

Nelson-Siegel-mallien vertaileminen korkojen aikarakenteen
mallintamisessa

Julia Korkiamäki

Pro gradu -tutkielma
Maaliskuu 2020

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Turun yliopiston laatu järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KORKIAMÄKI, JULIA: Nelson-Siegel-mallien vertaileminen korkojen aikarakenteen mallintamisessa

Pro gradu -tutkielma, 52s.

Soveltava matematiikka

Maaliskuu 2020

Korkojen aikarakennetta kuvataan tuottokäyrällä, joka on merkittävä inflaation ja taloudellisen kehityksen ennustaja taloustieteessä. Tuottokäyrä kuvaa velkakirjasta saatavaa tuottoa eri maturiteeteilla, jolloin voidaan tuottokäyrää estimoimalla ennustaa myös tulevia koron muutoksia. Tuottokäyrä voi olla nouseva, laskeva tai tasainen ja näitä tuottokäyrän muotoja pyritään selittämään eri teorioilla.

Nelson-Siegel-mallit ovat malleja, joita käytetään laajasti korkojen aikarakenteen sovittamiseen käytännössä. Tarkat estimaatit nykyisestä koron aikarakenteesta ovat tärkeitä monilla rahoituksen aloilla, mutta myös aikarakenteen ennustaminen on tärkeää. Koron aikarakennetta kuvataan tuottokäyrillä ja tuottokäyriä pyritään ennustamaan Nelson-Siegel-malleilla. Nelson-Siegel-mallit ovat laajasti käytettyjä keskuspankeissa ja rahapoliittisessa päätöksenteossa.

Tutkimuksessa estimoidaan tuottokäyrää Dieboldin ja Lin kaksivaiheisella estimointimenetelmällä ja tutkitaan kolmea eri Nelson-Siegel-mallia koron aikarakenteen mallinnuksessa. Tutkimuksessa lähdetään liikkeelle kolmen tekijän perusmallista, joka on käytössä monissa keskuspankeissa koron aikarakenteen mallinnuksessa. Sen jälkeen estimoidaan suppeampaa kahden tekijän mallia sekä laajennettua neljän tekijän mallia ja pyritään selvittämään, mikä näistä malleista on paras estimoimaan havaittua tuottokäyrää.

Asiasanat: koron aikarakenne, tuottokäyrä, Nelson-Siegel-malli, AR(p)-prosessi, autokorrelaatio.

Sisältö

1	Johdanto	3
2	Korkojen aikarakenne	4
2.1	Korko	4
2.2	Tuottokäyrä	5
2.3	Kolme teoriaa aikarakenteen muodolle	6
2.3.1	Odotusteoria	6
2.3.2	Erillisten markkinoiden teoria	7
2.3.3	Likviditeetin suosintateoria	8
3	Aikarakenteen mallintaminen	10
3.1	Diskonttaustekijä	10
3.2	Terminikorko	10
3.3	Spot-korko	11
3.4	Aikarakenteen mallintamisen komponentit	12
4	Tutkimuksessa käytetyt menetelmät	14
4.1	Aikasarja-analyysi	14
4.1.1	Stationaarinen prosessi	14
4.2	Autoregressiiviset prosessit	16
4.2.1	AR(1)-prosessi	16
4.2.2	AR(p)-prosessi	17
4.3	Mallin korreloituneisuuden testaaminen	17
4.3.1	Box-Ljung-testi	18
4.3.2	Käännepestetesti	18
4.4	Jäännössarjan arviointi	19
4.4.1	Laajennettu Dickey-Fuller-testi	19
4.4.2	Jarque-Bera-testi	19
4.4.3	Kvantiili-kvantiili-kuvio	20
5	Nelson-Siegel-mallit	21
5.1	Kolmen tekijän perusmalli	21
5.2	Kahden tekijän malli	24
5.3	Björkin ja Christensenin neljän tekijän malli	26
6	Aineisto	28

7	Aineiston analysointi	29
7.1	Kaksivaiheinen estimointi	29
7.2	Kolmen tekijän perusmallin testaus	29
7.3	Kahden tekijän mallin testaus	37
7.4	Neljän tekijän mallin testaus	43
8	Päätelmät	50

1 Johdanto

Koron aikarakenteella mallinnetaan eri maturiteetin omaavien velkakirjojen tuottoja toisiinsa, kun muut tekijät pysyvät mallissa muuttumattomina. Tällaista mallia kutsutaan tuottokäyräksi. Tuottokäyrää pystytään kuvaamaan kolmella ekvivalentilla tavalla: diskonttaustekijällä, spot-korolla sekä termi-nikorolla. Kun yksikin näistä tekijöistä tiedetään, pystytään kaksi muuta joh-tamaan kaavan avulla. Tuottokäyrä voi olla joko nouseva, tasainen tai laskeva riippuen siitä, ovatko pitkät korot lyhyiden korkojen yläpuolella vai alapuo-lella. Koron aikarakennetta mallinnettaessa käytetään nollakuponkilainoja, jolloin kassavirta koostuu ainoastaan lainan nimellisarvosta.

Nelson-Siegel-malli on erikoistapaus niin kutsutusta yleisestä lineaarises-ta mallista, ja sitä käytetään monissa keskuspankeissa estimoimaan koron aikarakennetta. Nelson-Siegel-mallit pyrkivätkin estimoimaan, mallintamaan ja ennustamaan korkojen aikarakennetta. Nelson-Siegel-mallista on esitetty myös eri versioita eri tutkijoiden toimesta, joista kahta käsitellään tässä tut-kimuksessa. Toinen on Dieboldin, Piazzesin ja Rudebuschin [12] kehittämä kahden tekijän malli, joka on siis suppeampi versio Nelsonin ja Siegelin kol-men tekijän mallista, kun taas toinen malli on Björkin ja Christensenin [4] laajennettu neljän tekijän malli. Näiden mallien avulla pyritään estimoimaan Euroopan keskuspankin liikkeellelaskemia valtion nimellisiä joukkovelkakir-jalainojen korkoja.

Estimointimenetelmänä tutkimuksessa käytetään niin sanottua kaksivai-heista estimointimenetelmää, jonka ovat kehittäneet Diebold ja Li [6]. Mene-telmässä tuotetaan ensin aikasarjat estimoiduilla arvoilla jokaiselle paramet-rille. Sen jälkeen estimoidaan parametrien dynamiikka tilayhtälöillä. Tutki-muksessa estimoidaan mallia ensimmäisen, toisen ja kolmannen asteen auto-regressiivisten prosessien avulla eli yleisesti niin kutsutulla $AR(p)$ -prosessilla, jossa prosessin nykyinen arvo riippuu lineaarisen mallin tapaan p :stä edellisen periodin arvosta sekä ei-havaittavasta virhetermistä.

Tutkielmassa tutustutaan aluksi korkoon ja koron aikarakenteeseen. Ko-ron aikarakenteesta päästään tuottokäyrään ja sen eri ominaisuuksiin. Tämän jälkeen tutustutaan mallissa käytettyihin testausmenetelmiin ja aikasarja-analyysiin. Seuraavaksi tutustutaan kolmeen Nelson-Siegel-malliin ja niiden käyttäytymiseen eri maturiteeteille. Ennen mallien vertailuja käydään vielä läpi aineiston kuvaus ja tutkimuksessa käytettävä kaksivaiheinen lähestymis-tapa. Lopussa tehdään päätelmät kolmesta eri Nelson-Siegel-mallista. Tutki-muksen empiiriset analyysit on toteutettu kokonaan RStudio-ohjelmistolla.

2 Korkojen aikarakenne

Koron aikarakenteella kuvataan eri maturiteetin omaavien velkapapereiden tuottoja toisiinsa. Koron aikarakennetta mallinnettaessa käytetään velkapapereita, jotka ovat niin kutsuttuja nollakuponkilainoja eli bondeja. Koron aikarakenteen mallinnuksessa nollakupongin arvo on yleensä normeerattu arvoon 1 ja bondi kuvaa silloin siis kassavirtaa, joka koostuu ainoastaan lainan nimellisarvosta. Tällöin koron aikarakenteella verrataan sellaisten arvopapereiden tuottoja toisiinsa, jotka eroavat vain niiden maturiteeteissaan. Tämän myötä esimerkiksi likviditeetti ja riski ovat kaikille arvopapereille samat.

Korkojen aikarakennetta kuvataan tuottokäyrällä, joka on merkittävä inflaation ja taloudellisen kehityksen ennustaja taloustieteessä. Tuottokäyrä kuvaa siis velkakirjasta saatavaa tuottoa eri maturiteeteilla, jolloin myös tuottokäyrää estimoimalla voidaan ennustaa tulevia koron muutoksia. Tuottokäyrä voi olla nouseva, laskeva tai tasainen ja näitä tuottokäyrän muotoja pyritään selittämään muutamalla eri teorialla, joita on esitelty kappaleen lopussa.

Yleisesti rahoitusmarkkinoiden velkakirja- ja korkomarkkinat jaetaan kahteen eri markkina-alueeseen, lyhyen rahoituksen markkinoihin sekä pitkän rahoituksen markkinoihin. Lyhyen rahoituksen markkinoihin kuuluvat yleensä esimerkiksi valtioiden ja yritysten liikkeelle laskemat velkakirjat. Lyhyen rahoituksen markkinat kattavat yleensä alle vuoden mittaiset sopimukset vaihdettavasta arvopaperista, kun taas pitkän rahoituksen markkinoihin jaetaan vähintään vuoden mittaiset sopimukset. Pitkän rahoituksen markkinoilla käydään yleensä kauppaa esimerkiksi korkotermiineistä, korko-optioista sekä koronvaihtosopimuksista. Jatkossa käytetään lyhyen rahoituksen markkinoihin liittyvistä koroista nimitystä lyhyt korko ja niin ikään pitkän rahoituksen markkinoihin liittyvistä koroista nimitystä pitkä korko. [1]

2.1 Korko

Korko on taloustieteellisessä mielessä rahan hinta eli korvaus lainanantajalle lainaamastaan pääomasta. Korko on sitä suurempi, mitä korkeampi riski lainanantajalla on menettää lainaamansa pääoma. Laskennallisesti tarkasteltuna, kun lainan määrä on C ja korko on kiinteä $i > 0$, niin vuoden päästä nostettavissa oleva määrä on

$$C(1) = C + iC = (1 + i)^1 C$$

kun korko i on asetettu lainalle, jonka maturiteetti on yksi vuosi. Jos korkoa maksetaan korkoa korolle -periaatteen mukaisesti n -vuoden mittaisen perio-

din ajan, on n vuoden jälkeen nostettavissa määrä

$$C(n) = (1 + i)^n C.$$

Huomataan, että kertyvä korko on sitä suurempi, mitä pidempi maturiteetti on kyseessä. Ylläolevat tapaukset liittyvät tilanteeseen, jossa korkoa maksetaan vuosittain. Tarkastellaan tilannetta, jossa laina kasvaa jatkuvasti. Tällöin käytetään niin sanottua jatkuvaa korkoa, jota kutsutaan myös korkoutuvuudeksi. Tällöin korkoa liitetään joka hetki pääomaan. Pääoma on tällöin kasvanut hetkellä n määrän

$$C(n) = e^{\delta n} C,$$

jossa δ on nimelliskoron raja-arvo. Yleisesti korkouttamisella tarkoitetaan nykyhetkestä saatavan kassavirran realisoimista tulevaisuuden kassavirraksi halutulla korolla. Vastakohtana korkouttamiselle on diskonttaaminen, jossa lasketaan tulevan maksun nykyarvo käänteisellä kertoimella $e^{-\delta n}$. [11]

Luvun alussa puhuttiin nollakuponkilainasta ja siitä, että sen arvoksi normeerataan yleensä 1, jotta kassavirran voidaan kuvitella olevan vain sen nimellis-arvo ja näin mallintaa helposti tuottokäyrää. Nyt voidaan käyttää yllä saatuja kaavoja ja nähdään, että n maturiteetin omaavan nollakuponkilainan $C(n)$ nykyarvo hetkellä 0 on tällöin

$$C(0) = \frac{1}{(1 + i)^n} C(n)$$

tai vaihtoehtoisesti jatkuvan koron tapauksessa

$$C(0) = e^{-\delta n} C(n).$$

2.2 Tuottokäyrä

Niin kuin ollaan huomattu, koron suuruuteen vaikuttaa sen maturiteetti. Kun halutaan kuvata koron aikarakennetta, käytetään tuottokäyrää. Tuottokäyräksi kutsutaan joukkovelkakirjalainojen hinnoista muodostettua kuvaajaa, jossa esimerkiksi koron riski ja likviditeetti eivät muutu, ainoastaan maturiteetti vaihtelee. Tuottokäyrä kuvaa siis koron aikarakennetta eri pituisilla maturiteeteilla, kun muut korkoon vaikuttavat tekijät pysyvät muuttumattomina.

Tuottokäyrä voi olla joko nouseva, tasainen tai laskeva. Tuottokäyrä on nouseva, kun pitkät korot ovat lyhyiden korkojen yläpuolella. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että esimerkiksi mitä pidemmälle aikavälille lainan ottaa, sitä korkeampi on myös korko. Kun tuottokäyrä on tasainen, pitkät ja

lyhyet korot ovat yhtäsuuria. Kun taas tuottokäyrä on laskeva, lyhyet korot ovat pitkien korkojen yläpuolella. Tuottokäyrällä voi olla myös monimutkaisempia muotoja, esimerkiksi tuottokäyrä voi ensin nousta ja sitten laskea.[10]

2.3 Kolme teoriaa aikarakenteen muodolle

Tuottokäyrien muodon ennustaminen on taloustieteessä tärkeää ja siksi on ehdotettu eri teorioita selittämään tätä ilmiötä. Jotta tätä ilmiötä selittävä teoria olisi tarpeeksi hyvä, täytyy sen pystyä selittämään tuottokäyrän muodon lisäksi kolme ehtoa:

- Eri pituisten velkakirjojen korot liikkuvat samansuuntaisesti.
- Tuottokäyrä on nouseva yleensä silloin, kun lyhyiden korkojen taso on matala. Tuottokäyrä voi olla laskeva silloin, kun lyhyiden korkojen taso on erittäin korkea.
- Tuottokäyrä on yleensä aina nouseva.

Esitellään seuraavaksi kolme eri teoriaa, jotka pyrkivät selittämään näitä ilmiöitä mahdollisimman hyvin. Kohta huomataan, että odotusten teoria sekä erillisten markkinoiden teoria ovat puuttellisia, sillä ne eivät pysty selittämään jokaista kolmea kohtaa. Molemmat teorit ovat kuitenkin tärkeitä, sillä nämä kaksi teoriaa muodostavat vankan pohjan kolmannelle teorialle, likviditeetin suosintateorialle. [10]

2.3.1 Odotusteoria

Odotusteorian mukaan pitkä korko on lyhyiden korkojen odotusarvo. Odotusteorian taustalla on oletus etteivät sijoittajat sinällään suosi eri maturiteetin omaavia velkakirjoja toisiinsa, jolloin siis kahden eri maturiteetin omaavan velkakirjan täytyy olla yhtä kannattava. Käytännössä siis lyhyiden korkojen ollessa viisi vuotta peräkkäin esimerkiksi tasolla 5 prosenttia, pitää myös pitkän koron olla viiden vuoden kuluttua 5 prosenttia.

Odotusteoria selittää, miksi tuottokäyrä muuttuu eri aikoina. Jos tuottokäyrä on nouseva, silloin odotusteorian mukaan lyhyiden korkojen odotetaan nousevan tulevaisuudessa, joka tarkoittaa, että pitkä korko on tällä hetkellä lyhyen koron yläpuolella. Nyt lyhyet korot oletetaan olevan keskimääräisesti korkeampia tulevaisuudessa kuin tämän hetkinen lyhyt korko on, joka tapahtuu vain jos lyhyiden korkojen oletetaan nousevan.

Kun pitkät korot ovat lyhyiden korkojen alapuolella, tuottokäyrä on laskeva ja odotusteorian mukaan lyhyiden korkojen odotetaan laskevan tule-

vaisuudessa. Silloin lyhyiden korkojen odotetaan olevan tulevaisuudessa keskimäärin alhaisempia kuin tällä hetkellä, joka tapahtuu vain jos lyhyiden korkojen oletetaan laskevan. Jos tuottokäyrä on tasainen, lyhyet korot eivät odotusteorian mukaan keskimäärin muutu tulevaisuudessa.

