinta-alan, vaikka jokin ajatus mekaanisesta



Derivoidaan paraabelin lauseke:
 $y = -x^2 + 9$
 $f'(y) = 2x + 9$

Kuva 25: Osa opiskelijan 47 vastauksesta. Ratkaisussa on ilmoitettu paraabelin $y = -x^2 + 9$ derivaataksi $f'(y) = 2x + 9$, mutta Geogebraan on piirretty suora $f(x) = 2x + 1$. Suorakulmion oikea yläreuna on asetettu Geogebraan suoran ja paraabelin leikkauspisteeseen $(2, 5)$, jolloin pinta-alaksi tulee 10. Ratkaisu kuului kategorioihin ”derivoitu paraabelia”, ”oma väärä funktio derivoitu väärin” ja ”kuvaan liittyvät virheet”.

derivoinnista onkin ehkä ollut. Opiskelijan 56 vastauksessa on piirretty vain jokin suorakulmio, joka ei toteuta tehtävänannossa annettuja rajoitteita, minkä jälkeen tämän mielivaltaisen suorakulmion pinta-ala on asetettu yhtäsuureksi kuin derivaattafunktio. Opiskelijan 47 (kuva 25) ratkaisussa on sen sijaan yritetty hyödyntää derivaattafunktion ja alkuperäisen funktion kuvaajia. Yleisesti tehtävien ratkaisuisa oli paljon samoja piirteitä, kuin kevään 2020 pitkän oppimäärän tehtävässä 4: jostain pitäisi derivoida ja kun ei tiedetä mitä, niin derivoidaan mikä tahansa annettu funktio tai yhtälö.

6 Tulosten tarkastelua ja luotettavuus

6.1 Johtopäätökset

Sekä pitkän että lyhyen matematiikan sanallisissa ääriarvotehtävissä oli nähtävissä pullonkaula tehtävien pistejakaumassa, joka johtui pitkälti funktion muodostamisen vaikeudesta. Erityisesti kevään 2021 pitkän oppimäärän tehtävässä 5, ”Rantatontti”, ilmiö on selkeästi nähtävissä: suurin osa opiskelijoista kuului joko pisteluokkiin 0-2 tai 12 (kuva 11). Opiskelijat osasivat kyllä siis etsiä funktion ääriarvoja, mikäli tiesivät vain mikä on kysytty funktio, mutta sanallisen tehtävän informaation muotoileminen funktioksi tuotti haasteita. Jos siis opiskelija keksi kyseisessä tehtävässä sopivan funktion, niin hän todennäköisesti ylsi melko korkeisiin pisteisiin.

Myös muissa sanallisissa ääriarvotehtävissä (kevät 2020, pitkä oppimäärä, tehtävä 4, ”Suurin etäisyys”, ja syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 13, ”Suurin pinta-ala”) oli nähtävissä pullonkaula pisteytyksessä oikean funktion keksimisen kohdalla, mutta huomattavasti harvempi oli yltänyt korkeampiin pisteisiin. Syksyn 2022 tehtävän 13 (lyhyt matematiikka) kohdalla vain neljä henkilöä sadasta keksi pinta-alan funktion ja sai 8-11 pistettä. Loput 96 opiskelijaa sai 0-1 pistettä. Pitkän matematiikan kevään 2020 tehtävässä 4 oli nähtävissä samankaltainen ilmiö, vaikka hajontaa pisteissä oli hieman enemmän: 83 opiskelijaa sai 0-2 pistettä, neljä opiskelijaa sai 8-11 pistettä ja loput jotain tältä väliltä. Molemmissa tehtävissä osa opiskelijoista derivoi tehtävänannon paraabelia tai käyrää, jos he eivät osanneet tai ymmärtäneet muodostaa itse tutkittavaa funktiota. Lisäksi ”Suurin etäisyys” -tehtävässä otettiin huomioon myös opiskelijoiden tekemät lineaariseen ekstrapolaatioon liittyvät virheet, kuten $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$. Niiden korkeahkoon esiintyvyyteen vaikutti todennäköisesti osaltaan se, että tehtävä oli A-osiosta, jossa laskinohjelmia on rajoitettu ja tällöin myös mekaaniseen laskemiseen liittyviä virheitä esiintyi enemmän kuin muissa tehtävissä.

