



**TURUN
YLIOPISTO**

JOHDATUS AIKATEORIAAN

LuK Aleksis Kristian Winstén

Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2024

Tarkastajat:
Prof. Jukka Lempa
Dos. Yury Nikulin

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

ALEKSI KRISTIAN WINSTÉN: Johdatus aikateoriaan

Pro gradu -tutkielma, 45 sivua, 2 liitesivua

Matematiikka

Kesäkuu 2024

Tutkimuksen tavoite on löytää aikateoria, formalisoida ajan käsite matemaattisissa tieteissä, sekä yleistää aika matemaattisiin avaruuksiin, siten että ajan matemaattiset ja filosofiset perusteet ovat yhtä. Vuosisatoja kestänyt filosofinen tutkimustyö on päätyntä kahteen ajan teoriaan, jotka ovat absoluuttinen ja suhteellinen aika. Matemaattisissa tieteissä vallitseva aikakäsitys on absoluuttisen ajan teoria, joka on kuitenkin vain osa ajan kokonaiskuvaa. Täysipainoinen matemaattinen ajan teoria käsittäisi myös suhteellisen ajan mutta olisi hyvin perusteltu ja ristiriidaton muiden teorioiden kanssa.

Aikateoria perustuu kahdelle premissille. Ensimmäinen premissi on se, että jokin on olemassa. Tästä premissistä rakennetaan aikateorian matemaattinen perusta. Matemaattisesti premissi esitetään siten, että on olemassa ainakin yksi objekti, jonka katsotaan edustavan koko maailmaa. Kategoriateoria osoittautuu intuitiiviseksi ja yleispäteväksi ympäristöksi käsitellä ensimmäistä premissiä.

Toinen premissi on se, että mitä on olemassa voi muuttua. Toisin sanotusti uskotaan muutoksen olevan olemassa. Muutos ei kuitenkaan ole itse maailmassa vaan maailman ulkopuolella. Muutokselle ei tiedetä syytä, minkä takia se riippuu siitä kontekstista, jossa muutos havaitaan. Muutos määritellään kategoriateoriaan objektin endomorfismina. Tämä endomorfismi liikkuu kategoriassa yhdestä objektista toiseen, mistä seuraa luonnollisesti sellainen matemaattinen rakenne, jota voidaan kutsua ajan suhteelliseksi tai absoluuttiseksi teoriaksi.

Premissien formalisoinnin jälkeen ajan määritelmä tulee kuin itsestään. Suhteellinen ja absoluuttinen aika ovat kuitenkin vain maailman mallin kaksi eri aikakuvaa. Maailman on se referenssi, johon sekä suhteellinen että absoluuttinen aika sitoutuvat temporaalisesti ja mallintaakseen maailman muutosta.

Tässä tekstissä esitetty ajan teoria ei välttämättä ole se aikateoria, joka selittää ajan luonteen täysin. Tämän tutkimustyön tarkoitus on loppujen lopuksi huomioida se puute, että matematiikassa ei ole olemassa hyvin määriteltyä, kokonaisvaltaista, tiukasti perusteltua ajan teoriaa. Useat eri matematiikan osa-alueet kuitenkin sitoutuvat jonkinlaiseen aikakäsitykseen. Ilman kunnollista ajan teoriaa matematiikka ei voi edetä näillä osa-alueilla pidemmälle, kuin mikä nykytilassa on mahdollista.

Asiasanat: aikateoria, pro gradu -tutkielma, kategoriateoria, todennäköisyysteoria, ajan filosofia, metafysiikka, suhteellinen aika, absoluuttinen aika, logiikka.

Kiitokset

Vaikka tämä työ perustuukin tutkimuspäiväkirjoihini ja muistiinpanoihini ajasta, maailmasta, ja vuorovaikutuksesta, suurin kunnia kuuluu kaikille niille matemaatikkoille, filosofeille, ja muille tieteentekijöille, joiden ansiosta pystyn nyt formalisoimaan naiivin ajatukseni. En olisi onnistunut ilman heidän tekemää vuosisatoja kestänyttä matemaattista ja filosofista kehitystyötä. Suurin kiitos puolestaan kuuluu perheelleni, joka on tukenut minua kirjoitustyössäni ja kannustanut jatkamaan loppuun saakka.

Kiitos myös Turun yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen henkilökunnalle, joiden kanssa olen saanut opiskella matematiikkaa, fysiikkaa, ja logiikkaa kaikki viimevuodet. Ajatus aikateoriasta kehittyi näiden opintojen aikana. Erityinen kiitos ohjaajalleni professori J. Lempalle, joka oli ensimmäinen kenelle esitin ajatukseni aikateoriasta, ja jonka myötävaikutuksesta tämä tutkielma saavutti nykyisen muotonsa. Toinen erityinen kiitos tutkielman tarkastajalle dosentti Y. Nikulinille, jonka kanssa olen saanut haastaa itseäni matemaattisesti, ja joka on uskonut kykyihini matemaattikkona, ja jonka kommentit viimeistelivät työn.

Suuri kiitos myös yliopisto-opettaja T. Toivarille, joka kommentoi ensimmäisiä matemaattisia kirjoitelmiani ja sanoi minun olevan matemaattisesti luova kirjoittaja, mitä puolta itsestäni olen vaalinut siitä asti. Kiitos vielä dosentti M. Hirvensalolle, dosentti P. Harjulehdolle, ja tutkijatohtori H. Saariselle, jotka ohjasivat minua näiden vuosien aikana.

Tuhannet kiitokset kaikille, ketkä ovat nähneet sivusta miten matemaattinen luomistyö on koetellut ja jotka ovat läsnäolollaan tehneet tämän kaiken mahdolliseksi: Heidi, Nooa, Unto, Jaakko, Santtu, Frans, Rosina, Reetta, Fanny, Artturi, Ulla, Lasse, Seija, Taru, Ella-Noora, Alexandra. Ilman teitä kaikkia en olisi onnistunut.

Sisälllys

1 Johdanto	1
2 Aikateoria	6
2.1 Maailma	6
2.1.1 Malli	6
2.1.2 Logiikka	9
2.1.3 Tila-avaruus	15
2.1.4 Tilamuuttuja	15
2.1.5 Tilamitta	19
2.2 Muutos	29
2.2.1 Maailma ja malli	29
2.2.2 Tapahtuma-avaruus ja prosessi	31
2.2.3 Integroituva tilamuuttuja	32
2.2.4 Siirtymäoperaattori	36
2.3 Aika	39
2.3.1 Tapahtumaketju	39
2.3.2 Suhteellinen ja absoluuttinen aika	40
3 Loppusanat	45
Kirjallisuusluettelo	47

1 Johdanto

Mennyttä aikaa ei saa takaisin. Aikaa on luonnehdittu liikkeen mitaksi ja tapahtumien järjestykseksi [1][10]. On helppoa kuvitella aikajana, jossa jokainen tapahtuma seuraa toista järjestyksessä. Aikajana voidaan esittää vaikka parametrin $t \in \mathbb{R}$ avulla, joka järjestää systeemin erilaiset tilat pysyvään järjestykseen.

Tämä määritelmä ei kuitenkaan ole yksiselitteinen. Ristiriita kuplii muutoksessa, joka on erottamattomassa suhteessa aikaan [12]. Muutoksella tarkoitetaan sitä, että se mikä on maailman asiintila nyt, ei välttämättä ole sitä aina. Kuitenkaan maailman sisältä käsin emme voisi koskaan tietää miksi maailma muuttuu, koska muutoksen syyt ovat maailman ulkopuolella [24]. Siitä kuitenkin voidaan olla yhtä mieltä, että jotain on ensin oltava olemassa, jotta mikään voisi muuttua. On kuitenkin vaikeaa ajatella aikaa ilman muutosta. Toisin sanotusti aika riippuu muutoksesta. Kun maailma muuttuu, aika kulkee.

Voidaan kysyä, että kulkeeko aika vain, jos maailma muuttuu? Miten pieni muutos on silloin yhden aikayksikön mittainen? Empiristisesti voitaisiin hienovirtittää parametri t aikajanalla siten, että se vastaisi havainnoidussa mittakaavassa ajassa tapahtuvaa muutosta. Mutta jos mittakaava jostain syystä pienenesi tai suurensi, ei t -parametrointi enää vastaisi havaintoja. Aikajana olisi pielessä ja täytyisi uudelleen parametroida.

Asetellaan kysymys toisinpäin, eli onko muutos riippuvainen ajasta? On helppoa kuvitella sellainen maailma, jossa aika virtaisi vain itsensä tähden, eikä mikään muuttuisi. Olisi yhdentekevää se, että miten tällainen aika parametroitaisiin, koska mikään parametrointi ei tuottaisi muutosta.

Ajatellaan hetki, että ollaan aikajanalla sellaisessa pisteessä, jossa mikään ei muutu. Jos joskus kuitenkin jotain muuttuisi, olisi sen sijainti aikajanalla joko nykyhetken jälkeen tai ennen nykyhetkeä. Nykyhetki olisi kuitenkin muuttumaton, ja aikajanalla meidän ja muutoksen temporaalinen etäisyys voisi olla mitä vain. Yhtä hyvin voisimme olla muutoksen hetkessä juuri nyt, eikä mikään sittenkään muuttuisi.

Ongelma on se, että aikaa joko on tai ei ole olemassa vaikka mikään ei muutu, mutta jos edes yksi asia muuttuu, aikaa on varmasti olemassa. Ei voida varmuudella tietää miten asia on, koska kumpikin oletus ajan ja muutoksen suhteesta ovat yhtä päteviä [21]. Toisin sanotusti molemmat selittävät maailmasta tehdyt havainnot täysin.

Tarkastellaan lähemmin näitä kahta aikakäsitystä. On itsestäänselvää, että muutos implikoi aikaa. Implikaatio ei välttämättä päde toiseen suuntaan. Johtaako aika välttämättä muutokseen vai ei erottaa kaksi eri ajan teoriaa toisistaan. Ensimmäinen ajan teoria tunnustaa, että implikaatio pätee toiseenkin suuntaan eli aika ja muutos ovat ekvivalentit. Toinen ajan teoria kiistää tämän implikaation, jolloin aika voi olla olemassa riippumatta muutoksesta. Nimellisesti nämä kaksi eri asiaa voisivat olla suhteellinen ja absoluuttinen ajan teoria. Näiden teorioiden jakolinja on kysymys ajan suhteesta muutokseen:

“Vaikka mitään muuta ei tapahtuisi, kuluisiko aika silti?”

– S. Albert Kivinen [16]

Absoluuttisen ajan kannattaja vastaisi myöntävästi, eli uskoisi ajan kulkevan

vaikka mikään ei muuttuisi. Absoluuttisen ajan teorioiden perusajatus on se, että aika on olemassa itsensä tähden omana entiteettinään, eikä näin ollen ole riippuvainen muutoksesta. Aika voisi virrata maailmassa, joka olisi täysin kuollut eikä koskaan muuttuisi. Tämän ajan teorian kannattajakuntaan kuuluu useita nimekkäitä tieteentekijöitä. Esimerkiksi Isaac Newtonin filosofia ja sille rakentunut mekaniikka perustuvat absoluuttisen ajan teoriaan. Tämä selviää hänen Principian toiseen painokseen kirjoittamastaan skoliasta, jossa hän puolustaa absoluuttisen ajan teoriaa filosofiselta kritiikiltä [14].

“Absolute, true, and mathematical time, in and of itself and of its own nature, without reference to anything external, flows uniformly and by another name is called duration.(...)”