Tuottokäyrän muodon lisäksi odotusteoria selittää myös kaksi ensimmäistä ehtoa. Ensimmäkin lyhyillä koroilla on ollut ominaisuus, että jos ne nousevat tänään, ne ovat yleensä korkeampia tulevaisuudessa. Kun siis lyhyet korot nousevat tänään, nostaa se ihmisten odotuksia tulevaisuuden lyhyistä koroista, ja koska pitkät korot ovat odotetuista tulevaisuuden lyhyistä koroista laskettu keskiarvo, niin nousu nostaa myös pitkiä korkoja. Tällöin siis myös pitkät korot nousevat lyhyiden korkojen noustessa, joka selittää ensimmäisen ehdon.

Toisaalta kun lyhyet korot ovat matalat, yleensä niiden odotetaan nousevan jollekin normaalille tasolle tulevaisuudessa ja tällöin lyhyiden korkojen odotettavissa oleva keskiarvo tulevaisuudessa on korkea suhteessa nykyiseen lyhyeen korkoon. Nyt pitkät korot tulevat olemaan huomattavasti lyhyiden korkojen yläpuolella ja tuottokäyrä on siksi nouseva. Juuri päinvastoin tapahtuu silloin, kun lyhyet korot ovat korkealla.

Nyt siis odotusteoria on selittänyt ensimmäisen ja toisen ehdon. Odotusteoria ei kuitenkaan pysty selittämään kolmatta kohtaa, sillä tyypillisesti nouseva tuottokäyrä viittaa lyhyiden korkojen kasvuun tulevaisuudessa. Kuitenkin käytännössä lyhyet korot nousevat tulevaisuudessa yhtä todennäköisesti kuin laskevatkin, joten tuottokäyrän pitäisi olla tasainen eikä nouseva odotusteorian mukaan. [10]

2.3.2 Erillisten markkinoiden teoria

Kun odotusteoria olettaa sijoittajien suosivan eri maturiteettien omaavia velkakirjoja yhtä paljon, erillisten markkinoiden teoriassa tämä oletus on käännetty sen vastakohtaksi. Erillisten markkinoiden teoriassa siis oletetaan, että jokaisella eri maturiteetin omaavalla velkakirjalla on omat markkinansa, eikä eri maturiteetin omaavat velkakirjat vaikuta kyseisen velkakirjan kysyntään ja tarjontaan.

Väite eri maturiteettien omaavien velkakirjojen erillisille markkinoille selitetään sillä, että sijoittajilla on yleensä hyvin vahvat mieltymyksen tietyn maturiteetin velkakirjoille, jolloin sijoittavat eivät ole kiinnostuneita kuin tiettyistä velkakirjoista. Se miksi tuottokäyrä on yleensä nouseva erillisten markkinoiden teorian mukaan selittyy sillä, että yleensä sijoittajilla on suurempi kysyntä kohdistuen lyhyen maturiteetin velkakirjoihin, joten pidemmän maturiteetin velkakirjoilla on tällöin matalampi hinta ja korkeampi korko, josta tuottokäyrän nouseva muoto johtuu.

Vaikka erillisten markkinoiden teoria pystyy selittämään tuottokäyrän nousevan muodon, se ei pysty selittämään sitä, miksi lyhyet ja pitkät korot nousevat yhdessä samansuuntaisesti. Teoria ei pysty myöskään selittämään sitä, miksi tuottokäyrä on yleensä nouseva silloin, kun lyhyiden korkojen taso on matala ja laskeva silloin, kun lyhyiden korkojen taso on korkea. [10] Koska erillisten markkinoiden teoria pystyy selittämään juuri sen ehdon, jota odotusteoria ei pysty selittämään, on nämä teoriat yhdistetty ja saatu likviditeetin suosintateoria. Käsitellään tätä teoriaa seuraavaksi.

2.3.3 Likviditeetin suosintateoria

Likviditeetin suosintateoria olettaa odotusteorian mukaan, että velkakirjojen pitkä korko on keskiarvo odotetuista lyhyistä koroista. Likviditeetin suosintateorian oletukseen lisätään kuitenkin likviditeettipremio, joka on pidemmän ajan velkakirjaan kohdistuvan riskin lisähinta. Likviditeetin suosintateorian mukaan velkakirjat eri maturiteeteilla ovat siis toistensa substituuotteja, mutta eivät kuitenkaan täydellisiä substituuotteja.

Lyhyen ajan velkakirjat kantavat vähemmän korkoriskiä, jonka takia myös sijoittajat haluavat sijoittaa näihin mielummin. Pidemmän ajan velkakirjoista sijoittajat haluavat saada sijoitukselleen lisähintaa kantaessaan suurempaa riskiä, jonka vuoksi sijoittajille tarjotaan likviditeettipremiota. Likviditeetin suosintateoria lähtee siis odotusteorian oletuksista, joihin lisätään likviditeettipremio.

Kun likviditeetin suosintateoria lähtee liikkeelle odotusteorian oletuksista, neljäs tunnettu teoria preferred habitat -teoria ei ota yhtä paljon kantaa odotusteoriaan, mutta päättyy samaan lopputulokseen. Preferred habitat -teoria olettaa sijoittajien preferoivan tietyn maturiteetin omaavia velkakirjoja enemmän, joka on lähellä erillisten markkinoiden teorian oletuksia. Preferred habitat -teoria kuitenkin hyväksyy, että sijoittajat voivat sijoittaa eri maturiteetin velkakirjaan, kuin mitä itse preferoivat enemmän, kunhan odotettu tuotto kyseisesti velkakirjasta on suurempi.

Koska likviditeetin suosintateorian ja preferred habitat -teorian oletukset ovat lähes samat, käsitellään seuraavaksi vain likviditeetin suosintateoria. Tarkastellaan likviditeetin suosintateoriaa ja katsotaan, selittääkö se tuottokäyrään liittyvät kolme ehtoa eli liikkuvatko velkakirjojen korot samansuuntaisesti, onko tuottokäyrä nouseva yleensä silloin, kun lyhyiden korkojen taso on matala ja toisinpäin ja onko tuottokäyrä yleensä aina nouseva.

Koska likviditeetin suosintateoria lähtee liikkeelle odotusteorian oletuksista, pätevät sille kaksi ensimmäistä ehtoa, sillä lisäämällä likviditeettipremio odotusteorian malliin, ei käyrien suunnat muutu, vain kulmakertoimet. Likviditeetin suosintateoria selittää myös kolmannen ehdon, sillä likviditeet-

tipremio kasvaa sitä korkeammaksi mitä pidempi aikaväli on kyseessä, jolloin vaikka lyhyet korot pysyisivät muuttumattomina, likviditeettipremio aiheuttaa tuottokäyrälle nousevan muodon. Likviditeetin suosintateoria selittää siis kaikki kolme ehtoa kuten aikaisemmin todettiin. [10]

3 Aikarakenteen mallintaminen

Koron aikarakennetta kuvaa siis tuottokäyrä niinkuin edellisessä kappaleessa huomattiin. Kun tarkastellaan koron aikarakennetta juuri tällä hetkellä, puhutaan spot-korkokäyrästä ja spot-korkokäyrää voikin pitää tuottokäyrän synonyyminä tällaisessa tilanteessa. Kun spot-korkokäyrä tiedetään, voidaan tästä johtaa myös termiinikorkokäyrä sekä diskonttaustekijä. Tutustutaan seuraavaksi lähemmin näihin termeihin ja tarkastellaan niiden yhteyttä toisiinsa. Lähdetään liikkeelle diskonttaustekijästä, josta päästään termiinikorkoon ja lopulta itse spot-korkoon.

3.1 Diskonttaustekijä

Diskonttaustekijä on nimensä mukaisesti se kerroin, jolla tulevaisuudessa maksettava maksu saadaan diskontattua nykyhetkeen ja näin saadaan velkapaperin nykyarvo. Merkitään diskonttaustekijää termillä $d(t, T)$, jossa t viittaa sopimuksen alkamisaikaan ja T maturiteettiin. Diskonttaustekijä kuvaa siis nollakuponkilainan hinnan nykyarvoa maksun erääntyessä hetkellä T . [1] Yhden hinnan lain nojalla diskonttaustekijälle pätee

$$d(0, T) = d(0, t)d(t, T),$$

joten tästä saadaan yleisesti diskonttaustekijälle kaava

$$d(t, T) = \frac{d(0, T)}{d(0, t)}. \quad (1)$$

Diskonttaustekijä ajanhetkestä t hetkeen T on siis diskonttaustekijä hetkestä 0 hetkeen T jaettuna diskonttaustekijä hetkestä 0 hetkeen t . [1]

3.2 Termiinikorko

Termiinisopimus kuvaa tulevaisuudessa aloitettavaa sopimusta sijoituksesta hetkellä t , joka toteutetaan hetkellä T , kun $t < T$. Kun termiinisolimuksessa sovitaan tulevaisuudelle korko, jolla sopimus tehdään, kutsutaan tätä korkoa termiinikorkoksi. Termiinikorko $f(t, T)$ on siis korko tulevaisuudessa tehtävästä sijoituksesta, joka aloitetaan hetkellä t ja jossa arvopaperin hinta maksetaan takaisin hetkellä T .

Termiinikorko saadaan määritettyä diskonttaustekijän avulla, sillä

$$d(t, T) = e^{-f(t, T)(T-t)}, \quad (2)$$

joten termiinkorolle saadaan muoto

$$f(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(d(t, T)).$$

Toisaalta kaavasta (1) saadaan termiinkorolle vielä muoto

$$f(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{d(0, t)}{d(0, T)}\right). \quad (3)$$

Välitön termiinkorko eli hetkellinen korko tulevaisuudessa saadaan, kun annetaan tekijän t lähestyä maturiteettia T eli [1]

$$r(T) = \lim_{t \rightarrow T} f(t, T).$$

3.3 Spot-korko

Spot-korot ovat niin sanottuja 0-termiinkorkoja eli termiinkorkoja, joissa sopimuksen aloitusajankohta $t = 0$. Tällöin merkitään

$$f(0, T) = s(T). \quad (4)$$

Spot-korolla mitataan sijoitetulle pääomalle lankeavaa korkoa, joka on sidottu spot-korkoon maturiteetin määrittämäksi ajaksi. Nyt siis erona diskonttaustekijään on se, että spot-korko ei muutu ajan kuluessa toisin kuin diskonttaustekijä. Spot-koron ero taas termiinkorkoon on jo edellä todetusti se, että spot-korko aloitetaan hetkellä 0, kun taas termiinisopimus alkaa tulevaisuudessa hetkellä t .

Tarkastellaan diskonttaustekijän ja spot-koron yhteyttä. Koska $t = 0$, soveltamalla kaavaa (4) saadaan

$$d(0, T) = e^{-f(0, T)T} = e^{-s(T)T}, \quad (5)$$

josta saadaan spot-korolle muoto

$$s(T) = -\frac{1}{T} \ln(d(0, T)).$$

Tätä muotoa hyödyntämällä saadaan määritettyä yhteys myös termiinkorolle ja spot-korolle. [1]

3.4 Aikarakenteen mallintamisen komponentit

Korkojen aikarakennetta pystytään kuvaamaan siis kolmella ekvivalentilla tavalla: diskonttaustekijällä, spot-korolla ja termiinikorolla. Kun näistä yksi tiedetään, voidaan kaksi muuta johtaa tunnettujen funktioiden avulla. Käytössä on siis seuraavat notaatiot:

$$\begin{aligned}t &= \text{sopimuksen aloitusajankohta} \\T &= \text{maturiteetti, jonka jälkeen maksu maksetaan} \\d(t, T) &= \text{diskonttaustekijä} \\s(T) &= \text{spot-korko} \\f(t, T) &= \text{termiinikorko} \\r(T) &= \text{lyhyen aikavälin termiinikorko.}\end{aligned}$$

Nyt diskonttausfunktio $d(t, T)$, spot-koron funktio $s(T)$ sekä termiinikoron funktio $f(t, T)$ voidaan ilmaista toistensa funktioina. Perehdytään tähän vielä seuraavaksi tarkemmin.

Tarkastellaan seuraavaksi termiinikorkojen ja spot-korkojen riippuvuutta toisiinsa ja lähdetään liikkeelle termiinikorosta $f(t, T)$. Käyttämällä termiinikorkoon kaavaa (3) saadaan

$$f(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{d(0, t)}{d(0, T)}\right).$$

Nyt käyttämällä kaavaa (2) saadaan

$$f(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{e^{-f(0, t)T}}{e^{-f(0, T)T}}\right),$$

josta nähdään, että

$$f(t, T) = \frac{1}{T-t} (f(0, T)T - f(0, t)t),$$

eli termiinikoron ja spot-koron välille saadaan riippuvuus

$$f(t, T) = \frac{s(T)T - s(t)t}{T-t}.$$

Tästä nähdään myös spot-koron ja lyhyen koron välinen yhteys

$$\lim_{t \rightarrow T} f(t, T) = \lim_{t \rightarrow T} \frac{s(T)T - s(t)t}{T-t} = \frac{d}{dT}(s(T)T)$$

soveltamalla l'Hopitalin sääntöä. Nyt huomataan, että

$$s(T)T = \int_0^T r(y)dy. \quad (6)$$

Nyt kun lyhyiden korkojen aikarakenne on tunnettu, on voimassa seuraavat tulokset lyhyille koroille:

$$\begin{aligned}d(t, T) &= e^{-\int_t^T r(y)dy} \\f(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T r(y)dy \\d_t(0, t) &= -r(t)d(0, t).\end{aligned}$$

Näillä muuttujilla pystytään kuvaamaan koko tuottokäyrä ja kun yksikin näistä tiedetään, saadaan aina kaksi muuta johdettua kaavojen avulla.

4 Tutkimuksessa käytetyt menetelmät

Tutkittaessa tuottokäyrän käyttäytymistä, korkojen tuottojen arvoja mitataan peräkkäisinä ajankohtina t . Tällöin tuottojen arvoista muodostuu niin kutsuttu aikasarja, jota pystytään tutkimaan aikasarja-analyysin avulla. Jotta stationaarisia aikasarjamenetelmiä voitaisiin käyttää, aikasarjan tulisi olla stationaarinen eli siinä ei saisi näkyä trendiä tai kausivaihtelua.

Perehdytään tässä luvussa stationaariseen prosessiin ja tutkimuksessa käytettävään $AR(p)$ -prosessiin sekä aikasarja-analyysin tärkeään käsitteeseen eli otosautokorrelaatiofunktioon. Tämän jälkeen käydään läpi vielä jäännösarjan valkoisuuden testaaminen.

4.1 Aikasarja-analyysi

Aikasarjaksi luokitellaan havaintoaineisto, jossa samasta havaintoyksiköstä saadut havainnot x_t ovat saatu peräkkäisinä ajankohtina, kun $t = 1, \dots, T$, on ajankohta ja T on ajankohtien lukumäärä. Tässä tutkimuksessa käytetään koroista muodostuvaa aikasarjaa, jossa tietyn kuukauden jokaiselta päivältä poimitut korot ovat keskiarvoistettu kyseiseen kuukauteen ja merkattu tämä kuun viimeisen päivän koroksi. Tämän myötä voidaan olettaa, että aikasarjan peräkkäiset ajankohdat ovat yhtä kaukana toisistaan. Koska tutkimuksessa havainnot koron aikarakenteesta ovat korkojen keskiarvoja, niin arvo on skalaari ja voidaan puhua yksiulotteisesta aikasarjasta.

Aikasarja-analyysin tavoitteena on yleisesti muodostaa tilastollinen malli, jolla pystytään kuvaamaan havaittua aikasarjaa ja mallintamaan peräkkäisten havaintojen riippuvuutta toisistaan. Kun tilastollinen malli on valittu, voidaan sen parametrit estimoida ja tarkastaa estimoidun mallin ja havaintojen yhteensopivuus. Tämän jälkeen voidaan testata parametreja koskevia hypoteeseja ja käyttää mallia ajateltuun tarkoitukseen. [15]

Tutustutaan seuraavaksi stationaarisen prosessin käsitteeseen, autoregressiivisiin prosesseihin sekä autokorrelaatiofunktioon. Tämän jälkeen käsitellään valkoisen kohinan käsite ja valkoisuuden testaaminen sekä aikasarjan viivästettyjen havaintojen korreloituneisuuden testaaminen.