On mahdoton sanoa varmaksi, mitkä syyt ovat yksittäisen opiskelijan virheiden taustalla, mutta aikaisempien tutkimusten valossa voidaan esittää joitain valistuneita arvauksia. Jos tehtävissä esiintyneitä virheitä tarkastelee APOS-teorian valossa, niin yleisesti vaikutti siltä, että varsinkin pitkässä matematiikassa opiskelijat ovat derivaatan käyttötarkoituksen suhteen usein skeematasolla. Heillä on siis usein melko hyvä ymmärrys siitä, miten derivaattaa käytetään ja miksi derivaatan nollakohdista etsitään. Samalla kuitenkin ymmärrys siitä, *mihin* funktioon derivaattaa tulisi käyttää, tuntui välillä olevan hukassa. Joidenkin opiskelijoiden kohdalla vaikuttikin siltä, että ääriarvojen etsiminen on joiltain osin vielä prosessitasolla. Monet tuntuivat opetelleen ulkoa litanian ”derivoi, etsi nollakohdat, tee kulkukaavio, perustele suurin tai pienin arvo”, mutta saattoivat derivoida minkä tahansa tehtävänannossa mainitun yhtälön. He luultavasti toimivat siis samoin, kuin Hegartyn ym. (1995) mukaan heikommat ongelmanratkaisijat toisinaan toimivat: poimitaan avainsanoja ja joitain arvoja tehtävänannosta, ja perustetaan laskutoimitus niiden varaan. Toisaalta osa osasi kyllä selittää sanallisesti, että pitäisi keksiä derivoitava funktio ensin ja tutkia sitä. Kyseisillä opiskelijoilla oli paremmin nähtävissä kriittisyys myös omaa vastausta kohtaan, sillä he eivät palauttaneet ihan mitä tahansa siinä toivossa, että ehkä joku osa menisi vahingossa oikein.

Lyhyen matematiikan kevään 2020 tehtävää 8, ”Funktion väheneminen”, tarkas-

teltaessa huomattiin, että suurella osalla opiskelijoista ei ollut ymmärrystä siitä, mitä funktion muutosnopeus tarkoittaa. Osa antoi vastaukseksi derivaatan nollakohdan tai tulkitsi alkuperäisen paraabelin kuvaajasta, milloin funktio suurin piirtein saa pienimmän arvonsa, vaikka tehtävänannossa kysyttiin, milloin funktio vähenee nopeiten. Tällöin tehtävänannon sana ”vähenee”, on ehkä toiminut avainsanana (ks. Hegarty ym., 1995) ja se on liitetty funktion pienimpään arvoon. Toisaalta samaa virhettä voisi tulkita myös Ortonin (1983b) huomaaman rakenteellisen virheen kautta, missä opiskelijalla menevät sekaisin funktion arvo ja funktion muutosnopeus tietyissä pisteissä: tässä kyseisillä opiskelijoilla tuntui menevän sekaisin funktion minimi derivaatan minimin kanssa. Ilmiötä voi tarkastella myös prosessi–objekti-teorian valossa: kun derivaatan ymmärtää omana objektinaan, niin tällöin voi myös ymmärtää, että derivaattafunktiolla itsellään voi myös olla derivaattafunktio (Hähkiöniemen, 2018). Jos opiskelija ei ole siis ymmärtänyt etsiä derivaattafunktion minimiä, niin on hyvin mahdollista, että derivaatta itsessään on vielä prosessitasolla. Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon näkökulmasta tarkasteltuna monilla opiskelijoilla oli kyllä proseduraalista osaamista, sillä he osasivat derivoida paraabelin ja etsiä paraabelin nollakohdat, mutta konseptuaalinen ymmärrys derivaatasta itsestään muutosnopeuden kuvaajana oli monella hukassa.