– Isaac Newton [14]

Nykyinen moderni fysiikka partikkeleineen on jäännös newtonilaisen fysiikan filosofiasta eli absoluuttisesta ajasta ja avaruudesta, jossa materiaalisilla objekteilla on paikka, muoto, sekä tilavuus avaruudessa ja ajassa [18]. Absoluuttinen aika vakiintui fysikassa ja matematiikassa triviaaliksi ajan määritelmäksi. Tällöin kuitenkin sitouduttiin ontologisesti sellaisen substanssin olemassaoloon, jonka ominaisuus on aika itse [11][10]. Tätä postulaattia on kritisoitu sen mahdottomuudesta ja ristiriitaisista seurauksista. Absoluuttinen aika on ollut kuitenkin matemaattisesti riittävän käytännöllinen oletus, jotta on pystytty selittämään taivaankappaleiden liikkeitä sekä tutkimaan dynaamisia systeemejä [10][18]. Absoluuttisen ajan teoria ei kuitenkaan enää riitä selittämään äärimmäisiä havaintoja todella suuressa tai pienessä mittakaavassa, mikä on johtanut erikoisiin fysikaalisiin teorioihin, jotka lähentelevät enemmän uskontoa kuin tiedettä [7][18].

Gottfried Wilhelm Leibniz vastusti absoluuttisen ajan teorioita ja oli aikansa nimekkäin relativisti. Hänen filosofiansa mukaan aika johtui muutoksesta [10]. Leibnizin käsitys suhteellisesta ajasta on hänen monadologiansa perusasia. Hänen suhteellisen aikakäsityksen merkittävin heikkous oli kuitenkin se, että se ei ollut matemaattisesti käytännöllinen teoria [19]. Leibnizin aatteelliset seuraajat kehittivät monadologiaa siten, että siitä muodostui useita keskenään hiukan erilaisia tulkintoja, joissa kuitenkin kaikissa oli se sama perusajatus, että aika ja avaruus ovat vain havaintoja ja niiden objektiivinen postuloiminen tarpeetonta [9]. Filosofit John McTaggart esitti suhteellisen ajan teorian ydinajatuksen hyvin kun sanoi:

“A universe in which nothing whatever changed (including the thoughts of the conscious beings in it) would be a timeless universe.”

– John McTaggart [12]

Vuonna 1908 McTaggart argumentoi, että aika ei ole todellinen [12]. Hänen argumenttinsa keskiössä on käsitys aikajanasta, jossa tapahtumat ovat järjestetty toistensa suhteen relaatioilla “ennemmin” ja “myöhemmin”. Toisaalta samalla aikajanalla tapahtumat voivat olla joko mennyttä, nykyistä tai tulevaa. Kutsutaan näitä kahta näkemystä ajan B- ja A- sarjoiksi McTaggartin esimerkin mukaan. Nyt väite ajan olemattomuudesta seuraa kun oletetaan, että aikaa on vain, jos on muutosta. Tämä oletus yhdessä A- ja B-sarjan kanssa johtaa ristiriitaan. [12].

Koska B-sarja rakentuu vain järjestysrelaatiosta tapahtumien suhteen, ei tällaisessa aikakuvassa ole muutosta. Nykyhetki on merkityksetön ja kaikki on samanaikaisesti mennyttä nykyistä ja tulevaa. Toisin sanotusti maailmassa mikään ei muutu, koska kaikki tapahtumat ovat olemassa samanaikaisesti.

Kuitenkin on niin, että maailmassa havaitaan muutosta. Aikajanalla muutos on mahdollista vain A-sarjassa, jossa tapahtumat vaihtuvat tulevasta nykyiseen ja lipuvat menneeseen. Jos aikaa on vain silloin kun on muutosta, on A-sarja aikajanana olemassaololle välttämätön asia.

A-sarja on kuitenkin ristiriitainen, koska aikajanalla kerran tuleva on sitten nykyistä ja myöhemmin mennyttä. Aikajanalla tapahtumalla on kaikki kolme ominaisuutta kerralla, mikä tarkoittaa sitä, että tapahtuma on tulevaa nykyistä ja mennyttä samanaikaisesti. Tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että A-sarjassa kaikki tapahtumat ovat vain tulevaa nykyistä tai mennyttä.

Tästä ristiriidasta voidaan päätellä kaksi asiaa:

- A) Aikajana on virheellinen oletus, joten se on hylättävä. Tämä johtaa presentismiin, jossa tapahtumia ei ole olemassa menneisyydessä tai tulevaisuudessa. Ainoa todellinen asia on nykyhetki, joka muuttuu.
- B) Ajan riippuvuus muutoksesta on virheellinen oletus. Joko aika tai muutos ei ole totta. Koska muutos ilman aikaa on perversio, uskotaan aika todelliseksi ja aikajana sen ilmiintymäksi. Tämä staattinen aikakuva johtaa eternalismiin, jossa mennyt, nykyinen, ja tuleva ovat kaikki kerralla olemassa. Nykyhetki ja muutos ovat vain illuusio.

McTaggartin A- ja B- sarjat muistuttavat suhteellisen ja absoluuttisen ajan teorioita. A-sarjassa uskotaan ajan ja muutoksen ekvivalenssi, minkä takia hylätään käsitys aikajanasta. Suhteellisen ajan teorian määritelmä oli se, että aika ja muutos oletetaan ekvivalenteiksi. Näin ollen A-sarja on suhteellisen ajan teoria. B-sarjassa uskotaan ajan olevan muutoksesta erillinen entiteetti, jolloin luovutaan ajan ja muutoksen ekvivalenssista. Absoluuttisen ajan määritelmä oli se, että ajan oletetaan olevan muutoksesta riippumaton entiteetti. McTaggartin B-sarja on näin ollen absoluuttisen ajan teoria. McTaggartin argumentin korollaari on siis se, että suhteellisen ja absoluuttisen ajan teorialat ovat ristiriidassa keskenään.

On kuitenkin mahdollista rakentaa sellainen malli, jossa sekä absoluuttisen, että suhteellisen ajan teorialat molemmat ovat oikeassa. Sydney Shoemaker esitti ajatuskokeen, jossa maailmaa tarkastellaan sekä suhteellisen, että absoluuttisen ajan teorian näkökulmasta.

Ajatuskokeessa maailma jaetaan lokeroihin, joista jokainen pysähtyy täysin silloin tällöin. Tässä maailmassa olio voi havainnoida muiden lokeroitten pysähtyneisyyttä, paitsi omaansa. Lokeron pysähtyminen tarkoittaa täydellistä pysähtymistä, jossa mitään ei tapahdu. Olion paikallinen aikakäsitys on näin ollen suhteellinen. Toisaalta joskus koko maailma voi pysähtyä samanaikaisesti, eikä yksikään olio voisi sitä suoraan havainnoida. Voi olla kuitenkin järkevää huomioida koko maailman pysähtyneisyys absoluuttisen ajan avulla, jossa aika kulkee vaikka mikään ei muutu. Ei voida yksimielisesti sanoa yhden teorian olevan parempi kuin toinen, koska molemmat teorialat ovat sopusoinnussa havaintojen kanssa. Esitetään seuraavaksi Shoemakerin ajatuskoe: [21][16].

Maailmassa on kolme aluetta a , b , ja c , jotka ovat erillisiä ja sisältävät yhdessä koko maailman. Kullakin alueella esiintyy jähmettymisiä, jolloin alueella ei tapahdu yhtään muutosta. Jähmettyneen alueen olioilla ei ole introspektiivistä keinoa havaita, että ovat pysähtyneessä tilassa – Esimerkiksi jos maailmassa on olio nimeltä Aristoteles, ja hänen alueensa jähmettyy, Aristoteles jatkaisi jähmettymisen jälkeen täysin siitä mihin ennen jähmettymistä jäi, aivan kuin mitään ei olisi tapahtunut. Oletetaan, että jähmettyminen kestää aina yhden vuoden, sikäli kun vuosi tulkitaan sellaiseksi ajanjaksoksi kuin sen intuitiivisesti tiedämme olevan. Nyt jos alueiden a , b , ja c oliot havainnoivat toisten alueiden jähmettymisiä (koska tämä on täysin mahdollista), niin havainnointitulokset voisivat olla vaikka seuraavaa: a jähmettyy joka kolmas ja b joka neljäs ja c joka viides vuosi. Näin he voivat päätellä, että jähmettymisiä tapahtuisi aina tällä samalla tavalla ja nimetä tämän teoriaksi T_1 . Toisaalta tässä tapauksessa kaikki alueet ovat kuudenkymmenenvuoden välein jähmettyneitä, eikä yksikään olio voisi mitenkään havainnoida juuri 60:nnetta vuotta, sillä kaikki maailmassa kuuluu näihin kolmeen alueeseen. Tämä näkyy heidän teoriassa T_1 , mutta he eivät voisi havaita sitä. Oliot voisivat muodostaa teorian T_2 , joka on myös sopusoinnussa havaintojen kanssa, ja jossa aika kulkee vain silloin kun maailmassa ainakin yksi asia muuttuu. Teoriassa T_2 Koko maailman jähmettymistä ei esiinny 60:ntena vuotena. Teorioiden erona olisi se, että teorian T_1 kannattajien ajanlasku poikkeaisi teorian T_2 kannattajien ajanlaskusta niin sanotulla karkausvuodella joka kuudeskymmenesvuosi. Molemmat teoriat kuitenkin selittäisivät maailmasta tehdyt havainnot täysin. [21].

Jähmettyneessä tilassa oleva absoluuttisen ajan kannattaja olisi oikeassa, sillä Shoemakerin maailmassa olisi olemassa alueita, joissa aika kuluisi vaikka hänen oma aikansa ei kulu. Lisäksi karkausvuotena hän voisi vedota teoriaan T_1 , joka suoraan määrittää absoluuttisen ajan koko maailmaan. Toisaalta myös suhteellisen ajan teorian kannattaja olisi oikeassa. Voisi olla niin, että koko maailma olisi jähmettynyt, jolloin teorian T_2 mukaisesti aikakin olisi kaikkialla pysähtynyt. Koska molemmat tulkinnat olisivat sopusoinnussa havaintojen kanssa, ei ole yksiselitteistä keinoa päättää kumpi teoria olisi oikea.

Absoluuttista aikaa ei välttämättä voida aina mitata. Voi olla mahdollista, että koko maailmankaikkeus pysähtyy, mutta absoluuttinen aika ei. Vastaavasti suhteellinen aika on aina täysin määriteltävissä maailmassa tapahtuvista muutoksista, mutta voi olla matemaattisesti epäkäytännöllinen teoria. Vaikka Newtonin filosofinen maailmankuva perustuu absoluuttisen ajan käsitteeseen, hän oli tietoinen absoluuttisen ja suhteellisen ajan eroista. Hän kirjoitti skoliumissaan ajan määritelmän ja viittasi absoluuttiseen aikaan puhtaasti matemaattisena “todellisena” aikana, mutta jatkoi tätä seuraavalla tavalla:

(...) *“Relative, apparent, and common time is any sensible and external measure (precise or imprecise) of duration by means of motion; such a measure – for example, an hour, a day, a month, a year – is commonly used instead of true time.”*
– Isaac Newton [14]

Vapaasti tulkittuna Newtonin mielessä suhteellinen aika on juurikin sitä todella mitattavissa olevaa aikaa, joka johtuu muutoksesta, ja joka on suhteellisen ajan

määritelmän perusta. Hän kuitenkin viittaa absoluuttiseen aikaan matemaattisena “todellisena” aikana. Newton ja Leibniz väittelivät näiden kahden aikakäistyksen eroista ja siitä, kumpi todella on oikea ajan teoria. Newtonin ajatus absoluuttisesta ajasta on nykyään luonnontieteissä ajan perusteoria. Leibnizin ajatus suhteellisesta ajasta vaikutti modernin metafysiikan kehittymiseen, ja on sillä saralla paljon pohdittu ajan teoria. [10][14].