4.1.1 Stationaarinen prosessi

Tilastollisen mallin satunnaismuuttujat $x_t, t = 1, \dots, T$, muodostavat järjestetyn jonon, joka on stokastinen prosessi X . Stokastisessa prosessissa aikaindeksi t määrää satunnaismuuttujien x_t järjestyksen jonossa. Tutkimuksessa käytettävä malli on diskreetti stokastinen prosessi, missä aikaindeksit ovat kokonaislukuja $t = 0, 1, 2, \dots, 172$. [16]

Stokastinen prosessi on heikosti stationaarinen, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

- Odotusarvo ei riipu ajasta eli

$$E(x_t) = \mu, \text{ kaikilla } t = 1, \dots, T.$$

- Varianssi on äärellinen, eikä riipu ajasta eli

$$Var(x_t) = \sigma^2 < \infty, \text{ kaikilla } t = 1, \dots, T.$$

- Satunnaismuuttujien x_t ja x_h välinen kovarianssi ei riipu ajanhetkestä vaan ainoastaan aikavälin $t - h$ pituudesta eli

$$Cov(x_t, x_h) = \gamma_{t-h}, \text{ kaikilla } t = 1, \dots, T.$$

Ylläolevista ehdoista seuraa, että stationaarisen prosessin realisaatiossa ei saa näkyä esimerkiksi trendiä tai varianssin systemaattista vaihtelua.

Kovarianssiehto voidaan merkitä myös muodossa

$$Cov(x_t, x_{t+h}) = \gamma_{t,t+h} = \gamma_{0,h},$$

jolloin voidaan lyhyesti merkitä $\gamma_{0,h} = \gamma_h$, ja tätä funktiota voidaan kutsua prosessin x_t autokovarianssifunktioksi h :n funktiona. Kun vakion h arvo kiinnitetään, sanotaan kovarianssia γ_h autokovarianssikertoimeksi viipymällä h . Yleensä kuitenkin autokovarianssifunktion sijasta käytetään autokorrelaatiofunktiota, joka saadaan kaavasta

$$\rho_h = Cor(x_t, x_{t+h}) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}.$$

Koska autokorrelaatiokertoimilla ρ_h on ilmeiset ominaisuudet

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 \\ |\rho_h| &< 1 \\ \rho_h &= \rho_{-h}, \end{aligned}$$

riittää autokorrelaatiofunktion arvoja testattaessa tutkia vain arvoja $h \geq 0$. On kuitenkin melko haastavaa estimoida näitä teoreettisia momenteja, sillä yleensä estimoitavia suureita on ääretön määrä. [15]

Heikosti stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktion voi kuitenkin estimoida helposti. Estimoidaan ensin odotusarvo käyttäen otoskeskiarvoa heikosti stationaariselle prosessille x_t , jolloin estimaatiksi saadaan

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t.$$

Estimaatti otosvarianssille on tällöin

$$c_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2,$$

ja estimaatti otoskovarianssille h on tällöin

$$c_h = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x}), \quad 0 \leq h < T.$$

Nyt estimaatti otosautokorrelaatiolle h saadaan kaavasta

$$r_h = \frac{c_h}{c_0} = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2}, \quad 0 \leq h < T.$$

jossa

$$\begin{aligned} c_h &= \text{aikasarjan } h. \text{ otosautokovarianssi ja} \\ c_0 &= \text{aikasarjan otosvarianssi.} \end{aligned}$$

Nyt ollaan käsitelty tärkeimmät stationaarisen prosessin ehdot sekä aikasarja-analyyssissä käytettävä tärkeä käsite autokorrelaatiofunktio. [15]

4.2 Autoregressiiviset prosessit

Tutustutaan seuraavaksi lyhyesti tutkimuksessa käytettäviin aikasarja-analyyssin prosesseihin. Myöhemmin Nelson-Siegel-malleihin tutustuttaessa huomataan, että Nelson-Siegel-mallin komponentit olettavat koron riippuvan lineaarisesti edellisistä koron arvoista. Tämän takia käytetään autoregressiivisiä prosesseja, jotka olettavat prosessin nykyisen arvon riippuvan lineaarisesti prosessin edellisten periodien arvosta sekä ei-havaittavasta satunnaissokista eli virhetermistä.

4.2.1 AR(1)-prosessi

Ensimmäisen asteen autoregressiivinen prosessi eli niin kutsuttu AR(1)-prosessi on muotoa

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2),$$

jossa virhetermit ϵ_t ovat riippumattomasti ja identtisesti jakautuneita odotusarvolla nolla ja vakiovarianssilla. Edellisessä kappaleessa tehtyjen oletusten vallitessa eli mikäli regressiokertoimelle ϕ pätee $|\phi| < 1$, on se sekä heikosti

että vahvasti stationaarinen. Ensimmäisen asteen autoregressiivisen prosessin odotusarvo on nolla ja varianssi on

$$\text{Var}(y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

Tässä autoregressiivinen prosessi on keskistetty odotusarvon ympärille. Autokorrelaatiofunktio AR(1)-prosessille on (ks. [15])

$$\rho_h = \begin{cases} 1, & \text{kun } h = 0 \\ \phi^h, & \text{kun } h > 0. \end{cases}$$

4.2.2 AR(p)-prosessi

Yleinen versio AR(1)-prosessista on AR(p)-prosessi eli niin kutsuttu p :n asteen autoregressiivinen prosessi. AR(p)-prosessi on muotoa

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2). \quad (7)$$

Prosessin nykyinen arvo riippuu siis p :n edellisen periodin arvosta ja ei-havaittavasta virhetermistä. AR(p)-prosessi voidaan kuvata myös viivästysoperaatiota ja polynomia $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ käyttäen seuraavasti:

$$\phi(B)y_t = \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2).$$

AR(p)-prosessin stationaarisuudelle riittävä ehto on, että polynomien $\phi(z)$ ($z \in \mathbf{C}$) juuret sijaitsevat yksikköympyrän kehän ulkopuolella kompleksitasossa tai $\phi(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$. Edellinen ehtokaan ei välttämättä ole välttämätön, mutta sitä ei käsitellä tässä tutkimuksessa tarkemmin. Autokorrelaatiofunktio AR(p)-prosessille on (ks. [15])

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \dots + \phi_p \rho_{h-p}, \quad \text{kun } h > 0.$$

4.3 Mallin korreloituneisuuden testaaminen

Aikasarja-analyysia käytettäessä halutaan tietää onko viivästettyjen havaintojen välillä autokorreloituneisuutta. Jos autokorreloituneisuutta esiintyy, tällöin viivästettyjen havaintojen välillä on korrelaatiota. Aikasarjan ja sen viivästettyjen havaintojen korreloituneisuutta voidaan testata useilla eri menetelmillä. Tässä tutkimuksessa autokorreloituneisuuden testaamiseen käytetään Box-Ljung-testiä ja käännepistetestiä.

4.3.1 Box-Ljung-testi

Box-Ljung-testisuurella testataan aikasarjan autokorrelaatiota. Box-Ljung-testi on modifioitu versio

$$Q = T \sum_{h=1}^H r_h^2 \sim_{as} \chi_H^2, \quad (8)$$

ja siten siis Box-Ljung-testi on muotoa

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{h=1}^H r_h^2 / (T-h) \sim_{as} \chi_H^2, \quad (9)$$

koska pienissä otoksissa modifioitu testisuure on lähempänä χ_H^2 -jakaumaa kuin testisuure Q . Kaavassa luku T on otoksen havaintojen lukumäärä, r on otosautokorrelaation estimaatti ja h :n arvo kertoo, kuinka mones otosautokorrelaatio on kyseessä. Box-Ljung-testissä nollahypoteesi olettaa datan autokorreloimattomuuden viipeeseen H asti. Nollahypoteesin ollessa voimassa, testisuure noudattaa χ^2 -jakaumaa ja aikasarjan voidaan olettaa olevan valkoista kohinaa. Muussa tapauksessa mallissa on havaittavissa merkittävää autokorrelaatiota. [15]

4.3.2 Käännepestetesti

Kun halutaan testata, onko peräkkäisten havaintojen välillä autokorrelaatiota, käytetään käännepestetestiä. Käännepestetesti testaa sitä, kuinka paljon käännekohtia eli huippuja ja aallonpohjia sarja sisältää. Aikasarjalla y_1, \dots, y_n on käännepestetesti ajanhetkellä i , jos $y_{i-1} < y_i$ ja $y_i > y_{i+1}$ tai $y_{i-1} > y_i$ ja $y_i < y_{i+1}$. Ajanhetkellä i käännepestetestin todennäköisyys on $2/3$, kun kyseessä on IID-sarja. Kun ajanhetkiä on T kappaletta ja käännepestetesteitä on n määrä, odotusarvo on silloin

$$E(n) = 2(T-2)/3.$$

Voidaan myös osoittaa, että pätee

$$Var(n) = (16T - 29)/90.$$

Kun ajanhetkien T lukumäärä on suuri ja tarkasteltava sarja on valkoista kohinaa, noudattaa n likimain jakaumaa $N(\mu_n, \sigma_n^2)$. [9]

4.4 Jäännössarjan arviointi

Aikasarja-analyysia käytettäessä halutaan tietää, onko jäännössarja stationaarinen ja normaalin. Aikasarjan ja sen jäännössarjojen stationarisuutta ja normalisuutta voidaan testata eri menetelmillä. Tässä tutkimuksessa stationarisuuden testaamiseen käytetään laajennettua Dickey-Fuller-testiä. Lisäksi aikasarjan normalisuutta testataan Jarque-Bera-testillä ja kvantiili-kvantiili-kuviolla. Käydään seuraavaksi lyhyesti läpi tunnusluvut ja testisuureet tarkemmin.

4.4.1 Laajennettu Dickey-Fuller-testi

Tarkastellaan ensimmäisen asteen autoregressiivistä mallia eli AR(1)-mallia kaavassa 7. Jos $\phi_1=1$, prosessilla y_t sanotaan olevan yksikköjuuri. Laajennettua Dickey-Fuller-testiä käytettäessä nollahypoteesi H_0 on, että prosessilla on yksikköjuuri. Kun nollahypoteesi on voimassa, tarkoittaa se sitä, että prosessi on epästationaarinen. Muussa tapauksessa eli vaihtoehdoisen hypoteesin H_1 voimassa ollessa prosessi on stationaarinen. Samoin saadaan p -asteinen autoregressiivinen yhtälö, joka on muotoa

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_1 + \dots + \phi_{p-1} y_{t-p+1} + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), \quad (10)$$

joka voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$\Delta y_t = \phi_0 + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \epsilon_t. \quad (11)$$

Vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 on, että $\gamma < 0$, joten testi on yksisuuntainen. Laajennetussa Dickey-Fuller-testissä estimaatti parametrille γ saadaan pienimmän neliösumman menetelmällä ja se noudattaa likimain Dickey-Fuller-jakaumaa, kun havaintojen määrä n on riittävän suuri ja nollahypoteesi $\gamma = 0$ on tosi. [17]

4.4.2 Jarque-Bera-testi

Jarque-Bera-testissä käytetään huipukkuudesta ja vinoudesta saatavia arvoja, ja näistä luvuista lasketaan arvo, joka kertoo normaalijakautuneisuudesta. Tämä testisuure saadaan kaavalla

$$J - B = \frac{N - k}{6} \left(S^2 - \frac{(K - 3)^2}{4} \right),$$

jossa K on huipukkuus, S on vinous, k on estimoitujen kertoimien määrä ja N on havaintojen lukumäärä. Jarque-Bera-testin nollahypoteesi H_0 olettaa normaalijakautuneisuuden. Jarque-Bera-testin arvot seuraavat χ_2^2 -jakaumaa.

4.4.3 Kvantiili-kvantiili-kuvio

Kvantiililla yleisesti tarkoitetaan murto-osaa tai prosenttiosuutta pisteistä, jotka jäävät tämän pisteen alapuolelle. Kvantiili-kvantiili-kuviolla voidaan graafisesti tutkia, onko kahdella eri aineistolla sama jakauma. Kvantiili-kvantiili-kuvio on ensimmäisen aineiston kvantiilit kuvattuna x-akselilla ja toisen aineiston kvantiilit kuvattuna y-akselilla. Kuvioon piirretään diagonaali ja jos molempien aineistojen kvantiilit kulkevat likimain tätä viivaa pitkin, ovat aineistot silloin samasta jakaumasta peräisin. Mitä kauempana pisteet ovat tästä viivasta, sitä enemmän on viitteitä siitä, että aineistot ovat peräisin eri jakaumista.

5 Nelson-Siegel-mallit

Nelson-Siegel-mallit ovat malleja, joita käytetään laajasti korkojen aikarakenteen sovittamiseen käytännössä. Tarkat estimaatit nykyisestä koron aikarakenteesta ovat tärkeitä monilla rahoituksen aloilla, mutta myös tulevaisuuden aikarakenteen ennustaminen on tärkeää, ja näitä pyritään ennustamaan Nelson-Siegel-malleilla.

Nelson-Siegel-mallit ovat laajasti käytettyjä keskuspankeissa ja rahapoliittisessa päätöksenteossa. Vaikka malleista löytyy puutteita teoreettisista perustuksista, Nelson-Siegel-malleja käytetään the Bank Internationalin mukaan yhdeksässä keskuspankissa estimointimenetelmänä kaikista kolmesta toista keskuspankista, jotka raportoivat estimointimenetelmänsä BIS:lle. [3] Nelson-Siegel-mallit ovatkin osa suosituimpia aikarakenteen estimointimenetelmiä.

Nelson-Siegel-mallit pyrkivät optimaalisesti estimoimaan, mallintamaan ja ennustamaan korkojen aikarakennetta. Nelson ja Siegel ehdottivat joustavaa ja tasaista parametrifunktiota sovitettavaksi aikarakenteeseen ja he osoittivat heidän ehdottamansa mallin pystyvän saamaan monia tyypillisesti havaittuja muotoja, joita tuottokäyrä omaksuu yli ajan. Seuraavaksi tutustaan Nelsonin ja Siegelin kolmen tekijän perusmalliin, suppeampaan kahden tekijän malliin sekä neljän tekijän malliin, joka on laajennettu versio Nelson-Siegel-malleista.[2]

Tässä tutkimuksessa käytetään dynaamista kolmiulotteista parametriversiota Nelson-Siegel-mallista sekä kahden parametrin että laajennettua neljän parametrin versiota Nelson-Siegel-mallista. Näille parametreille ehdotetaan ja estimoidaan autoregressiivisiä malleja ja näitä malleja vertailemalla pystytään tekemään päätelmiä siitä, mikä on paras malli kuvaamaan havaittua aineistoa.

5.1 Kolmen tekijän perusmalli

Nelsonin ja Siegelin kolmen tekijän perusmallissa sovitetaan termiinikorkokäyrän approksimaatiofunktiota kiinnitettynä ajanhetkenä. Nelsonin ja Siegelin kolmen tekijän malli on erittäin suosittu esimerkiksi keskuspankeissa, sillä se antaa tarpeeksi joustavan mallin käyttämällä vain pientä määrää parametrejä. Nelsonin ja Siegelin kolmen tekijän perusmalli termiinikorolle on muotoa

$$f(t) = \beta_{0t} + \beta_{1t}e^{-t\lambda} + \beta_{2t}t\lambda e^{-t\lambda}, \quad (12)$$

joka on matriisimuodossa esitettynä

$$f(t) = \begin{bmatrix} \beta_{0t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t\lambda} \\ t\lambda e^{-t\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{0t} \\ \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Beta-parametrit ovat ajassa varioivia muuttujia, mutta merkitään kyseisiä parametreja merkinnöin β_0, β_1 ja β_2 . Tehdään näin myös jatkossa kahden tekijän mallin ja neljän tekijän mallin kohdalla. Kolmen tekijän mallin tekijät β_0, β_1 ja β_2 määritetään alkuehdoista ja λ on yhtälöön liittyvä vakio, joka kertoo missä maturiteetissa tekijä β_2 saavuttaa maksiminsa. Mitä itseisarvoltaan pienempi termin λ arvo on, sitä nopeammin myös vaimenemistermi β_1 lähestyy nollaa ja näin vaikutus häviää mallista. [13]

Kolmen tekijän perusmalli on suosittu aikarakenteen mallintamisessa, sillä mallin kolme komponenttia $[1, e^{-t\lambda}, t\lambda e^{-t\lambda}]$ takaavat mallin monotonisuuden, kaltevuuden ja kaarevuuden tarpeeksi joustavasti, mutta kuitenkin vain kolmella komponentilla. Komponenteilla on omat selityksensä:

β_0 = pitkän ajan korkotaso

β_1 = mallin kaltevuus

β_2 = mallin kaarevuus

Kappaleessa 3 todistettiin termiinikoron ja spot-koron yhteys. Käytetään nyt kaavaa (6) eli

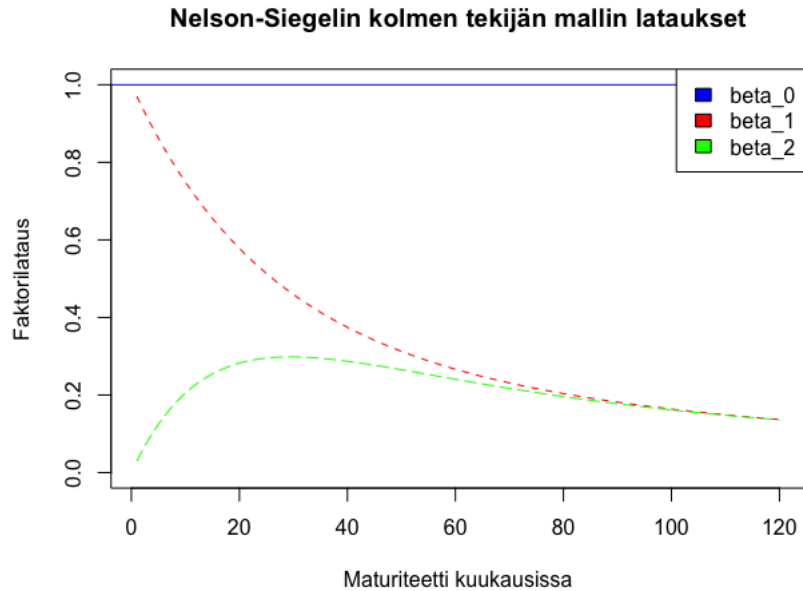
$$s(T) = \frac{1}{T} \int_0^T r(y) dy.$$

Merkitään seuraavassa T :tä pienellä t -kirjaimella aiemmasta poiketen. Nyt saadaan Nelson-Siegel-mallille esitys

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \beta_0 + \beta_1 e^{-y\lambda} + \beta_2 y \lambda e^{-y\lambda} dy \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-t\lambda}}{t\lambda} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-t\lambda}}{t\lambda} - e^{-t\lambda} \right). \end{aligned}$$

Matriisimuodossa esitettynä spot-korko on

$$s(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda(1-e^{-t\lambda})}{t} \\ \frac{\lambda(1-e^{-t\lambda})}{t} - e^{-t\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}.$$



Kuva 1: Nelson-Siegel-mallin tekijöiden lataukset, kun $\lambda = 0.0609$.