Luetun ymmärtämisen ja ongelmanratkaisun merkitys korostui näissä tehtävissä erityisesti ja se näkyi myös vastauksissa. Esimerkiksi funktion vähenemisnopeustehävässä osa opiskelijoista ymmärsi kyllä, että etsitään derivaattafunktion ääriarvoja, mutta he etsivät suurinta arvoa pienimmän sijaan. Opiskelija on saattanut tällöin liittää tehtävänannon sanan ”nopeimmin” derivaatan maksimiin tai itseisarvoltaan suurimpaan derivaatan arvoon (ks. Boonen ym., 2016). Lisäksi yleisesti ongelmanratkaisun kannalta on tärkeää, että ongelman ensinnäkin ymmärtää ja pystyy luomaan tilanteesta kuvan joko mielessään tai mahdollisuuksien mukaan piirroksena (Pölya, 1945; De Corte, 1985). Kuviin liittyvät virheet näkyivät varsinkin ”Suurin pinta-ala” -tehtävässä (syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 13), sillä jotkut opiskelijat eivät selkeästi hahmottaneet tehtävänannon kuvausta tilanteesta, vaan suorakulmiot ja välillä kolmiotkin menivät yli paraabelin tai positiivisten koordinaattiakselien rajojen. Toisaalta kyseiset virheet saattoivat hyvin liittyä myös luetun ymmärtämisen haasteisiin ja luultavasti taustalla onkin monenlaisia syitä.

Lyhyen matematiikan vastauksissa oikeita vastauksia pääteltiin useammin myös taulukoimalla kuin pitkän matematiikan tehtävissä. Tämä kertoo luultavasti siitä, että opiskelija on selkeästi hahmottanut tilanteen ja tehtävänannon, mutta hänellä ei ole ollut vaadittavia matemaattisia keinoja päästä ratkaisuun (kuten derivointi), vaan on päätelty vastauksen muilla keinoin. Heillä on luultavasti ollut siis hyvä mentaalinen representaatio (ks. De Corte, 1985) tilanteesta, mutta se ei ole yksinään riittänyt.

Samankaltaisten virheiden taustalla saattaa olla useampia erilaisia virhekäsityksiä ja on myös hyvin mahdollista, etteivät jotkut opiskelijat ole koskaan oppineet derivaattaa kunnolla, sillä matematiikan lyhyessä oppimäärässä sitä käsitellään vain yhdellä valtakunnallisella syventävällä kurssilla (Opetushallitus, 2015). Siksi on myös ymmärrettävää, että tässä tarkastelluissa lyhyen matematiikan tehtävänannoissa ohjeistettiin erikseen käyttämään derivaattaa. Pitkässä matematiikassa derivaattaa ja sen sovelluksia käsitellään useammalla kurssilla (Opetushallitus, 2015),

jolloin voidaan olettaa, että opiskelija ymmärtää käyttää derivaattaa jo sen pohjalta, että tehtävänannossa kysytään ääriarvoja tai muutosnopeutta.

Huomionarvoista on se, ettei tehtävien vastauksien perusteella voi välttämättä tehdä päätelmiä yksittäisen opiskelijan taidoista tai syistä tiettyjen virheiden taustalla. Tehtävissä esiintyviä virheitä tulisikin tarkastella laajempänä ilmiönä, kuten Maharaj (2013) huomautti APOS-teorian tarjoamien selitystenkin kohdalla. On mahdoton tietää, johtuivatko yksittäisen opiskelijan virheet väsymyksestä, stressistä, huolimattomuudesta vai kenties taitojen tai ajan puutteesta. Jos sen sijaan kolmasosa opiskelijoista on tehnyt saman virheen samassa tehtävässä, se kertoo jo enemmän siitä, mikä yleisesti koetaan vaikeaksi tai minkä tyyppisiä virheitä opiskelijat herkästi tekevät.

