



YLEISET VIRHEET SANALLISISSA GEOMETRIAN  
YLIOPPILASKOETEHTÄVISSÄ

Vilma Karttunen

Pro gradu -tutkielma  
huhtikuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

**Tarkastajat:**

Prof. Vesa Halava

FT Arttu Karppinen

Turun yliopiston laatu järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

**Pääaine:** Matematiikka

**Tekijä:** Vilma Karttunen

**Otsikko:** Yleiset virheet sanallisissa geometrian ylioppilaskoetehtävissä

**Ohjaaja:** Prof. Vesa Halava

**Sivumäärä:** 39 sivua

**Aika:** huhtikuu 2026

---

Tässä pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan, minkälaisia virheitä kokelaat yleisimmin tekevät sanallisissa geometrian ylioppilaskoetehtävissä. Geometria on osa sekä matematiikan lyhyen että pitkän oppimäärän opetussuunnitelmaa, joten kaikki lukiolaiset harjoittelevat geometrian tehtävien ratkaisemista. Sanallisissa geometrian tehtävissä ei ole tehtävänannossa mukana mallikuvaa tilanteesta, vaan pelkästään sanallinen selitys. Tämä pakottaa kokelaan visualisoimaan tehtävänannon tilanteen itse.

Tutkimusaineisto sisältää sata ratkaisua jokaisesta kolmesta tarkasteltavasta sanallisesta geometrian ylioppilaskoetehtävästä. Tehtävistä yksi on lyhyen oppimäärän ja kaksi pitkän oppimäärän kokeista. Analysoitava aineisto on Ylioppilastutkintolautakunnan luovuttama korpusaineisto, joka koostuu satunnaisesti valittujen anonyymien kokelaiden vastauksista. Analyysi suoritettiin käymällä kokelaiden ratkaisut läpi kahteen kertaan ja poimimalla heidän tekemänsä virheet ylös.

Tehtäväkohtaisten virhetyyppien perusteella virhetyypit pystyttiin yhdistämään kuudeksi yleiseksi virheluokaksi. Nämä virheluokat ovat geometriseen hahmottamiseen, perusteluihin, laskemiseen, käsitteellisyteen, mittoihin ja merkintätapaan liittyvät virheet. Näistä neljä esiintyi kaikissa kolmessa tutkimuksen ylioppilaskoetehtävästä. Kyseisiä virheluokkia yhdistää muun muassa se, että kaikki niistä voivat mahdollisesti johtua kokelaiden vaikeuksista ymmärtää tehtävänanto pelkän sanallisen ohjeen avulla oikein.

Asiasanat: geometria, sanalliset geometrian tehtävät, virhe, virhekäsitys, matematiikan ylioppilaskoe.



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Geometria</b>	<b>2</b>
2.1	Geometria lukion opetussuunnitelmassa . . . . .	2
2.2	Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe . . . . .	3
2.3	Geometrinen ajattelu . . . . .	3
2.4	Sanallisten geometrian tehtävien hahmottaminen . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Virhekäsitykset</b>	<b>7</b>
3.1	Virhe ja virhekäsitys . . . . .	7
3.2	Virhekäsitykset matematiikassa . . . . .	8
3.3	Virhekäsitykset geometriassa . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Tutkimuksen toteutus</b>	<b>12</b>
4.1	Aineisto ja tutkimuskysymykset . . . . .	12
4.2	Analyysin kuvaus . . . . .	12
4.3	Tehtävänannot ja malliratkaisut . . . . .	13
4.3.1	Kevät 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 12. Piilotetut pallot . . .	13
4.3.2	Syksy 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 7. Avaruuskappale . . .	14
4.3.3	Syksy 2021, lyhyt oppimäärä, tehtävä 12. Tornin rakentaminen	17
<b>5</b>	<b>Tulokset</b>	<b>19</b>
5.1	Kevät 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 12. Piilotetut pallot . . . . .	19
5.2	Syksy 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 7. Avaruuskappale . . . . .	24
5.3	Syksy 2021, lyhyt oppimäärä, tehtävä 12. Tornin rakentaminen . . . .	29
5.4	Yhteenveto . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Luotettavuus</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Pohdinta</b>	<b>33</b>
7.1	Tulosten tarkastelua . . . . .	34
7.2	Johtopäätökset . . . . .	36



# 1 Johdanto

Geometria on yksi matematiikan oleellisimmista osa-alueista (Jablonski & Ludwig, 2023). Sanoja matematiikka ja geometria pidettiin pitkän aikaa synonyymeina. Sana geometria tulee alun perin kreikasta ja tarkoittaa maailman mittaamista (Jablonski & Ludwig, 2023). Geometria on antanut ihmisille mahdollisuuden oppia todellisesta maailmasta ja mitata siellä tapahtuvia asioita. Geometria onkin ollut relevanttia siitä asti, kun ihmiset ovat vuorovaikuttaneet luonnon ja luonnossa tapahtuvien ilmiöiden kanssa (Jablonski & Ludwig, 2023). Geometrian opetus kouluissa alkaa jo vuosiluokilla 1-2 (Opetushallitus, 2014). Geometriaa opetetaan jo ensimmäisiltä luokilta lähtien, sillä se kehittää oppilaiden spatiaalisten tilasuhteiden ymmärtämistä ja opettaa esimerkiksi perusteltujen johtopäätösten tekemistä (Silfverberg, 2018). Näitä oppeja hyödynnetään myös muilla matematiikan osa-alueilla. Geometriassa opeteltavat asiat, kuten pisteet, tasot, avaruuskappaleet ja suureet, ovat valikoituneet opetukseen, koska niiden avulla pystytään selittämään maailmassa tapahtuvia ilmiöitä (Silfverberg, 2018).

Yksi koulugeometrian tunnusomaisista piirteistä on visuaalisuuden tärkeys (Silfverberg, 2018). Geometrian tehtävissä annettujen tietojen oikein hahmottaminen on tehtävän ratkaisun kannalta hyvin tärkeää (Silfverberg, 2018). Tämä korostuu erityisesti sanallisissa tehtävissä, joissa ei ole mukana mallikuvaa tilanteesta (Arsenault & Powell, 2022). Geometrian tehtävien mallinnuksen esimerkiksi kuvien avulla onkin tutkittu auttavan oppilaita ongelmien ratkaisemisessa ja vähentävän virheiden todennäköisyyttä (Supardi ym., 2021). Mahdollisten virheisiin kannattaa kuitenkin kiinnittää huomiota, sillä ne saattavat kertoa opiskelijalla olevasta virhekäsityksestä (Mosia ym., 2023). Virhekäsitykset ovat matematiikassa ja geometriassa yleisiä ja johtuvat usein siitä, että opiskelijat eivät ymmärrä syvällisesti tehtävien tarkoitusta (Riccomini, 2005). Jos aiemmin opittua tietoa ei ole ymmärretty kunnolla, riski virhekäsitysten syntymiselle kasvaa (Ay, 2017).

Tämän tutkielman tavoitteena on tarkastella opiskelijoiden tekemiä virheitä sanallisissa geometrian ylioppilaskoetehtävissä. Tutkielmassa tarkastellaan opiskelijoiden tekemiä virheitä ja pohditaan virheisiin mahdollisesti johtavia tekijöitä. Tutkielmassa tarkastellaan kolmea sanallista geometrian ylioppilaskoetehtävää vuodelta 2021. Tehtävistä kaksi on pitkän ja yksi lyhyen matematiikan ylioppilaskokeista. Tutkimusaineistona toimii Ylioppilastutkintolautakunnan tutkimuskäyttöön luovuttama aineisto, joka sisältää sadan satunnaisesti valitun kokelaan vastaukset tarkasteltavista ylioppilaskoetehtävistä.

Tutkielman luvussa kaksi tarkastellaan geometriaa lukion opetussuunnitelmassa, sähköistä matematiikan ylioppilaskoetta sekä geometrista hahmottamista. Luvussa kolme perehdytään virheiden ja virhekäsitysten muodostumiseen ja niiden ilmenemiseen matematiikassa. Tutkimuksen kohteena ovat ylioppilaskoetehtävät ja niiden malliratkaisut esitellään neljännessä luvussa. Opiskelijoiden vastauksiin perustuvat tutkimuksen tulokset ovat luvussa viisi ja tulosten luotettavuuden tarkastelu luvussa kuusi. Luvussa seitsemän tehdään tuloksien pohjalta johtopäätöksiä.

## 2 Geometria

Tässä luvussa esitellään, miten geometria esiintyy lukion opetussuunnitelmassa ja miten matematiikan sähköinen ylioppilaskoe toimii. Lisäksi luvussa käsitellään geometrista ajattelua van Hielin teoriaan perustuen. Lopuksi käsitellään sanallisten geometrian tehtävien hahmottamista.

### 2.1 Geometria lukion opetussuunnitelmassa

Lukion opetussuunnitelmassa on eriteltyä jokaisen oppiaineen kurssien tavoitteet ja keskeiset sisällöt (Opetushallitus, 2015). Tässä tutkielmassa keskitytään erityisesti vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmaan, sillä opiskelijat, jotka ovat suorittaneet tässä tutkielmassa tarkasteltavat ylioppilaskoetehtävät, ovat käyneet lukion vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisesti. Syksyllä 2021 aloittaneet opiskelijat toteuttavat uutta opetussuunnitelmaa (Opetushallitus, n.d.).

Opetussuunnitelmasta nähdään, että matematiikan opetus lukiossa aloitetaan kaikille pakollisesta kurssista MAY1: Luvut ja lukujonot (Opetushallitus, 2015). Tämän jälkeen opiskelija valitsee, suorittaako hän pitkän vai lyhyen oppimäärän matematiikasta. Pitkän matematiikan yleisinä opetuksen tavoitteina mainitaan esimerkiksi se, että opiskelija tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn, osaa käyttää matematiikan kieltä, kehittää ongelmanratkaisutaitojaan ja osaa käyttää oikeita ratkaisumenetelmiä (Opetushallitus, 2015). Lisäksi opetussuunnitelmassa painotetaan, että matematiikan pitkän oppimäärän yhtenä tehtävänä on antaa opiskelijalle korkeakouluopintojen edellyttämät matemaattiset valmiudet. Lyhyen matematiikan oppimäärän tehtävänä painotetaan enemmän sitä, että opiskelija osaa käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa (Opetushallitus, 2015). Opetuksen tavoitteita lyhyessä matematiikassa ovat esimerkiksi se, että opiskelija osaa käyttää matematiikkaa osana elämää, kehittää käsitystään matematiikan luonteesta ja osaa käyttää erilaisia malleja ajattelun apuna (Opetushallitus, 2015).

Matematiikan pitkässä oppimäärässä geometrian aiheita käsitellään kursseilla MAA3: Geometria ja MAA5: Analyyttinen geometria (Opetushallitus, 2015). Geometrian kurssin tavoitteena on esimerkiksi se, että opiskelija kehittyy geometrinen muotojen hahmottamisessa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa. Kurssin jälkeen opiskelijan tulisi osata hyödyntää geometrinen kuvioiden tai kappaleiden ominaisuuksia geometrinen ongelmien ratkaisemisessa. Lisäksi tavoitteena on, että opiskelija osaa hyödyntää teknisiä apuvälineitä geometrian tehtävien teossa (Opetushallitus, 2015). Analyyttisen geometrian kurssin tavoitteena on muun muassa se, että opiskelija ymmärtää, miten analyttinen geometria yhdistää algebralliset käsitteet geometrian kanssa. Kurssilla opiskelija oppii esimerkiksi tutkimaan pisteitä, suoria ja paraabeleja yhtälöiden avulla (Opetushallitus, 2015).

Lyhyessä oppimäärässä geometriaa käsitellään kurssilla MAB3: Geometria (Opetushallitus, 2015). Kurssin tavoitteet ovat hyvin samankaltaiset pitkän oppimäärän geometrian kurssin kanssa. Myös lyhyessä oppimäärässä tavoitteena on, että opiskelija

harjaantuu geometrinen muotojen ja niiden ominaisuuksien hahmottamisessa. Lisäksi tavoitteena on, että opiskelija oppii hyödyntämään teknisiä apuvälineitä. Erona pitkän oppimäärän tavoitteisiin on esimerkiksi se, että lyhyen oppimäärän tavoitteissa korostetaan geometrian hyödyntämistä käytännön ongelmien ratkaisemisessa (Opetushallitus, 2015).

## 2.2 Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe

Matematiikan ylioppilaskoe suoritetaan sekä lyhyessä että pitkässä oppimäärässä sähköisellä Abitti-järjestelmällä (Ylioppilastutkintolautakunta, n.d.). Koeaika on 6 tuntia ja sen tarkoituksena on saada selville, kuinka hyvin opiskelija on omaksunut lukion oppimäärään kuuluvat asiat matematiikassa. Sekä lyhyen että pitkän oppimäärän kokeet ovat jaettu kahteen eri osaan (Ylioppilastutkintolautakunta, n.d.). A-osassa tehtäviä on 4-9 kappaletta, joista kokelas tekee 3-6. Tällöin myös koeympäristön laskinohjelmia on rajoitettu. Kun kokelas on palauttanut A-osan, saa hän siirtyä B-osaan, jossa myös kaikki laskinohjelmat on käytössä. B-osa voi jakautua vielä osiin B1 ja B2. Tehtäviä on kokeesta riippuen 4-9 kappaletta, joista kokelas tekee jälleen 3-6 (Ylioppilastutkintolautakunta, n.d.). Kokeen enimmäispisteet ovat 120 pistettä ja jokainen tehtävä on vuoden 2015 opetussuunnitelman pohjalta tehdyissä kokeissa 12 pisteen arvoinen. Sähköisen ylioppilaskokeen aikana kokelaalla ei ole saanut syksyn 2020 jälkeen olla mukana erillistä laskinta tai taulukkokirjaa, vaan nämä löytyvät Abitti-järjestelmästä. (Ylioppilastutkintolautakunta, n.d.).

Koesuoritukset arvioidaan kaksi kertaa; ensin lukion matematiikan opettajan toimesta ja lopullisesti Ylioppilastutkintolautakunnan sensorin tekemänä (Ylioppilastutkintolautakunta, n.d.). Hyvässä vastauksessa tulee olla tarvittavat laskut ja perustelut siitä, miten lopputulokseen on päästy. Merkintöjen tulee olla selkeät, jotta koetta tarkastava opettaja ja sensori ymmärtävät, mitä kokelas on tarkoittanut. Vähäiset laskuvirheet eivät vähennä merkittävästi tehtävän pisteitä, jos virhe ei muuta tehtävän luonnetta. Jos kokelas vastaa ylimääräisiin tehtäviin, otetaan huomioon ne tehtävät, joista saatava pistesumma on pienin (Ylioppilastutkintolautakunta, n.d.).

## 2.3 Geometrinen ajattelu

Yksi tärkeimmistä geometrian osa-alueista on geometrisen ajattelun ja käsitteenmuodostuksen kehittäminen (Naufal ym., 2021). Geometrinen ajattelu auttaa oppilaita kehittämään kriittisen ajattelun taitoja, minkä takia sitä on tärkeä ottaa opetukseen mukaan. Geometrisen ajattelun ja käsitteenmuodostuksen malleja on monia, mutta niistä tunnetuin on van Hielin ajattelumalli (Naufal ym., 2021). Van Hielin teoria kehitettiin 1950-luvulla aviopari Pierre van Hielin ja Dina van Hiele-Geldofin toimesta (Silfverberg, 2018). Teoria on kehitetty geometrisen ajattelun selittämiseksi, ja sitä voidaan hyödyntää geometrian opetuksessa. Teoriaa on sovellettu nykyisen koulugeometriian tavoitteisiin sopivaksi, mutta teorian perusolettamukset hyväksytään edelleen (Silfverberg, 2018).

Van Hielin teoria perustuu viiteen tasoon, joiden kautta oppilaan geometrinen ajat-

telu voi hierarkisesti kehittyä (Naufal ym., 2021). Tasot toistuvat jokaisen oppilaan geometrisen ajattelun kehityksessä samassa järjestyksessä (Silfverberg, 2018). Jotta oppilas voi siirtyä korkeammalle tasolle, täytyy hänellä olla ymmärrys alemman tason asioista. Toivottua kehitystä geometrisessa ajattelussa ei pysty tapahtumaan, jos oppilaan oma ajattelu on eri tasolla kuin millä opetus on. Tämä korostuu etenkin silloin, jos opetus on korkeammalla tasolla kuin oppilaan ajattelu. Tällöin oppilas ei pysty enää pysymään opetuksessa mukana, eikä kehitystä tapahdu (Silfverberg, 2018).