Kuva 1 kuvaa kunkin komponentin arvon käyttäytymistä maturiteettiin. Kuviossa on käytetty muuttujalle λ arvoa 0.0609.

Kuvasta nähdään, että pitkää korkoa kuvaava komponentti β_0 on vakio, niinkuin kaavassa (13). Sen vaikutus ei siis vaimene maturiteetin kasvaessa. Komponentit β_1 ja β_2 sen sijaan vaimenevat kohti nollaa, kun maturiteetti kasvaa. Komponenttia β_1 kutsutaan lyhyen aikavälin muuttujaksi, sillä sen kerroin spot-korkoon on ensin 1 ja vaimenee sitten eksponentiaalisesti. Komponenttia β_2 kutsutaan taas keskisuureksi muuttujaksi, sillä sen arvo on aluksi nolla, jonka jälkeen muuttujan arvo kasvaa tiettyyn pisteeseen asti, kunnes sekin lähtee vaimenemaan kohti nollaa. Komponentti β_2 saa spot-korolle aikaan S-muotoisen käyrän. Niinkuin jo aiemmin todettiin, muuttamalla muuttujan λ arvoa myös käyrien kulmakertoimet muuttuvat. [13] Tässä tutkielmassa käytetään kuitenkin parametrille λ Dieboldin ja Lin asettamaa arvoa 0.0609, sillä se maksimoi komponentin β_2 30 kuukauden kohdalla.

Kuvasta 1 havaitut komponenttien muuttumiset ajassa voidaan havaita myös raja-arvon avulla. Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa spot-koron maturiteetti t lähestyy ääretöntä:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \beta_0.$$

Tässä tilanteessa spot-korko on keskimääräinen pitkä korko, joka on myös

intuitiivisesti looginen tulos. Pitkän koron tulee teoreettisesti olla positiivinen eli silloin $\beta_0 > 0$. Tiedetään kuitenkin, että käytännössä näin ei aina reaali maailmassa ole.

Tarkastellaan seuraavaksi spot-korkoa, kun maturiteetti t lähestyy nollaa eli miltä malli näyttää, kun lainan juoksuaika lähestyy nollaa.

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \beta_0 + \beta_1.$$

Huomataan, että lyhyt korko on muotoa $\beta_0 + \beta_1$. Tämänkin arvon tulee olla positiivinen, sillä tämä korko kuvaa välitöntä spot-korkoa. Kun β_0 kuvaa pitkää korkoa, termi β_1 selittää funktion kaltevuutta sekä eroa pitkissä ja lyhyissä koroissa niinkuin jo aiemmin todettiin. [8]

Artikkelissa [6] on osoitettu, että aikaisemmin käsitellyt koron aikarakenteen tärkeimmät ehdot luvussa 2 pätevät myös Nelsonin ja Siegelin mallille eli Nelsonin ja Siegelin malli kuvaa siis tuottokäyrän nousevaksi ja konkaaviksi. Diebold ja Li osoittivat myös, että kertoimet β_0, β_1 ja β_2 kuvaavat korkotasoa, kaltevuuden sekä kaarevuuden niin kuin pitääkin, vaikka Nelson-Siegel-mallia ei alunperin luotu dynaamiseksi malliksi.

Nelson-Siegel-malli ei kuitenkaan kuvaa kaikkia mahdollisia tuottokäyrän muotoja halutulla tavalla vaan ongelmaksi muodostuu esimerkiksi mallit, joissa on monia maksimi- tai minimikohtia. Tästä syystä on esitelty myös monimutkaisempia tuottokäyrää kuvaavia malleja, jotka ovat erikoistapauksia Nelson-Siegel-mallista. Tällöin Nelson-Siegel-malliin on joko lisätty lisää komponentteja, muunneltu vaimenemistermien käyttäytymistä tai yhdistelty näitä molempia. [13] Tutustutaan seuraavaksi kuitenkin yksinkertaistettuun muotoon Nelson-Siegel-mallista, josta on poistettu kokonaan kolmas komponentti.

5.2 Kahden tekijän malli

Kahden tekijän Nelson-Siegel-malli on kolmen tekijän malli poistettuna viimeinen komponentti eli β_2 , joka kuvaa kaarevuutta Nelson-Siegelin kolmen tekijän perusmallissa. Niinkuin ollaan jo aikaisemmin todettu, nämä kolme pääkomponenttia selittävät tuottokäyrää jo riittävästi monissa tilanteissa. [13]

Kahden tekijän mallissa on poistettu kaarevuutta kuvaava komponentti β_2 , sillä sen on todettu lisäävän suhteessa vain vähän tuottokäyrän muotoa ja näin jo kaksi ensimmäistä komponenttia tuovat tuottokäyrälle riittävän sopivan muodon. Kahden tekijän Nelson-Siegel-mallia on tutkittu artikkelissa [12], jossa väitetään kahden ensimmäisen termin ennustavan koron aikarakennetta tarpeeksi hyvin. Artikkelissa kuitenkin myös todettiin, ettei kahden tekijän malli riitä selittämään koko tuottokäyrää.

Kahden tekijän mallissa termiinikorkokäyrälle saatava muoto on tällöin

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t\lambda}, \quad (13)$$

joka on matriisimuodossa

$$f(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

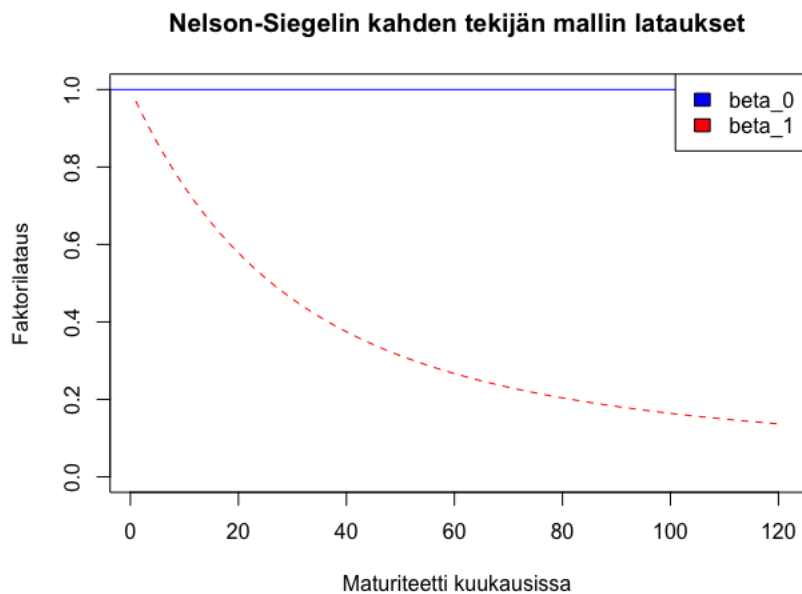
Spot-korolle saadaan samoin kuin kolmen tekijän mallissa muoto

$$s(t) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - e^{-t\lambda}}{t\lambda} \right], \quad (15)$$

joka on matriisimuodossa

$$s(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda(1 - e^{-t\lambda})}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix}.$$

Edellisessä kappaleessa huomattiin kuvasta 1 sekä spot-koron raja-arvosta, että välitön spot-korko on $\beta_0 + \beta_1$ ja spot-korko tarpeeksi pitkän ajanjakson kuluttua on vain pitkän koron komponentti β_0 . Tällöin poistaessa kolmas komponentti β_2 nämä raja-arvot eivät muutu, vain korkotasoa näiden tilojen välissä muuttuu. Nämä ovat nähtävissä myös kuvasta 2.



Kuva 2: Kahden tekijän mallin tekijöiden lataukset, kun $\lambda = 0.0609$.

Vaikka kahden tekijän malli antaa monessa tilanteessa riittävän tarkkoja estimaatteja tuottokäyrälle, se ei pysty selittämään kaikkia tuottokäyrän muotoja niin ikään kuin ei kolmen tekijän mallikaan. Tutustutaan seuraavaksi Björkin ja Christensenin laajennettuun neljän tekijän malliin.

5.3 Björkin ja Christensenin neljän tekijän malli

Björk ja Christensen laajensivat Nelson-Siegelin kolmen tekijän perusmallia yhdellä lisätermillä lisätäkseen mallin joustavuutta ja lisäsivät malliin komponentin β_3 . Komponentti β_3 antaa mallille enemmän joustavuutta ja sopivuutta tuottokäyrään. Komponenttia voidaan ajatella toisena kaltevuuden parametrina, mutta se lähestyy nollaa vielä nopeammin mitä komponentti β_1 . Tällöin siis kaltevuus voidaan nähdä komponenttien β_1 ja β_3 summana neljän tekijän mallissa.

Tällöin Björkin ja Christensenin neljän tekijän malli termiinikorolle on muotoa

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t\lambda} + \beta_2 t \lambda e^{-t\lambda} + \beta_3 e^{-2t\lambda}, \quad (16)$$

ja sen matriisimuoto on

$$f(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t\lambda} \\ t\lambda e^{-t\lambda} \\ e^{-2t\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Vastaavasti kuin kahdella edelliselläkin mallilla, termiinikorkokäyrästä saadaan spot-korkokäyrä, joka on muotoa

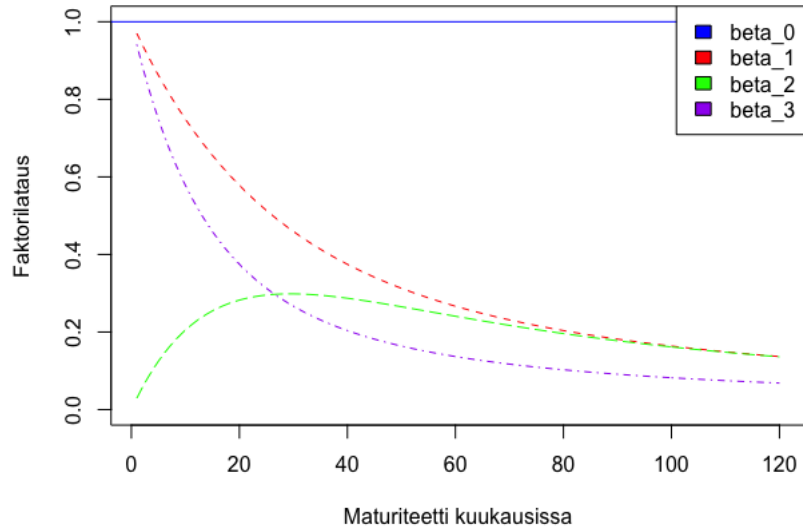
$$s(t) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-t\lambda}}{t\lambda} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-t\lambda}}{t\lambda} - e^{-t\lambda} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-2t\lambda}}{2t\lambda} \right),$$

ja niin ikään matriisimuodossa

$$s(t) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda(1-e^{-t\lambda})}{t} \\ \frac{\lambda(1-e^{-t\lambda})}{t} - e^{-t\lambda} \\ \frac{\lambda(1-e^{-2t\lambda})}{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}.$$

Tutkitaan seuraavaksi parametrien arvojen käyttäytymistä maturiteettiin. Kuviossa on käytetty muuttujalle λ arvoa 0.0609 niinkuin aikaisemminkin.

Nelson-Siegelin neljän tekijän mallin lataukset



Kuva 3: Björkin ja Christensenin mallin parametrien lataukset.

Kuvasta 3 nähdään komponenttien β_1 ja β_3 kaltevuuksien lataukset. Lisäparametri β_3 on jonkin verran toisen kaltevuusparametrin β_1 alapuolella, joten sen vaikutus ei ole niin suuri annetussa mallissa, mutta näiden parametrien summa kuitenkin nostaa tuottokäyrää. Toinen huomion arvoinen asia kuvassa on, että lähestyessä hetkeä 0 kaltevuuksien yhteisvaikutus lähestyy kaksinkertaisia lukemia.

Nyt ollaan esitelty Nelsonin ja Siegelin kolmen tekijän perusmalli, Dieboldin, Piazzesin ja Rudebuschin rajoitettu kahden tekijän malli sekä Björkin ja Christensenin laajennettu neljän tekijän malli Nelson-Siegel-mallista. Tutustutaan seuraavaksi aineistoon.

6 Aineisto

Tutkimuksessa käytetään Euroopan keskuspankin nimellisiä joukkovelkakuponkilainojen tuottoja syyskuusta 2004 joulukuuhun 2016, joista estimoidaan Nelson-Siegel-malleilla sovitettu tuottokäyrä. Nämä nollakuponkivelkakirjojen tuotot ovat laskettu jokaiselta kuukaudelta keskiarvoina tuotoista ja käytetty sitä määrittämään keskimääräinen tuotto jokaiselle kuukaudelle. Näin ollen saatu 172 havaintoarvoa jokaiselle maturiteetille.

Aineisto on kerätty aikajaksolta 2004:9-2016:12 ja tutkimuksessa on tällöin 172 havaintoa tietyllä maturiteetilla. Estimoituja tuottokäyriä eri maturiteeteille on 6 kappaletta ja maturiteettien pituudet ovat 3 kuukautta, 1 vuosi, 2 vuotta, 5 vuotta, 7 vuotta sekä 10 vuotta. Aineiston yhtenäistämiseksi ollen maturiteeteille käytetty kuukausia eli maturiteetit ovat 3, 12, 24, 60, 84 ja 120 kuukautta.

Aineisto on valittu alkamaan vuodesta 2004, koska siihen mennessä euron käyttöönoton vaikutukset tuottoihin olivat jo madaltuneet. Aineisto on valittu päättymään vuoteen 2016, sillä 2010-luvun loppupuolella esiintyneet erittäin alhaiset korot, jopa negatiiviset, voisivat häiritä Nelson-Siegel-mallien käyttöä. Ajanjakson 2004-2016 väliin mahtuu myös vuonna 2008 alkanut finanssialaa järjestyttännyt finanssikriisi, ja tämä näkyy myös havaitun aineiston koroissa.

Nelson-Siegel-mallien sovitetuista tuottokäyristä tutkitaan luonnollisesti myös sovitettujen tuottokäyrien tasoa, kaltevuutta ja kaarevuutta. Mallin taso on määritetty 120 kuukauden maturiteetin tuottona, kaltevuus 120 kuukauden maturiteetin tuoton ja 3 kuukauden maturiteetin tuoton erotuksena ja kaarevuus kaksi kertaa 24 kuukauden maturiteetin ja 10 vuoden ja kolmen kuukauden maturiteettien tulon erotuksena.