Tämä ajan dualistinen luonne on kaikkien ajan teorioiden ongelma. Samanaikaisesti teorian pitäisi pystyä käsittelemään aikaa absoluuttisesta näkökulmasta, mutta myös huomioimaan se, että aika on paikallisesti suhteellista ja perustuu ekvivalentisti muutokseen. Aika ei kuitenkaan saa olla teorian perusoletus, koska silloin aikaa ei voida määritellä teoriasta käsin, vaan teoria perustuisi ajan oletukselle. Historiallisista syistä absoluuttinen ja kaikkialla itsensä tähden virtaava aika on modernin tieteellisen maailmankatsomuksen keskiössä. Jos matemaattinen ajan teoria on olemassa, sen täytyy perustua sellaisille tosiasioille, jotka eivät riipu ajasta, mutta implikoivat ajan eksistenssin – jotain on olemassa, ja se jokin voi muuttua.

2 Aikateoria

On mieletöntä edes kuvitella aikaa ilman maailmaa. Tässä luvussa esitetään kuinka maailma määritellään kategorioteorian avulla ja tutkitaan määritelmän seurauksia. Jokaisen esimerkin tarkoitus on havainnoida jokin maailmaa koskeva sellainen asia, joka johtaa uuteen määritelmään tai havainnollistaa edellistä. Lopuksi osoitetaan kuinka kategorioteoreettinen maailman malli ja predikaattilogiikka sopivat yhteen.

2.1 Maailma

2.1.1 Malli

Maailmasta voidaan rakentaa erilaisia malleja, jotka esittävät maailmasta tehtyjä havaintoja. Mahdollisuutemme tutkia maailmaa on rajallinen. Käyttämämme kielet ja symbolit vain mallintavat maailmaa, eikä koskaan vastaa sitä täysin. Yritetään sanoa se, että mikään maailman malli ei voi koskaan olla maailma itse. Vain maailma itse on se-mikä-se-on eli kaiken perusaines. [24].

Maailma sisältää kaiken sen mitä on olemassa. Olemassa olevat asiat voidaan luokitella esimerkiksi laadullisiin ja määrällisiin tekijöihin. Luokittelukriteeri voi olla mikä tahansa tilanteeseen sopiva sääntö. Esimerkiksi luokittelukriteeri voisi olla “*x on pallo*”. Tässä kontekstissa kaikkien pallojen luokka vastaa niiden olioiden joukkoa, jotka ovat palloja. Tämä hyvin yksinkertainen luokittelu voidaan esittää morfismina f maailmasta \mathcal{U} pallojoukkoon A .

$$\mathcal{U} \xrightarrow{f} A$$

Pallot ovat värikkäitä. Objekti B on kaikkien värien luokka ja morfismi g kuvaa maailman oliot väreihin.

$$\mathcal{U} \xrightarrow{g} B$$

Voidaan ajatella, että $B \subset \mathcal{U}$, mutta silloin oletettaisiin, että maailma \mathcal{U} olisi myös joukko, mikä ei ehkä ole totta. Maailma on kaikki se mitä on olemassa, eikä välttämättä toteuta Zermelo-Fraenkel joukko-opin aksioomia.

Pallojen ja värien välinen yhteys voidaan esittää matemaattisesti kategoriana, jossa f ja g ovat morfismeja maailmasta \mathcal{U} luokkaan A tai B (kts. määr. 1). Luokat A ja B yhdistävä morfismi ω kuvaa pallot väreihin, niin kuin ne maailmasta havaitsemme. Toisin sanotusti kategoria on kommutatiivinen eli $\omega \circ f = g$ (määr. 2 ja kuva 1). Kommutaatio takaa, että ω vastaa luokkien A ja B todellista suhdetta maailmassa.

Kategorioteoriaa koskeva materiaali on kokonaisuudessaan Harold Simmons kirjasta *An introduction to the category theory* [22].

Määritelmä 1. Kategoria \mathcal{C} koostuu:

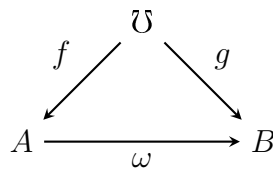
- luokasta objekteja, jota merkitään $Obj(\mathcal{C})$;
- objektien $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ välisistä morfismeista, jota merkitään $hom(A, B)$; morfismi merkitään $A \xrightarrow{f} B$ tai $f : A \rightarrow B$; objekti A on morfismin lähtö- ja B maaliobjekti;

- *identiteettimorfismeista* $id_A : A \longrightarrow A$, jossa $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ on mikä tahansa objekti;
- yhdisteestä $f \circ g : A \longrightarrow C$, jossa $f : A \longrightarrow B$ ja $g : B \longrightarrow C$, siten että liitälaki ja identiteettilaki pätevät: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ja $id \circ f = f \circ id$.

Määritelmä 2. Sanotaan, että morfismit f, g , ja ω kommutoi, silloin kun kategorian osa on kuvan 1 kaltainen kaavio ja

$$\omega \circ f = g$$

Määritelmä 3. *Maailma* \mathcal{U} on objekti, joka sisältää kaiken olevaisen. Maailman *malli* on kolmikko $(A, B; \omega)$. Mallin objekteja A ja B kutsutaan *luokitteluobjekteiksi*. Morfismi ω on nimeltään *tulkinta* ja mallin objektien välinen kuvaus. Sanotaan, että malli on *ontologisesti sitoutunut* maailmaan, jos mallin ja maailman muodostama kategoria kommutoi eli $\omega \circ f = g$ (kuva 1). Maailman ja mallin välisiä morfismeja f ja g kutsutaan *sidoksiksi*.



Kuva 1: Maailman \mathcal{U} sekä mallin $(A, B; \omega)$ muodostama kategoria. Objektit A ja B ovat maailman luokitteluobjekteja. Malli on ontologisesti sitoutunut maailmaan kun mallin tulkinta ω sekä sidokset f ja g kommutoivat, eli $\omega \circ f = g$.

Maailman \mathcal{U} eksistenssi seuraa suoraan premissistä – jotain on olemassa. Kaikki mitä on olemassa kuuluu maailmaan. Maailman malli kuitenkin rakentuu kahdesta toisesta objektista A ja B , jotka eivät ole maailma itse. Ei ole olemassa yksiselitteistä ja tyhjentävää vastausta sille, mitä nämä objektit ovat ja miksi ovat olemassa.

Esimerkki 1. Oletetaan, että maailmassa \mathcal{U} on kolikko. Luokitellaan tämä kolikko objektina *Kol*. Morfismi f

$$\mathcal{U} \xrightarrow{f} \text{Kol}$$

on sidos, joka yhdistää kolikon luokan maailmaan. Kolikolla tiedetään olevan ainakin kaksi ominaisuutta. Toisen ominaisuuden nimi on “kruuna” ja toisen “klaava”. Merkitään näitä lyhennetyksi symboleilla H ja T . Joukko $B := \{H, T\}$ on toinen luokitteluobjekti. Sidos g

$$\mathcal{U} \xrightarrow{g} B$$

yhdistää maailmaan ominaisuuden “kruuna” tai “klaava”. Kun vaaditaan, että tulkinta

$$\text{Kol} \xrightarrow{\omega} B$$

on ontologisesti sitoutunut maailmaan, morfismit f, g , ja ω kommutoi. Joukko B on kolikon *Kol* ominaisuuksien joukko.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{U} & \\
f \swarrow & & \searrow g \\
Kol & \xrightarrow{\omega} & \{H, T\}
\end{array}$$

Jos maailmassa käsillä olevan kolikon tila on “kruuna”, voidaan tämä tosiasia mallintaa tulkitsemalla kolikko-objekti Kol ja ominaisuus H yhdeksi.

$$\omega(Kol) = H$$

Kolikkomallissa voisi olla toinenkin asiointi, jossa kolikolla on ominaisuus “klaava”. Tarvitaan toinen tulkinta η , joka toteuttaa kommutointiehdon. Morfismit ω ja η ovat yksinkertaisen kolikkomallin kaikki mahdolliset tilat.

Esimerkki 2. Tarkastellaan maailmaa samalla tavalla kuin esimerkissä 1. Maailma on objekti \mathcal{U} ja toinen luokitteluobjekti on $B := \{H, T\}$, jossa symboli H tarkoittaa samaa kuin “kruuna” ja T “klaava”. Aikaisemmassa esimerkissä maailman mallissa oli vain yksi kolikko. Lisätään malliin kolikoita, siten että mallissa on n kolikkoa $K := \{Kol_1, Kol_2, \dots, Kol_n\}$. Nyt maailman malli on $(K, B; \omega)$ (määr. 3).

Oletetaan että tulkinta ω on totaalifunktio joukosta K joukkoon B . Jokainen kolikko joukossa K kuvautuu täsmälleen yhteen joukon B jäsenen seuraavalla tavalla:

$$\begin{array}{ccccc}
\omega(Kol_1) = H & \omega(Kol_2) = T & \omega(Kol_3) = T & & \\
\omega(Kol_4) = T & \omega(Kol_5) = H & \omega(Kol_6) = H & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
\omega(Kol_{n-2}) = T & \omega(Kol_{n-1}) = H & \omega(Kol_n) = T & &
\end{array}$$

Eriolaisten mahdollisten tulkintojen lukumäärä on 2^n .

Voidaan ajatella, että η on mallin toinen tulkinta, jossa kolikoilla on eri permutaatio. Nyt ω ja η eivät voi olla samanaikaisesti maailman tulkintoja. Jos näin olisi, siitä seuraisi välittömästi ristiriita. Ajatellaan vaikka yhtä kolikkoa Kol_k , jolle pätee $\omega(Kol_k) = H$ ja $\eta(Kol_k) = T$. Ristiriita seuraa, jos molemmat nuolet ovat ontologisesti sitoutuneita.

$$H = \omega \circ f = g = \eta \circ f = T \implies H = T$$

Tulkinnat ω ja η eivät toteuta kommutointiehtoa samanaikaisesti. Vain toinen voi olla kerralla totta.

Jos ensin ω toteuttaa kommutointiehdon ja sitten η , voidaan ajatella maailman kolikko-olioiden kombinaation olleen ensin tulkinnan ω mukainen ja sitten η :n. Tästä nähdään, että kommutointiehto eli ontologisen sitoutumisen periaate seuraa maailmaa. Mallin tulkinta täytyy aika-ajoin päivittää maailmasta tehtyjen havaintojen perusteella, jotta malli edustaa maailmaa mahdollisimaan hyvin.

Esimerkeissä 1 ja 2 oli kaksi yksinkertaista maailman mallia. Molemmissa tapauksissa maailma \mathcal{U} oletettiin todeksi, mutta tämän tarkkaa rakennetta ei tunnettu. Sidoksilla f ja g yhdistettiin luokitteluobjektit maailmaan. Tulkinta ω oli morfismi luokitteluobjektien välillä, ja nämä yhdessä olivat maailman malli $(A, B; \omega)$. Malli oli ontologisesti sitoutunut silloin kun maailman ja mallin kategoria kommutoi eli $\omega \circ f = g$ (kuva 1, määr. 2).

Esimerkki 3. Morfismin ei tarvitse olla funktio. Ajatellaan relaatiokategoriaa Rel , jonka objektit ovat joukkoja A ja B sekä morfismit kaksipaikkaisia relaatioita. Toisin sanotusti morfismit

$$A \xrightarrow{F} B$$

ovat osajoukkoja $F \subset B \times A$. Huomaa, että karteesisen tulon järjestys ei ole virhe. Tässä järjestyksessä relaation osoittaminen kategoriaksi on helppoa. Käytetään infix-tyyliä $bFa \equiv (b, a) \in F$, jossa $a \in A$ ja $b \in B$.

Oletetaan, että F ja G ovat kaksi sellaista morfismia, joille pätee:

$$A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} C$$

Määritellään yhdiste $G \circ F$ seuraavalla tavalla:

$$c(G \circ F)a \iff \exists b \in B(cGbFa) \tag{1}$$

Tässä $a \in A$, $b \in B$ ja $c \in C$. Osoitetaan seuraavaksi, että tämä toteuttaa assosiaatio- ja identiteettilain (määr. 1).