Van Hielen teorian tasoa 1 kutsutaan visualisoinnin tasoksi (Silfverberg, 2018). Tasolla 1 oppilas tunnistaa geometrisen kuvion sen visuaalisen ulkonäön perusteella (Naufal ym., 2021). Oppilas ei siis tunnista kuvioita niiden ominaisuuksien perusteella, vaan pelkästään ulkonäön perusteella (Silfverberg, 2018). Tasolla 1 oleva oppilas osaa nimetä geometrisia peruskuvioita ja tunnistaa niitä. Lisäksi oppilas pystyy piirtämään peruskuvioita esimerkkien avulla. Visualisoinnin tasoa kuvaa hyvin se, että oppilas voi tunnistaa suorakulmion olevan samanmuotoinen liitutaulun kanssa, mutta ei kuitenkaan osaisi tunnistaa tai nimetä suorakulmiota sen ominaisuuksien, esimerkiksi neljän sivun, perusteella (Silfverberg, 2018).

Tasolla 2 siirrytään tarkastelemaan geometrisia kuvioita niiden ominaisuuksien näkökulmasta (Silfverberg, 2018). Kyseistä tasoa kutsutaan ominaisuuksien analysoinnin tasoksi. Tällä tasolla oppilas osaa tunnistaa kuvioita niiden ominaisuuksien perusteella, mutta ei kuitenkaan pidä ominaisuuksia merkityksellisinä (Naufal ym., 2021). Oppilas ei siis kiinnitä huomiota siihen, miten kuvion ominaisuudet riippuvat toisistaan (Silfverberg, 2018). Tasolla 2 kuvioita osataan myös vertailla keskenään niiden ominaisuuksien avulla. Tällä tasolla oleva oppilas osaa kertoa, että esimerkiksi suorakulmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret ja sillä on kaksi pitkää ja kaksi lyhyttä sivua (Silfverberg, 2018).

Tasoa 3 kutsutaan ominaisuuksien järjestämisen tasoksi (Silfverberg, 2018). Tällä tasolla oppilas osaa tunnistaa, luokitella ja hyödyntää kuvion eri ominaisuuksien välisiä suhteita (Naufal ym., 2021). Oppilas pystyy siis tunnistamaan, että tarkasteltavan kuvion eri ominaisuuksilla on yhteyksiä toisiinsa ja pystyy käyttämään niitä tehtävien ratkaisemisessa (Silfverberg, 2018). Lisäksi oppilas pystyy seuraamaan ja käyttämään deduktiota lyhyissä päättelyissä. Hän osaa myös tutkia, sisältyykö tietyt kuvioluokat toisiinsa. Esimerkiksi neliö osataan tulkita suorakulmioksi ja selittää, miksi näin on (Silfverberg, 2018).

Van Hielen taso 4 on formaalin päättelyn taso (Silfverberg, 2018). Tällä tasolla oppilas osaa rakentaa loogisen todistuksen geometrisille kuvioille (Naufal ym., 2021). Oppilas pystyy päättelemään tehtävänannon tietojen perusteella, mitä seurauksia annetuilla tiedoilla voi olla (Silfverberg, 2018). Hän osaa myös poimia tehtävänannosta geometrisen lauseen todistamiseen vaadittavat tiedot. Tasolla 4 oppilas ymmärtää, miksi geometristen ominaisuuksien lauseet vaativat euklidisessa geometriassa todistuksen, eikä niitä voida todeta vain kuvan avulla. Lisäksi hän osaa laatia itse nämä vaadittavat todistukset (Silfverberg, 2018).

Viimeinen eli viides van Hielen teorian taso on aksiomasysteemin ymmärtämisen taso (Silfverberg, 2018). Tällä tasolla ollessaan oppilaan ymmärrys geometriasta on van Hielen teorian mukaan korkeimmalla mahdollisella tasolla. Oppilas pystyy tarkastelemaan eri geometrioiden välisiä eroja ja samankaltaisuuksia aksiomaattisina järjestelminä (Silfverberg, 2018). Lisäksi hän pystyy tutkimaan esimerkiksi euklidisen geometrian suorakulmiokäsitettä pallogeometrian tapauksessa. Oppilaan ymmärtäminen geometriasta on siis niin korkealla, että hän pystyy todistamaan aksiomaattisen muutoksen vaikutuksen geometrisen lauseen esitykseen (Naufal ym., 2021). Van Hielen mallin käytön on osoitettu vaikuttavan positiivisesti geometrisen ajattelun kehittämiseen, minkä takia sitä käytetään edelleen osana geometrian opetusta (Naufal ym., 2021).

## 2.4 Sanallisten geometrian tehtävien hahmottaminen

Arsenault ja Powell (2022) määrittelevät sanallisen tehtävän olevan matemaattinen tehtävä, joka on kirjoitettu tekstimuodossa. Sanallisten matematiikan tehtävien ratkaisemisen on huomattu usein tuottavan ongelmia. Erityisen vaikeaa niiden ratkaiseminen on sellaisille oppilaille, joilla on muutenkin matemaattisia vaikeuksia (Arsenault & Powell, 2022). Sanallisen tehtävän ratkaisemiseksi oppilaan täytyy käyttää useita eri taitoja. Tehtävä täytyy tulkita oikein, jonka jälkeen oppilaan täytyy laatia mielessään suunnitelma tehtävän ratkaisemiseksi. Vasta tämän jälkeen oppilas voi alkaa kunnolla ratkaisemaan tehtävää (Arsenault & Powell, 2022). Tehtävän tulokinnassa oppilaan tulee tunnistaa jokin aiemmin tuttu malli tai tehtävätyyppi, jolla tehtävän saa ratkaistua. Tällainen skeema voi olla esimerkiksi Pythagoraan lauseen käyttö. Sanallisia tehtäviä usein myös vaikeutetaan erilaisilla ominaisuuksilla. Teksti voi olla monimutkaisesti kirjoitettua ja se voi sisältää epäolennaisia tietoja. Myös esimerkiksi laskujen monimutkaisuus ja mahdollisen mallikuvan poissaolo vaikeuttavat sanallisen tehtävän ratkaisemista (Arsenault & Powell, 2022).

Sanallisten tehtävien ratkaisemisessa tehtävän tulkitseminen ja visualisointi voi usein aiheuttaa vaikeuksia (Arsenault & Powell, 2022). Etenkin geometrian sanallisissa tehtävissä visualisointi on tärkeässä roolissa, sillä ilman visualisointia oppilas ei usein pysty tuottamaan riittävän hyvää ratkaisua (Žakelj & Klančar, 2022). Žakelj ja Klančar (2022) määrittelevät visualisoinnin olevan erilaisten visuaalisten esitysten huomista, soveltamista ja pohdintaa. Visualisointi voi esimerkiksi olla sitä, että oppilas pystyy luomaan mallikuvia sanallisen tehtävänannon perusteella mentaalisesti tai fyysisesti esimerkiksi paperille piirtämällä (Žakelj & Klančar, 2022). Visualisointia pidetään tärkeänä osa-alueena etenkin avaruudellisessa hahmottamisessa ja hyvä visualisointi parantaa oppilaan ongelmanratkaisukykyä (Hlongwana ym., 2025). Se luo olennaisen perustan oppilaan tilanhahmotuskyvylle ja sitä voidaan pitää jopa tärkeimpänä osana matemaattista ongelmanratkaisua (Hlongwana ym., 2025). Visualisointi ei ole täysin synnynnäinen kyky, vaan sitä harjoitellaan jo matematiikan alkuopetuksessa. Koska visualisointia voi harjoitella, olisi sen käyttöön kannustaminen ja sen opettaminen tärkeää kaikilla koulutustasoilla (Žakelj & Klančar, 2022).

Žakelj ja Klančar (2022) luettelevat artikkelissaan erilaisia tapoja visualisoida geometrisiä käsitteitä. Näitä tapoja ovat esimerkiksi konkreettiset mallikappaleet, staattiset graafiset esitykset (esimerkiksi kuvat), dynaamiset graafiset esitykset (esimerkiksi videot tai sovelmat) ja tietokoneohjelmilla tehdyt esitykset. Näiden didaktisten apuvälineiden käyttö geometrian opetuksessa opettaa oppilaita visualisoimaan geometrisiä käsitteitä. Lisäksi mallinnusten käyttö voi auttaa oppilaita ymmärtämään geometrisiä käsitteitä ja niiden välisiä suhteita syvemmin (Žakelj & Klančar, 2022). Esimerkiksi tietokoneohjelmat mahdollistavat kolmiulotteisten kappaleiden hyvän hahmottamisen, mikä auttaa monien tehtävien ratkaisemisessa. Tällä on myös iso vaikutus oppilaan avaruudellisen hahmotuskyvyn kehittymiseen (Žakelj & Klančar, 2022).

Hlongwana ym. (2025) artikkelissa väitetään, että kuvat tiivistävät geometrisiä tilanteita paremmin kuin pelkkä sanallinen kuvaus. Myös Arsenault ja Powell (2022) artikkelin mukaan oppilaat suoriutuvat tehtävästä yleensä paremmin, jos tehtävänannossa on mukana tilannetta mallintava kuva pelkän tekstin lisäksi. Hlongwana ym. (2025) artikkelissa tutkitaankin, miten oppilaat vastaavat geometrian tehtäviin ja kuinka hyvin he onnistuvat niissä. Tutkimuksessa käytettiin sekä mallintavia kuvia sisältäviä tehtäviä että pelkkiä sanallisia tehtäviä. Tulokset osoittavat, että pelkän sanallisen ohjeen sisältävässä tehtävässä oli monilla oppilailla ongelmia geometristen käsitteiden ja niiden välisten suhteiden ymmärtämisessä. Mallikuvan sisältävissä tehtävissä suoriutuminen oli taas parempaa, etenkin sellaisilla oppilailla, joilla on matemaattisia vaikeuksia. Tehtävänannon mallikuvien huomattiin siis ohjaavan oppilaiden kriittistä ajattelua oikeaan suuntaan tehtävää ratkaistaessa (Hlongwana ym., 2025).

Mallikuvien ja visualisoinnin roolia on tutkittu myös muissa tutkimuksissa. Mudaly ja Reddy (2016) tutkivat visualisoinnin roolia euklidisen geometrian tehtävissä. Tutkimuksen tuloksista selvisi, että suurin osa tutkimukseen osallistujista piti visualisointia merkittävänä osana todistusta ja ongelmanratkaisua. Osallistujien mielestä kaaviot ja kuvat ovat hyödyllisiä geometristen ongelmien ratkaisemisessa. Tutkimuksesta kuitenkin selvisi myös, että vaikka mallikuvien piirtäminen koetaan hyödyllisenä, ei kaikilla tutkimukseen osallistuneilla ollut riittävästi valmiuksia tuottaa niitä onnistuneesti (Mudaly & Reddy, 2016). Myös Mudaly (2021) tutkimuksesta selvisi, että mallikuvat ovat ratkaisevan tärkeitä oppimisprosessissa, koska ne vahvistavat syvempää ymmärrystä ratkaistavasta tehtävästä. Paperille piirretyn tai mentaalisen mallikuvan avulla oppilas pystyy poimimaan helpommin ratkaisun tehtävään ja pohtimaan sitä monelta eri kantilta. Artikkelissa mainitaan, että opetuksen ja oppimisen yhtenä tärkeimpänä asiana onkin visualisoida tehtävänanto joko mentaalisesti tai ulkoisesti, esimerkiksi piirtämällä mallikuva paperille (Mudaly, 2021). Visualisointitekniikoiden ja mallikuvien käytön tärkeyttä korostetaan myös Hlongwana ym. (2025) artikkelissa.

Geometriaa pidetään usein vaikeana ja helposti ahdistusta aiheuttavana matematiikan osa-alueena (Mudaly & Reddy, 2016). Koska geometrian tehtävien ratkaiseminen saattaa tuntua vaikealta ja työläältä, opiskelijat yrittävät usein muistaa todistuksia

ja laskukaavoja ulkoa syvällisen ymmärtäminen sijaan (Mudaly & Reddy, 2016). Tämä johtaa siihen, että opiskelijat tekevät helposti virheitä ratkaistessaan tehtäviä, eivätkä löydä ratkaisuja virheisiinsä (Supardi ym., 2021). Opiskelijoiden on huomattu myös usein tulkitsevan geometriaan liittyviä kysymyksiä väärin, sillä syvällinen ymmärrys on heikkoa (Hlongwana ym., 2025).

### 3 Virhekäsitykset

Tässä luvussa määritellään virheen ja virhekäsitykset termit. Luvussa esitellään yleisiä syitä matematiikassa esiintyville virhekäsityksille ja keinoja niiden poistamiseen. Lopuksi virhekäsityksiä tarkastellaan vielä tarkemmin geometrian näkökulmasta esimerkkien avulla.

#### 3.1 Virhe ja virhekäsitys

Virhe ja virhekäsitys liittyvät vahvasti toisiinsa, mutta ovat eri asia (Luneta & Makonye, 2010). Virhe on jokin pieni erehdys, lipsahdus tai poikkeama halutusta tarkkuudesta. Virheet eivät tapahdu systemaattisesti, koska ne ovat tahattomia vääriä vastauksia. Virheitä voidaan havaita erilaisissa oppilaiden tekemissä tuotoksissa, kuten kirjoitetussa tekstissä, puheessa tai laskutehtävissä (Luneta & Makonye, 2010). Yksi virheen tunnusomainen piirre on se, että oppilas pystyy itse korjaamaan tekemänsä virheen spontaanisti (Mosia ym., 2023). Virheitä tehdään sekä aloittelijoiden että asiantuntijoiden toimesta, eli kukaan ei pysty kokonaan välttymään niiltä (Mosia ym., 2023).

Virheet eivät kuitenkaan välttämättä tapahdu aina satunnaisesti, vaan niiden juuret voivat olla oppilaan virheellisessä ajattelussa (Mosia ym., 2023). Systemaattisia virheitä kutsutaan virhekäsitykseksi (Luneta & Makonye, 2010). Virhekäsitykset ovat siis toistuvia vääriä vastauksia, jotka johtuvat virheellisestä ajattelutavasta (Luneta & Makonye, 2010). Toistuvat virheet kertovat siitä, että oppilaalla ei ole kunnollista ymmärrystä käsiteltävästä asiasta, eli hänelle on syntynyt virhekäsitys asiasta (Ozkan ym., 2018). Virhekäsityksen aiheuttama virheellinen ajattelutapa johtuu usein oppilaan omista kokemuksista tai väärinkäsityksistä opetuksen aikana (Ozkan ym., 2018). Usein virhekäsitykset myös ovat oppilaalle intuitiivisesti järkeviä, minkä takia niitä ei ole pystytty opetuksessa korjaamaan (Luneta & Makonye, 2010).

Virhekäsityksiä voidaan siis pitää virheiden osajoukkona, eli kaikki virhekäsitykset voidaan määritellä virheiksi, mutta virheet eivät välttämättä ole virhekäsityksiä (Ay, 2017). Virhe siis mahdollisesti seuraa virhekäsityksestä ja virheitä havainnoimalla voidaan löytää virhekäsityksiä oppilaan ajattelun taustalta (Ay, 2017). Virhekäsityksiä voi kuitenkin olla myös vaikea löytää ja ne saattavat jäädä opettajilta huomaamatta. Esimerkiksi matematiikan laskun vastaus voi olla oikein, mutta todellisuudessa siihen ollaan päästy vahingossa, eikä oikeita menetelmiä käyttämällä (Luneta & Makonye, 2010). Tällöin virhekäsitys ei ilmene vastauksesta, vaan sen huomaamiseksi täytyisi opettajan seurata oppilaan ajattelua ja päättelyketjua.

Opettajien olisikin tärkeää kiinnittää huomiota oppilaiden selityksiin, jotta he voisivat seurata päättelyä kunnolla (Luneta & Makonye, 2010).

Virhekäsityksen rooli on matematiikassa huomattavasti merkittävämpi kuin yksittäisten virheiden (Ozkan ym., 2018). Virheet ovat satunnaisia, joten niiden tutkiminen on pedagogisesti vähemmän hyödyllistä kuin virhekäsityksien tutkiminen (Mossia ym., 2023). Monet opettajat ovat myös usein tietämättömiä oppilaidensa virhekäsityksistä, vaikka huomion kiinnittäminen niiden korjaamiseen edistäisi oppilaan osaamista (Luneta & Makonye, 2010).

### 3.2 Virhekäsitykset matematiikassa

Matematiikka on kumuloituva tiede, eli tieto rakentuu tiedon päälle (Ozkan ym., 2018). Koska matematiikassa opittavat aiheet liittyvät toisiinsa, on aiemmin opittujen käsitteiden ymmärtäminen välttämätöntä uusien käsitteiden oppimisessa. Matematiikassa opetus liittyykin suoraan siihen, että oppilaan ymmärtävät matemaattisten käsitteiden merkityksen ja yhteyden toisiinsa (Ozkan ym., 2018). Kun oppilaat oppivat uusia asioita, rakentavat he tiedon aiempien tietojensa ja omien ennakkoluulojensa päälle. Jos siis aiemmin opitussa tiedossa on virhekäsitys, siirtyy se myös uuteen tietoon (Ay, 2017). Tämä on yleistä matematiikassa, sillä uusia käsitteitä on melkein mahdotonta määrittellä käyttämättä jo aiemmin opittuja käsitteitä (Ay, 2017).