Aluksi tutkitaan näiden eri maturiteettien tunnuslukuja sovitetuilla tuottokäyrillä, esimerkiksi keskiarvoa, hajontaa, minimiä ja maksimia sekä viivastusta ja huipukkuutta. Sen jälkeen tutkitaan sovitettuja tuottokäyriä eri testien avulla ja varmistetaan, että mallien viivastetyt havainnot ovat autokorreloituneita ja mallien virhetermit muistuttavat valkoista kohinaa ja ovat täten autokorreloimattomia. Lopuksi tehdään päätelmät mikä Nelson-Siegel-malleista on paras estimoimaan havaittua tuottokäyrää.

7 Aineiston analysointi

Tutustutaan seuraavaksi tutkimuksessa käytettävään estimointimenetelmään sekä itse aineiston analysointiin. Korkojen aikarakenteen mallintamisessa käytetään monia eri estimointimenetelmiä. Kaikista menetelmistä löytyy sekä hyötyjä että haittoja esimerkiksi niiden vaativuuden ja tehokkuuden mukaan. Eri estimointimenetelmiä ovat esimerkiksi kaksivaiheinen estimointi, yksivaiheinen estimointi, jatkuvan ajan menetelmä sekä bayesiläinen data-analyysi. Tässä tutkimuksessa käytetään Dieboldin ja Lin [6] kehittämää kaksivaiheista menettelytapaa. Kaksivaiheisella menetelmällä testataan Nelsonin ja Siegelin kolmen tekijän perusmallia, rajoitetumpaa kahden tekijän mallia sekä Björkin ja Christensenin neljän tekijän mallia ja vertaillaan, mikä näistä malleista on paras estimoimaan havaittua tuottokäyrää. Lähdetään liikkeelle kaksivaiheisen estimoinnin esittelystä, jonka jälkeen analysoidaan itse aineistoa.

7.1 Kaksivaiheinen estimointi

Kaksivaiheisessa estimoinnissa on nimensä mukaisesti kaksi vaihetta. Ensimmäisessä vaiheessa Nelson-Siegel-malli sovitetaan jokaiselle ajanjaksolle $t = 1, \dots, T$ pienimmän neliösumman menetelmällä, jolloin saadaan estimoitujen parametrien $\hat{\beta}_{0t}$, $\hat{\beta}_{1t}$ ja $\hat{\beta}_{2t}$ kolmiulotteinen aikasarja ja vastaava N -ulotteinen sarja virhetermien estimaateille ϵ_{0t} , ϵ_{1t} ja ϵ_{2t} . Nelson-Siegel-malli tiivistää siis N -ulotteisen tuottoaikasarjan kolmiulotteiseksi tuottoparametrien $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ ja $\hat{\beta}_2$ aikasarjaksi, ja on siksi erittäin käytännöllinen. Kaksivaiheisen estimoinnin toisessa vaiheessa dynaaminen malli sovitetaan tuottoparametreihin $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ ja $\hat{\beta}_2$. Tämä tuottaa parametrien estimaatit ja määrää tuottoparametrien kehitymissuunnan ja virhetermien estimaatit. [7]

Diebold ja Li asettivat aikaparametrin λ_t vakioksi, jolla he onnistuivat muuntamaan ongelman epälinearisesta sovittamisesta yksinkertaiseksi lineaariseksi regressioksi. Diebold ja Li asettivat aikaparametrin λ_t arvoksi 0.0609, joka maksimoi keskipitkän aikavälin parametrin β_2 30 kuukauden kohdalla. [6] Tässä tutkimuksessa ollaan päädytty myös vakioimaan λ_t arvoksi 0.0609. Analysoidaan seuraavaksi aineistoa Nelson-Siegel-mallien avulla.

7.2 Kolmen tekijän perusmallin testaus

Tutkitaan aluksi, miten Nelson-Siegelin kolmen tekijän perusmalli toimii käytetyssä aineistossa. Kaikissa testauksissa käytetään Dieboldin ja Lin kehittämää kaksivaiheista estimointia, jossa aikaparametri λ on kiinnitetty arvoksi 0.0609, joka maksimoi keskipitkän aikavälin parametria β_2 30 kuukauden kohdalla.

Taulukossa 1 nähdään aluksi sovitetun tuottokäyrän tunnuslukuja eri maturiteeteille sekä kaltevuudelle ja kaarevuudelle. Kaltevuus on määritetty 10 vuoden maturiteetin ja 3 kuukauden maturiteetin erotuksena ja kaarevuus kaksinkertaisena kahden vuoden tuottona vähennettynä kolmen kuukauden ja 10 vuoden maturiteettien tuotot.

Maturiteetti	Keskiarvo	Mediaani	Keskihajonta	Minimi	Maksimi	Vinous	Huipukkuus
3	0,911	0,245	1,532	-0,861	4,270	0,861	-0,618
12	0,909	0,270	1,615	-0,982	4,454	0,769	-0,793
24	1,090	0,576	1,630	-0,930	4,600	0,611	-0,984
60	1,747	1,631	1,552	-0,499	4,689	0,140	-1,395
84	2,034	2,110	1,523	-0,373	4,684	-0,052	-1,485
120 (taso)	2,292	2,567	1,509	-0,257	4,672	-0,199	-1,505
Kaltevuus	1,381	1,138	0,858	0,008	3,395	0,643	-0,521
Kaarevuus	-1,023	-1,093	0,646	-2,075	0,415	0,587	-0,532

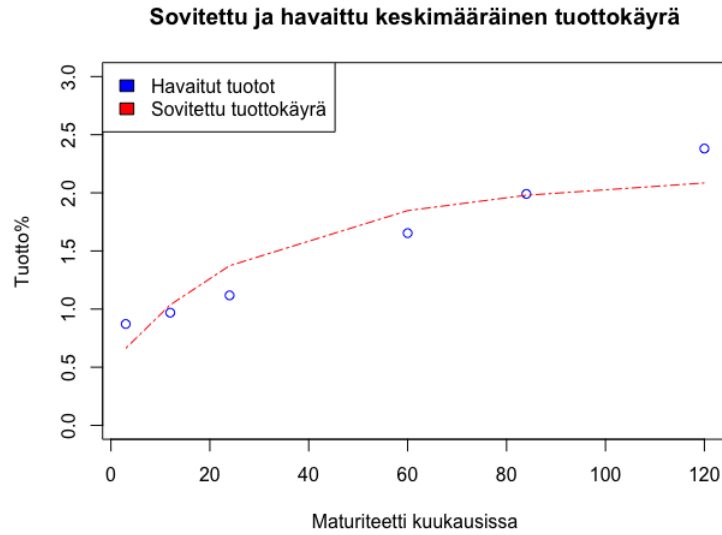
Taulukko 1: Sovitetun tuottokäyrän tunnuslukuja.

Taulukosta 1 huomataan, että maturiteettien vinoudet ovat pieniä ja myös huipukkuudet ovat pieniä. Katsotaan vielä, miltä korrelaatiot eri maturiteettien välillä näyttävät. Korrelaatiot kolmen tekijän perusmallille ovat nähtävissä taulukosta 2.

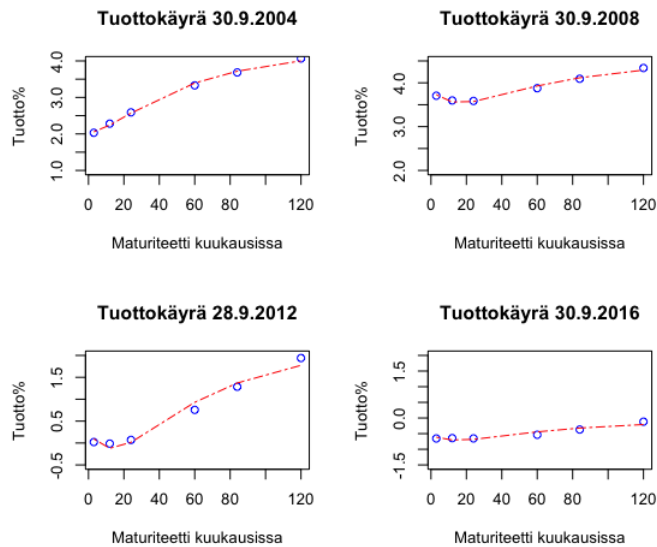
Maturiteetti	3	12	24	60	84	120
3	1					
12	0,9943	1				
24	0,9826	0,9955	1			
60	0,9256	0,9485	0,9723	1		
84	0,8857	0,9111	0,9423	0,9944	1	
120	0,8407	0,8678	0,9053	0,9792	0,9952	1

Taulukko 2: Kolmen tekijän mallin tuottojen korrelaatiot eri maturiteettien välillä.

Huomataan, että korrelaatiot ovat hyvin suuria eri maturiteettien välillä, mikä viittaa siis voimakkaisiin riippuvuuksiin eri maturiteettien välillä. Tällöin tuotot kasvavat samansuuntaisesti maturiteettien kanssa, joka on huomattavissa myös kuvasta 1, jossa keskiarvot kasvavat maturiteettien kanssa. Mallinnetaan seuraavaksi havaittujen tuottojen keskiarvoja sekä sovitettua tuottokäyrää samassa kuvassa 4.



Kuva 4: Kolmen tekijän mallin havaittujen tuottojen keskiarvot eri maturiteeteilla ja sovitettu tuottokäyrä.

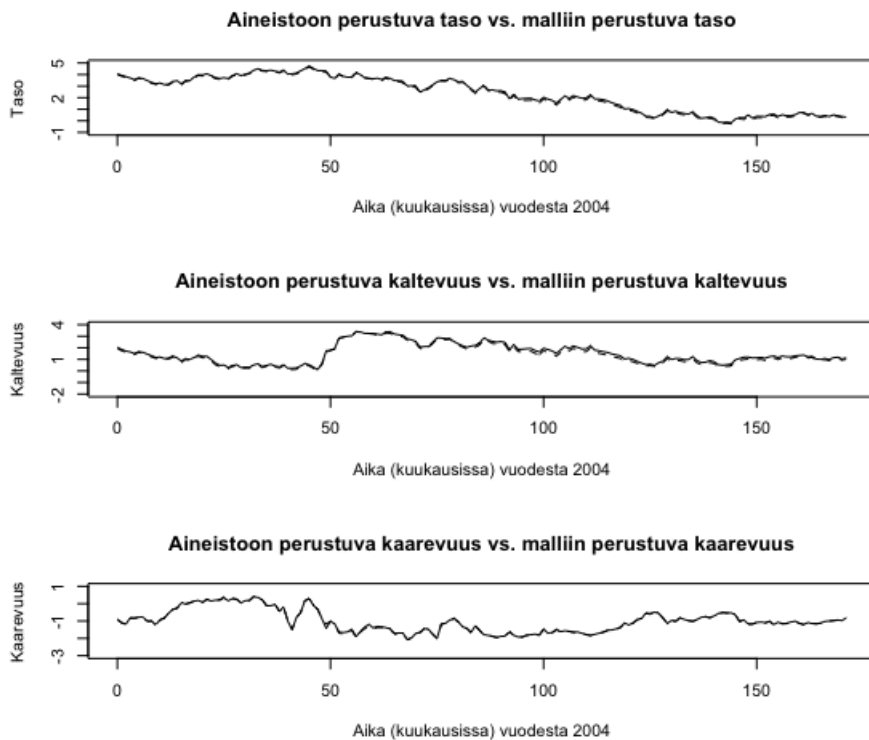


Kuva 5: Kolmen tekijän mallin havaitut arvot ja sovitettu tuottokäyrä neljältä eri päivämäärältä.

Nähdään, että sovitettu tuottokäyrä estimoii melko hyvin havaittua tuottokäyrää. Tarkastellaan vielä havaittuja tuottoja ja sovitettua tuottokäyrää

eri vuosilta poimien neljä eri päivämäärää neljältä eri vuodelta kuvaan 5. Kuvasta nähdään, että sovitettu tuottokäyrä estimoii havaittua tuottokäyrää lähes täydellisesti. Kolmen tekijän mallin estimoitu tuottokäyrä pystyy kylä seuraamaan havaittua tuottokäyrää, vaikka arvot vaihtelisivatkin toisiinsa nähden, mutta ei kuitenkaan täydellisesti.

Tutkitaan seuraavaksi havaitun ja sovitetun tuottokäyrän tason, kaltevuuden ja kaarevuuden eroja maturiteetissa. Kuvaan 6 on yhteinäisellä viivalla kuvattu havaittuja arvoja ja katkoviivalla sovitettuja arvoja tason vaihteluna ajan suhteen.



Kuva 6: Kolmen tekijän perusmallin tason, kaltevuuden ja kaarevuuden havaitut ja sovitetut arvot.

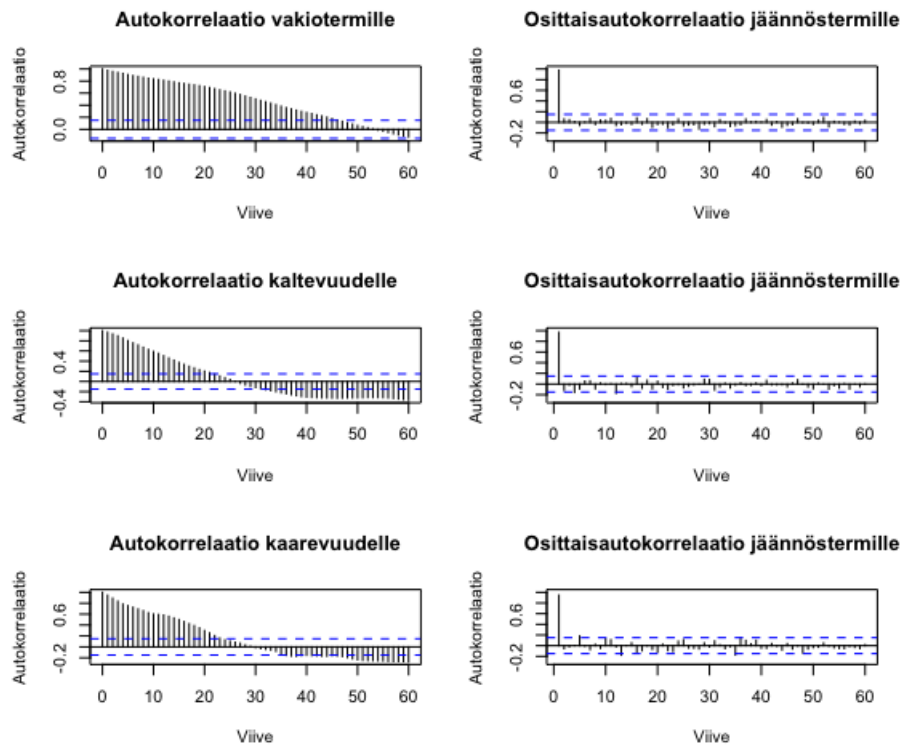
Kuvasta 6 huomataan, että sekä tason, kaltevuuden että kaarevuuden sovitetut arvot kuvaavat hyvin mallin havaittuja arvoja. Taulukosta 3 huomataan, että estimoiduista parametreista β_0 , β_1 ja β_2 ensimmäinen on pysyvin, sillä tekijällä β_0 on suurimmat autokorrelaatiokertoimet ja viimeinen on vähiten pysyvin, sillä parametrilla β_2 on pienimmät autokorrelaatiot näistä kolmesta parametrilla.

Parametri	Keskiarvo	Keskihajonta	Minimi	Maksimi	r_1	r_{12}	r_{30}
$\hat{\beta}_0$	2,937	1,533	0,03	5,532	0,978	0,813	0,504
$\hat{\beta}_1$	-1,973	1,193	-4,741	-0,072	0,97	0,506	-0,119
$\hat{\beta}_2$	-2,761	1,742	-5,599	1,122	0,947	0,584	-0,014

Taulukko 3: Kolmen tekijän mallin parametrien tunnuslukuja.

Nähdään, että sovitetun mallin arvot tasolle, kaltevuudelle ja kaarevuudelle sopivat lähes täydellisesti havaittuun malliin. Tältä osin sovitetun mallin tuotot näyttävät siis mallintavan havaittuja tuottoja erittäin hyvin.

Tutkitaan seuraavaksi sovitetun mallin autokorrelaatiokertoimia. Kuvassa 7 vasemmalla puolella on tason, kaltevuuden sekä kaarevuuden otosautokorrelaatiokertoimet ja oikealla puolella on näiden tekijöiden residuaalien eli jäännöstermien osittaisautokorrelaatiokertoimet. Näiden kuvaajien osalta voidaan havaita, että sovitetun mallin taso, kaltevuus ja kaarevuus kuvaavat hyvin havaittuja arvoja.



Kuva 7: Kolmen tekijän mallin viivästettyjen havaintojen autokorrelaatiot ja osittaisautokorrelaatiot.