Matematiikan ylioppilaskokeiden sähköistymisen ja CAS-laskinten käyttöönoton myötä lukion opetussuunnitelmaa on uudistettu kahdesti (vuosina 2015 ja 2019) ja molemmissa painottuvat teknisten apuvälineiden käyttö huomattavasti enemmän, kuin vuoden 2003 opetussuunnitelmassa. Tämä osaltaan vaikuttaa myös yo-koetehtävien laatimiseen, jotta ne eivät olisi suoraan laskimen avulla ratkaistavissa. Esimerkiksi syksyn 2021 pitkän oppimäärän tehtävä 10, ”Osittaisderivaatta”, oli alun perin valittu myös yhdeksi analysoitavaksi tehtäväksi, mutta se jätettiin pois, sillä opiskelijoiden ratkaisuja selatessa kävi ilmi, että tehtävästä sai täydet pisteet, jos vain osasi laittaa laskimen derivoimaan vuorollaan muuttujien x ja y suhteen ja tämän jälkeen syöttää annetun yhtälöpari laskimeen. Tällöin se ei niinkään mitannut sitä, taitaako opiskelija osittaisderivaatan, vaan laskimen ominaisuuksien tuntemusta.

6.2 Luotettavuus

Tähän tutkimukseen valikoitui kutakin tehtävää kohden sata satunnaista vastausta kaikkien tehtävän tehneiden joukosta. Otos siis mitä luultavammin kuvaa koko populaatiota (kaikki tehtävän tehneet opiskelijat) suhteellisen hyvin. Lisäksi saman tyyppisiä tehtäviä on valittu eri vuosilta, jolloin niihin ovat mitä todennäköisemmin vastanneet eri opiskelijat. Tällöin eri tehtävien vastauksissa esiintyvien virheiden samankaltaisuus kertoo suhteellisen hyvin siitä, minkälaiset asiat ovat olleet vaikeita useille opiskelijoille.

Tämän tutkimuksen tulokset ovat enemmän suuntaa antavia ja suurpiirteisiä. Tutkielman virhekategorioiden olivat täysin tämän tutkielman tekijän päätettävissä ja joku toinen olisi saattanut huomata eri asioita tehtävien ratkaisussa tai nostaa esiin eri puolia. Lisäksi kaikkia vastauksia olisi voinut analysoida vielä yksityiskohtaisemmin ja nostaa kaikki tehtävissä esiintyneet virheet tarkempaan tarkasteluun. Kun vastauksissa ilmenevien virheiden kirjo on laaja, on pakko tehdä jonkinlaista karisimista virhekategorioiden, jotta lukija saa paremman käsityksen kokonaiskuvasta. Tällöin kuitenkin aina jotain tietoa väistämättä katoaa. Virhekatteorioita myös lisättiin jälkikäteen, kun huomattiin tietyn tyyppisten virheiden esiintyvän useissa vastauksissa. Toisinaan taas jokin kategoria, jonka oltiin etukäteen ajateltu olevan merkittävä, osoittautuikin turhaksi.

Vastausten lajittelussa eri kategorioihin ilmenee varmasti jossain määrin inhimillisiä virheitä. Yhden tehtävän kaikkien vastausten lajitteluun meni useampi päi-

vä ja samantyyppisiä vastauksia saatettiin lajitella eri päivinä eri kategorioihin, jos kategorioiden valinta oli tulkinnanvarainen. Tätä pyrittiin minimoimaan siten, että kustakin vastauksesta kirjoitettiin lyhyt tiivisistelmä, jolloin oli helpompi jälkikäteen poimia samantyyppisiä vastauksia lähempään tarkasteluun, ja varmistaa, että samanlaiset virheet on aina lajiteltu samoin. Tästä huolimatta jotain on melko varmasti jäänyt huomaamatta, mutta se ei todennäköisesti kovin paljon vaikuta laajemman ilmiön hahmottamiseen.