Luneta ja Makonye (2010) määrittelevät artikkelissaan matematiikan olemuksen olevan sitä, että tietää mitä tehdä ja miksi tehdä niin. Matematiikassa on siis oleellista ymmärtää merkitykset tehtävien laskutoimitusten taustalla (Ozkan ym., 2018). Oppilaiden on kuitenkin usein huomattu suorittavan satunnaisia laskutoimituksia vain saavuttaakseen ratkaisun (Ozkan ym., 2018). Oppilaat turvautuvat siis matemaattisten sääntöjen ulkoa opettelemiseen, eivätkä ymmärrä syvällisesti, miksi laskutoimituksia tehdään (Riccomini, 2005). Tällöin oppilaan matemaattinen tieto on yleensä proseduraalisella eli toimintatapaan liittyvällä tasolla (Luneta & Makonye, 2010). Tällä tasolla ollessaan oppilas tietää miten tehtävä ratkaistaan, mutta ei ymmärrä, miksi ratkaisuun vaadittavat laskutoimitukset tehdään. Tehtävät ratkaistaan usein nopeasti ulkomuistista, mikä johtaa helposti virheiden ja mahdollisten virhekäsitysten syntymiseen (Luneta & Makonye, 2010). Yksi syy tehtävien ulkoa opettelemiselle on matematiikan abstrakti luonne, jonka monet oppilaat kokevat vaikeana (Musyadad & Martadiputra, 2021). Abstraktius aiheuttaa matematiikkaa kohtaan ennakkoluuloja, mikä vähentää oppilaiden halua ymmärtää matematiikkaa syvällisesti (Ozkan ym., 2018). Matematiikka koetaan vaikeana oppiaineena eikä sitä haluta ymmärtää kunnolla, mikä lisää virheiden mahdollisuutta (Musyadad & Martadiputra, 2021).

Matematiikan syvällisen ymmärryksen puutteen lisäksi virheitä matematiikan kokeissa aiheuttaa esimerkiksi kysymysten lukeminen väärin ja huolimattomuus tehtävää tehdessä (Musyadad & Martadiputra, 2021). Musyadad ja Martadiputra (2021) ovat artikkelissaan käsitelleet viittä eri kohtaa tehtävien teossa, jossa virheitä voi

tapahtua. Ensimmäinen kohta on tehtävänannon lukeminen, jolloin oppilaat voivat lukea väärin tehtävänannossa esiintyviä termejä, symboleja tai tärkeitä tietoja. Tämän jälkeen oppilaan tulisi ymmärtää, mitä tehtävässä kysytään. Usein oppilaat eivät kuitenkaan tiedä, mitä tehtävässä kysytään. Kolmas kohta liittyy tehtävässä tarvittavien muutosten tekemiseen. Oppilaat saattavat esimerkiksi tehdä yksikönmuunnoksia, mutta eivät suorita niitä kaikille suureille. Lisäksi he saattavat käyttää väärää laskutoimituksia tehtävän tekemiseen. Neljäs virheen mahdollisuus liittyy tehtävän käsittelytaitoihin. Oppilaat voivat tehdä laskuvirheitä tai eivät osaa jatkaa laskun tekemistä. Viimeisessä kohdassa virheet liittyvät lopullisen vastauksen esittämiseen. Virheitä voi syntyä, kun oppilaat eivät osaa päätellä vastauksia tekemiensä laskujen perusteella tai he esittävät vastauksen liian epätarkasti. Musyadad ja Martadiputra (2021) tutkimuksessa selvisi, että oppilaat tekivät eniten virheitä kolmannessa vaiheessa eli muutosten tekemisessä. Vähiten virheitä tapahtui tehtävänannon lukemisessa (Musyadad & Martadiputra, 2021).

Ozkan ym. (2018) esittelevät artikkelissaan esimerkkejä virheitä ja virhekäsityksiä poistavista tekijöistä. Yhtenä tärkeimmistä tekijöistä pidetään arkielämän ja koulussa opeteltavien käsitteiden yhdistämistä toisiinsa. Artikkelin mukaan opetuksessa tulisi käyttää etenkin arkielämään liittyviä esimerkkejä, jotta oppilaat pystyisivät yhdistämään matematiikan abstraktit asiat konkreettisiin ja tuttuihin käsitteisiin (Ozkan ym., 2018). Konkreettisten esimerkkien lisäksi olisi tärkeää, että oppilaat pystyisivät yhdistämään uuden tiedon aiemmin opetettuun tietoon. Jos opittavat asiat jäävät irrallisiksi toisistaan, voi virheitä syntyä helpommin. Ozkan ym. (2018) korostavat opettajan vastuun merkitystä virheiden poistamisessa. Opettajan tulisi esimerkiksi ohjata oppilaita uusien käsitteiden opetuksen jokaisessa vaiheessa, jotta virhekäsityksiltä vältyttäisiin. Lisäksi opettajan tulisi kiinnittää huomiota mahdollisten aiempien virhekäsitysten korjaamiseen ennen uusien käsitteiden opettamista (Ozkan ym., 2018).

Asenteet virheitä ja virhekäsityksiä kohtaan ovat muuttuneet, eikä niitä pidetä enää yhtä kielteisessä valossa (Mosia ym., 2023). Virhekäsitykset ajatellaankin nykyään enemmän mahdollisuuksina opettajille ymmärtää, miten oppilaat ajattelevat ja käsitteellistävät matemaattista sisältöä. Mosia ym. (2023) mainitsevat artikkelissaan, että opetuksen onnistumisen kannalta olisi tärkeää, että matematiikan opettaja kykenee analysoimaan oppilaiden tekemiä virheitä ja kehittämään ratkaisuja niiden korjaamiseen. Myös Riccomini (2005) artikkelissa painotetaan virheiden tunnistamista, jota opettajat pystyvät tekemään oppilaiden työskentelyn systemaattisella tarkkailulla. Artikkelissa tutkittiin opettajien kykyä tunnistaa oppilaiden tekemiä virheitä. Tutkimus osoitti, että opettajat pystyivät tunnistamaan virhemalleja, mutta eivät aina osanneet määritellä syvällisempää syytä virheelle. Tällä voi olla vakavia seurauksia etenkin huonommin suoriutuvien oppilaiden kehitykselle, sillä jos he eivät saa tukea virhekäsitystensä korjaamiseen, jatkavat he todennäköisesti samojen virheiden tekemistä. Tämä puolestaan lannistaa oppilasta ja heikentää edelleen hänen tulevaa suoriutumistaan matematiikassa (Riccomini, 2005).

Virhekäsitysten tunnistaminen ja niiden poistaminen on linjassa myös Luneta ja

Makonye (2010) artikkelin kanssa. Artikkelissa mainitaan, että nykyään suositellaan siirtymistä opettajakeskeisestä opetuksesta oppijakeskeiseen lähestymistapaan. Siinä tärkeää on reagoida oppilaiden kohtaamiin vaikeuksiin, kuten matematiikassa tehtäviin virheisiin ja virhekäsityksiin (Luneta & Makonye, 2010). Oppilaiden tekemiä virheitä ei siis pitäisi nähdä ongelmana, vaan oppimisen mahdollisuutena (Mosia ym., 2023). Opettaja voi parantaa oppilaiden matemaattisten ajattelun kehittymistä ja sitä kautta syvällisempää oppimista esimerkiksi pyytämällä enemmän selityksiä laskutoimituksiin (Ozkan ym., 2018). Näin opettaja pystyy paremmin näkemään, missä kohtaa tehtävää oppilaat tekevät virheitä. Lisäksi selitysten lisääminen kehittää oppilaan taitoja, sillä selitykset pakottavat oppilaita harjoittelemaan matemaattista ajattelua eikä vain opettelemaan sääntöjä ulkoa (Ozkan ym., 2018).

### 3.3 Virhekäsitykset geometriassa

Uygun ym. (2024) esittelevät artikkelissaan erilaisia keinoja, joiden avulla oppilaiden geometrisia virhekäsityksiä on pyritty tunnistamaan ja tutkimaan. Näitä keinoja ovat esimerkiksi ongelmanratkaisutehtävät, teknologian hyödyntäminen, havainnollistavien kuvien ja dynaamisten geometriaohjelmien käyttö sekä van Hielin teoriaan pohjautuvat testit (Uygun ym., 2024). Koska uusien asioiden oppiminen riippuu oppilaan kognitiivisesta tasosta ja opittavien asioiden monimutkaisuudesta, ei kaikkien oppilaiden ole mahdollista oppia uusia käsitteitä samassa tahdissa (Ay, 2017). Van Hielin teoriaan pohjautuvilla tutkimuksilla yritetään usein selvittää, liittyvätkö geometriassa ilmenevät virhekäsitykset siihen, että oppilaan oma van Hielin taso on eri kuin opetuksessa vaadittava taso.

Tutkimuksista on selvinnyt, että geometriassa virheitä tapahtuu pääasiassa siksi, koska oppilailla on vaikeuksia ymmärtää opetusta (Luneta, 2015). Tämä johtuu esimerkiksi siitä, että oppilas on eri van Hielin ajattelutasolla kuin opettajan opetus vaatisi. Oppilas ja opettaja eivät siis ymmärrä toisiaan, mikä aiheuttaa virheitä ja mahdollisesti virhekäsityksiä (Luneta, 2015). Mosia ym. (2023) tutkimuksessa selvisi, että tutkimukseen osallistuneet oppilaat toimivat korkeintaan kolmannella van Hielin tasolla. Suurin osa heidän tekemistään virheitä johtui siitä, että oppilaat tekivät johtopäätöksiä geometrian tehtävien vastauksista visuaalisen esityksen perusteella, eli toimivat van Hielin teorian tasolla 1. Useat tutkimuksen tehtävät olisivat kuitenkin vaatineet tason 4 päättelyä. Tutkimuksesta siis selvisi, että oppilailla oli vain osittaiset tiedot ja taidot geometriasta (Mosia ym., 2023). Myös Luneta (2015) tutkimuksessa selvisi, että tutkimukseen osallistuneet oppilaat toimivat alemmalla van Hielin tasolla, kuin tehtävät vaativat. Artikkelissa korostetaan, että opettajan olisi tärkeää tietää, millä van Hielin tasolla hänen oppilaansa toimivat. Tämän tiedon avulla opettaja pystyy suunnittelemaan opetuksesta mahdollisimman hyödyllistä ja eliminoimaan oppilaiden geometrisia virhekäsityksiä (Luneta, 2015).

Esimerkiksi Özerem (2012), Ozkan ym. (2018), Luneta (2015) ja Uygun ym. (2024) ovat tutkineet geometrisia virhekäsityksiä. Tutkimuksissa selvitetään, mitä virhekäsityksiä oppilailla on geometriasta ja mitkä ovat mahdollisia syitä virhekäsityksille. Özerem (2012) ja Ozkan ym. (2018) tutkimuksissa selvisi, että pinta-alan laskemises-

sa tehtiin paljon virheitä. Virheet johtuivat usein visualisoinnin puutteesta tai väärän kaavan käytöstä (Özerem, 2012). Erilaisten kuvioden, kuten nelikulmion, monikulmion ja kolmion käsitteissä ja määritelmässä huomattiin virhekäsityksiä (Uygun ym., 2024; Özerem, 2012). Oppilaat eivät esimerkiksi ymmärtäneet kuvioden ominaisuuksia ja niiden suhteita toisiinsa (Özerem, 2012). Hahmotuksessa olevat virhekäsitykset ja ongelmat ilmenivät myös vaikeuksina tehdä peilikuviin tai kuvioden siirtämiseen liittyviä tehtäviä oikein (Luneta, 2015; Özerem, 2012).

Paljon virhekäsityksiä ilmeni kulmien suuruuteen ja niiden merkitykseen liittyen (Özerem, 2012). Oppilailla oli vaikeuksia esimerkiksi kulmien suuruuksien laskemisessa sekä vierus-, risti- ja samankohtaisten kulmien hyödyntämisessä tehtävissä. Myös koordinaatistoon liittyvät tehtävät, kuten origoa leikkaavan suoran yhtälö tai suoran kulmakertoimen määrittäminen aiheuttivat oppilaille virheitä (Ozkan ym., 2018). Virheet yksikönmuunnoksissa ovat myös yleisiä ja johtuvat usein siitä, että oppilaat eivät osaa miettiä muunnosten järkevyyttä (Özerem, 2012). Muiden matematiikan osa-alueiden tavoin myös geometriassa iso osa virheistä ja virhekäsityksistä osoittaa, että oppilaat ovat opetelleet mekaaniset laskutoimitukset ulkoa, mutta eivät ymmärrä laskutoimitusten syvällisempiä merkityksiä ja määritelmiä (Ozkan ym., 2018).

## 4 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa käsitellään tutkimuksen aineisto ja tutkimuskysymys (luku 4.1) sekä aineiston analyysiprosessi (luku 4.2). Lisäksi luvussa 4.3 esitellään tutkimuksessa käsiteltävän ylioppilaskoetehtävät. Jokaiseen tehtävään näytetään myös yksi mahdollinen malliratkaisu.

### 4.1 Aineisto ja tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, millaisia virheitä ilmenee sanallisissa geometrian ylioppilaskoetehtävissä matematiikan pitkässä ja lyhyessä oppimäärässä. Lisäksi pohditaan, mitä syitä löydettyjen virheiden syntymiseen voi olla.

Tutkimuskysymys on:

- Minkälaisia virheitä sanallisissa geometrian ylioppilaskoetehtävissä yleisimmin tehdään?

Tutkimuksessa tarkastellaan kolmea ylioppilaskoetehtävää. Kaikki kolme koetta ovat vuodelta 2021 ja niiden sisältö perustuu vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmaan. Tutkielmassa analysoitavana aineistona toimii Ylioppilastutkintolautakunnan luovuttama korpusaineisto, joka koostuu sadan satunnaisesti valitun anonyymien kokeilajien vastauksista tutkimuksessa käsiteltäviin ylioppilaskoetehtäviin. Aineistosta käy ilmi myös kokelaan saama arvosana ylioppilaskokeesta.

Tutkimuksessa käsiteltävistä tehtävistä kaksi on pitkän matematiikan ja yksi lyhyen matematiikan ylioppilaskokeista. Jokainen tehtävistä on kokeen B-osassa, joten kokeilajilla on ollut laskinohjelmat käytössään tehtäviä ratkaistaessa. Kyseiset tehtävät valikoituivat tutkimukseen, sillä niiden tehtävänannot olivat kokonaan sanallisia. Tehtävänannot eivät siis sisältäneet valmiita mallikuvia, vaan kokeilajien tuli hahmottaa tilanne sanallisen kuvauksen perusteella.

### 4.2 Analyysin kuvaus

Analyysiprosessi suoritettiin käymällä aineistona olevat kokeilajien vastaukset läpi kahteen kertaan. Ensimmäisessä vaiheessa vastaukset käytiin yksitellen läpi. Jokaisen vastauksen kohdalla pohdittiin, missä tehtävän kohdassa kokeilaja on tehnyt virheen, jos hän on sellaisen tehnyt. Ratkaisuisissa ilmenneet virheet yksinkertaistettiin sanalliseen muotoon ja jokaisen uuden ratkaisun kohdalla pohdittiin, mihin määrittelyistä virhetyypeistä se sopii. Yksi tehtävä saattoi sisältää useita eri virheitä, jolloin se kuului useaan virhetyyppiin. Jos ratkaisujen läpikäynnissä ilmaantui uusi virhetyyppi, lisättiin se listaan. Ratkaisujen läpikäynnin jälkeen virhetyyppien sanallisia nimiä voitiin muokata ja tarvittaessa yhdistää muutama virhetyyppi keskenään.

Prosessin toisessa vaiheessa jokaisen tehtävän kaikki 100 ratkaisua käytiin uudestaan läpi. Vaiheessa tarkistettiin, että pitävätkö virhetyyppiin lajitellut edelleen paikkansa. Ratkaisujen toisen läpikäynnin aikana korjattiin mahdolliset ensimmäisessä

vaiheessa tulleet virheet. Kahteen kertaan ratkaisujen läpikäyminen lisää analyysin luotettavuutta ja vähentää virheitä. Löydetyt virhetyypit olivat jokaisessa kolmessa tehtävässä hieman erilaiset, sillä tehtävissä laskettiin eri asioita.