Pelkät autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiokuvaajat eivät kuiten-

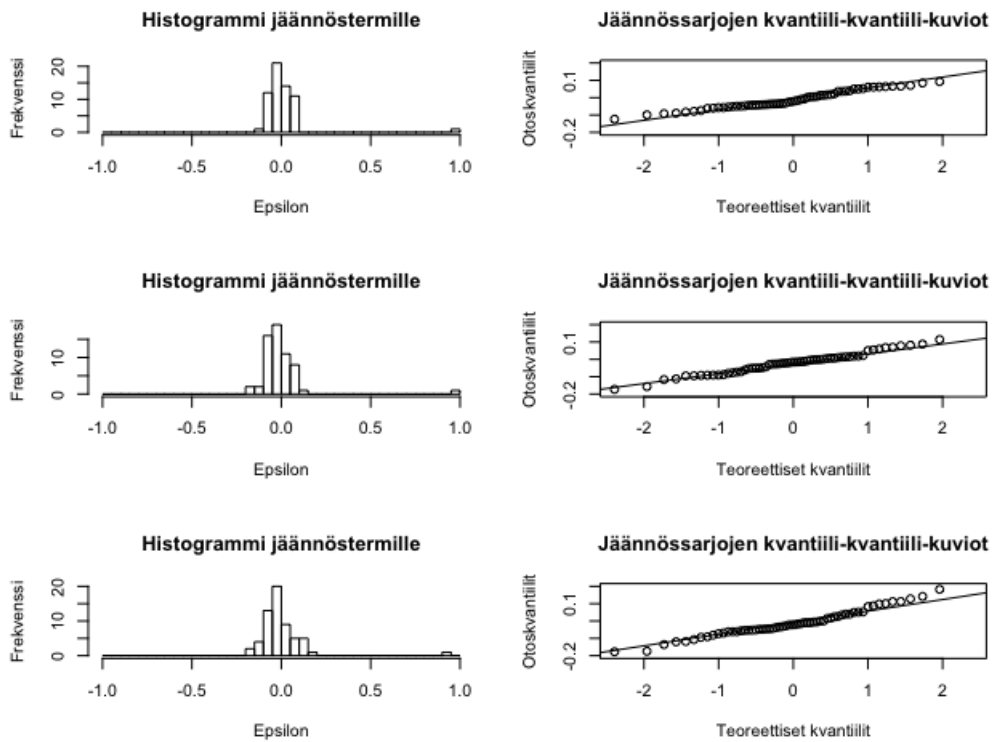
kaan riitä, vaan on syytä tehdä testejä parametrien β_0, β_1 ja β_2 sopivuudesta. Taulukossa 4 on laskettu Box-Ljungin, käännepistetestin, ADF-testin sekä Jarque-Bera-testin antamat p -arvot parametreille. Box-Ljung-testin mukaan parametrien viivästetyt havainnot ovat korreloituneita keskenään. Käännepistetesti tukee myös tätä oletusta. ADF-testi testaa yksikköjuurta ja koska testi on tehty jäännössarjoille, jäännössarjat eivät ole stationaarisia. Jarque-Bera-testi antaa p -arvot nollahypoteesille siitä, onko jäännössarjojen viivästetyt havainnot normaalisia. Tuloksista nähdään, että jäännössarjan viivästetyt havainnot ovat ei-normaalisia.

Tarkastellaan testien antamien p -arvojen lisäksi vielä jäännöstermien histogrammeja ja jäännössarjojen kvantiili-kvantiili-kuvioita, jotta huomattaisiin mahdolliset poikkeamat residuaaleissa. Kuvassa 8 jäännöstermien histogrammit näyttävät sijoittuvan lähelle nolaa ja kvantiili-kvantiili-kuviot ovat lähes lineaarisia uloimpia havaintoja lukuunottamatta. Näiden testien ja havaintojen jälkeen voidaan olettaa kolmen tekijän perusmallin kuvaavan hyvin havaittuja tuottoja.

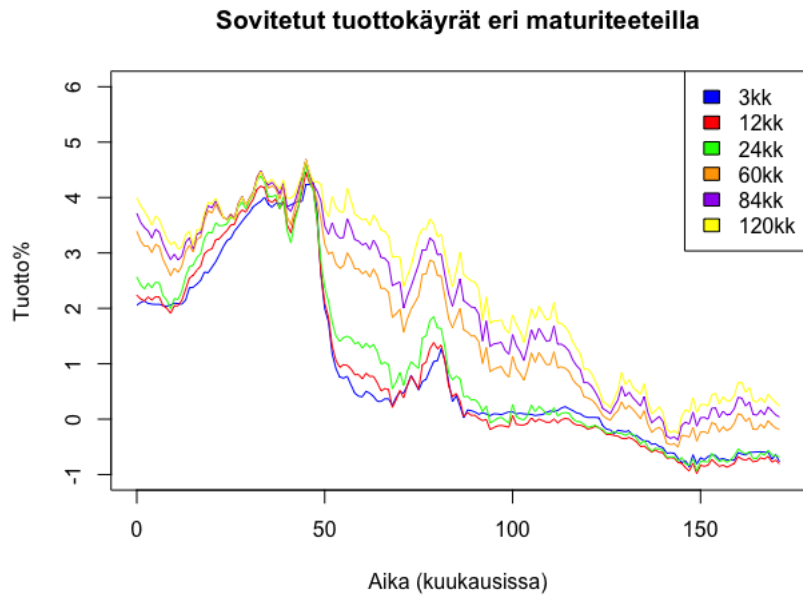
Kootaan lopuksi sovitetun mallin sovitetut tuottokäyrät eri maturiteeteilla samaan kuvaajaan. Kuvasta 9 nähdään, että yleensä pienemmän maturiteetin omaavilla lainoilla on matalampi tuottokäyrä, joka on myös intuitiivisesti selvää.

Parametri	Box-Ljung	Käännepestesti	ADF	Jarque-Bera
$\hat{\beta}_0$	0,99	0,50	< 0,01	< 0,001
$\hat{\beta}_1$	0,98	0,39	< 0,01	< 0,001
$\hat{\beta}_2$	0,95	0,40	0,03	< 0,001

Taulukko 4: Kolmen tekijän mallin parametrien testausta.



Kuva 8: Jäännöstermien histogrammit ja kvantiili-kvantiili-kuviot.



Kuva 9: Kolmen tekijän mallin sovitetut tuottokäyrät eri maturiteeteilla.

7.3 Kahden tekijän mallin testaus

Testataan seuraavaksi Dieboldin, Piazzesin ja Rudebushin kahden tekijän mallia. Taulukkoon 5 on laskettu keskiarvo, mediaani, keskihajonta, minimi ja maksimi sekä vinous ja huipukkuus eri maturiteeteille sekä kaltevuudelle ja kaarevuudelle. Vinouden arvot ovat melko lähellä nollaa jokaisella maturiteetilla ja huipukkuuskin on lähellä nollaa.

Maturiteetti	Keskiarvo	Mediaani	Keskihajonta	Minimi	Maksimi	Vinous	Huipukkuus
3	0,663	-0,181	1,634	-1,091	4,305	0,940	-0,578
12	1,037	0,512	1,565	-0,835	4,417	0,711	-0,836
24	1,373	1,065	1,529	-0,605	4,518	0,446	-1,102
60	1,847	1,783	1,526	-0,446	4,660	0,071	-1,420
84	1,979	2,011	1,535	-0,402	4,700	-0,016	-1,479
120 (taso)	2,085	2,200	1,546	-0,367	4,731	-0,077	-1,513
Kaltevuus	1,422	1,168	0,877	0,021	3,473	0,615	-0,565
Kaarevuus	-0,001	-0,001	0,000	-0,001	-0,00001	-0,615	-0,565

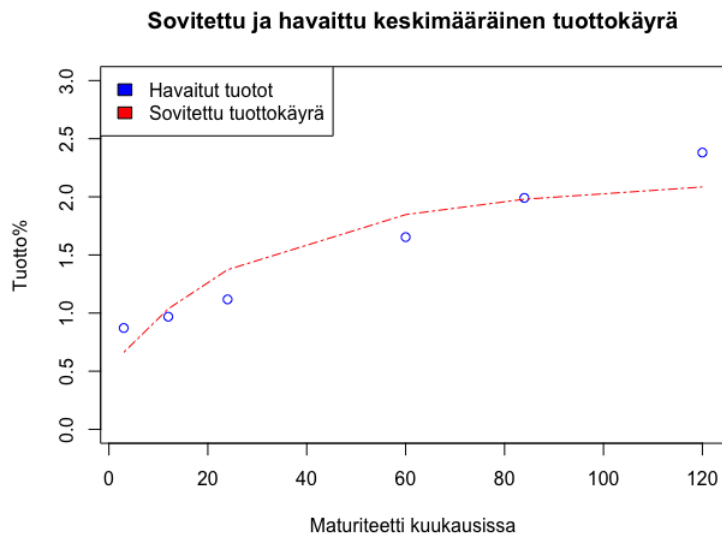
Taulukko 5: Sovitetun tuottokäyrän tunnuslukuja.

Tutkitaan seuraavaksi maturiteettien korrelaatiokertoimia toistensa kanssa. Taulukosta 6 nähdään, että korrelaatiot ovat erittäin lähellä arvoa 1 kaikkien maturiteettien välillä ja maturiteetit ovat siten erittäin korreloituneita.

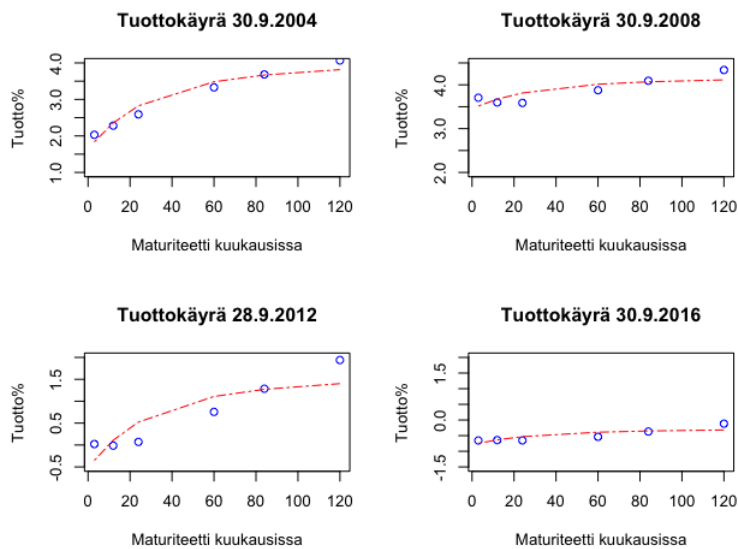
Maturiteetti	3	12	24	60	84	120
3	1					
12	0,9991	1				
24	0,9638	0,9913	1			
60	0,8955	0,9481	0,9817	1		
84	0,8707	0,9299	0,9703	0,9986	1	
120	0,8495	0,9138	0,9594	0,9955	0,9991	1

Taulukko 6: Kahden tekijän mallin tuottojen korrelaatiot eri maturiteettien välillä.

Kuvaan 10 on havainnollistettu pisteillä maturiteettien aidot havaittujen arvojen keskiarvot sekä katkoviivalla estimoitu Nelson-Siegelin rajoitetulla kahden tekijän mallilla sovitettu tuottokäyrä. Verrattuna kolmen tekijän malliin huomataan, että kahden tekijän mallin sovitettu tuottokäyrä ei pysty enää yhtä hyvin selittämään havaittua tuottokäyrää ilman kolmatta parametria β_2 .



Kuva 10: Kahden tekijän mallin havaittujen tuottojen keskiarvot eri maturiteeteilla ja sovitettu tuottokäyrä.

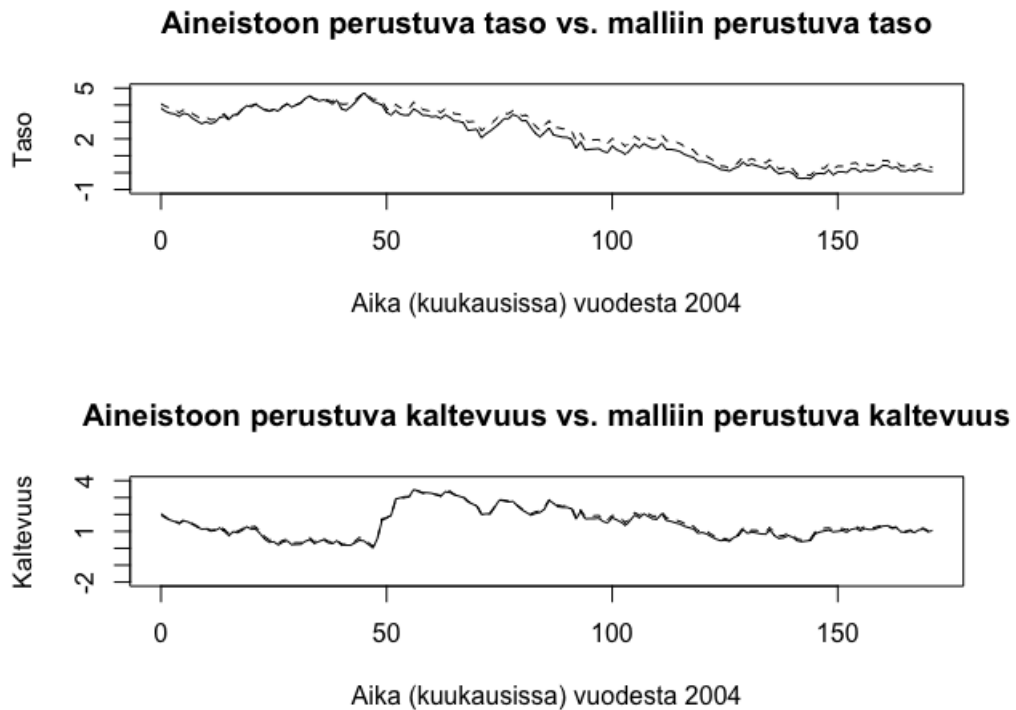


Kuva 11: Kahden tekijän mallin havaittujen tuottojen keskiarvot eri maturiteeteilla ja sovitetut tuottokäyrät eri päivämäärillä.

Katsotaan tarkemmin sovitettua ja havaittua tuottokäyrää eri päivämääriltä. Kuvasta 11 nähdään, että kahden tekijän mallin sovitettu tuottokäy-

rä pystyy vielä jotenkin havainnollistamaan havaittua tuottokäyrää, mutta kun eri maturiteettien tuottoprosentit vaihtelevat paljon toisiinsa nähden, on Nelson-Siegel-mallin estimaatin vaikea havainnollistaa havaittua tuottokäyrää.

Tarkastellaan kahden tekijän mallin tason ja kaltevuuden havaittuja ja sovitettuja arvoja kuvasta 12. Aineistoon perustuva taso on piirretty yhtenäisellä viivalla ja estimoitu taso katkoviivalla. Aineistoon perustuva taso näyttää olevan hieman matalampi mitä malliin perustuva taso on. Kaltevuus sen sijaan näyttää olevan lähes sama sekä aineistossa sekä mallissa. Malliin perustuvaa kaarevuutta ei voida mallintaa, sillä mallista puuttuu kokonaan parametri β_2 , joka kuvaa mallin kaarevuutta.



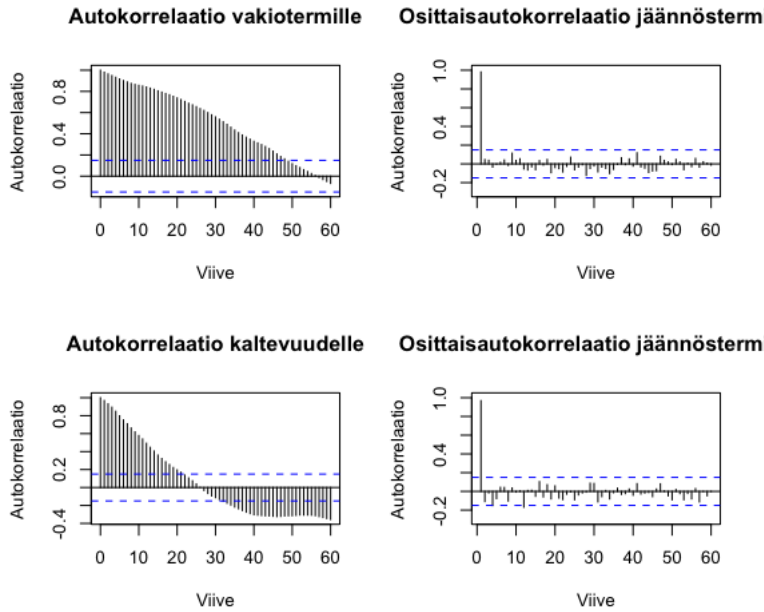
Kuva 12: Kahden tekijän mallin taso ja kaltevuus eri maturiteettien välillä.