Oletetaan, että $H : C \rightarrow D$ on kolmas morfismi. Yhtälö (1) määrittää yhdisteen, josta seuraa:

$$d(H \circ G)bFa \iff d(H \circ G \circ F)a \iff \exists c \in C(dHc(G \circ F)a)$$

ja

$$bid \circ Fa \iff bidbFa \iff bFa \iff bFa \text{ id } a \iff bF \circ \text{id } a$$

Tämä osoittaa, että Rel on kategoria, jonka morfismit ovat relaatioita eikä funktioita.

2.1.2 Logiikka

Johdannossa käsiteltiin aikateorian filosofisia perusteita. Tarkoitus on, että aikateoria olisi yhteensopiva nykyaikaisen metafysiikan käsityksen kanssa maailmasta ja ajasta. Metafysiikassa yritetään logiikan keinoin löytää kaiken perusteissa oleva totuus. Tähän tarkoitukseen usein käytetään loogista kalkyyliä eli predikaattilogiikkaa. Johdetaan seuraavaksi aikateoriasta predikaattilogiikan syntaksi. Teorian kontekstista seuraa suoraan myös predikaattilogiikan semantiikka. Tämä yhdistää metafysiikan partikulaarit ja universaalit aikateoriaan.

Tehtävää varten tarvitaan *funktori*. Funktori kääntää yhden kategorian toiseksi ja on tavallaan morfismi kahden kategorian välillä. Funktorin tehtävä on siirtää jokainen kategorian objekti toisen kategorian objektiksi, sekä jokainen morfismi toisen kategorian morfismiksi. Ehto on se, että objektien välinen yhteys säilyy siirrossa.

Määritelmä 4. *Funktori* on sellainen morfismi, joka yhdistää kaksi kategoriaa toisiinsa säilyttäen näiden sisäisen rakenteen. Olkoon \mathcal{C} ja \mathcal{G} kaksi kategoriaa, $A \in \mathcal{C}$ mikä tahansa lähtökategorian objekti, ja f lähtökategorian morfismi. Funktori F toteuttaa seuraavat ehdot:

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{F} & G \\
A & \longmapsto & FA \\
f & \longmapsto & F(f)
\end{array}$$

Sanotaan, että funktori on *Kovariantti*, silloin kun alkuperäisen kategorian orientaatio säilyy kuvauksessa. Toisin sanotusti morfismien f lähtöobjekti A kuvautuu morfismien $F(f)$ lähtöobjektiksi FA , ja sama maaliobjektille. Vastaavasti funktori on *kontravariantti*, silloin kun alkuperäisen kategorian orientaatio kääntyy. Toisin sanotusti morfismien f lähtöjoukko A on kuvan $F(f)$ maalijoukko. Vastaavasti nuolen f maalijoukko on $F(f)$ lähtöjoukko.

Oletetaan, että \mathcal{U} on maailma ja A ja B joukkoja, jotka ovat myös maailman luokitteluobjekteja. Oletetaan myös, että tulkinta ω on relaatio luokitteluobjektien välillä, siten että kuvan 1 kaavio kommutoi.

Määritellään seuraavaksi kaksi funktoria \exists ja \forall . Kohdekategoria on *potenssikategoria*, jonka objektit ovat joukkojen potenssijoukkoja ja morfismit joukkoarvoisia joukkofunktioita. Määritellään nämä funktorit seuraavalla tavalla luokalle A , mutta samat määritelmät pätevät myös luokalle B :

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\exists} & \mathcal{P}(A) \\
A & \xrightarrow{\forall} & \mathcal{P}(A) \\
\mathcal{U} & \xrightarrow{\exists, \forall} & \mathcal{U}
\end{array}$$

Molemmat funktorit kuvaavat luokitteluobjektit potenssijoukoikseen, mutta maailma \mathcal{U} pysyy muuttumattomana.

Funktorit toimivat morfismien suhteen eritavalla. Määrätään, että funktorit ovat kovariantteja eli säilyttävät kuvauksessa morfismien suunnan. Tämän tarkoitus on yksinkertaistaa sitä mielikuvaa, joka kohta muodostuu.

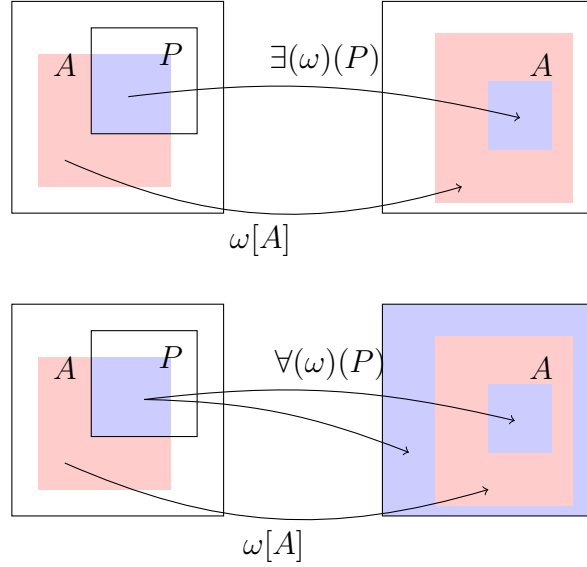
$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\exists(\omega)} & \mathcal{P}(B) & \quad & \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\forall(\omega)} & \mathcal{P}(B) \\
\boxed{\exists(\omega)(P) := \omega[P]} & & & & \boxed{\forall(\omega)(P) := \omega[P^c]^c} & &
\end{array}$$

Tässä P on lähtöjoukon jäsen, eli $P \subset A$ ja P^c tarkoittaa joukon komplementtia. Merkinnät $\omega[P]$ ja $\omega[P^c]^c$ määritellään seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
\omega[P] &:= \{x \in B : (p, x) \in \omega \text{ jollain } p \in P\} \\
\omega[P^c]^c &:= \{x \in B : p \in P \text{ aina kun } (p, x) \in \omega\}
\end{aligned}$$

Funktorit näyttävät predikaattilogiikan eksistenssi- ja universaalikvanttoreilta. Ulkonäön lisäksi nämä funktorit käyttäytyvät kuin olisivat logiikan kvanttoreita. Tehdään sellainen lisäys, että

$$\exists_\omega := \exists(\omega) \quad \text{ja} \quad \forall_\omega := \forall(\omega)$$



Kuva 2: Funktoreiden \exists ja \forall määrittämät kuvat joukosta P (sininen) verrattuna koko lähtöjoukon A määrittämään joukkoon $\omega[A]$ (punainen).

Omaksutaan predikaattilogiikan tavanomainen syntaksi predikaatteineen ja muuttujineen kaikkineen. Tehtäväksi jää määrittellä logiikan semantiikka edellä määriteltyjen funktoreiden avulla. Ydinajatus on se, että osajoukko $P \subset A$ on kuin predikaatti, ja funktoreiden määrittämät kuvaukset tästä joukosta ovat kuin kvanttoreita.

$$x \stackrel{\Delta}{\equiv} b \in B \quad \exists x P(x) \stackrel{\Delta}{\equiv} \exists_{\omega}(P) \neq \emptyset$$

$$P(x) \stackrel{\Delta}{\equiv} b \in \omega[P] \quad \forall x P(x) \stackrel{\Delta}{\equiv} \forall_{\omega}(P) = B$$

Merkintä $\stackrel{\Delta}{\equiv}$ tarkoittaa loogista ekvivalenssia määritelmän perusteella, eli $\exists x P(x)$ on loogisesti ekvivalentti epäyhtälön $\exists_{\omega}(P) \neq \emptyset$ kanssa. Sama myös universaalikvanttorille. Lisäksi x ja $b \in B$ määritellään loogisesti ekvivalenteiksi ja predikaatti $P(x)$ ekvivalentiksi $b \in \omega[P]$. Periaate on sama kuin predikaattilogiikan määritelmissä [4].

Määritellään negaatio ja disjunktio joukko-operaatioiden avulla. Negaatio yhdistetään komplementtiin ja disjunktio unioniin. Tutkitaan kuinka nämä käyttäytyvät funktoreiden kanssa. Nähdään, että tällä tavalla määriteltyinä negaatio ja disjunktio toimivat eksistenssi- ja universaalikvanttoreiden kanssa niin kuin pitää.

$$\neg P(x) \stackrel{\Delta}{\equiv} b \in \omega[P^c]$$

$$P(x) \vee Q(x) \stackrel{\Delta}{\equiv} b \in \omega[P \cup Q]$$

Eksistenssikvanttorille ja disjunktioille pätee osituslaki. Kun disjunktio ja unioni ovat ekvivalentit määritelmässä, eksistenssin osittuminen seuraa suoraan funktorin

osittumisesta unionin suhteen.

$$\begin{aligned}\exists_{\omega}(P \cup Q) &= \left\{ x \in B : ((x, p) \in \omega \text{ ja } p \in P) \text{ tai } ((x, q) \in \omega \text{ ja } q \in Q) \right\} \\ &= \left\{ x \in B : (x, p) \in \omega \text{ ja } p \in P \right\} \cup \left\{ x \in B : (x, q) \in \omega \text{ ja } q \in Q \right\} \\ &= \exists_{\omega}(P) \cup \exists_{\omega}(Q)\end{aligned}$$

Nyt eksistenssin määritelmästä seuraa, että kvanttori ja disjunktio toteuttava osituslain niin kuin pitää.

$$\exists x(P \vee Q) \iff \exists xP \vee \exists xQ$$

Toinen seikka on se, että negaation eksistenssi on sama asia, kuin että vastaväite olisi totta aina. Funktorimielessä komplementin kuva funktorissa \exists_{ω} voidaan kääntää kuvaksi funktorissa \forall . Käytetään funktoreiden \exists ja \forall määritelmiä, mistä seuraa:

$$\exists_{\omega}(P^c) = \omega[P^c] = \forall_{\omega}(P)^c$$

Koska komplementti on ekvivalentti negaation kanssa, tästä saadaan negaation ja kvanttoreiden välinen vaihdannaissääntö niin kuin pitää.

$$\exists x(\neg P) \iff \neg \forall xP$$

Näillä perusteilla komplementin ja unionin kautta voidaan määritellä loogiset operaattorit. Joukko-operaatioilla määritellyt negaatio ja disjunktio käyttäytyvät hyvin. Yhteyden viimeistelee se tosiasia, että de Morganin lait toimivat komplementille ja unionille juuri samalla tavalla kuin negaatiolle ja disjunktioille.

Yhteenvetona predikaattilogiikan syntaksi voidaan omaksua sellaisenaan. Symbolien merkitys saadaan tulkinnan ω avulla siten, että predikaatti $P(x)$ on totta silloin kun pistettä x vastaava tekijä $b \in B$ on joukon $\omega[P]$ jäsen. Periaate jalostuu negaation ja disjunktion semantiikkaan suoraan. Kvanttorit määrittävät lauseet ja saavat totuusarvonsa siitä, että eksistenssifunktorin kuva ei ole tyhjäjoukko, tai sitten universaalifunktorin kuva on koko maaliavaruus.

$$\exists_{\omega}(P) \neq \emptyset \quad \text{tai} \quad \forall_{\omega}(P) = B$$

Huomaa tulkinnan ω rooli näissä määritelmässä. Tulkinta määrittää funktoreiden kautta lauseiden totuusarvon. Morfismi ω on samanlainen kuin se tulkintafunktio, jota käytetään predikaattilogiikan ja malliteorian rakentamiseen. Siinä tulkintafunktio yhdistää jokaisen predikaattisymbolin sitä vastaavaan relaatioon maailmassa, funktion sitä vastaaviin funktioihin, ja muuttujat niitä vastaaviin olioihin.