Analyysiprosessin kolmannen vaiheen jälkeen laskettiin taulukkolaskentaohjelmalla, kuinka monta ratkaisua kuhunkin virhetyyppiin kuului. Lukumäärät muutettiin prosenttiluvuiksi, jotta eri virhetyyppien vertailu keskenään olisi mahdollisimman mielekästä. Yhteenvetona virhetyypit esitettiin taulukoissa, joista näkee jokaisen tehtävän virhetyypit. Yleisimmin esiintyneistä virheistä annettiin myös esimerkit, joiden pohjalta virhetyyppi on helpompi ymmärtää.

## 4.3 Tehtävänannot ja malliratkaisut

### 4.3.1 Kevät 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 12. Piilotetut pallot

Pöydällä on kolme 3-säteistä palloa, joista kukin pallo koskettaa kahta muuta. Pallot yritetään peittää puolipallon muotoisella kuvulla, jonka säde on  $R$ . Kupu on kuitenkin liian pieni, jolloin sen reuna jää joka kohdassa 1 yksikön korkeudelle pöydästä. Määritä säteen  $R$  tarkka arvo.

Kuva 1: Piilotetut pallot (Ylioppilastutkintolautakunta, 2021a)

Ratkaisu:

Kuvun keskipisteen kautta kulkee symmetria-akseli  $z$ . Pallojen keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion, jonka yhden sivun pituus on 6. Kolmion kärjen etäisyys kolmion keskipisteestä, eli symmetria-akselista  $z$ , saadaan laskettua jakosuhteen avulla. Kuvassa 2 näkyy ylhäältä päin kuvattuna pallot ja niiden muodostama kolmio. Kolmion kärjestä vastakkaiseen sivuun piirretyn korkeusjanan pituus  $h$  saadaan laskettua Pythagoraan lauseella ja se on

$$\begin{aligned} 3^2 + h^2 &= 6^2 \\ h &= \sqrt{6^2 - 3^2} \\ h &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

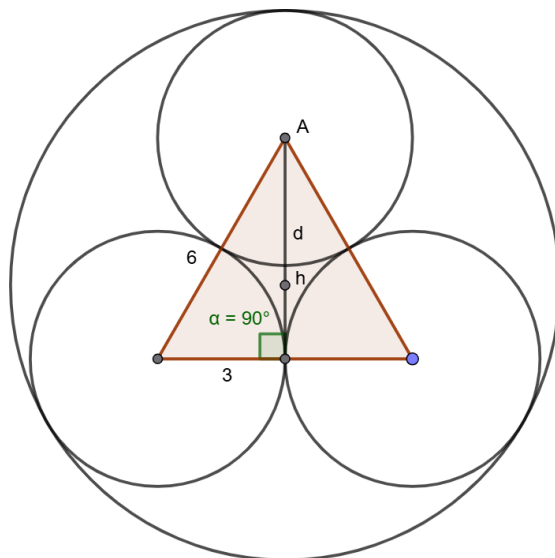
Etäisyys kolmion kärjestä  $A$  keskipisteeseen  $d$  on  $\frac{2}{3}$  koko kolmion korkeudesta  $h$ , sillä jakosuhte on 1:2. Kolmion kärjen etäisyys keskipisteestä on siis

$$d = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

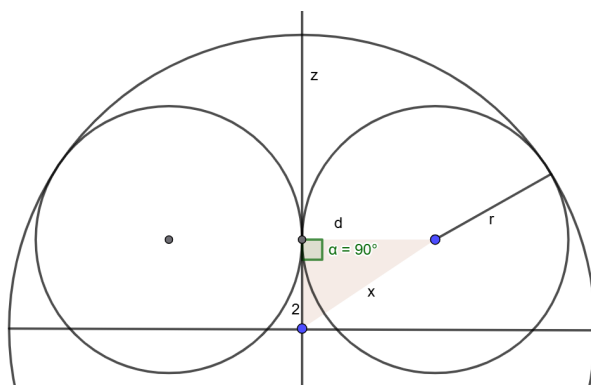
Koska kuvun reuna jää 1 yksikön korkeudelle pöydästä, on kuvun reunan ja pienen pallon keskipisteen korkeusero 2. Lasketaan pienen pallon keskipisteen etäisyys ison kuvun pohjan keskipisteestä Pythagoraan lauseella. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.

$$\begin{aligned} x^2 &= 2^2 + (2\sqrt{3})^2 \\ x &= \sqrt{4 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \end{aligned}$$

Koska pieni pallo on kuvun sisällä ja koskettaa kuvun pintaa, on kuvun säde  $R$  edellä lasketun etäisyyden ja pienen pallon säteen summa  $R = x + r = 4 + 3 = 7$ .



Kuva 2: Pallot ja kupu ylhäältä päin kuvattuna



Kuva 3: Pallot ja kupu sivusta päin kuvattuna

#### 4.3.2 Syksy 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 7. Avaruuskappale

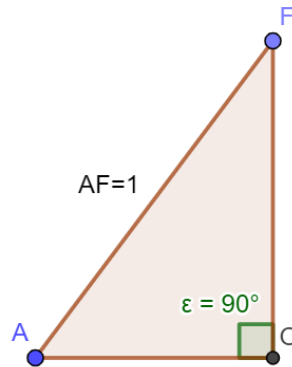
Tämä tehtävä on tarkoitettu ratkaistavaksi ohjelmistolla. Vastaukset voi antaa likiarvoina, ja perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee, mitä on mitattu. Tehtävän voi myös ratkaista algebrallisesti laskemalla. Tarkastellaan monitahokasta  $M = ABCDEF$ , jonka pohja  $ABCDE$  on säännöllinen viisikulmio ja jonka sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita.

1. Piirrä kuva monitahokkaasta  $M$ . (4 p.)
2. Määritä monitahokkaan  $M$  särmän  $AF$  ja pohjan välinen kulma. (2 p.)
3. Määritä monitahokkaan  $M$  tahkon  $ABF$  ja pohjan välinen kulma. (2 p.)
4. Määritä monitahokkaan  $M$  tilavuus, kun särmän pituus on  $a$ . (4 p.)

Kuva 4: Avaruuskappale (Ylioppilastutkintolautakunta, 2021c)

Ratkaisu:

1. Hyödynnetään Geogebra-ohjelmistoa. Piirretään säännöllinen monikulmio -toiminnolla viisikulmio, jonka jokaisen sivun pituus on  $a=1$ . Tämän jälkeen piirretään viisikulmion ympärille ympyrä niin, että ympyrä sivuaa jokaista viisikulmion kärkeä. Tämä tehdään ympyrä: kolme kehän pistettä -toiminnolla. Seuraavaksi määritetään ympyrän keskipiste keskipiste-toiminnolla. Monitahokkaan korkeus saadaan laskettua hyödyntämällä kuvassa 5 näkyvää suorakulmaista kolmiota, jonka monitahokkaan huippu, yksi viisikulmion kärjistä ja viisikulmion keskipiste muodostavat.



Kuva 5: Suorakulmainen kolmio AOF

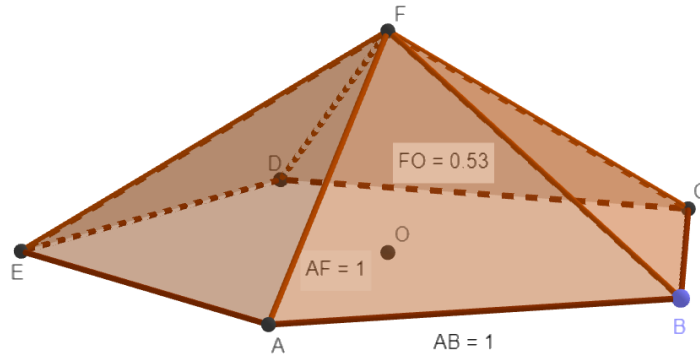
Ratkaistaan korkeus  $OF$  Pythagoraan lauseella, kun sivutahkon sivun pituus on  $AF = a = 1$  ja viisikulmion ympärille piirretyn ympyrän säde on  $AO = \frac{a}{10} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$ .

$$\begin{aligned}
 AO^2 + OF^2 &= AF^2 \\
 OF &= \sqrt{AF^2 - AO^2} \\
 OF &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{10} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}\right)^2} \\
 OF &= \frac{1}{10} \sqrt{-10(\sqrt{5} - 5)} \approx 0,53
 \end{aligned}$$

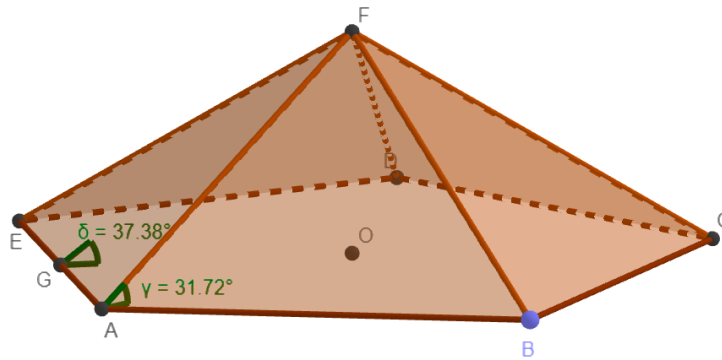
Käytetään Geogebrian laajenna pyramidiksi tai kartioksi -toimintoa valitsemalla pohjaksi viisikulmio ja korkeudeksi 0,53. Geogebrian piirtämä kuva monitahokkaasta  $M$  on kuvassa 6.

2. Käytetään Geogebrian kulmanmittaustoimintoa ja syötetään pisteiksi kartion huippu, yksi viisikulmion kärjistä sekä viisikulmion keskipiste. Kulman suuruudeksi saadaan  $\gamma = 31,72^\circ$ . Kulma näkyy kuvassa 7.

3. Määritetään jonkin viisikulmion sivun keskipiste Geogebrian keskipiste-toiminnolla. Tämän jälkeen käytetään kulmanmittaustoimintoa ja valitaan pisteiksi kartion huippu, äsken määritelty piste sekä viisikulmion keskipiste. Kulman suuruudeksi saadaan  $\delta = 37,38^\circ$ . Kulma näkyy kuvassa 7.



Kuva 6: Monitahokas M



Kuva 7: Monitahokas M ja lasketut kulmat

4. Geogebra laskee automaattisesti viisikulmion pinta-alan, joka on 1,72. Aiemmin laskettu kartion korkeus on 0,53. Lasketaan tilavuus:

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1,72 \cdot 0,53 \approx 0,3$$

Koska viisikulmion sivun pituus  $a$  on piirrossä 1, on tilavuus kerrottava luvulla  $a^3$ . Lopullinen tilavuus on siis  $V=0,3 a^3$ .

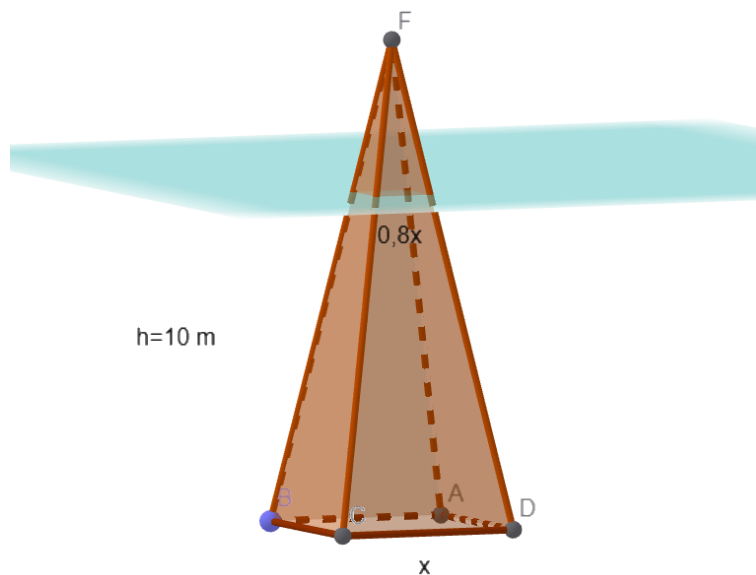
### 4.3.3 Syksy 2021, lyhyt oppimäärä, tehtävä 12. Tornin rakentaminen

Linnaan rakennetaan katkaistun pyramidin muotoista tornia. Tornin korkeudeksi on suunniteltu 10 metriä ja seinän leveydeksi tornin huipulla 80 % leveydestä tornin juurella. Saatavilla oleva rakennusmateriaali rajoittaa tornin seinien pinta-alan 120 neliömetriin. Laske seinän leveys tornin juurella.

Kuva 8: Tornin rakentaminen (Ylioppilastutkintolautakunta, 2021b)

Ratkaisu:

Geogebraa piirretty havainnollistava mallikuva tilanteesta näkyy kuvassa 9. Tornin pohjan sivun pituus on  $x$  ja huipun leveys  $0,8x$ . Katkaistun pyramidin korkeus on 10 m.



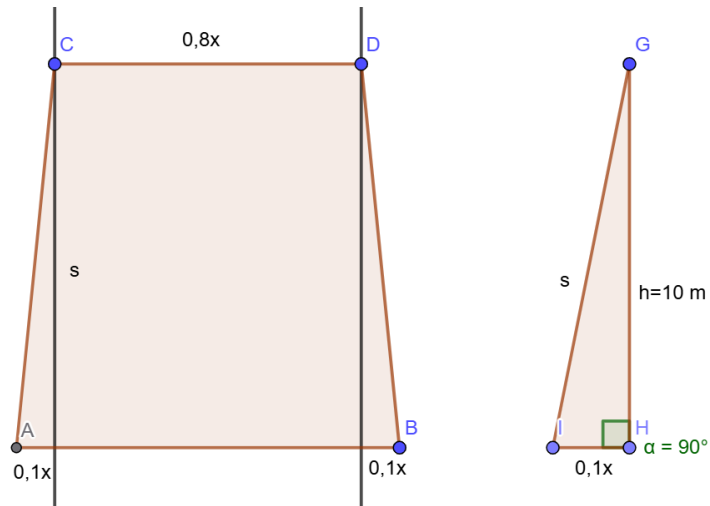
Kuva 9: Mallikuva katkaistusta pyramidista

Jokainen sivutahko on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat  $x$  ja  $0,8x$ . Sivujen pituuksien erotus jakautuu tasaisesti molemmille puolille, kuten kuvasta 10 nähdään. Sivutahkon korkeus on  $s$ , ja se saadaan laskettua kuvassa 10 näkyvän suorakulmaisen kolmion avulla Pythagoraan lauseella.

$$(0,1x)^2 + 10^2 = s^2$$
$$s = \sqrt{(0,1x)^2 + 10^2}$$

Yhden seinän pinta-ala saadaan laskettua puolisuunnikkaan pinta-alan kaavalla. Pinta-ala on

$$A = \frac{x + 0,8x}{2} \cdot s$$
$$A = 0,9x \sqrt{(0,1x)^2 + 10^2}.$$



Kuva 10: Mallikuva pyramidin seinän puolisuunnikkaasta sekä seinän ja korkeusjanan muodostavasta kolmiosta

Seinän leveys tornin juurella, eli pituus  $x$ , voidaan laskea CAS-laskimella. Seiniä on 4 kappaletta ja seinien yhteenlaskettu pinta-ala on 120 neliometriä, joten ratkaistava yhtälö on  $4 \cdot 0,9x \sqrt{(0,1x)^2 + 10^2} = 120$ . Vastaukseksi saadaan  $x = 3,33149\text{m} \approx 3,3\text{m}$ .

## 5 Tulokset

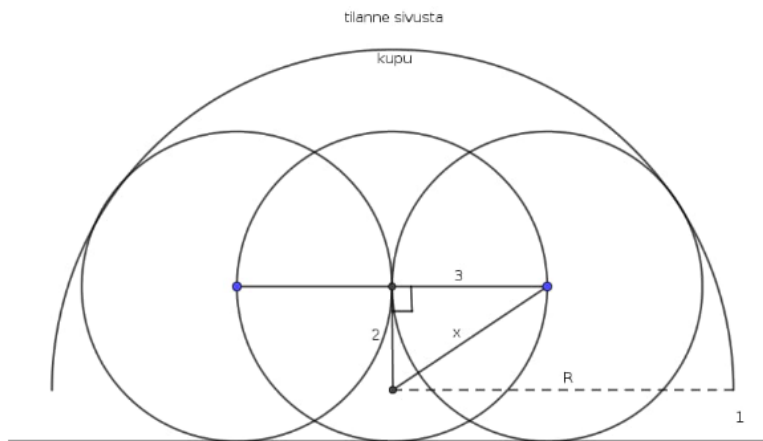
Tässä luvussa esitellään aineiston analysoinnista saadut tulokset jokaiseen tarkastettavaan tehtävään. Tuloksina esitetään tehtävistä löydetyt virhetyypit ja niistä annetaan esimerkkejä. Erityisesti keskitytään niihin virhetyyppeihin, joita esiintyi eniten vastauksissa. Yhdessä vastauksessa voi esiintyä useita virhetyyppejä.