Alla on laskettu parametreille eri tunnuslukuja taulukkoon 7. Parametri β_1 saa enemmän negatiivisia arvoja mitä parametri β_0 . Parametri β_0 on selvästi pysyvämpi tekijä mallissa, sillä sen autokorrelaatiokertoimet saavat suurempia arvoja kuin parametri β_1 .

Parametri	Keskiarvo	Keskihajonta	Minimi	Maksimi	r_1	r_{12}	r_{30}
$\hat{\beta}_0$	2,335	1,581	-0,285	4,806	0,981	0,842	0,559
$\hat{\beta}_1$	-1,83	1,128	-4,469	-0,027	0,969	0,493	-0,113

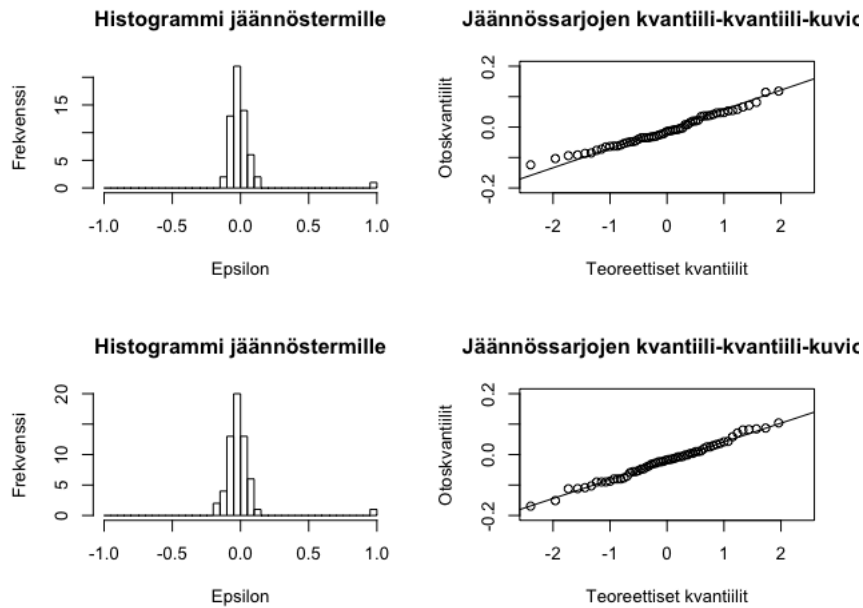
Taulukko 7: Kahden tekijän mallin parametrien tunnuslukuja.

Tarkastellaan vielä tarkemmin autokorrelaatiokertoimia faktoreille β_0 ja β_1 ja näiden jäännöstermeille. Kuvasta 13 nähdään, että autokorrelaatiot ovat erittäin voimakkaita parametrilla β_0 eli korrelaatiot viivästettyjen havaintojen välillä ovat voimakkaita. Autokorrelaatiot parametrin β_0 jäännöstermillä ovat taas erittäin pieniä, joka viittaa parametrin β_0 todella kuvaavan mallin tasoa. Samoin nähdään parametrin β_1 autokorrelaatioiden olevan voimakkaasti autokorreloituneita ja virhetermien olevan valkoista kohinaa.



Kuva 13: Kahden tekijän mallin autokorrelaatiot eri maturiteettien välillä parametreille ja niiden residuaaleille.

Piirretään jäännöstermeistä histogrammit sekä kvantiili-kvantiili-kuviot, jotta saadaan varmuus jäännöstermien valkoisesta kohinasta. Kuvassa 14 molemmilla parametreilla jäännöstermien arvot näyttävät sijoittuvan lähelle nolaa, joka viittaa valkoiseen kohinaan. Myös kvantiili-kvantiilikuvioista nähdään, että residuaalien arvot ovat lineaarisia muutamaa ääripään pistettä lukuun ottamatta.



Kuva 14: Kahden tekijän mallin parametrien jäännöstermien histogrammit ja kvantiili-kvantiilikuviot.

Testataan parametrien sopivuutta jo aikaisemmin esitellyillä testeillä eli Box-Ljung-testillä, käännepistetestillä, ADF-testillä sekä Jarque-Bera-testillä. Taulukosta 8 nähdään saadut arvot parametreille.

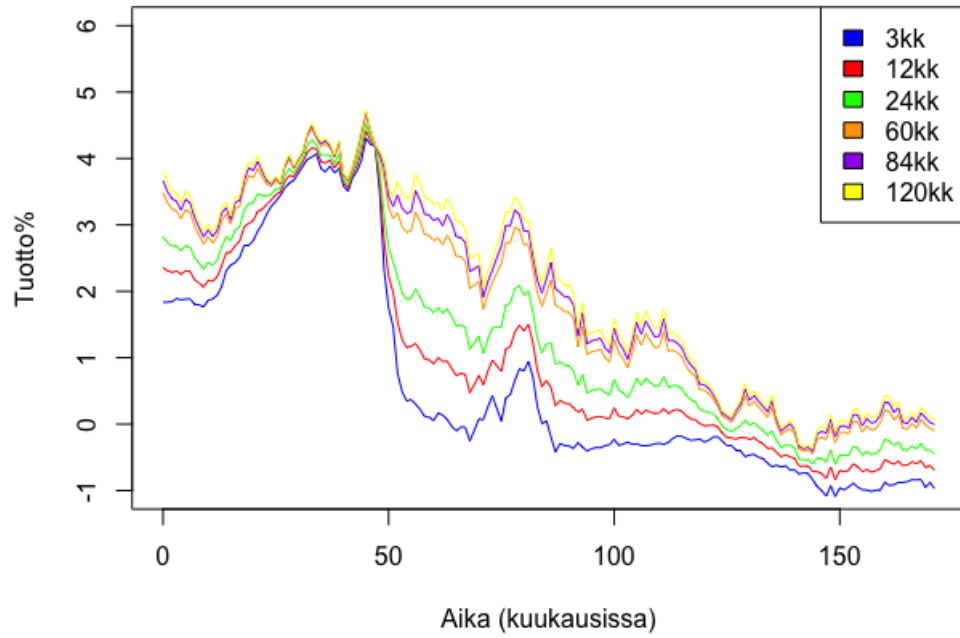
Parametri	Box-Ljung	Käännepistetesti	ADF	Jarque-Bera
$\hat{\beta}_0$	0,98	> 0,99	0,03	< 0,001
$\hat{\beta}_1$	0,98	0,38	< 0,01	< 0,001

Taulukko 8: Kahden tekijän mallin parametrien testaus.

Box-Ljung-testillä saaduista p -arvoista nähdään, että kahden tekijän mallin viivästetyt havainnot ovat autokorreloituneita. Käännepistetestikin puoltaa tätä oletusta. ADF-testi on tehty parametrien jäännöstermeille ja näyttää siis siltä, että mallin jäännöstermit ovat epästationaarisia. Jarque-Bera-testi on tehty niin ikään jäännössarjalle ja koska saadut arvot ovat erittäin lähellä nollaa, Jarque-Bera-testin mukaan jäännössarjat ovat ei-normaalisia.

Nyt kahden tekijän mallia on testattu tarpeeksi ja mallin voidaan olettaa olevan riittävä. Mallinnetaan lopuksi sovitettut tuottokäyrät eri maturiteeteilla samaan kuvaajaan kuvaan 15.

Sovitetut tuottokäyrät eri maturiteeteilla



Kuva 15: Kahden tekijän mallin sovitetut tuottokäyrät.

7.4 Neljän tekijän mallin testaus

Testataan lopuksi vielä Björkin ja Christensenin neljän tekijän mallia, joka on siis laajennettu versio Nelson-Siegelin kolmen tekijän perusmallista. Tarkastellaan aluksi sovitettujen tuottokäyrien tunnuslukuja eri maturiteeteilla taulukossa 9.

Kaikilla maturiteeteilla vinous näyttää olevan melko lähellä nollaa ja huipukkuuden arvotkin ovat melko lähellä nollaa poislukien suurimmat maturiteetit. Keskiarvot ja mediaanit ovat joissain tapauksissa melko kaukana toisistaan. Taulukosta 10 nähdään, että korrelaatiokertoimet eri maturiteettien välillä ovat lähellä arvoa 1 eli eri maturiteetit ovat siis erittäin korreloituneita keskenään niinkuin muissakin malleissa. Tämä on intuitiivisestikin toivottava tulos, sillä eri maturiteettien korot liikkuvat samansuuntaisesti niinkuin aikaisemmin on todettu.

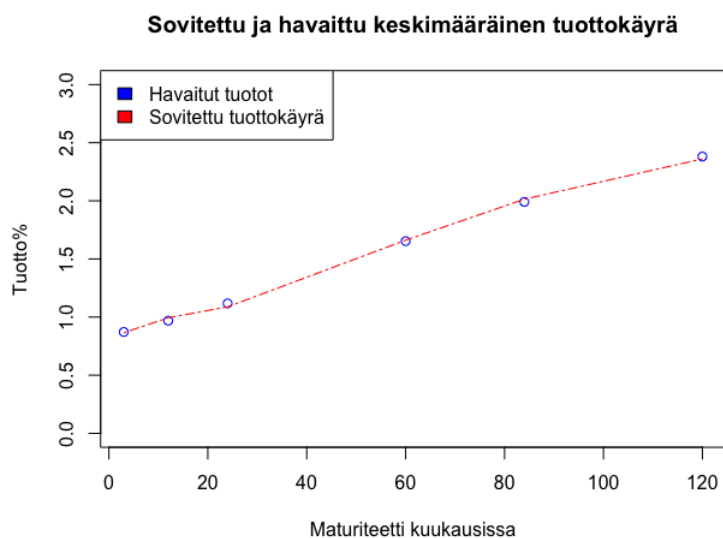
Maturiteetti	Keskiarvo	Mediaani	Keskiahajonta	Minimi	Maksimi	Vinous	Huipukkuus
3	0,865	0,205	1,540	-0,935	4,237	0,856	-0,632
12	0,994	0,345	1,598	-0,849	4,512	0,780	-0,764
24	1,088	0,574	1,631	-0,934	4,599	0,611	-0,985
60	1,662	1,561	1,572	-0,587	4,632	0,144	-1,422
84	2,014	2,090	1,528	-0,394	4,670	-0,049	-1,491
120 (taso)	2,361	2,644	1,493	-0,186	4,718	-0,216	-1,485
Kaltevuus	1,496	1,262	0,850	0,092	3,383	0,543	-0,656
Kaarevuus	-1,051	-1,121	0,650	-2,101	0,396	0,581	-0,541

Taulukko 9: Sovitetun tuottokäyrän tunnuslukuja.

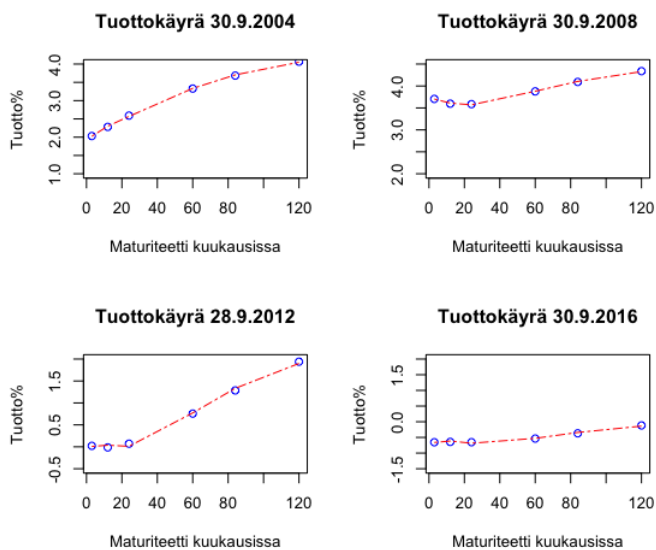
Maturiteetti	3	12	24	60	84	120
3	1					
12	0,9962	1				
24	0,9838	0,9943	1			
60	0,9256	0,9442	0,9716	1		
84	0,8876	0,9079	0,9423	0,9943	1	
120	0,8433	0,8648	0,9048	0,9781	0,9947	1

Taulukko 10: Neljän tekijän mallin tuottojen korrelaatiot eri maturiteettien välillä.

Tarkastellaan seuraavaksi neljän tekijän mallilla estimoitua sovitettua tuottokäyrää sekä havaittujen tuottojen keskiarvoja eri maturiteeteissa kuvassa 16. Kuvasta huomataan, että sovitetut tuottokäyrät seuraavat erittäin hyvin havaittuja tuottoja ja neljän tekijän malli näyttää tältä osin toimivalta.



Kuva 16: Neljän tekijän mallin havaittujen tuottojen keskiarvot eri maturiteeteilla ja sovitettu tuottokäyrä.

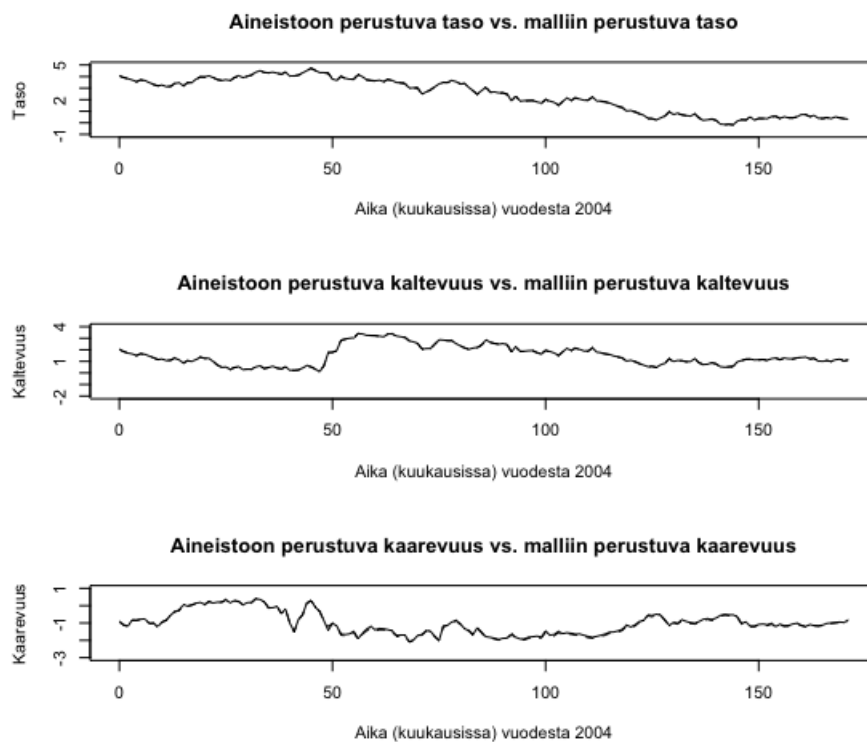


Kuva 17: Neljän tekijän mallin testaus.

Kuvassa 17 on kuvattuna vielä havaitut tuotot ja sovitettu tuottokäyrä eri päivämääriltä. Sovitettu tuottokäyrä mukaillee hyvin havaittujen tuottojen

keskiarvoja myös satunnaisissa päivämäärissä, joten sovitettu tuottokäyrä näyttää toimivan neljän tekijän mallissa.

Tarkastellaan seuraavaksi neljän tekijän mallin tason, kaltevuuden ja kaarevuuden arvoja havaitulla ja sovitetulla tuottokäyrällä. Neljän tekijän mallissa lisätty parametri β_3 kuvaa kaltevuutta parametrin β_1 kanssa. Kuvasta 18 nähdään, että sovitetun tuottokäyrän arvot ovat erittäin lähellä havaitun tuottokäyrän arvoja. Myös taso ja kaarevuus saavat lähes samoja arvoja havaitussa ja sovitetussa tuottokäyrässä.



Kuva 18: Neljän tekijän mallin tason, kaltevuuden ja kaarevuuden havaitut ja sovitetut arvot.

Tutkitaan seuraavaksi parametrien keskiarvoja ja keskihajontaa, minimiä ja maksimia sekä autokorrelaatiokertoimia. Taulukosta 11 nähdään, että parametrit β_0 ja β_1 saavat positiivisia arvoja verrattuna kahteen jälkimmäiseen parametriin β_2 ja β_3 , joiden molempien keskiarvo on negatiivinen. Parametrin β_2 maksimikaan ei saa positiivista arvoa, joten kaikki parametrin β_2 arvot ovat negatiivisia.