Näytetään vielä, kuinka funktoreista rakennetulla logiikalla päätellään lausejoukosta uusia lauseita. Keskeisessä asemassa on päättelysääntö *Modus Ponens*, joka on logiikan aakkostossa esitetty $P \implies Q$. Tämä on loogisesti sama kuin $\neg P \vee Q$, mikä voidaan esittää komplementilla ja unionilla

$$P(x) \implies Q(x) \stackrel{\Delta}{\equiv} x \in \omega(P^c) \cup \omega(Q)$$

Nyt jos $P(x)$ on totta ja $P(x) \implies Q(x)$, voidaan ensin päätellä $P(x) \wedge Q(x)$, ja sitten *modus ponens* $Q(x)$ on totta. Kiinnostava seikka on välivaihe, jossa $P(x) \wedge Q(x)$ on totta. Unionin ja komplementin kanssa esitettynä tämä olisi

$$\omega(P) \cap (\omega(P^c) \cup \omega(Q)) = \omega(P) \cap \omega(Q)$$

Modus ponens päättelysääntö redusoituu konjunktioon. Yritetään sanoa, että jos kahdesta predikaatista $P(x)$ ja $Z(x)$ voidaan päätellä jotain, on se mitä voidaan päätellä sama asia, kuin silloin, jos $Z(x)$ olisi implikaatio $P(x) \implies Q(x)$. Tavallisesti tällaisten todistusten tekeminen on vaikeaa, sillä kahden konjunktioista ei voida päätellä kolmatta, ilman sitä lisäoletusta, että toinen tekijä on ensimmäisen ja kolmannen implikaatio.

Kvanttoreiden kautta määritelty predikaattilogiikka on tässä mielessä joustavampi. Kahden joukon leikkauksesta voidaan päätellä kolmannen lauseen olemassaolo melko helposti. Esitetään tästä yksi esimerkki, jossa todistetaan joukko-operaatioilla tehtävä, joka on sovellus S. Miettisen kirjasta Logiikan perusteet sivulta 126 löydetystä harjoitustehtävästä [13].

Esimerkki 4. Todistetaan, että *joku ei ole kuollut seuraavista oletuksista:*

- a) Kukaan kuollut opiskelija ei kirjoita gradua
- b) Joku opiskelija kirjoittaa gradua

Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät:

- $D(x)$: x on kuollut
- $O(x)$: x on opiskelija
- $K(x)$: x kirjoittaa gradua

Formalisoidaan väitteet a) ja b) predikaattilogiikan ja funktorikvanttoreiden keinoin. Ensimmäinen väite a) on predikaattilogiikassa esitettynä seuraavaa:

$$\forall x (D(x) \wedge O(x) \rightarrow \neg K(x))$$

Kaikille on totta, että jos on kuollut ja opiskelija, niin silloin ei kirjoita gradua. Tämä käy järkeen.

Lauseessa implikaatio on loogisesti ekvivalentti disjunktion kanssa

$$D(x) \wedge O(x) \rightarrow \neg K(x) \iff \neg D(x) \vee \neg O(x) \vee \neg K(x)$$

Negaatiot ja disjunktiot voidaan kääntää funktorikvanttoreihin komplementteina ja joukko-unionina. Väite a) voidaan esittää universaalifunktorilla näin:

$$\forall_\omega (D^c \cup O^c \cup K^c) = B$$

Toinen väite b) on predikaattilogiikassa esitettynä:

$$\exists x (O(x) \wedge K(x))$$

On olemassa ainakin yksi, joka on opiskelija ja kirjoittaa gradua. Konjunktio kääntyy funktorikvanttoreissa joukko-leikkaukseksi. Väite b) voidaan esittää funktoreilla seuraavalla tavalla:

$$\exists_{\omega}(O \cap K) \neq \emptyset$$

Näistä väitteistä voidaan päätellä, että joku ei ole kuollut. Molempien väitteiden a) ja b) on oltava samanaikaisesti totta. Tämä on sama asia kuin se, että a) ja b) molemmat ovat totta. Funktorikvanttorit ovat joukkoja. Looginen konjunktio käänetään funktoreiden suhteen joukkojen leikkaukseksi. Näin ollen päättelyn lähtökohta on väitelauseiden konjunktio (predl.) tai leikkaus (kateg.). Valitaan kategorioteoreettinen lähtökohta, jolloin todistus on osoittaa, että seuraava leikkaus on epätyhjä joukko. Sitten voidaan päätellä, että $\exists_{\omega}(D^c) \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} \forall_{\omega}(D^c \cup O^c \cup K^c) \cap \exists_{\omega}(O \cap K) &= \omega(D \cap O \cap K)^c \cap \omega(O \cap K) \\ &= (\omega(D)^c \cup \omega(O \cap K)^c) \cap \omega(O \cap K) \\ &= \omega(D)^c \cap \omega(O \cap K) \\ &= \omega(D)^c \\ &= \forall_{\omega}(D^c) \\ &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Koska $\forall_{\omega}(D^c) \neq \emptyset$, on olemassa osajoukko $C \subset B$, jossa $\forall_{\omega}(D^c) = C$ on loogisesti ekvivalentti lauseen $\forall x(\neg D(x))$ kanssa kun $x \equiv c \in C$. Koska $C \neq \emptyset$, $\forall|_C x(\neg D(x))$ on pätevä lause, mikä tarkoittaa sitä, että joku ei ole kuollut.

$$\exists x(\neg D(x))$$

Saman väitteen klassinen todistus on monimutkaisempi, eikä sitä esitetä tässä. Todistus löytyy S. K. Miettisen kirjasta [13]. Todistuksen lyhyt versio menee näin: Aloitetaan väitteen b) eksistenssin eliminaatiolla, mitä seuraa apuoletus kaikkien olevan kuolleita. Sitten päätellään kaikkien kuolleiden opiskelijoiden kautta ristiriita, jossa kirjoitetaan ja ei kirjoiteta gradua samanaikaisesti. Tällä perusteella hylätään apuoletus ja päätellään, että joku ei ole kuollut.

Menetelmä, jolla funktorikvanttoreilla todistetaan lauseita, nojaa siihen periaatteeeseen, että kaikkien lauseiden on oltava totta samanaikaisesti. Toisin sanotusti, jos predikaattilogiikassa Σ on ristiriidaton lausejoukko, niin

$$\bigwedge_{i=1}^n \sigma_i \text{ on totta}$$

Tässä $\sigma_i \in \Sigma$ kaikilla indekseillä.

Funktorikvanttorimielessä konjunktio on leikkaus. Väitetään, että Γ on funktorikvanttoreiden lausejoukko ja ristiriidaton, silloin ja vain silloin kun

$$\bigcap_{i=1}^n \gamma_i \neq \emptyset$$

Tässä $\gamma_i \in \Gamma$ on $\forall_{\omega}(P)$ tai $\exists_{\omega}(P)$ muotoa oleva joukko asianmukaisella sitoutumisella koko avaruuteen tai epätyhjyyteen. Väitteelle ei esitetä tässä yhteydessä todistusta, mutta kannustetaan lukijaa tutkimaan asiaa uuden tiedon toivossa.

2.1.3 Tila-avaruus

Mallissa voi olla erilaisia tulkintoja, jotka edustavat erilaisia maailmasta tehtyjä havaintoja. Eri tulkintoja oli esimerkeissä 1 ja 2 äärellinen määrä, mutta niitä voi olla myös äärettömästi. Tulkinnat ovat objektien A ja B välisiä morfismeja, mutta myös maailman mallin eri *tiloja*. Morfismien luokka $\text{hom}(A, B)$ on mallin tila-avaruus. Lähdemateriaali: Halmos, Measure Theory [6]; Axler, Measure and integration [3]; Athreya, Measure theory and probability theory [2].

Määritelmä 5. Kutsutaan maailman \mathcal{U} mallin $(A, B; \omega)$ morfismien luokkaa $\text{hom}(A, B)$ *tila-avaruudeksi* ja merkitään sitä symbolilla Ω ;

$$\Omega := \text{hom}(A, B)$$

Tila-avaruuden jäsenet $\omega \in \Omega$ ovat mallin *tiloja* tai *tulkintoja* riippuen kontekstista.

Määritelmä 6. Tila-avaruuden osajoukot $E \subset \Omega$ ovat *tapahtumia* mallin suhteen. Tapahtumista koostuva joukkoperhe \mathcal{F} on σ -algebra,

- jos $\Omega \in \mathcal{F}$;
- aina kun $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, niin $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{F}$;
- aina kun $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

Lause 1. Millä tahansa joukkoperheellä \mathcal{F} on olemassa yksiselitteinen σ -algebra \mathcal{F}_0 siten, että $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$. Jos \mathcal{G} on mikä tahansa toinen σ -algebra, joka sisältää perheen \mathcal{F} , niin silloin $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}$.

Todistus. Oletetaan, että $\Omega \in \mathcal{F}$. Jokaisella joukolla on potenssijoukko, joten myös joukkoperheen \mathcal{F} jäsenten unionilla $\bigcup \mathcal{F}$ on potenssijoukko $\mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F})$. Tämä sisältää kaikki unionin osajoukot. Näin ollen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F})$. Potenssijoukko on selvästi myös σ -algebra, koska $\Omega \in \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$. On olemassa ainakin yksi sellainen σ -algebra, joka sisältää joukkoperheen \mathcal{F} . Kaikkien niiden σ -algebroyen leikkaus on \mathcal{F}_0 , jotka sisältävät joukkoperheen \mathcal{F} ja koostuvat tila-avaruuden Ω osajoukoista, koska σ -algebroyen leikkaus on myös σ -algebra. Näin ollen \mathcal{F}_0 on yksiselitteisesti pienin σ -algebra, joka sisältää joukkoperheen \mathcal{F} . \square

Määritelmä 7. Tila-avaruuden Ω ja tämän osajoukkojen joukkoperheen \mathcal{F} pari (Ω, \mathcal{F}) on *mitta-avaruus*, silloin kun \mathcal{F} on σ -algebra.

Jos tila-avaruus Ω on joukko, voidaan tähän määritellä σ -algebra. Tila-avaruus ja σ -algebra \mathcal{F} ovat yhdessä mitta-avaruus (Ω, \mathcal{F}) (määr. 7).

2.1.4 Tilamuuttuja

Tila-avaruus on maailman mallin $(A, B; \omega)$ morfismien luokka $\text{hom}(A, B)$ (kts. määr. 3). Tila-avaruus sisältää kaiken tiedon mallista, eli mallin mahdolliset tilat. Tiloja sanotaan myös tulkinnoiksi, koska mallin tila on morfismi joka tulkitsee lähtöobjektin A maaliobjektiin B . Jos malli on ontologisesti sitoutunut maailmaan, tila-avaruudessa on olemassa ainakin yksi tila $\omega \in \Omega$, jonka suhteen maailman kategori-aa esittävä kaavio kommutoi (kts. kuva 1). Tämä tila on maailmasta tehty havainto mallin suhteen.

Kuvaus $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tila-avaruudesta reaalityloihin luokittelee maailmasta tehtyjä havaintoja eli mallin tiloja. Ajatellaan, että X mittaa, indeksöi, tai muuten vaan luokittelee mallin erilaiset tilat numeerisesti. Kutsutaan kuvausta X mallin tilamuuttujaksi.

Määritelmä 8. Tilamuuttuja X on kuvaus tila-avaruudesta reaalityloihin.