### 5.1 Kevät 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 12. Piilotetut pallot

Kevään 2021 pitkän oppimäärän tehtävässä käsitellään kolmea kuvun alle asetettua palloa. Tehtävä on ylioppilaskokeen B2-osassa, eli aivan kokeen lopussa. Kyseisen tehtävän on siis ajateltu olevan kokeen vaikeimmasta päästä. Tehtävän vaikeus ja mahdollinen ajan puute näkyi kokeilaiden vastauksissa. Otoksessa vain yksi kokelas oli saanut tehtyä tehtävän täysin oikein. Kokelaista 58 %:lla tehtävä oli jäänyt kesken jossain kohtaa. Monissa kesken jääneissä tehtävissä kokelas oli pelkästään hahmotellut mallikuvaa tehtävänannon tietojen perusteella. Kuitenkin myös tehtävän kesken jättäneillä kokelailla saattoi esiintyä virheitä heidän ratkaisussaan.

Yleisin kokelaiden tekemä virhe oli se, että kuvun säde oli määritetty väärästä kohtaa. Tämän virheen oli tehnyt 29 % kokelaista. Oikeassa ratkaisussa tulisi ensin ratkaista yhden pienen pallon keskipisteen etäisyys kolmen pallon keskipisteiden muodostaman tasasivuisen kolmion keskipisteeseen. Tätä pituutta hyödyntäen pystytään laskemaan pienen pallon ja kuvun keskipisteiden välinen etäisyys, jonka jälkeen tähän tulisi vielä lisätä pienen pallon säde. Esimerkiksi kuvan 11 kokelas ei kuitenkaan ollut huomionnut pienen pallon ja kuvun keskipisteiden etäisyyttä laskiessaan sitä, että pienen pallon etäisyys kuvun keskipisteen kautta kulkevasta korkeusakselista ei ole sama asia kuin pienen pallon säde. Tämä johtuu siitä, että kaikki kolme pientä palloa koskettavat toisiaan. Lisäksi kokelas on lopussa käyttänyt pienen pallon säteenä pituutta 2, vaikka säde on 3. Myös kuvan 12 kokelas on määrittänyt säteen väärin. Hän on laskenut oikein pienen pallon keskipisteen etäisyyden kuvun keskipisteen kautta kulkevasta korkeusjanasta. Tämän jälkeen kokelas on kuitenkin ajatellut, että kuvun säde kulkee samassa linjassa pienen pallon säteen kanssa. Hän ei ole laskenut Pythagoraan lauseella pienen pallon ja kuvun keskipisteiden välistä etäisyyttä.

15 % kokelaista oli yrittänyt ratkaista tehtävän käyttämällä tilavuuden tai pinta-alan laskemista. Kokelaat olivat esimerkiksi laskeneet jokaisen pienen pallon tilavuuden ja koittaneet näiden avulla määrittää kuvun sädettä. Tehtävänannossa ei kuitenkaan ole annettu tarpeeksi tietoja siihen, että tehtävän pystyisi ratkaista tilavuuksia tai pinta-aloja laskemalla. Kuvan 13 esimerkkikokelas on lähtenyt ratkaisemaan tehtävää ajattelemalla, että pienten pallojen keskipisteiden muodostama kolmio toimii pyramidin pohjana. Ratkaisussa on virheellisesti ajateltu, että kyseinen pyramidi olisi tetraedri, vaikka todellisuudessa tätä ei voida tietää. Valitsemalla pyramidin tetraedriksi on kokelas tehnyt oletuksen pyramidin korkeudesta, vaikka sen pitäisi olla tuntematon.



Kahden kuvun muodostaman ympyrän keskipiste on yhden yksikön korkeudella maasta, eli peitetyjen pallojen keskipisteiden korkeudelle on matkaa ylöspäin kahden yksikön verran. Tämä korkeusjana ja pienemmän pallon säde muodostavat suorakulmaisen kolmion. Kuvun säde R on tämän suorakulmaisen kolmion hypotenuusan sekä yhden peitetyn pallon säteen summa.

Lasketaan hypotenuusan pituus

$$x = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

jolloin kuvun säde on

$$R = \sqrt{13} + 2$$

Kuva 11: Kokelas 62, kevät 2021 pitkä, arvosana M

Puolipallo jää kiinni kohtaan, jossa pallojen leveys on suurin.

Pallojen keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.

Sinilauseella kolmion kärjestä etäisyys keskipisteeseen on

$$\frac{a}{\sin(30)} = \frac{6}{\sin(120)}$$

$$\text{solve}\left(\frac{a}{\sin(30)} = \frac{6}{\sin(120)}, a\right) = a = 2 \cdot \sqrt{3}$$

Lisäämällä pallon säde etäisyyteen kolmion keskipisteestä kolmion kulmaan saadaan matka keskipisteestä puolipalloon kohtaan, jossa puolipallo jää kiinni.

$$2 \cdot \sqrt{3} + 3 = 2 \cdot \sqrt{3} + 3$$

Lisäämällä tähän mittaan pallon säteen ja vähentämällä luvun 1, saadaan puolipallon säde, kun se on jokapuolelta yhden yksikön irti maasta.

$$2 \cdot \sqrt{3} + 3 + 3 - 1 = 2 \cdot \sqrt{3} + 5$$

$$\text{Säde } R = 2 \cdot \sqrt{3} + 5$$

Kuva 12: Kokelas 15, kevät 2021 pitkä, arvosana E

Koska pallot koskettavat toisiaan, niiden keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion, jonka sivun pituus on  $2 \cdot 3 = 6$  ja pinta-ala  $\frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

Koska kuvun reuna jää jokaisesta kohdasta 1 yksikön korkeudelle pöydästä, symmetrian nojalla voidaan sanoa että kuvun keskipiste on (pallojen keskipisteiden muodostaman) kolmion keskipisteen kanssa samalla suoralla.

Muodostetaan pyramidi, jonka pohja on pallojen keskipisteiden muodostama kolmio ja korkeus kolmion keskipisteen etäisyys kuvun keskipisteestä. Pyramidin pohja on siis  $\frac{9}{2}$ , särmä pallojen keskipisteiden etäisyys eli 6. Koska kuvun reuna jää 1 yksikön korkeudelle pöydästä, on sen etäisyys pallojen keskipisteiden kautta kulkevasta tasosta  $3-1 = 2$ . Pyramidin korkeudeksi saadaan  $R-2$ .

Pyramidin tilavuus

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot (r-2) = \frac{3 \cdot (r-2)}{2}$$

toisaalta pyramidi on tetraedri ja sen tilavuus on

$$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

, missä  $a=6$

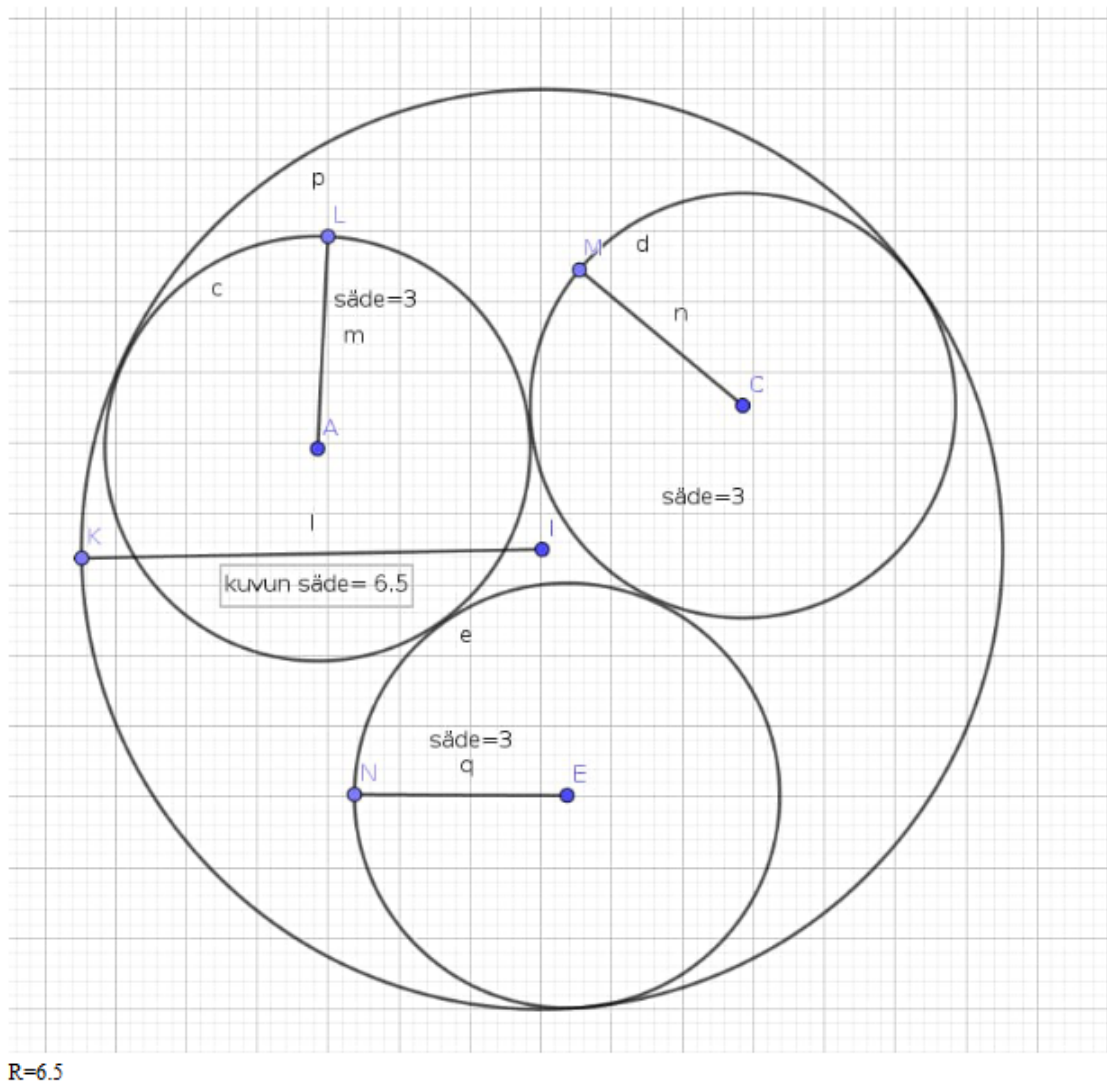
$$V = \frac{6^3 \sqrt{2}}{12}$$

Ratkaistaan  $R$ .

$$\text{solve}\left(\frac{3 \cdot (r-2)}{2} = \frac{6^3 \cdot \sqrt{2}}{12}, r\right) \rightarrow r = 12 \cdot \sqrt{2} + 2$$

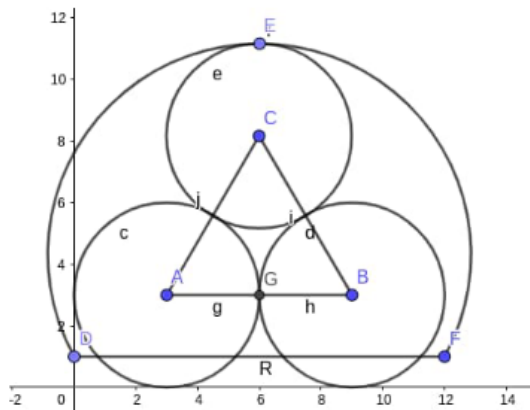
Kuva 13: Kokelas 5, kevät 2021 pitkä, arvosana L

Kokelaista 9 % oli katsonut arvon suoraan Geogebraan. He olivat piirtäneet kuvan tilanteesta ylhäältä päin katsottuna ja Geogebrian mittaustoimintoja käyttämällä ratkaisseet tehtävän. Näissä vastauksissa ei kuitenkaan oltu huomioitu sitä, että kuvun säde ei kulje samassa linjassa pienten pallojen vaakasuuntaisen säteen kanssa. Kuvun säde on tästä 2 yksikköä alempana, sillä kupu jää yhden yksikön päähän pöydän pinnasta. Esimerkiksi kuvan 14 kokelas on määrittänyt kuvun säteen väärästä kohtaa, jolloin vastaus on väärin.



Kuva 14: Kokelas 45, kevät 2021 pitkä, arvosana B

Osalla kokelaista (8 %) oli hankaluuksia hahmottaa tilanne oikein. He olivat ajatelleet, että pallot ovat kuvun alla päällekkäin tai yhdessä rivissä. Esimerkkikuvan 15 kokelas on asetellut pallot kuvun alle päällekkäin. Väärän kuvan piirtäneillä kokelailla esiintyi vastauksissa myös muita virheitä. Kuvan 15 kokelas on esimerkiksi yrittänyt ratkaista tehtävää tilavuuksien avulla. Väärin ymmärretty tilanne johti siis myös muihin virheisiin tehtävän sisällä.



Lasketaan pallojen tilavuus

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 3 \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 36\pi$$

**Yhden pallon tilavuus on  $12\pi$**

Jotta saadaab selville kuvun alareunan säteen pituus tulee laskea segmentin, jonka kuvun alareuna leikkaa, tilavuus. Lasketaan yhden pallon segmentti.

$$V_S = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

$$12\pi = \pi \cdot h^2 \left(3 - \frac{h}{3}\right)$$

$\text{solve}\left(12 \cdot \pi = \pi \cdot h^2 \cdot \left(3 - \frac{h}{3}\right), h\right)$	$h = -1.82374 \text{ or } h = 2.32178 \text{ or } h = 8.50196$
---	--

Korekus ei voi olla negatiivinen tai alle säteen verran, eli sen täytyy olla 8,5.

**Kuvun säde on  $3 + 8,5 = 11,5$**

Näin saadaan, että kuvun halkaisija on 13, ja tämän mukaan kupu ei mahdu pallojen päälle.

Kuva 15: Kokelas 19, kevät 2021 pitkä, arvosana B

Muita tehtävissä ilmenneitä virheitä oli esimerkiksi väärin pituuksien laskeminen. Tämä virhe esiintyi 8 %:lla kokelaista. He olivat laskeneet tehtävässä jotain sellaisia pituuksia, joiden kautta ei ole mahdollista päästä oikeaan ratkaisuun. Myös 8 %:lla vastauksista esiintyi virhe pienen pallon keskipisteen ja kuvun pohjan keskipisteen välisen etäisyyden laskemisessa. Kokelaat olivat joko ajatelleet etäisyyden väärin tai laskeneet sen väärin. Kyseinen etäisyys oli ajateltu väärin esimerkiksi sellaisissa tapauksissa, jossa oltiin käytetty muodostuvan suorakulmaisen kolmion toisena kateettina pienen pallon sädettä 3, eikä pienen pallon keskipisteen etäisyyttä korkeusjanasta. 5 % kokelaista oli ajatellut tehtävänannon tilanteen väärin. He olivat esimerkiksi laskeneet kuvun säteen sellaisessa tilanteessa, että kupu peittäisi pallo kokonaan. Kokelaista 4 % oli arvannut ratkaisuunsa arvoja tai he eivät esittäneet perusteluja laskuilleen. Viimeinen virhetyyppi on pienen pallon keskipisteen ja kuvun keskipisteen kautta kulkevan korkeusjanan välisen etäisyyden laskeminen väärin. 2 % kokelaista oli ymmärtänyt laskea tämän etäisyyden, mutta lasku oli tehty väärin. Taulukossa 1 näkyy kaikki virhetyypit ja niiden määrät prosentteina.