Autokorrelaatiokertoimista nähdään että pysyvin parametri on β_0 , toiseksi pysyvin β_2 ja kaltevuusparametrit β_1 ja β_3 ovat vähiten pysyviä. Parametrin β_1 arvo on jopa erittäin lähellä nollaa 30 viipeen kohdalla.

Parametri	Keskiarvo	Keskihajonta	Minimi	Maksimi	r_1	r_{12}	r_{30}
$\hat{\beta}_0$	3,265	1,469	0,344	5,497	0,975	0,796	0,484
$\hat{\beta}_1$	3,997	3,116	-5,376	9,073	0,898	0,332	0,018
$\hat{\beta}_2$	-7,39	3,112	-13,51	-2,068	0,928	0,538	0,194
$\hat{\beta}_3$	-6,512	2,961	-12,32	1,19	0,876	0,356	0,108

Taulukko 11: Neljän tekijän mallin parametrien tunnuslukuja.

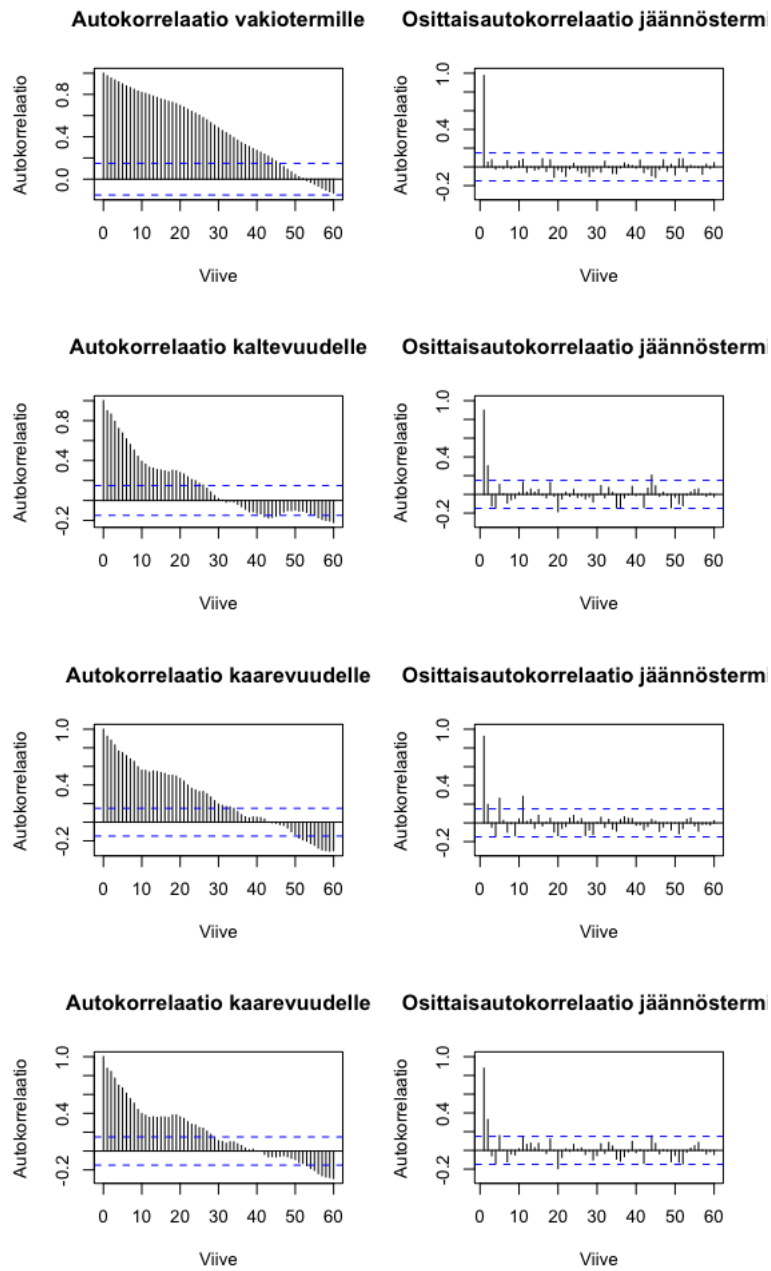
Kuvassa 19 on kuvattu autokorrelaatiokertoimet eri parametreille. Kuvasta on nähtävissä vahva autokorrelaatio kaikilla parametreilla, kun taas jäännössarjoilla autokorrelaatiot ovat melko pieniä. Tällä hetkellä näyttää siltä, että parametrit kuvaisivat hyvin tuottokäyrän liikettä ja residuaalit ovat toivotulla tavalla valkoista kohinaa.

Tarkastellaan vielä jäännössarjojen histogrammeja ja kvantiili-kvantiilikuvioita niinkuin aiemminkin. Kuvassa 20 histogrammit näyttävät saavan jälleen arvoja lähellä nollaa suurella frekvenssillä, joka viittaa valkoiseen kohinaan. Myös kvantiili-kvantiili-kuviot osoittavat jäännössarjojen olevan valkoista kohinaa, vaikka muutama ääriarvo ei osukkaan lineaariselle viivalle.

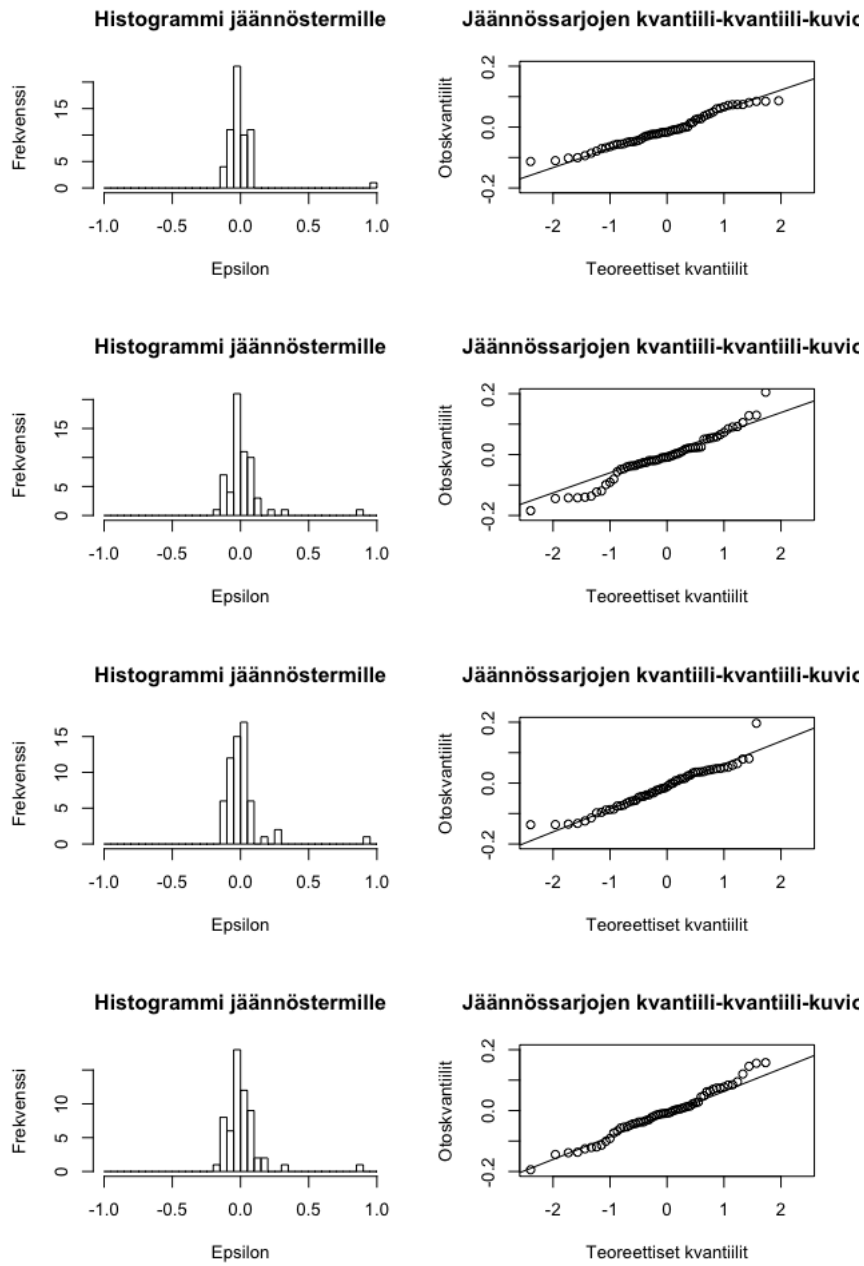
Jotta voitaisiin olla varmoja neljän tekijän mallin sopivuudesta ja jäännössarjojen valkoisuudesta, tehdään jälleen Box-Ljung-testi, käännepestetesti, ADF-testi sekä Jarque-Bera-testi. Kuvassa 12 nähdään parametreille tehdystä Box-Ljung-testistä, että viivästetyt havainnot ovat erittäin autokorreloituneita. Käännepestetesti viittaa samaan tulokseen. ADF-testin mukaan jäännössarjat eivät ole stationaarisia 5 prosentin luottamustasolla. Jarque-Bera-testi puoltaa hypoteesia jäännössarjan ei-normaalisuudesta jokaisella parametrilla.

Parametri	Box-Ljung	Käännepestetesti	ADF	Jarque-Bera
$\hat{\beta}_0$	0,99	0,38	0,01	< 0,001
$\hat{\beta}_1$	0,49	> 0,99	0,02	< 0,001
$\hat{\beta}_2$	0,56	0,94	0,02	< 0,001
$\hat{\beta}_3$	0,44	0,99	0,03	< 0,001

Taulukko 12: Neljän tekijän mallin testaus.

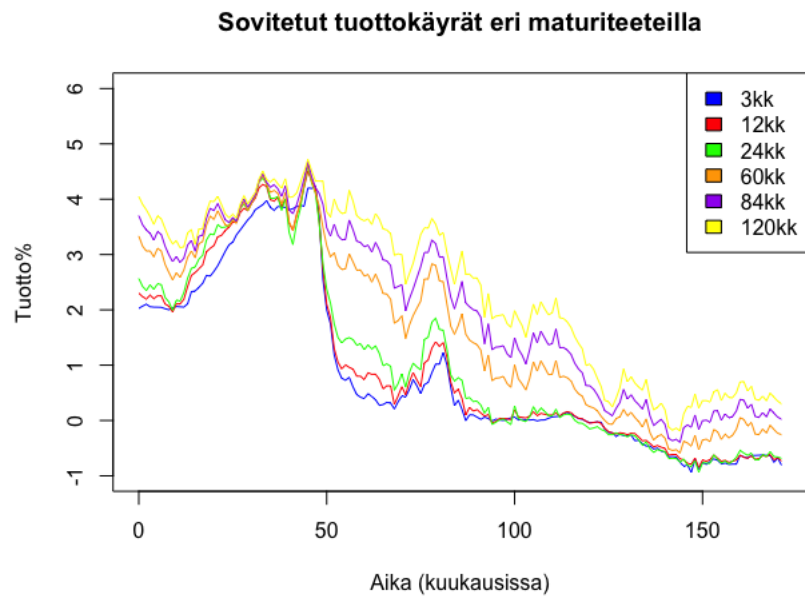


Kuva 19: Neljän tekijän mallin viivästettyjen havaintojen autokorrelaatiot ja jäännössarjojen osittaisautokorrelaatiot.



Kuva 20: Neljän tekijän mallin jäännössarjojen histogrammit ja kvantiili-kvantiilikuviot.

Tehtyjen testien perusteella voidaan olettaa myös Björkin ja Christensenin mallin kuvaavan havaittua tuottokäyrää sovitetulla tuottokäyrällä riittävän hyvin. Kuvassa 21 on sovitetut tuotot eri maturiteeteilla. Niinkuin aikaisemmissakin malleissa, myös neljän tekijän mallissa pienimmän maturiteetin tuotot ovat alhaisimmat ja suurimman maturiteetin tuotot korkeimmat, joka on myös intuitiivisesti järkevää.



Kuva 21: Neljän tekijän mallin sovitetut tuottokäyrät.

8 Päätelmät

Nelson-Siegel-malleja pystytään estimoimaan monilla eri tavoilla niinkuin tutkielmassa huomattiin. Tutkielmassa päädyttiin käyttämään Dieboldin ja Lin kehittämää kaksivaiheista estimointimenetelmää, jossa vakioidaan Nelson-Siegel-malleista parametri λ_t estimoinnin helpottamiseksi. Tutkimuksessa ei otettu kantaa siihen, oliko valittu estimointimenetelmä paras juuri koron aikarakenteen estimoinnissa.

Tutkimuksessa huomattiin Nelson-Siegelin kolmen tekijän perusmallin estimoivan hyvin havaittua tuottokäyrää. Kolmen tekijän malli antoi paremman estimaatin havaitulle tuottokäyrälle kuin suppeampi kahden tekijän malli. Kahden tekijän mallista puuttui kokonaan kaarevuustermi, jolloin estimoidun tuottokäyrän kulku oli jäykempää kolmen tekijän estimoituun malliin verrattuna.

Björkin ja Christensenin laajennettu neljän tekijän malli pystyi estimoimaan havaittua tuottokäyrää melkein yhtä hyvin kuin Nelsonin ja Siegelin kolmen tekijän mallikin. Neljän tekijän mallissa estimoitu tuottokäyrä pystyi paremmin estimoimaan myös sellaisia päivämääriä, joissa tuotot vaihtelivat suuresti eri maturiteeteilla. Neljän tekijän mallin taso, kaltevuus ja kaarevuus estimoidussa mallissa oli myös lähimpänä havaittua mallia.

Kuitenkin eri keskuspankeissa käytetään Nelson-Siegelin kolmen tekijän mallia, vaikka tutkimus antoi viitteitä, että Björkin ja Christensenin neljän tekijän malli antaisi parempia tuloksia havaituista tuottokäyrästä mitä kolmen tekijän malli antaa. Toisaalta keskuspankeissa ei käytetä vakioitua parametria λ , joka saattaa muuttaa tuloksia. Kaiken kaikkiaan Nelson-Siegel-mallit kuitenkin kuvaavat erittäin hyvin koron aikarakennetta huolimatta pienestä määrästä parametrejä.

Viitteet

- [1] Alvarez, Luis: Rahoituksen kvantitatiiviset menetelmät -kurssin opintomateriaali, Turun kauppakorkeakoulu, intra-sivut.
- [2] Jan Annaert, Anouk Claes, Marc De Ceuster, Hairui Zhang: *Estimating the Yield Curve Using the Nelson-Siegel Model*, Universiteit Antwerpen, 2000 Antwerp, Belgium and Louvain School of Management, 1000 Brussels, Belgium.
- [3] *Zero-Coupon Yield Curve*, Technical Documentation, Bank for International Settlements, Basle.
- [4] Björk, Tomas; Christensen, Bent Jesper: *Interest rate dynamics and consistent forward rate curves*, *Mathematical Finance*, 9, 323-348, 1999.
- [5] Brockwell, Peter J., Davis, Richard A.: *Introduction to Time series and Forecasting*, Second edition, Springer, New York, 1991.
- [6] Diebold, Francis; Li, Canlin: *Forecasting the term structure of government bond yields*, *Journal of Econometrics*, 130, 337-364, 2006.
- [7] Diebold, Francis; Rudebusch, Glenn: *Yield Curve Modeling and Forecasting – The Dynamic Nelson-Siegel Approach*, Princeton University Press, 2013, 4-54.
- [8] Hladikova, Hana; Radova, Jarmila: *Term Structure Modelling by Using Nelson-Siegel Model*, *European Financial and Accounting Journal*, 2012.
- [9] Mellin, Ilkka: *Aikasarja-analyysi*, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto, 2007.
- [10] Mishkin, Frederic: *The Economics of Money, Banking And Financial Markets*, Columbia University, Columbia, Fourth Canadian Edition, 2011.
- [11] Nyrhinen, Harri: *Henkivakuutusmatematiikka*, Helsingin yliopisto, Syksy 2016.
- [12] Diebold, Francis; Piazzesi, Monika; Rudebusch, Glenn: *Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics*, Federal Reserve Bank of San Francisco, 2005.

- [13] De Pooter, Michiel: *Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models*, Econometric Institute and Tinbergen Institute Erasmus University Rotterdam, The Netherlands, June 5, 2007.
- [14] Saikkonen, Pentti: *Lineaarinen malli*, Luentomoniste, 2007.
- [15] Saikkonen, Pentti: *Stationaariset aikasarjat*, luentomoniste, sl 2015.
- [16] Seppälä, Heikki: *Ennustaminen ja Aikasarja-analyysi*, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto, Syksy 2015.
- [17] Tsay, Ruey: *Analysis of Financial Time Series*, Financial economics, University of Chicago, 2002.