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$$

Käänteiskuvaukset säilyttävät joukko-operaatiot. Olkoot $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ σ -algebra. Alkukuva $X^{-1}(\mathcal{B})$ on myös σ -algebra. Sanotaan, että tilamuuttuja X on $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ -mitallinen, jos tilamuuttujan alkukuva on σ -algebran jäsen $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$. Toisin sanotusti jokaisella $B \in \mathcal{B}$ on alkukuva $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Eräs tunnettu σ -algebra on Borel-joukko \mathcal{B} , joka virittää mitta-avaruuden $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Määritelmä 9. Olkoon (Ω, \mathcal{F}) mitta-avaruus. Tilamuuttuja $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on \mathcal{F} -mitallinen, jos kaikkien boreljoukkojen $B \in \mathcal{B}$ alkukuva on σ -algebran \mathcal{F} jäsen. Toisin sanotusti kaikille $B \in \mathcal{B}$ pätee:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

Esimerkki 5. Palautetaan mieleen esimerkki 2, jossa maailman malli rakennettiin kolikoista, joita oli n kappaletta. Kolikoiden joukko merkittiin symbolilla K . Tarkastellaan seuraavaksi miten tämä kolikkojoukko liittyy \mathbb{R}^n avaruuteen.

Palautetaan mieleen kuvan 1 kaavio:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{U} & & \\ & f \swarrow & & \searrow g & \\ \{Kol_k\} & K & \xrightarrow{\omega} & B & \{H, T\} \end{array}$$

Tulkinta eli tila $\omega \in \Omega$ on maailmasta tehty havainto mallin $(K, B; \omega)$ suhteen. Oletetaan, että malli on ontologisesti sitoutunut maailmaan.

Mallin molemmat luokitteluobjektit K ja B ovat diskreettejä ja äärellisiä. Erilaisia tiloja on 2^n , joten myös tila-avaruus Ω on diskreetti ja äärellinen. Tila-avaruus ja potenssijoukko $\mathcal{P}(\Omega)$ ovat triviaali mitta-avaruus $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Tilamuuttuja $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ kuvaa jokaisen tilan $\omega \in \Omega$ binäärivektoriksi, siten että vektori vastaa mallin kolikoiden orientaatiota. Vektorin jokainen komponentti vastaa yhtä mallin kolikkoa, ja komponentin binääriarvo kolikon "kruunamaisuutta" tai "klaavamaisuutta". Tällainen tilamuuttuja on \mathcal{F} -mitallinen kuvaus. Tilamuuttujan arvo $X(\omega) \in \{0, 1\}^n$ on maailmasta tehty numeerinen havainto mallin suhteen.

Lause 2. Jos $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $Y : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ovat \mathcal{F} -mitallisia tilamuuttujia, myös $X + Y$ sekä XY ovat \mathcal{F} -mitallisia tilamuuttujia.

Todistus. Todistetaan ensin apulause: Olkoon $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $Y : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ \mathcal{F} -mitallisia tilamuuttujia. Lisäksi $E = \{X < Y + c\}$ jollain vakiolla $c \in \mathbb{R}$. Väitetään, että $E \in \mathcal{F}$.

Joukon E avoin väli $X < Y + c$ sisältää aina rationaaliluvun. Käytetään apujoukkoa $E_q := \{X < q < Y + c\}$ apulauseen todistamiseksi. Osoitetaan että $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q = E$, josta väite seuraa.

Jos $\omega \in E$, niin $X(\omega) < Y(\omega) + c$. Koska jokainen avoin väli sisältää rationaaliluvun, on olemassa $q \in \mathbb{Q}$, jolle pätee $X(\omega) < q < Y(\omega) + c$. Näin ollen $\omega \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q$, joten $E \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q$. Jos $\omega \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q$, on olemassa q jolle pätee $\omega \in E_q$, koska

$$X(\omega) < q < Y(\omega) + c \iff X(\omega) < Y(\omega) + c$$

niin $\omega \in E$. Tästä seuraa $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q \subset E$ sekä:

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q = E$$

Nyt joukko E_q voidaan hajottaa kahden erillisen joukon unioniksi

$$E_q = \{X < q\} \cup \{q < Y + c\}$$

jossa

$$\begin{aligned} \{X < q\} &= X^{-1}([-\infty, q)) \\ \{q < Y + c\} &= Y^{-1}((q - c, \infty]) \end{aligned}$$

Joukot $[-\infty, q)$ ja $(q - c, \infty]$ ovat Borel-joukkoja. Tilamuuttujien X ja Y mitallisuudesta seuraa, että $E_q \in \mathcal{F}$. Koska $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q = E$, niin myös $E \in \mathcal{F}$

Todistetaan seuraavaksi päälause. Jos $X(\omega) = \pm\infty$ ja $Y(\omega) = \mp\infty$, niin $X + Y$ on määrittelemätön. Lisäksi, jos $X(\omega) = \pm\infty$ tai $Y(\omega) = \pm\infty$, niin $X + Y(\omega) = \pm\infty$ sekä $XY(\omega) = \pm\infty$. Keskitytään vain tapauksiin joissa X ja Y ovat äärellisiä jolloin on olemassa $c \in \mathbb{R}$, siten että

$$\{X + Y < c\} = \{X < c - Y\}$$

Tilamuuttujan $X + Y$ mitallisuus seuraa apulauseesta. Koska

$$XY = \frac{1}{4}((X + Y)^2 - (X - Y)^2)$$

myös XY on mitallinen tilamuuttuja. □

Lause 3. *Olkoon (Ω, \mathcal{F}) mitta-avaruus ja $E \in \mathcal{F}$. Indikaattorikuvaus*

$$\mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{kun } \omega \in E \\ 0 & \text{kun } \omega \notin E \end{cases}$$

on mitallinen tilamuuttuja.

Todistus. Oletetaan että $E \in \mathcal{F}$. Indikaattorin arvojoukko on $\{0, 1\} \subset \mathcal{B}$, joten

$$\mathbb{1}_E^{-1}(1) = E \quad \text{ja} \quad \mathbb{1}_E^{-1}(0) = E^c$$

Oletuksen perusteella $\mathbb{1}_E^{-1}(1) \in \mathcal{F}$. Määritelmän 7 mukaan $\Omega = \bigcup \mathcal{F}$. Komplementti on $E^c = \Omega \setminus E$. Näistä saadaan

$$E^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus E)$$

jossa $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup \mathcal{F}$. Valittiin sellainen joukkojono, jonka unioni on tila-avaruus. Nyt σ -algebran määritelmän 6 perusteella erotus ja unioni kuuluvat σ -algebraan. Koska $E, A_i \in \mathcal{F}$, myös $E^c \in \mathcal{F}$. \square

Määritelmä 10. Tilamuuttuja $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on *yksinkertainen*, silloin kun

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n e_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$$

Yksinkertaisten tilamuuttujien lineaarisuudesta seuraa, että jos X ja Y ovat yksinkertaisia tilamuuttujia, myös $X + Y$, sekä $X - Y$, ja XY ovat yksinkertaisia tilamuuttujia.

Lause 4. Jos tilamuuttuja $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on yksinkertainen, se on myös mitallinen.

Todistus. Lauseen 3 perusteella indikaattori on mitallinen. Mitallisten tilamuuttujien summa on mitallinen tilamuuttuja, joten yksinkertainen tilamuuttuja on myös mitallinen. \square

Lause 5. Jokainen reaaliarvoinen mitallinen tilamuuttuja $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on yksinkertaisten tilamuuttujien X_i raja-arvo.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = X$$

Todistus. Oletetaan, että tilamuuttuja $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on positiivinen eli $X \geq 0$. Olkoot jokainen yksinkertainen tilamuuttuja X_i muotoa

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{jos } \frac{i-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{i}{2^n}, \quad i = 1, \dots, 2^n \\ n & \text{jos } X(\omega) \geq n \end{cases}$$

Tämä pätee kaikille $\omega \in \Omega$. Selvästi tilamuuttuja X_n on positiivinen ja yksinkertainen. Jono $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ on kasvava. Jos $X(\omega) < \infty$, on olemassa $n \in \mathbb{N}$, siten että

$$0 \leq X(\omega) - X_n(\omega) \leq \frac{1}{2^n}$$

Jos $X(\omega) = \infty$, myös $X_n(\omega) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Millä tahansa tilamuuttujalla X on hajotelma

$$X = X^+ - X^-$$

jossa $X^+ \geq 0$ ja $X^- \geq 0$. Sovelletaan edellä esitetty todistus tilamuuttujille X^+ ja X^- erikseen, mikä viimeistelee todistuksen. \square

2.1.5 Tilamitta

Joukkofunktio on kuvaus joukkoperheestä reaalityyppisiin. Tila-avaruuden osajoukkojen joukkoperheellä on yksiselitteinen σ -algebra, jonka suhteen tila-avaruus on mitta-avaruus. Joukkofunktio tila-avaruuden osajoukoista reaalityyppisiin on *tilamitta*. Mitta määritellään mittateoriassa positiiviseksi täysadditiiviseksi joukkofunktioksi. Tutkitaan seuraavaksi mitä on täysadditiivisuus ja milloin mitta-avaruuteen voidaan määritellä tilamitta.

Määritelmä 11. Joukkofunktio $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ on *tilamitta*, silloin kun:

1. \mathcal{F} on tila-avaruuteen määritelty σ -algebra;
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ kaikille erillisille tapahtumille $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$;
3. $\mu(\emptyset) = 0$.

Tapahtumat ovat erillisiä silloin kun $E_i \cap E_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$.

Seuraava lause on tärkeä. Lauseen mukaan, jos joukkoperhe \mathcal{F} on puolirengas ja μ on positiivinen ja täysadditiivinen joukkofunktio, voidaan tämä laajentaa yksiselitteisesti tilamitaksi puolirengaan generoimaan σ -algebraan. Lauseen mahti on se, että puolirengas ja joukkofunktio μ ovat helppoja mutta σ -algebra ja tilamitta vaikeita asioita.

Seuraavien lauseiden todistukset ovat minun henkilökohtaisen pohdinnan tuloksia. Carathéodoryn lause ei ole helppo eikä intuitiivinen. Sen todistaminen oli henkilökohtainen tavoite (kts. lause 13). Todistus on tekninen ja vaatii paljon alustusta. Harjaantunut lukija voi löytää mielenkiintoisia uusia näkökulmia Carathéodoryn kriteeriin ja lauseeseen.

Aloitetaan esimitasta, joka ei aivan ole tilamitta mutta voidaan laajentaa sel-laiseksi. *Esimita* $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ on positiivinen ja täysadditiivinen joukkofunktio. Tämän lisäksi tarvitaan joukkoperheen \mathcal{F} generoima potenssijoukko.

Määritelmä 12. Joukkoperheen \mathcal{F} generoima potenssijoukko sisältää kaikki ne joukot, jotka ovat ainakin yhden tämän jäsenen osajoukko.

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}) := \{E \subset \Omega \mid \exists A \in \mathcal{F} : (E \subset A)\}$$

Aina pätee että jos $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ ja $B \subset E$, niin $B \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$.

Määritelmä 13. Olkoot $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ esimita ja $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$. Joukon E μ -joukko on

$$E_\mu := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : (E_i) \subset \mathcal{F} \text{ ja } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

Huomioidaan eräs tärkeä ominaisuus μ -joukolle E_μ . Jos $E \subset B$ ja $E, B \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$, niin silloin B_μ on pienempi kuin E_μ , sekä pätee $B_\mu \subset E_\mu$. Tämä johtuu siitä, että osajoukolla on enemmän peitteitä.

Lause 6. Olkoot $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ esimita. Jos $E \subset B$ ja $E, B \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$, niin silloin $B_\mu \subset E_\mu$ kaikilla E ja B .

Todistus. Oletetaan $E \subset B$ ja $\omega \in B_\mu$. Tällöin on olemassa joukkojono (E_i) jolle pätee $(E_i) \in \mathcal{F}$ ja $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Koska $E \subset B$, niin $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, mikä on ekvivalentti sen kanssa, että $\omega \in E_\mu$. Näin ollen $B_\mu \subset E_\mu$. \square

Yritetään laajentaa esimita potenssijoukkoon $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. Määritellään laajennus μ -joukon infimumiksi $\mu^*(E) := \inf E_\mu$. Jotta tämä todella olisi esimitan laajennus joukkoon $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, kaikille jäsenille $E \in \mathcal{F}$ on oltava totta että $\mu^*(E) = \mu(E)$.