Taulukko 1: Tehtävässä esiintyneet virheet, n=100

<b>Virhetyyppi</b>	<b>Määrä (%)</b>
Tehtävä jäänyt kesken	58
Kuvun säde määritetty väärästä kohtaa	29
Laskettu tilavuuksia tai pinta-aloja	15
Arvo katsottu Geogebraa	9
Kuva väärin	8
Laskettu väriä pituuksia	8
Pallon ja kuvun keskipisteiden etäisyys väärin	8
Tehtävänanto ymmärretty väärin	5
Arvattu arvoja / ei perusteluja	4
Pallon keskipisteen ja korkeusakselin etäisyys väärin	2

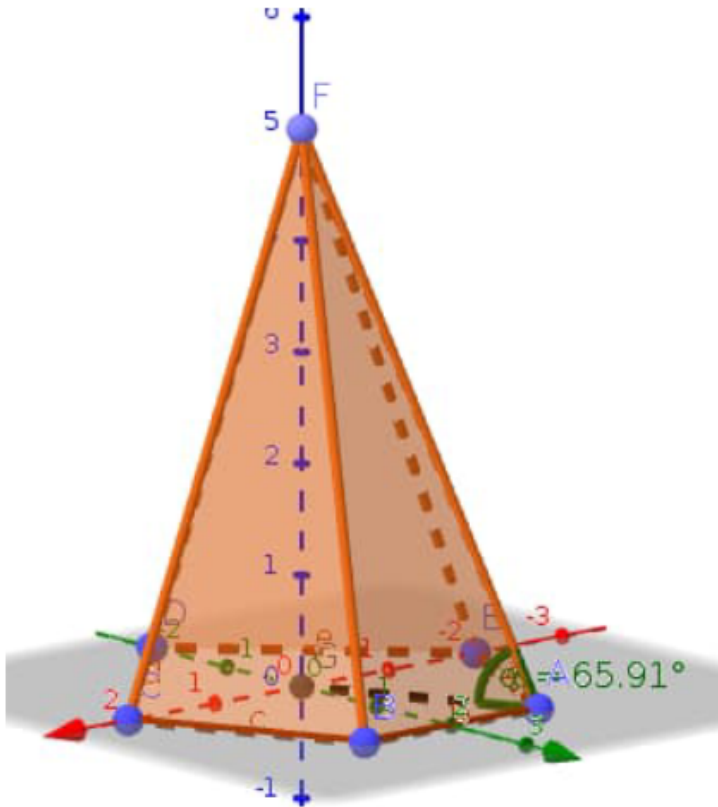
## 5.2 Syksy 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 7. Avaruuskappale

Pitkän oppimäärän syksyn 2021 tehtävässä oli tarkoituksena mallintaa ohjelmistolla viisikulmiopohjainen pyramidi, jonka jokainen sivutahko on tasasivuisen kolmion muotoinen. Lisäksi tehtävässä tuli laskea kaksi pyramidin kulmaa ja pyramidin tilavuus. Vaikka tehtävä oli tarkoitettu laskettavaksi ohjelmistolla, pystyi tehtävän tekemään myös algebrallisesti. Tehtävä löytyy ylioppilaskokeen B1-osasta, joten sen pitäisi olla keskivaikea. Tehtävä osoittautui yllättävän vaikeaksi, sillä vain 6 % otoksen kokelaista oli saanut tehtävän täysin oikein laskettua. Tehtävä oli varsin pitkä, sillä se sisältää neljä eri kohtaa. Luultavasti tästä syystä johtuen 37 %:lla kokelaista tehtävä oli jäänyt kesken ainakin jonkun osan kohdalla. Vaikka tehtävä olisi jäänyt kesken, on mahdolliset tehdyissä kohdissa esiintyneet virheet otettu kuitenkin huomioon.

Jopa 76 %:lla kokelaista ei ollut esitettyä riittäviä perusteluja pyramidin mallintamiseen liittyen. Ilman perusteluja pelkästä kuvasta on mahdotonta nähdä tarkasti, toteuttaako monitahokas vaaditut ehdot. Perusteluissa pitäisi olla joko luotettavasti mitattuna riittävän monen sivun pituus tai sanallisesti selitettynä vaiheittain se, mitä ollaan tehty. Jokaisella tähän 76 %:iin kuuluvalla kokelaalla esiintyi kuitenkin virhe myös jossain toisessa tehtävän osa-alueessa tai tehtävä oli jäänyt joltain osin kesken.

Perustelujen puuttumisen jälkeen seuraavaksi eniten virheitä esiintyi pyramidin muodon kohdalla. 45 % kokelaista oli mallintanut pyramidin ohjeiden vastaisesti. Erityisesti virheitä näkyi siinä, että sivutahkot eivät olleet tasasivuisien kolmioiden muotoisia. Tämä johtui siitä, että pyramidin korkeus oli väärä, jolloin sivutahkoista tuli tasakylkisiä kolmioita. Osalla kokelaista pyramidi ei ollut ylipäättään kolmiulotteinen, jolloin se ei vastaa tehtävänannon vaatimuksia. Osa vastauksista näytti silmämääräisesti ohjeiden mukaiselta, mutta b- ja c-kohdissa määritetyt kulmien suuruudet olivat kuitenkin väärin, jolloin myös pyramidin täytyi olla vääränlainen. Esimerkiksi kuvan 16 ratkaisun tehnyt kokelas on piirtänyt pyramidin liian korkeaksi, jolloin se ei toteuta ehtoa sivutahkojen tasasivuisuudesta.

2.



Kulman suuruus:  
 $65.91^\circ \approx 66^\circ$

Kuva 16: Kokelas 16, syksy 2021 pitkä, arvosana C

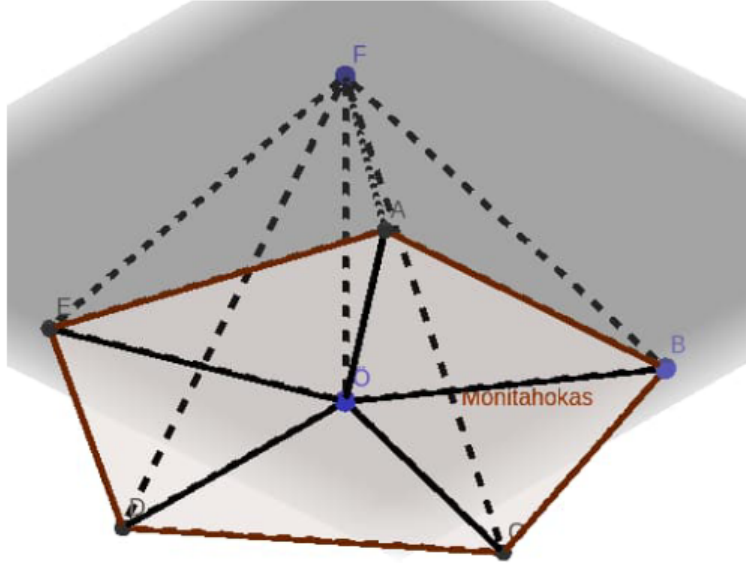
Tehtävän viimeisessä kohdassa vaadittu tilavuuden laskeminen tuotti myös ongelmia usealle kokelaalle. 22 % kokelaista oli käyttänyt tilavuuden laskemiseen väärää kaavaa tai ajatellut tilavuuden väärin. Osalla kokelaista oli unohtunut kerroin  $\frac{1}{3}$  kartion tilavuuden laskukaavasta. Moni kokelaista oli myös ajatellut, että pyramidin voi jakaa tetraedrin muotoisiin osiin ja laskea tilavuuden tetraedrin tilavuuden kaavan avulla. Tämä ei kuitenkaan toimi tässä tehtävässä, sillä tetraedrit eivät olisi säännöllisiä. Kokelaat olivat ajatelleet tetraedrin jokaisen sivun olevan  $a$ :n pituinen, mutta pyramidin korkeus ja etäisyys pohjan keskipisteestä yhteen viisikulmion kärjistä eivät kuitenkaan ole  $a$ :n pituisia. Siksi siis tetraedrin tilavuutta ei voi hyödyntää tehtävässä. Kuvassa 17 näkyy esimerkki tilanteesta, jossa kokelas on laskenut pyramidin tilavuuden tetraedrien avulla.

4.

Monitahokkaan tilavuuden ratkaisemiseen voitaa käyttää kaavaa

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

12, tätä kaavaa voidaan käyttää vain, kun kappaleessa on neljä kolmiota.



tähän monitahokkaaseen, mahtuu 5 tällaista kappaletta, missä on neljä kolmiota. tästä voidaan muokata kaavaa

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{12} \cdot 5 \left( \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \right)$$

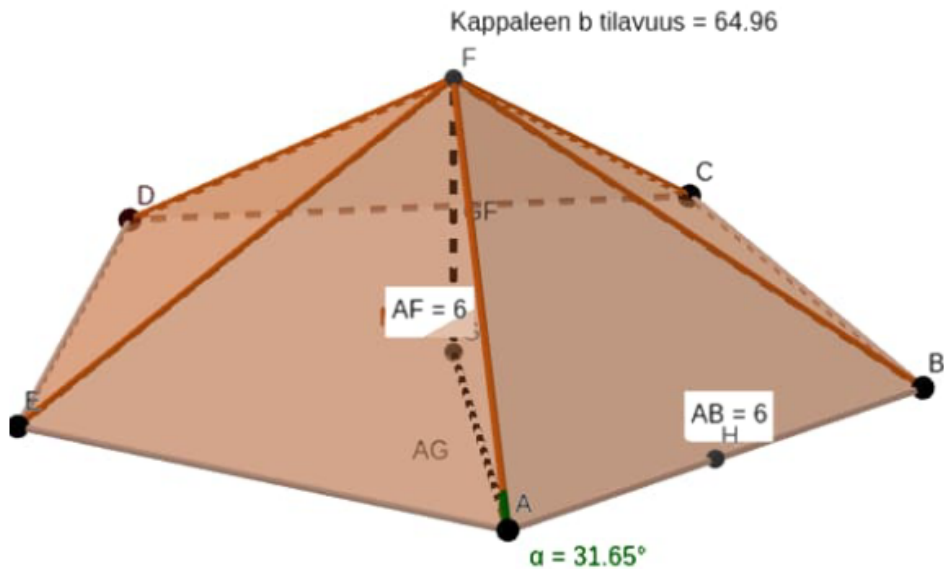
eli monitahokkaan tilavuus voidaan laskea käyttäen kaavaa

$$M(a) = 5 \left( \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \right)$$

Kuva 17: Kokelas 18, syksy 2021 pitkä, arvosana C

Kokelaat tekivät virheitä myös särmän pituuteen  $a$  liittyen. 17 % kokelaista oli käyttänyt särmän pituutena jotain muuta, kuin lukua 1. He eivät olleet myöskään huomioineet tätä lopullisessa vastauksessa, jolloin he olisivat vielä voineet saada tilavuuden laskettua oikein. Yhtä suuri määrä kokelaita (17 %) ei ollut ilmoittanut tilavuuden vastauksessa tarvittavaa  $a^3$ -kerrointa. Kokelaat olivat katsoneet tilavuuden suoraan Geogebra antamasta tilavuuden arvosta, mutta eivät olleet kertoneet tätä vielä  $a^3$ -kertoimella. Nämä kaksi virhettä esiintyivät usein samoissa vastauksissa, mutta ne saattoivat esiintyä myös vain yksinään. Kuvan 18 esimerkissä kokelas on piirtänyt pyramidin siten, että särmän pituus on 6. Tällöin tilavuuden arvosta tulee väärä. Lisäksi kokelas ei ole kertonut Geogebra antamaa tilavuuden arvoa  $a^3$ -kertoimella.

M tilavuus on 64,9.

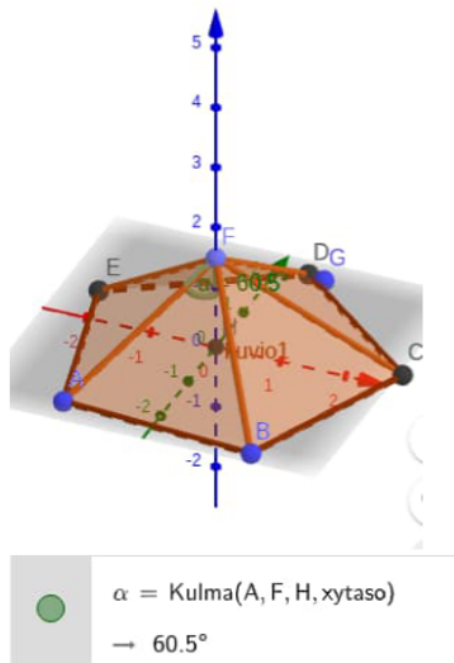


Kuva 18: Kokelas 93, syksy 2021 pitkä, arvosana A

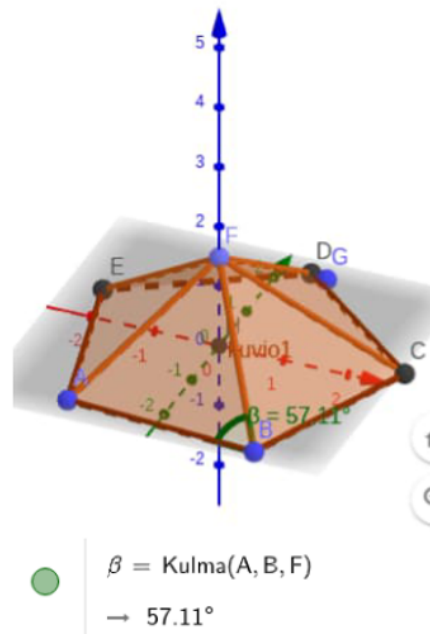
Tehtävän b- ja c-kohdissa tehtävä kulmien määrittäminen tuotti myös hankaluuksia osalle kokelaista. 14 % kokelaista oli määrittänyt joko toisessa tai molemmissa kohdissa väärän kulman suuruuden. Kulmia oltiin määritetty esimerkiksi sivutahkoista, pyramidin huipusta tai pohjasta. Kuvan 19 esimerkkipöytä on määrittänyt b-kohdassa pyydetyyn kulman yhden sivutahkon kulmista. Myös c-kohta on määritetty sivutahkon kulmasta. C-kohdassa on pyydetty määrittämään tahkon ABF ja pohjan välinen kulma. Kokelas on todennäköisesti ajatellut, että hänen täytyy määrittää kulma ABF.

Ratkaisuissa ilmeni myös muita virheitä. Kulmien määrittämiseen liittyen 9 % kokelaista oli päätellyt, että b- ja c-kohtien kulmien tulee olla yhtä suuret. Kokelaat olivat määrittäneet ensin b-kohdan kulman joko Geogebraa tai algebrallisesti laskemalla. C-kohdassa he olivat kuitenkin tehneet päätelmän, jonka mukaan kulmien tulee olla yhtä suuret, sillä kyseessä on tasasivuinen kolmio. Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa. 8 % kokelaista oli myös laskenut jommassa kummassa kohdassa kulman suuruuden väärin. Tällöin kulman määrittäminen oli tehty algebrallisesti eikä Geogebraa katsomalla. Tilavuuden laskemisessa 13 % kokelaista oli laskenut pyramidin korkeuden väärin ja 4 % pohjan pinta-alan väärin. Korkeuden määrittämiseen oli esimerkiksi käytetty väärää sivujen pituuksia Pythagoraan lauseessa. Tehtävässä esiintyneet virhetyypit ja niiden määrät näkyvät taulukossa 2.

2.



3.



Kuva 19: Kokelas 60, syksy 2021 pitkä, arvosana B

Taulukko 2: Tehtävässä esiintyneet virheet, n=100

Virhetyyppi	Määrä (%)
Tehtävä jäänyt kesken	37
Ei kerrottu perusteluja	76
Pyramidi vääränlainen	45
Tilavuus laskettu väärin	22
Vastauksessa ei $a^3$ -kerrointa	17
Ei ole huomioitu, että a on 1	17
Laskettu väärää kulmia	14
Pyramidin korkeus laskettu väärin	13
Pyydyetyt kulmat ajateltu yhtä suuriksi	9
Kulman suuruus laskettu väärin	8
Pohjan pinta-ala laskettu väärin	4

### 5.3 Syksy 2021, lyhyt oppimäärä, tehtävä 12. Tornin rakentaminen

Syksyn 2021 lyhyen oppimäärän tehtävässä tarkoituksena oli ratkaista katkaistun pyramidin pohjan sivun pituus annettujen tietojen avulla. Tehtävä löytyy kokeen B2-osasta, joten sen on ajateltu olevan kokeen vaikeimmasta päästä. Tehtävän vaikeus näkyi kokelaisten vastauksissa, sillä yksikään otoksen sadasta kokeelasta ei ollut saanut tehtävää ratkaistua täysin oikein. Otoksen kokelaista noin neljäsosa (24%) oli jättänyt tehtävän kesken tai heidän vastauksissaan oli pelkästään satunnaisia laskuja, jotka eivät liittyneet tehtävään.

Ylivoimaisesti yleisin virhe oli se, että pyramidin korkeutta oltiin käytetty sivutahkon korkeutena. Tämä virhe esiintyi 74%:lla kokelaista. He eivät siis olleet huomioineet pyramidin sivutahkojen olevan hieman kaltevia. Kokelaisten olisi pitänyt laskea sivutahkon korkeus erikseen Pythagoraan lauseella hyödyntäen pyramidin kohtisuoraa korkeutta. Vain kaksi kokeelasta oli ymmärtänyt, että sivutahkon korkeus pitää laskea erikseen. He eivät kuitenkaan olleet osanneet laskea korkeutta oikein, joten heidän ei pitänyt saaneet tehtävää ratkaistua täysin oikein. Kuvassa 20 on esimerkki tyypillisesti ratkaisusta, jossa tehtävä oli muuten laskettu oikein, mutta pyramidin sivutahkojen kaltevuutta ei oltu otettu huomioon. Kuvan 21 kokelas on taas huomionut kaltevuuden, mutta laskenut sivutahkon korkeuden väärin.