Viitteet

- [1] Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.
- [2] Boonen, A. J., de Koning, B. B., Jolles, J. & Van der Schoot, M. (2016). Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in psychology*, 7, 191.
- [3] De Corte, E., Verschaffel, L. & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of educational psychology*, 77(4), 460.
- [4] Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Teoksessa D. O. Tall (toim.) *Advanced mathematical thinking* (1. painos, s. 95-126). Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1>
- [5] Haapasalo, L. (2011). *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu* (8. päiv. p.). Medusa-Software.
- [6] Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. (2. uudistettu painos, s. 50-83). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti
- [7] Haapasalo, L. & Kadjevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(2), 139-157.
- [8] Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology*, 87(1), 18.
- [9] Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. (1. painos, s. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates.
- [10] Hähkiöniemi, M. (2018). Derivaatan ymmärtämiseen tähtäävä oppiminen ja opetus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. (1. painos, s. 110-130). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

- [11] Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. (1. painos, s. 410-430). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- [12] Luneta, K., & Makonye, P. J. (2010). Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, 3(3), 35-46.
- [13] Leino, J. (2004). Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. (2. uudistettu painos, s. 50-83). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti
- [14] Leppäaho, H. (2018). Ongelmanratkaisun opettamisesta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. (1. painos, s. 368-392). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- [15] Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. *South African Journal of Education*, 33(1), 1-19.
- [16] Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: The role of student's misconceptions. *For the learning of mathematics*, 7(3), 33-40.
- [17] Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 325-340.
- [18] Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions. *Pythagoras*, 21, 10-19. Saatavissa: <https://academic.sun.ac.za/mathed/MALATI/Misconceptions.htm>. [Viitattu 20.4.2026.]
- [19] Ojose, B. (2015). *Common misconceptions in mathematics: Strategies to correct them*. University Press of America.
- [20] Opetushallitus (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*.
- [21] Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*.
- [22] Opetushallitus (2003). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*.
- [23] Orton, A. (1983a). Students' Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18. <http://www.jstor.org/stable/3482303>
- [24] Orton, A. (1983b). Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250. <http://www.jstor.org/stable/3482279>
- [25] Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Columbia University Press.
- [26] Pólya, G., Hannula, M., Järnström, J., & Art House, kustantaja. (2014) [1945]. *Ratkaisemisen taito: kuinka lähestyä matemaattisia ongelmia*. Art House. [How to solve it: A new aspect of mathematical method.]

- [27] Rissanen, J. J. (2020). Matematiikan ylioppilaskoe ja muutosten tuulet. Pro gradu -tutkielma.
- [28] Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of educational psychology*, 91(1), 175.
- [29] Rittle-Johnson, B., Schneider, M. & Star, J. R. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587–597. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x>
- [30] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- [31] Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 577-592.
- [32] Skandaali muhii matematiikan yo-kokeissa – paras arvosana ilman osaamista <https://www.ksml.fi/paikalliset/2658410> [Viitattu 14.5.2026]
- [33] Smith, J. P., diSessa, A. A. & Roschelle, J. (1993). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115–163. <http://www.jstor.org/stable/1466679>
- [34] Spencer, M., Fuchs, L. S. & Fuchs, D. (2020). Language-related longitudinal predictors of arithmetic word problem solving: A structural equation modeling approach. *Contemporary educational psychology*, 60, 101825.
- [35] Ylioppilastutkintolautakunta (2020). Matematiikka (pitkä oppimäärä), kevät 2020. Saatavilla: <https://yle.fi/a/20-296497> [viitattu 26.5.2026]
- [36] Ylioppilastutkintolautakunta (2021). Matematiikka (pitkä oppimäärä), kevät 2021. Saatavilla: <https://yle.fi/a/20-308087> [viitattu 26.5.2026]
- [37] Ylioppilastutkintolautakunta (2020). Matematiikka (lyhyt oppimäärä), kevät 2020. Saatavilla: <https://yle.fi/a/20-296489> [viitattu 26.5.2026]
- [38] Ylioppilastutkintolautakunta (2022). Matematiikka (lyhyt oppimäärä), syyskuu 2022. Saatavilla: <https://yle.fi/a/20-10002861> [viitattu 26.5.2026]