Lause 7 (Tutkitaan funktiota μ^*). *Olkoot $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ esimita. Jos $E \in \mathcal{F}$, niin myös $\mu^*(E) = \mu(E)$.*

Todistus. Olkoot $\mu^* := \inf E_\mu$. Voidaan valita sellainen joukkojono $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ että $E = \bigcup_i E_i$ ja $E_i \cap E_j = \emptyset$ kun $i \neq j$. Tällöin $\sum_i \mu(E_i) = \mu(E)$ ja $\inf E_\mu = \mu(E) = \mu^*(E)$ kaikille joukoille $E \in \mathcal{F}$. \square

Lause 8 (Tutkitaan funktiota μ^*). *Laajennus μ^* on monotoninen.*

Todistus. Olkoot $E, B \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ ja $E \subset B$. Lauseesta 6 seuraa että $B_\mu \subset E_\mu$. Jos oletetaan että

$$\inf(B_\mu) < \inf(E_\mu)$$

on olemassa piste $b \in B_\mu$ siten että

$$\inf(B_\mu) < b < \inf(E_\mu)$$

mutta tällöin $b \notin E_\mu$, mikä on ristiriidassa tuloksen $B_\mu \subset E_\mu$ kanssa. Näin ollen on oltava totta, että

$$\inf E_\mu \leq \inf B_\mu$$

Oletuksen $\mu^*(E) := \inf E_\mu$ perusteella tämä on sama kuin $\mu^*(E) \leq \mu^*(B)$. \square

Lause 9 (Tutkitaan funktiota μ^*). *Olkoot $\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ ja $\mu^*(E) := \inf E_\mu$. Lisäksi $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$, siten että $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$. Tällöin pätee*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

Todistus. Olkoot $(E_i) \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$. Joukkojonon i :nen joukon peitteiden mittojen joukko on määritelmän 13 perusteella

$$E_{i_\mu} = \left\{ \sum_j \mu(B_{ij}) : (B_{ij}) \subset \mathcal{F} \wedge E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} \right\}$$

Tämän summajoukko on

$$\sum_i E_{i_\mu} = \left\{ \sum_i \sum_j \mu(B_{ij}) : \bigwedge_{i=1}^{\infty} \sum_j \mu(B_{ij}) \in E_{i_\mu} \right\}$$

Oletetaan että piste x kuuluu peitteiden summajoukkoon eli $x \in \sum_i E_{i_\mu}$. Tällöin x on joukkojonon (E_i) jäsenten joidenkin peitteiden summa

$$x = \sum_i \sum_j \mu(B_{ij})$$

Näin ollen kaikilla i -indekseillä $\sum_j \mu(B_{ij}) \in E_{i\mu}$. Toisin sanottuna kaikilla i -indekseillä joukkojonon (B_{ij}) unioni on joukon E_i peite, eli $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$, sekä $(B_{ij}) \subset \mathcal{F}$.

Koska osajoukkojen unioni on osajoukko, on olemassa erillinen joukkojono $(G_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, jolle pätee

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

Koska $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$ kaikilla i -indekseillä, saadaan tulos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$$

Nyt tämän ja edellisen perusteella

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

Näin ollen joukkojonon $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ mittojen summa on joukon $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)_{\mu}$ jäsen, eli:

$$\sum_n \mu(G_n) \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)_{\mu}$$

Kun $i \neq k$ leikkaus $(B_{ij})_{j=1}^{\infty} \cap (B_{kj})_{j=1}^{\infty}$ ei välttämättä ole tyhjä joukko, joten summassa $\sum_i \sum_j \mu(B_{ij})$, voi olla toistuvia termejä, jotka eivät kuitenkaan toistu joukon $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ summassa. Näin ollen pätee seuraava epäyhtälö:

$$\sum_n \mu(G_n) \leq \sum_i \sum_j \mu(B_{ij}) \quad (2)$$

Eli myös

$$\sum_i \sum_j \mu(B_{ij}) \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)_{\mu}$$

Tämä todistaa, että summajoukko $\sum_i E_{i\mu}$ on joukon $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)_{\mu}$ osajoukko

$$\sum_i E_{i\mu} \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)_{\mu}$$

Nyt infimumin ominaisuuksista $\inf(E + B) = \inf(E) + \inf(B)$ sekä kun $E \subset B$ niin $\inf(B) \leq \inf(E)$ saadaan että

$$\inf\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)_{\mu} \leq \inf\left(\sum_i E_{i\mu}\right) = \sum_i \inf E_{i\mu}$$

joka on määritelmän perusteella sama asia kuin:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_i \mu^*(E_i)$$

□

Carathéodoryn kriteerin mukaan kaikki ne joukot $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ joille pätee yhtälö (14), ovat μ^* -mitallisia, eli sellaisia joukkoja joille μ^* on tilamitta (kts. määr. 11).

Määritelmä 14. Carathéodoryn kriteeri:

$$\forall E \subset \Omega : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B)$$

Nyt on selvää että μ^* on esimitan μ laajennus, sekä monotoninen ja subadditiivinen joukkofunktio, mutta ei vielä tiedetä milloin pätee

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

Kun selvitämme ne olosuhteet joissa tämä on totta, tiedämme milloin μ^* on täysadditiivinen, ja näin ollen myös tilamitta. Jos lauseen 9 todistuksessa esiintyvä epäyhtälö (2) olisikin yhtäsuuruus, silloin olisi totta $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)_{\mu} = \sum_i E_{i_{\mu}}$ ja μ^* olisi täysadditiivinen joukkofunktio. Näin on, jos ja vain jos

$$\sum_i \sum_j \mu(B_{ij}) \leq \sum_n \mu(G_n) \quad (3)$$

Jos oletetaan, että pätee

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

lauseen 9 todistuksen mukaisille joukoille, niin silloin tiedetään se, että epäyhtälö (3) seuraa, jos ja vain jos

$$B_{ij} \cap B_{kl} = \emptyset$$

ja $i \neq k$ tai $j \neq l$. Joukon $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ ei tarvitse ole erillinen joukkojono, jotta yhtäsuuruus säilyisi ja epäyhtälö (3) pätsisi. Tavoite on selvittää, milloin joukon $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ peite $(G_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ voidaan hajottaa erillisiksi osapeitteiksi.

Kuljetetaan ajatusta seuraavalla tavalla: joukon $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ hajotelma on

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$$

ja tämän jokaisella osalla E_i on peite

$$(B_{ij})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$$

Näiden peitteiden mittojen summan $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_{ij})$ on oltava vähemmän tai yhtäpaljon kuin joukon $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ peitteen mittojen summa $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n)$. Tämä ei ole mahdollista jos

$$(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$$

ei ole erillinen joukkojono, koska silloin osapeitteillä $(B_{ij})_{j=1}^{\infty}$ olisi päällekkäisyyksiä. Näin olleen joukon $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ on oltava erillinen joukkojono.

Kaikille joukoille on olemassa erillinen hajotelma

$$E = (E \cap B) \cup (E \setminus B)$$

millä tahansa joukolla B . Säädetään, että $E_1 = (E \cap B)$ sekä $E_2 = (E \setminus B)$, jolloin $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, silloin kun $E_i = \emptyset$ kaikilla $i > 2$. Olkoot $(G_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ joukon $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ peite eli $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Tästä seuraa

$$E_1 = E \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \cap B \quad (4)$$

$$E_2 = E \setminus B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus B \quad (5)$$

Nyt jotta epäyhtälö (3) toteutuisi, joukkoilla E_1 ja E_2 on oltava peite, joka on esimitan määrittelyjoukon \mathcal{F} jäsen. Tämä on totta jos joukot $(G_n \cap B)_{n=1}^{\infty}$ ja $(G_n \setminus B)_{n=1}^{\infty}$ ovat esimitan μ määrittelyjoukon \mathcal{F} osajoukkoja. Yleisesti ottaen tämä ei päde kaikille joukoille $B \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$. Näyttää siis siltä että μ^* ei voi olla mitta.

Tästä kuitenkin saimme vihjeen siitä, millaiseen joukkoon esimitan μ indusoima joukkofunktio μ^* voidaan supistaa mitaksi – mitan määrittelyjoukon pitää olla σ -algebra, joten oletetaan, että on olemassa joukko $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$, joka on σ -algebra, sekä

$$B \in \mathcal{S} \text{ ja } (G_n \cap B)_{n=1}^{\infty} \text{ ja } (G_n \setminus B)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$$

Lisäksi haluamme, että $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$, koska tavoite on laajentaa esimitta μ mahdollisimman suureen joukkoon.

Jos $E, B \in \mathcal{S}$ niin $E \setminus B \in \mathcal{S}$, sekä $E \cap B \in \mathcal{S}$. Näin ollen myös kaikille joukoille $E, B \in \mathcal{F}$ on oltava totta, että $E \setminus B \in \mathcal{F}$ ja $E \cap B \in \mathcal{F}$. Yhtälöstä (5) kuitenkin nähdään, että joukkojen E, B erotukselle riittää heikompikin määritelmä:

$$E \setminus B = \bigcup_i E_i$$

kun $E_i \in \mathcal{F}$ kaikilla indekseillä. Esimitan määrittelyjoukon \mathcal{F} on siis oltava puolirengas, jotta esimitta voidaan laajentaa mitaksi joukkoon $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$.

Määritelmä 15 (Puolirengas). Jos kaikille $E, B \in \mathcal{F}$ pätee $E \cap B \in \mathcal{F}$ ja on olemassa erillinen joukkojono $(E_i) \subset \mathcal{F}$, siten että $E \setminus B = \bigcup_i E_i$, niin joukko \mathcal{F} on puolirengas.

Jos kuljetamme ajatusta toiseen suuntaan alkaen joukkofunktion μ^* täysadditiivisuudesta

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B) \quad \forall E, B \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \quad (6)$$

niin looginen johtopäätös on se, että $\inf(E_\mu) = \inf(\sum_i E_{i_\mu})$. Toisin sanotusti $E_\mu = \sum_i E_{i_\mu}$. Jos $E_1 = E \cap B$ ja $E_2 = E \setminus B$, sekä $E_n = \emptyset$ aina kun $n > 2$, niin tästä seuraa

$$E_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \cap B \text{ ja } E_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus B$$

sekä

$$(G_n \cap B)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F} \quad \text{ja} \quad (G_n \setminus B)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$$

Joukon B on jaettava joukko G_n , siten että leikkaus ja erotus ovat esimitan määrittelyjoukon \mathcal{F} jäseniä. Koska tämä ei ole totta yleisesti kaikille joukoille $B \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$, keskitytään yhteen osajoukkoon

$$B \in \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$$

jolle tämä on totta. Jälleen päätellään, että esimitan määrittelyjoukon \mathcal{F} on oltava puolirengas.

Jos oletetaan, että esimitan määrittelyjoukko on puolirengas, periaattessa voisimme käyttää joukkofunktion μ^* oletettua täysadditiivisuutta joukon \mathcal{S} määrittämiseksi. Juuri tämä menetelmä on osoittautunut erinomaiseksi keinoksi laajentaa esimitta mitaksi, ja tunnetaan Carathéodoryn kriteerinä. Määritelmä 17 määrittelee tämän joukon.

Palautetaan mieleen vielä joukkofunktio μ^* , joka oli esimitan $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ indusoima funktio joukkoon $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. Esimittaa μ ei voitu ongelmitta laajentaa mitaksi potenssijoukkoon $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. Huomattiin, että μ^* toteuttaa ainakin lauseen 9 perusteella subadditiivisuuden, mutta ei täysadditiivisuutta. Intuitiivisesti μ^* on funktio, joka mittaa joukkoja ulkopuolelta. Nimetään funktio μ^* ulkomitaksi.