Noin kolmasosa (31 %) kokelaista ei ollut huomionut, että tehtävänannossa annettu pinta-ala  $120\text{m}^2$  tarkoittaa pyramidin kaikkien sivutahkojen yhteispinta-alaa. Kokelaat olivat käyttäneet tätä lukua yhden sivutahkon pinta-alana. 31 % kokelaista oli myös ymmärtänyt pyramidin sivutahkojen muodon väärin. Sivutahkot ovat puolisuunnikkaan muotoisia, mutta kokelaat olivat ymmärtäneet ne kolmioiksi tai suorakulmioiksi. Usein kolme yleisintä virhettä, eli väärän muotoinen sivutahko, väärä pinta-alan suuruus ja kaltevuuden huomiotta jättäminen esiintyivät samassa vastauksessa. Esimerkiksi kuvan 22 kokelas oli käyttänyt sivutahkon pinta-alana kolmiota. Lisäksi hän oli hyödyntänyt kaikkien sivutahkojen yhteispinta-alaa yhden sivun pinta-ala, eikä hän ollut huomionut sivutahkon kaltevuutta korkeudessa.

Torni on katkaistun pyramidin muotoinen eli sen seinät koostuvat neljästä puoli suunnikkaasta, koska me tiedämme tornin korkeuden ja maksimi pinta-alan voidaan näitä hyödyntää ja laskea yhden seinän eli puolisuunnikkaan pinta-ala kaavan avulla seinän leveyden arvo.

$$A = \frac{1}{2}(a + b) h$$

Koska seinä on neljä, vaipan kokonais pinta-ala tulee jakaa neljällä, jotta saadaan yhden seinän pinta-ala.

$$A_{\text{seinä}} = \frac{120}{4} = 30$$

Muodostetaan yhtälö.

$$30 = \frac{1}{2}(a + 0,8a) \cdot 10$$

$$\text{solve}\left(30 = \frac{1}{2} \cdot (a + 0.8 \cdot a) \cdot 10, a\right) \rightarrow a = 3.33333$$

Vastaus: Seinän leveys tornin juurella on siis  $\approx 3,34\text{ m}$

Kuva 20: Kokelas 15, syksy 2021 lyhyt, arvosana E

Tornien seinäala on 120 neliometriä, torni on katkaistun pyramidin muotoinen eli seinää 4

yksi seinä on pinta – alaltaan  $\frac{120m^2}{4} = 30m^2$

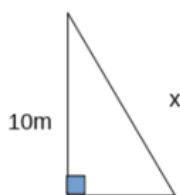
Seinä on puolisuunnikkaan muotoinen eli

$$A = \frac{1}{2}(a + b)h = mh$$

$$A = 30m^2, a = x, b = x \cdot 0,80 \text{ ja } h = \text{korkeus}$$

Selvitetään h

koko rakennuksen korkeus on 10m



Kolmio on suorakulmainen kolmio, selvitetään x

Kolmion kulmat ovat yhteensä 180° eli  $180^\circ - 90^\circ = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$$\cos(45) = \frac{10}{c}$$

$$\text{solve}(\cos(45) = \frac{10}{x})$$

$$\{x=13.15087\}$$

$$h = 13.15087m$$

puolisuunnikkaan pinta – ala saadaan

$$A = \frac{1}{2}(a + b)h = mh$$

$$\text{solve}(30 = \frac{1}{2}(x + x \cdot 0.80)13.15087)$$

$$\{x=2.534686552\}$$

$$x \approx 2.5$$

V : Seinän leveys tornin juurella on n. 2.5m

Kuva 21: Kokelas 43, syksy 2021 lyhyt, arvosana M

Jotta saadaan laskettua seinän leveys, käytetään kolmion pinta – alan kaavaa  $\frac{1}{2} \cdot ah$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 10 = 120 \quad ||: 10$$

$$\frac{1}{2} \cdot a = 12 \quad ||: 0,5$$

$$a = 24 (m)$$

Vastaus : Seinän leveys tornin juurella on 24 metriä.

Kuva 22: Kokelas 87, syksy 2021 lyhyt, arvosana M

Kokelaiden ratkaisuisissa esiintyi myös muita virheitä, mutta näitä ei ollut yhtä useissa ratkaisuisissa kuin aiemmin esitellyjä virheitä. 8 % kokelaista oli arvannut jossain kohtaa tehtävää arvoja. Kokelaat eivät olleet esimerkiksi osanneet ratkaista puolisuunnikkaan pinta-alan yhtälöstä pohjan sivun pituutta, joten se olivat päätyneet kokeilemaan erilaisia arvoja, joilla yhtälö toteutuisi. Yhtälön ratkaisu tuotti ongel-

mia myös 7 %:lle kokelaista, sillä heillä oli tullut virhe yhtälöä ratkaistaessa. Tehtävässä olisi saanut käyttää CAS-laskimia, joilla yhtälön ratkaiseminen olisi sujunut helpommin. Osa opiskelijoista oli kuitenkin päätenyt ratkaisemaan yhtälöä käsin ja seitsemän kokelaan ratkaisuisissa esiintyi jokin virhe yhtälön ratkaisussa. Muutama kokelas (4 %) oli tehnyt virheen prosenttilukukertoimen kanssa. Tehtävänannon mukaan seinän leveys tornin huipulla on 80 % leveydestä tornin juurella. Puolisuunnikkaan pinta-alan kaavassa pohjan sivun pituus on siis  $x$  ja huipun sivun pituus  $0,8x$ . Virheen tehneet kokelaat olivat käyttäneet väärää kerrointa huipun sivun pituuden kohdalla. Kaikki tehtävässä esiintyneet virhetyypit ja niiden määrät on kerätty taulukkoon 3.

Taulukko 3: Tehtävässä esiintyneet virheet,  $n=100$

<b>Virhetyyppi</b>	<b>Määrä (%)</b>
Tehtävä jäänyt kesken/laskettu satunnaisia laskuja	24
Ei huomioitu kaltevuutta	74
Sivutahkot väärän muotoiset	31
Käytetty kokonaispinta-alaa yhden sivun pinta-alana	31
Arvot saatu kokeilemalla	8
Yhtälön ratkaisussa virhe	7
Väärä prosenttilukukerroin	4
Sivutahkon korkeus laskettu väärin	2

## 5.4 Yhteenveto

Tarkastelluissa tehtävissä ilmenneet virheet ovat tehtäväkohtaisia, mutta niitä voidaan luokitella vielä yhteisiin virheluokkiin. Virheluokat määritellään siten, että samankaltaiset virhetyypit sijoitetaan samaan virheluokkaan. Virheluokat toimivat ikään kuin yläkäsitteenä virhetyypeille. Tarkasteltujen tehtävien perusteella pystytään muodostaan kuusi eri virheluokkaa. Luokat ja niiden selitykset sekä esimerkki-virheet on koottuna taulukossa 4.

Taulukko 4: Virheluokat ja niiden selitykset

Virheluokka	Selitys ja esimerkkejä
Virhe geometrisessa hahmottamisessa	Kokelas on muodostanut väärän mielikuvan tehtävänannon kappaleesta. Hän on esimerkiksi piirtänyt mallikuvan väärin tai tulkinnut erisuuret kulmat yhtä suuriksi.
Perusteluvirhe	Kokelaalla on virhe matemaattisessa argumentoinnissa. Hän ei ole esimerkiksi kertonut perusteluja laskuilleen. Kokelas on voinut myös katsoa arvon suoraan Geogebraa tai saanut vastauksen kokeilemalla eri arvoja.
Laskuvirhe	Kokelas on tehnyt virheen mekaanisessa laskemisessa. Esimerkiksi yhtälönratkaisu on tehty väärin.
Mittoihin liittyvä virhe	Tehtävänannossa kerrottuja tai tehtäväsä laskettavia mittoja on käytetty väärin. Kokelas on esimerkiksi määrittänyt säteen väärästä kohtaa tai ymmärtänyt kahden pisteen etäisyyden väärin.
Käsitteellinen virhe	Kokelas on sekoittanut matemaattisia käsitteitä keskenään tai käyttänyt tilanteeseen sopimatonta kaavaa. Hän on esimerkiksi hyödyntänyt tilavuuden laskemista, vaikka siitä ei ole hyötyä. Kokelas on voinut myös käyttää kokonaispinta-alaa yhden tahkon pinta-alana.
Merkintätapaan liittyvä virhe	Kokelas on tehnyt virheen merkintätavoissa. Hän ei ole esimerkiksi huomionnut vastauksessa tarvittavaa $a^3$ -kerrointa.

## 6 Luotettavuus

Tutkimustulosten luotettavuuteen vaikuttaa aineiston monipuolisuus ja käsittelytapa. Lisäksi tulosten yleistettävyyteen vaikuttaa muun muassa aineiston koko. Aineistona käytettiin Ylioppilastutkintolautakunnan luovuttamaa sadan satunnaisen kokelaan vastausta kolmeen tarkasteltavaan ylioppilaskoetehtävään. Koska vastaukset olivat satunnaisia, pitäisi niiden varsin luotettavasti kuvata keskimääräistä kokelaiden suoriutumista tehtävissä. Aineistossa oli vastauksia jokaisen ylioppilaskokeen arvosanan saaneilta kokelailta. Kevään 2021 pitkän oppimäärän vastauksissa aineiston kokelaista suurin osa oli saanut arvosanan C, M tai E. Syksyn 2021 pitkän oppimäärän tehtävässä aineiston kokelaat olivat saaneet eniten arvosanoja B, C ja E. Lyhyen oppimäärän syksyn 2021 kokeessa arvosanat C ja M olivat suosituimmat aineiston kokelaiden keskuudessa. Aineistot näyttävät siis varsin hyvin toteuttavan yleistä ylioppilaskoearvosanojen jakaumaa, jossa suurin osa kokelaista saa arvosanan B, C tai M. Aineistona toimivat ratkaisut eivät siis asetu jompaan kumpaan ääripäähän, vaan odotetusti keskelle. Tämä lisää aineiston luotettavuutta, sillä sen voidaan ajatella antavan luotettavaa kuvaa koko Suomen ylioppilaskoetuloksista.

Tulosten luotettavuuteen vaikuttaa se, että analyysiprosessin on suorittanut vain yksi henkilö. Kokelaiden tekemien virheiden luokitteluissa on siis voinut tapahtua virheitä. Osa kokelaiden tekemistä virheistä on myös voinut jäädä huomioimatta. Luotettavuutta on yritetty parantaa sillä, että aineisto käytiin jokaisen ylioppilaskoetehtävän kohdalla läpi kaksi kertaa. Tämä ei kuitenkaan täysin poista mahdollisuutta inhimillisille virheille. Virhetyyppeihin lajittelu on siis tehty yhden ihmisen harkinnan perusteella eikä analysoinnissa ole ollut mahdollista esimerkiksi kysyä kokelaalta, mitä hän on ratkaisussaan tarkoittanut. Ratkaisujen analysoinnissa on voinut siis tulla myös tulkintaan liittyviä virheitä, sillä kokelaiden perustelut ratkaisuissaan olivat välillä varsin vähäisiä.

Aineiston otoskoko on tämän tutkimuksen tavoitteisiin nähden sopiva. Sata ratkaisua antaa hyvän kuvan siitä, millaisia kokelaiden vastaukset keskimäärin ovat. Jos otoskoko olisi suurempi, olisi tietyt virhetyypit voineet nousta vielä enemmän esiin tai mahdollisia uusia virhetyyppejä esiintyä vastauksissa. Tutkimuksen tulosten perusteella voidaan tehdä kvalitatiiviseen tutkimukseen liittyviä yleistyksiä. Tulosten kautta ei ole kuitenkaan mielekäästä tehdä tilastollista yleistystä.

## 7 Pohdinta

Tässä luvussa tarkastellaan tutkimuksessa saatuja tuloksia ja verrataan niitä aiempaan tutkimustietoon. Luvussa käydään läpi eri virheluokat ja niihin mahdollisesti johtavat tekijät. Lisäksi tuloksien perusteella tehdään johtopäätöksiä ja pohditaan mahdollisia jatkotutkimusmahdollisuuksia. Tässä luvussa kokelailla viitataan tutkimuksen otoksen kokelaisiin.

## 7.1 Tulosten tarkastelua

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, mitä virheitä sanallisissa geometrian ylioppilaskoetehtävissä yleisimmin tehdään. Tutkimusaineistona olleiden kolmen matematiikan ylioppilaskoetehtävän pohjalta saatiin määritettyä tehtäväkohtaiset virhetyypit. Eri tehtävistä saadut virhetyypit pystyttiin vielä yhdistämään laajemmiksi virheluokiksi, joita saatiin määritettyä kuusi kappaletta.

Kevään 2021 pitkän oppimäärän tehtävässä 12 eniten virheitä tehtiin kuvun säteen väärästä kohtaa määrittämisessä. Toiseksi suurin virhetyyppi oli tilavuuden tai pinta-alojen kautta tehtävän ratkaiseminen. Loput virhetyypit liittyivät etäisyyksien väärin laskemiseen, puutteellisiin perusteluihin tai vääränlaisen mallikuvan piirtämiseen. Tehtävässä esiintyi siis geometriseen hahmottamiseen, perusteluihin, mittoihin ja käsitteellisyyteen liittyviä virheitä. Taulukossa 4 esitellyistä kuudesta virheluokasta siis neljä oli havaittavissa kokelaisten ratkaisuksista. Ratkaisuisissa korostuivat etenkin mittoihin liittyvät virheet. Kokelailla oli siis ollut vaikeuksia ymmärtää, mitä etäisyyksiä oikeaan vastaukseen pääseminen edellyttää. Mittoihin liittyvät virheet ovat usein myös yhteydessä geometrisen hahmottamisen virheisiin.

Tulokset ovat yhteydessä myös muista tutkimuksista saatuihin tuloksiin. Virheiden on usein huomattu johtuvan siitä, että oppilaat tekevät vääriä johtopäätöksiä tehtävänannosta (Mosia ym., 2023). Oppilaat eivät siis ota huomioon kaikkia tehtävänannosta saatavia ominaisuuksia, jolloin heidän ratkaisutapansa eivät toimi tehtävässä (Mosia ym., 2023). Tämän ilmiön pystyi huomaamaan myös kevään 2021 pitkän oppimäärän tehtävässä, sillä iso osa kokelaista oli määrittänyt kuvun säteen väärästä kohtaa. He eivät olleet ymmärtäneet tehtävänannon tietoja oikein, jolloin he olivat päätyneet väärin johtopäätöksiin tehtävän ratkaisemisen suhteen.

Tehtävänannon lukemiseen ja ymmärtämiseen liittyviä virheitä on käsitelty myös Musyadad ja Martadiputra (2021) tutkimuksessa. Sen mukaan oppilaat eivät usein tiedä, mitä tehtävänannossa kysytään tai he ymmärtävät väärin tehtävänannossa esiintyviä tietoja. Tutkimuksessa kerrotaan myös, että oppilailla voi olla haasteita tehtävän käsittelytaidoissa, mikä voi ilmetä siinä, että oppilas ei saa tehtyä tehtävää loppuun (Musyadad & Martadiputra, 2021). Kevään 2021 pitkän oppimäärän tehtävä 12 oli jäänyt yli puolella kokelaista kesken. Yksi syy tälle voi siis olla se, että kokelailla oli puutteita käsittelytaidoissa.

Özerem (2012) kertoo tutkimuksessaan yhden yleisen geometrian tehtävissä esiintyvän virheen olevan väärin kaavojen käyttäminen. Tämä johtuu kaavan syvällisen ymmärryksen puutteesta. Myös pitkän oppimäärän kevään 2021 tehtävän 12 tuloksissa näkyi tämä ilmiö. Osa kokelaista oli nimittäin yrittänyt ratkaista tehtävää tilavuuksien tai pinta-alojen avulla. Heidän ymmärrys tehtävän ratkaisemisesta oli siis mahdollisesti puuttellinen.

Pitkän oppimäärän syksyn 2021 tehtävässä 7 eniten virheitä aiheutti liian suppeat perustelut. Seuraavaksi eniten virheitä kokelaat olivat tehneet pyramidin piirtämisessä, sillä 45 %:lla kokelaista se oli tehtävänannon ohjeiden vastainen. Myös lähes

neljäsosa (22 %) kokelaista oli laskenut pyramidin tilavuuden väärin. Loput virheet liittyivät kulmien väärin määrittämiseen, tarvittavien kertoimien unohtamiseen ja pyramidin korkeuden tai pohjan väärin laskemiseen. Kokelaiden vastauksissa ilmeni siis taulukon 4 virheluokista geometriseen hahmottamiseen, perusteluihin, käsitteellisyyteen, mittoihin ja merkintätapoihin liittyviä virheitä. Viisi kuudesta virheluokasta esiintyy siis tämän tehtävän tehtävän vastauksissa.

Tehtävässä 7 esiintyvät kokelaiden selitysten puutteet voivat johtua esimerkiksi siitä, että he eivät ole ymmärtäneet tehtävää täysin oikein. Özerem (2012) nimittäin kertoo tutkimuksessaan, että puutteelliset selitykset voivat johtua opiskelijan ymmärryksen puutteesta. Tutkimuksen mukaan opiskelija ei siis yksinkertaisesti osaa selittää vastaustaan, jolloin se jää vajavaiseksi. Toisaalta selityksien puutteet voivat johtua myös yksinkertaisesti siitä, että kokelailla ei ole ollut niihin aikaa tai he ovat kuvitelleet oman vastauksensa olevan tarpeeksi laaja.

Yksi yleinen geometrian tehtävissä esiintyvä virhekäsitys liittyy kulmiin ja niiden suuruuksien käsitteisiin (Uygun ym., 2024). Kyseinen virhekäsitys esiintyi myös tämän tutkimuksen pitkän oppimäärän syksyn 2021 tehtävän 7 tuloksissa. Osa kokelaista oli ymmärtänyt tehtävänannossa kysytyn kulman suuruuden väärin. Lisäksi osa oli ajatellut kahden eri suuren kulman olevan yhtä suuret. Tämä voi siis Uygun ym. (2024) tutkimuksen perusteella kertoa kulman käsitteeseen liittyvistä virhekäsityksistä. Lisäksi myös tässä tehtävässä esiintyi Musyadad ja Martadiputra (2021) tutkimuksessa kerrottuja tehtävänannon lukemiseen ja ymmärtämiseen liittyviä virheitä. Virheet näkyivät esimerkiksi vääränlaisen mallikuvan piirtämisenä. Osa kokelaista ei ollut esimerkiksi tehnyt pyramidin sivutahkoista tasasivuisia kolmioita, vaikka niin pyydettiin tehtävänannossa tekemään. Tämä virhe voi johtua kokelaiden huolimattomasta tehtävänannon lukemisesta tai siitä, että he eivät ymmärrä, mikä on tasasivuinen kolmio.

Lyhyen oppimäärän syksyn 2021 tehtävässä 12 yleisin virhe oli se, että kokelaat eivät huomioineet pyramidin sivutahkojen kaltevuutta. Paljon virheitä tehtiin myös siinä, että sivutahkot olivat ajateltu väärän muotoisiksi tai tehtävänannossa kerrottua kokonaispinta-alaa oltiin käytetty yhden tahkon pinta-alana. Muut virheet liittyivät yhtälönratkaisemiseen, väärään prosenttilukukertoimeen, ratkaisun saamiseen kokeilemalla tai väärin laskettuun sivutahkon korkeuteen. Taulukossa 4 näkyvistä virheluokista jokaisen pystyi löytämään kokelaiden vastauksista. Geometrisen hahmottamisen virhe näkyi esimerkiksi siinä, että kaltevuutta ei otettu huomioon. Kokonaispinta-alan käyttäminen yhden tahkon pinta-alana puolestaan on käsitteellinen virhe. Prosenttilukukertoimen väärin merkitseminen voidaan ajatella merkintätapaan liittyvänä virheenä ja yhtälönratkaisun väärin tekeminen laskuvirheenä. Ratkaisun tekeminen kokeilemalla on perusteluvirhe ja väärin laskettu korkeus mittoihin liittyvä virhe.

Syksyn 2021 lyhyen oppimäärän tehtävä 12 oli jäänyt noin neljäsosalla (24 %) kokelaista kesken tai he olivat laskeneet vain satunnaisia laskuja vastaukseensa. Muun tutkimuksen mukaan tämä voi johtua siitä, että mekaanisia laskutoimituksia on

opittu, mutta niiden merkityksiä ei ole kunnolla ymmärretty (Ozkan ym., 2018). Oppilaiden on siis huomattu suorittavan satunnaisia laskutoimituksia vain saavuttaakseen edes jonkin ratkaisun (Ozkan ym., 2018). Tämä ilmiö näkyi myös tämän tutkimuksen lyhyen oppimäärän tehtävän ratkaisuisissa. Kesken jääneet tehtävät voivat johtua myös ajan loppumisesta kesken.

Aiemmassa tutkimuksessa on huomattu, että opiskelijat tekevät virheitä geometrian tehtävissä erikoisien nelikulmioiden ominaisuuksiin liittyvissä tehtävissä (Özerem, 2012). Lyhyen oppimäärän syksyn 2021 tehtävän 12 vastauksissa tämä ilmeni esimerkiksi siten, että puolisuunnikkaan muotoiset sivutahkot oltiin ymmärretty väärin kolmioiksi tai suorakulmioiksi. Sivutahkojen pinta-alaan liittyvissä laskuissa oltiin siis käytetty väärän muotoisen kappaleen pinta-alan kaavoja. Tämä havainto tukee Özerem (2012) tutkimuksessa esitettyä tietoa.

Musyadad ja Martadiputra (2021) tutkimuksessa esiteltyt käsittelytaitojen ja ymmärryksen virheet pystyttiin havaitsemaan myös tämän tutkimuksen lyhyen oppimäärän tehtävän 12 ratkaisuisista. Käsittelytaitoihin liittyvät virheet ilmenivät esimerkiksi yhtälönratkaisun virheinä. Sivutahkojen kaltevuuden huomiotta jättäminen puolestaan on ymmärrykseen liittyvä virhe. Myös Mosia ym. (2023) tutkimuksessa on kerrottu geometrian tehtävien virheiden johtuvat usein siitä, että oppilas ei ota huomioon kaikkia tehtävänannossa kerrottuja ominaisuuksia. Tämä voidaan havaita esimerkiksi sivutahkon kaltevuuden huomiotta jättämisenä. Aiempi tutkimus siis tukee myös lyhyen oppimäärän tehtävästä löydettyjä virheitä.

## 7.2 Johtopäätökset

Tutkimuksessa käsiteltävissä ylioppilaskoetehtävissä kokelaat tekivät erilaisia tehtäväkohtaisia virheitä, jotka ovat ominaisia juuri kyseiselle tehtävälle. Taulukossa 4 esitellyistä virheluokista neljä oli havaittavissa kaikista kolmesta tarkastellusta tehtävästä. Nämä virheluokat ovat geometriseen hahmottamiseen, perusteluihin, käsitteellisyteen ja mittoihin liittyvät virheet. Yhdistävä tekijä näiden neljän virheluokan välillä on se, että ne kaikki liittyvät tehtävän ymmärtämiseen. Jokainen kyseisiin virheluokkiin lajitelluista virheistä on voinut johtua siitä, että kokelas ei ole ymmärtänyt täysin oikein tehtävänantoa tai sitä, miten hänen kuuluisi ratkaista tehtävä.

Tehtävien ymmärtämiseen liittyvät vaikeudet voivat johtua siitä, että jokainen tutkimuksen tehtävistä löytyy ylioppilaskokeen B-osasta, eli niiden ratkaisemiseen vaaditaan hieman syvempää osaamista. Kevään 2021 pitkän oppimäärän ja syksyn 2021 lyhyen oppimäärän tehtävät ovat vielä kokeiden B2-osissa, joten niiden on ajateltu olevan kokeiden vaikeimpia tehtäviä. Tehtävien vaikeus näkyy tutkimustuloksissa myös siinä, että jokainen tehtävistä oli jäänyt huomattavalla määrällä kokelaista kesken. Pitkän oppimäärän kevään 2021 tehtävä 12 oli jäänyt kesken jopa 58 %:lla aineiston kokelaista. Kesken jääneitä tehtäviä voi selittää tehtävien vaikeuden lisäksi myös se, että ne ovat kokeen loppupäässä. Kokelailla on siis voinut yksinkertaisesti loppua koeaika kesken, jolloin he eivät ole saaneet suoritettua tehtävää loppuun, vaikka olisivat voineet osata tehdä sen oikein.

Tehtävänannon oikein ymmärtäminen ja oikeiden ratkaisustrategioiden käyttäminen korostuu tutkimukseen valituissa ylioppilaskoetehtävissä, sillä niistä yksikään ei sisällä mallikuvaa tehtävänannossa. Geometrian tehtävissä on tärkeää, että kokelas osaa hahmottaa tehtävän geometrisesti oikein tehtävänannon perusteella. Kun tehtävänannossa ei ole mitään muuta kuin sanallista tietoa, on hahmottaminen täysin kokelaan ymmärtämisen varassa. Kokelaan tulee visualisoida tehtävä oikein, jotta hän kykenee käyttämään oikeita ratkaisutapoja tehtävän tekemisessä. Tällaisissa tehtävissä on myös vaikeampi pärjätä vain arvaamalla tai ulkoa opittuja ratkaisutapoja käyttämällä, sillä tehtävän tilanne täytyy ennen laskemista ymmärtää oikein. Aiemman tutkimuksen mukaan sanallisten geometrian tehtävien visualisointi ja tehtävän tulkitseminen on vaikeaa ja voi hankaloittaa tehtävässä suoriutumista (Arsenault & Powell, 2022). Geometriaan liittyviä tehtäviä on myös huomattu tulkittavan usein väärin, sillä opiskelijoiden syvälinen ymmärrys tehtävässä vaadittavista tiedoista on heikkoa (Hlongwana ym., 2025). Tämä tukee huomiota siitä, että tuloksien perusteella kokelailla olisi vaikeuksia ymmärtää tehtävä oikein sanallisen ohjeen perusteella.

Kahdessa kolmesta tutkimuksen ylioppilaskoetehtävistä ei vaadittu mallikuvan piirtämistä tehtävänannossa. Syksyn 2021 lyhyen oppimäärän tehtävässä 12 kuitenkin 41 % aineiston kokelaista oli liittännyt vastaukseen piirtämänsä mallikuvan. Kevään 2021 pitkän oppimäärän tehtävän 12 ratkaisussa saman oli tehnyt jopa 81 % aineiston kokelaista. Mallikuvan piirtäminen oltiin siis selvästi koettu varsin järkevä vaiheena tehtävän ratkaisemista ja kokelaat olivat ajatelleet sen auttavan tehtävässä suoriutumista. Tämä tukee esimerkiksi Mudaly (2021) tutkimuksessa kerrottua tietoa siitä, että mallikuvien piirtämistä pidetään tärkeänä osana sanallisen tehtävän suorittamista.

Yksi mielenkiintoinen jatkotutkimusmahdollisuus olisi tutkia sitä, että eroaako kokelaiden osaaminen kyseisissä tehtävissä silloin, jos tehtävänannossa olisi annettuna mallikuva tilanteesta. Myös esimerkiksi tehtävän kesken jättäneiden kokelaiden määrää voitaisiin verrata kesken jättäneiden määrään silloin, jos tehtävässä olisi valmiina mallikuva. Toisena mahdollisena jatkotutkimusideana voitaisiin tutkia sitä, mitä tuloksille tapahtuisi, jos aineisto olisi suurempi. Aineistona voitaisiin käyttää esimerkiksi kaikkia tiettyyn ylioppilaskoetehtävään vastanneiden kokelaiden ratkaisuja. Näin saataisiin laajempi ja luotettavampi käsitys suomalaisten suoriutumisesta ylioppilaskokeissa.

Opettajat voisivat hyödyntää tutkimuksen tuloksia erityisesti siinä, että opetuksessa painotettaisiin entistä enemmän geometrian käsitteiden syvällistä ymmärtämistä. Sanallisten geometrian tehtävien ja mallikuvien piirtämisen harjoittelemista voisi myös lisätä entistä enemmän opetukseen. Kun yleisimmät tehtävissä tehtävät virheet ovat selvillä, voi niiden lisääntymistä yrittää ehkäistä keskittymällä virheisiin johtavien syiden korjaamiseen.

## Viitteet

- Arsenault, T. L., & Powell, S. R. (2022). Word-Problem Performance Differences by Schema: An Analysis of Students with and without Mathematics Difficulty. *Learning Disabilities Research & Practice*. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12273>
- Ay, Y. (2017). A review of research on the misconceptions in mathematics education. Teoksessa M. Shelley & M. Pehlivan (Toim.), *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017* (s. 21–31). ISRES Publishing.
- Hlongwana, P., Mudaly, V., & Zulu, M. W. (2025). Enhancing geometry problem-solving through visualization for multilingual learners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 21(7), 1–18. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16564>
- Jablonski, S., & Ludwig, M. (2023). Teaching and Learning of Geometry—A Literature Review on Current Developments in Theory and Practice. *Education Sciences*, 13(7), 682. <https://doi.org/10.3390/educsci13070682>
- Luneta, K. (2015). Understanding students' misconceptions: An analysis of final Grade 12 examination questions in geometry. *Pythagoras*, 36. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v36i1.261>
- Luneta, K., & Makonye, P. J. (2010). Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, 3(3), 35–46.
- Mosia, M., Matabane, M. E., & Moloi, T. J. (2023). Errors and misconceptions in Euclidean geometry problem solving questions: The case of grade 12 learners. *Research in Social Sciences and Technology*, 8(3), 89–104. <https://doi.org/10.46303/ressat.2023.23>
- Mudaly, V. (2021). Constructing mental diagrams during problem-solving in mathematics. *Pythagoras*, 42(1), a633. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v42i1.633>
- Mudaly, V., & Reddy, L. (2016). THE ROLE OF VISUALISATION IN THE PROVING PROCESS OF EUCLIDEAN GEOMETRY PROBLEMS. *PONTE International Scientific Researchs Journal*, 72. <https://doi.org/10.21506/j.ponte.2016.8.13>
- Musyadad, M., & Martadiputra, B. (2021). Error type analysis based on Newman's theory in solving mathematical communication ability of junior high school students on the material of polyhedron. *Journal of Physics: Conference Series*, 1806, 012097. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1806/1/012097>
- Naufal, M. A., Abdullah, A. H., Osman, S., Abu, M. S., Ihsan, H., & Rondiyah. (2021). Reviewing the Van Hiele Model and the Application of Metacognition on Geometric Thinking. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, 10(2), 597–605. <https://www.proquest.com/scholarly-journals/reviewing-van-hiele-model-application/docview/2560342604/se-2>
- Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 [Viitattu 26.11.2025]. <https://eperusteet.opintopolku.fi/eperusteet-service/api/dokumentit/9959715>

- Opetushallitus. (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 [Viitattu 13.11.2025]. [https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124\\_lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2015\\_0.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015_0.pdf)
- Opetushallitus. (n.d.). Lops 2021 - tukea lukion opetussuunnitelman perusteiden toteutukseen [Viitattu 13.11.2025]. <https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/lukiokoulutus/lops-2021-tukea-lukion-opetussuunnitelman-perusteiden>
- Ozkan, A., Ozkan, E. M., & Karapıcak, S. (2018). On the Misconceptions of 10th Grade Students about Analytical Geometry. *The Educational Review, USA*, 2(8), 417–426. <https://doi.org/10.26855/er.2018.08.002>
- Riccomini, P. J. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. *Learning Disability Quarterly*, 28(3), 233–242.
- Silfverberg, H. (2018). Geometrinen käsitteenmuodostus oppimisen tutkimuksen kohteena. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (Toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 86–109). Niilo Mäki Instituutti.
- Supardi, L., Zayyadi, M., Lanya, H., Hasanah, S. I., & Hidayati, S. N. (2021). Com-mognitive analysis of students' errors in solving high order thinking skills problems. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 12(6), 950–961. <https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i6.2373>
- Uygun, T., Guner, P., & Simsek, I. (2024). Examining students' geometrical misconcep-tions by eye tracking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(1), 68–93. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2101954>
- Ylioppilastutkintolautakunta. (2021a, maaliskuuta). Pitkän matematiikan ylioppi-laskoe, kevät 2021 [Viitattu: 16.1.2026]. [https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Kev%C3%A4t/2021-03-24\\_M\\_fi/index.html](https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Kev%C3%A4t/2021-03-24_M_fi/index.html)
- Ylioppilastutkintolautakunta. (2021b, syyskuuta). Lyhyen matematiikan ylioppilas-koe, syksy 2021 [Viitattu: 16.1.2026]. [https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Syksy/2021-09-21\\_N\\_fi/index.html](https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Syksy/2021-09-21_N_fi/index.html)
- Ylioppilastutkintolautakunta. (2021c, syyskuuta). Pitkän matematiikan ylioppilas-koe, syksy 2021 [Viitattu: 16.1.2026]. [https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Syksy/2021-09-21\\_M\\_fi/2021-09-21\\_M\\_fi/index.html](https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Syksy/2021-09-21_M_fi/2021-09-21_M_fi/index.html)
- Ylioppilastutkintolautakunta. (n.d.). Määräykset ja ohjeet [Viitattu 13.11.2025]. <https://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/tutkinnon-toimeenpano/maaraykset-ja-ohjeet>
- Žakelj, A., & Klančar, A. (2022). The role of visual representations in geometry learning. *European Journal of Educational Research*, 11(3), 1393–1411. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.3.1393>
- Özerem, A. (2012). Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 55, 720–729. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.557>