Määritelmä 16 (Ulkomitalla). Olkoot $\mu^* : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ jokin tuntematon joukkofunktio. Joukkofunktio μ^* on ulkomitta silloin kun

1. \mathcal{S} on potenssijoukko;
2. μ^* on monotoninen, subadditiivinen, positiivinen, ja laajennetusti reaaliarvoinen joukkofunktio;
3. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Ulkomitalla voidaan approksimoida minkä tahansa potenssijoukon $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ jäsenen mittaa ulkopuolelta. Potenssijoukko on suurin joukko johon esimitta μ voidaan laajentaa. Lauseiden 7, 8, ja 9 perusteella $\mu^*(E) := \inf E_\mu$ on ulkomitta.

Määritelmä 17 (μ^* -mitallinen joukko). Olkoon $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ esimitta ja \mathcal{F} puolirengas. Määritellään kaikille joukoille $A \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ esimitan μ indusoima ulkomitta $\mu^*(A) := \inf A_\mu$. Kaikkien μ^* -mitallisten joukkojen joukkoperhe on

$$\mathcal{C}_{\mu^*} = \{B \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) : \forall E \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) (\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B))\}$$

Tätä joukko kutsutaan Carathéodoryn joukoksi kreikkalaisen matemaatikon Constantin Carathéodoryn mukaan.

Suurin joukko, johon esimitta μ voidaan laajentaa, siten että laajennus on tilamitta, on määritelmän 17 joukko. Joukkoa kutsutaan μ^* -mitalliseksi joukoksi. Tutkitaan tarkemmin tätä joukkoa. Todistetaan ensin, että \mathcal{C}_{μ^*} on algebra. Tämän jälkeen on helppoa todistaa, että \mathcal{C}_{μ^*} on myös σ -algebra. Sitten osoitetaan, että esimitan määrittelyjoukon generoima σ -algebra on \mathcal{C}_{μ^*} joukon osajoukko. Tutkitaan tämän jälkeen ulkomitan μ^* rajoittumaa $\bar{\mu}$ joukkoon \mathcal{C}_{μ^*} . Nähdään, että rajoittuma $\bar{\mu}$ on tosiaan tilamitta.

Lause 10. \mathcal{C}_{μ^*} on algebra

Todistus. Olkoot $A, B \in \mathcal{C}_{\mu^*}$. Mille tahansa joukolle E pätee

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad (7)$$

Joukon B avulla summan termeille saadaan yhtälöt

$$\mu^*(E \cap A) = \mu^*((E \cap A) \cap B) + \mu^*((E \cap A) \setminus B) \quad (8)$$

$$\mu^*(E \setminus A) = \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*((E \setminus A) \setminus B) \quad (9)$$

Sijoittamalla yhtälöt (8) ja (9) yhtälöön (7) saadaan seuraava yhtälö

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*((E \cap A) \cap B) + \mu^*((E \cap A) \setminus B) \\ &\quad + \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*((E \setminus A) \setminus B) \end{aligned} \quad (10)$$

Korvataan yhtälöstä (10) muuttuja E muuttujalla $E \cap (A \cup B)$, jolloin summan kolme ensimmäistä termiä pysyvät muuttumattomina ja viimeinen termi on nolla. Saadaan seuraava yhtälö:

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \mu^*((E \cap A) \cap B) + \mu^*((E \cap A) \setminus B) + \mu^*((E \setminus A) \cap B) \quad (11)$$

Koska $(E \setminus A) \setminus B = E \setminus (A \cup B)$, niin sijoittamalla yhtälö (11) yhtälöön (10) saadaan:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \setminus (A \cup B)) \quad (12)$$

Yhtälön (12) perusteella unioni $A \cup B$ kuuluu joukkoon \mathcal{C}_{μ^*} .

Vastaavasti, jos sijoitetaan yhtälöön (10) E :n paikalle $E \setminus (A \setminus B)$, saadaan:

$$\mu^*(E \setminus (A \setminus B)) = \mu^*((E \cap A) \cap B) + \mu^*((E \setminus A) \cap B) + \mu^*((E \setminus A) \setminus B) \quad (13)$$

Koska $(E \cap A) \setminus B = E \cap (A \setminus B)$, niin sijoittamalla (13) yhtälöön (10) saadaan:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \setminus B)) + \mu^*(E \setminus (A \setminus B)) \quad (14)$$

Yhtälön (14) perusteella erotus $A \setminus B$ kuuluu myös joukkoon \mathcal{C}_{μ^*} . Tyhjäjoukko $A = \emptyset$ ja tila-avaruus $A = \Omega$ toteuttavat yhtälön (7), joten tämän sekä yhtälöiden 12 ja 14 perusteella joukko \mathcal{C}_{μ^*} on algebra. \square

Lause 11. \mathcal{C}_{μ^*} on σ -algebra.

Todistus. Lauseen 10 perusteella \mathcal{C}_{μ^*} on suljettu erotuksen suhteen. Riittää todistaa, että \mathcal{C}_{μ^*} on suljettu myös numeroituvan unionin suhteen.

Jos $A, B \in \mathcal{C}_{\mu^*}$, myös $A \cup B \in \mathcal{C}_{\mu^*}$. Olkoot

$$A = A_1 \quad \text{ja} \quad B = A_2 \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^2 A_i = B_2$$

Tällöin $B_2 \in \mathcal{C}_{\mu^*}$. Tehdään induktio-oletus

$$\bigcup_{i=1}^n A_n = B_n \in \mathcal{C}_{\mu^*}$$

Nyt $B_n \cup A_{n+1} \in \mathcal{C}_{\mu^*}$, joten myös $B_{n+1} \in \mathcal{C}_{\mu^*}$. Näin ollen $B_n \in \mathcal{C}_{\mu^*}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_{\mu^*}$, niin myös $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}_{\mu^*}$, mikä todistaa että \mathcal{C}_{μ^*} on σ -algebra. \square

Lause 12. Jos esimitan $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ määrittelyjoukko \mathcal{F} on puolirengas, niin silloin määrittelyjoukon generoima σ -algebra $S(\mathcal{F})$ on joukon \mathcal{C}_{μ^*} osajoukko.

Todistus. Koska \mathcal{C}_{μ^*} on σ -algebra, riittää osoittaa, että $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{\mu^*}$, koska $S(\mathcal{F})$ on pienin σ -algebra, joka sisältää joukkoperheen \mathcal{F} . Lauseen 1 perusteella $S(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{\mu^*}$.

Olkoot \mathcal{F} puolirengas ja $B \in \mathcal{F}$. Lisäksi $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$. Kaikilla joukoilla on olemassa erillinen hajotelma $E = (E \cap B) \cup (E \setminus B)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : (E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \wedge E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) : (B_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \wedge (E \cap B) \cup (E \setminus B) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\} \\ &= \mu^*((E \cap B) \cup (E \setminus B)) \end{aligned}$$

Koska

$$E \cap B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap B \quad \text{ja} \quad E \setminus B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \setminus B = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$$

jossa $Y_i \in \mathcal{F}$, niin

$$(E \cap B) \cup (E \setminus B) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap B \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \setminus B \right)$$

joten $(B_i)_{i=1}^{\infty} = (E_i \cap B)_{i=1}^{\infty} \cup (E_i \setminus B)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu((E_i \cap B)_{i=1}^{\infty} \cup (E_i \setminus B)_{i=1}^{\infty}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap B) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus B) \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned} &\mu^*((E \cap B) \cup (E \setminus B)) \\ &= \\ &\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) : (B_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \wedge (E \cap B) \cup (E \setminus B) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\} \\ &= \\ &\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap B) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus B) : (E_i \cap B)_{i=1}^{\infty} \cup (E_i \setminus B)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \wedge \dots \right\} \\ &= \\ &\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap B) : (E_i \cap B)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \wedge \dots \right\} + \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus B) : (E_i \setminus B)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \wedge \dots \right\} \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B) \end{aligned}$$

eli $E \in \mathcal{C}_{\mu^*}$. Tämä todistaa, että \mathcal{F} on μ^* -mitallisten osajoukko. Koska μ^* -mitallisten joukkoperhe on σ -algebra lauseen (11) perusteella, sekä $S(\mathcal{F})$ on pienin σ -algebra joka sisältää joukkoperheen \mathcal{F} , niin

$$S(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{\mu^*}$$

□

Nyt on nähty, että esimitan $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ indusoiman ulkomitan $\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ osajoukko \mathcal{C}_{μ^*} on σ -algebra, joka sisältää joukkoperheen \mathcal{F} , silloin kun tämä on puolirengas. Lisäksi nähtiin, että ulkomitan rajoittuma joukkoon \mathcal{C}_{μ^*} toteuttaa täysadditiivisuuden. Jos esimita μ on positiivinen ja reaaliarvoinen joukkofunktio, ulkomitan rajoittuma joukkoon \mathcal{C}_{μ^*} on tilamitta.

Määritelmä 18. Olkoot $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tilamitta ja $\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tämän indusoima ulkomitta. Ulkomitan μ^* rajoittuma $\bar{\mu}$ joukkoon \mathcal{C}_{μ^*} on tilamitan laajennus, eli kaikille $E \in \mathcal{F}$ pätee

$$\bar{\mu}(E) = \mu^*(E)$$

Kaikki tähän saakka johdettu tiivistyy seuraavaan lauseeseen, jota kutsutaan Carathéodoryn lauseeksi. Lause takaa sen, että jos esimita $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ on positiivinen, reaaliarvoinen, ja määrittelyjoukko \mathcal{F} on puolirengas, niin silloin on olemassa yksikäsitteinen mitta $\bar{\mu} : S(\mathcal{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, siten että tämä on esimitan laajennus σ -algebraan $S(\mathcal{F})$.

Lause 13 (Carathéodoryn lause). *Jos $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on positiivinen ja reaaliarvoinen joukkofunktio ja \mathcal{F} on puolirengas, on olemassa yksikäsitteinen tilamitta*

$$\bar{\mu} : S(\mathcal{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

siten, että aina kun $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ on erillinen joukkojono ja $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E \in S(\mathcal{F})$, niin silloin

$$\bar{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Todistus. Kun esimita $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ on positiivinen sekä reaaliarvoinen joukkofunktio, ja \mathcal{F} on puolirengas, ja $\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on esimitan indusoima ulkomitta, ja kaikille $E \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ pätee $\mu^*(E) = \inf E_{\mu}$, niin silloin ulkomitan määritelmän perusteella kaikille $E \in \mathcal{C}_{\mu^*}$ pätee $\bar{\mu}(E) = \mu^*(E)$. Koska $S(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{\mu^*}$, niin myös $\bar{\mu}(E) = \mu^*(E)$ aina kun $E \in S(\mathcal{F})$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\bar{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ kun $E \in S(\mathcal{F})$ ja $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Määritellään ensin unionijoukko $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i : (E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \right\}$$

Todistetaan, että $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ on σ -algebra. Jos $E_1, E_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, niin silloin

$$E_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{1j}$$

jossa $(E_{1j})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Lisäksi

$$E_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{2j}$$

jossa $(E_{2j})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Tästä seuraa:

$$E_1 \cup E_2 = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{1j} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{2j} \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} E'_j$$

jossa $(E'_j)_{j=1}^{\infty} = (E_{1j})_{j=1}^{\infty} \cup (E_{2j})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Olkoot $E_1 \cup E_2 = B_2$. Tehdään induktio-oletus $B_n \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Tällöin

$$B_n \cup E_{n+1} = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{nj} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{(n+1)j} \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} B'_j$$

jossa $(B'_j)_{j=1}^{\infty} = (B_{nj})_{j=1}^{\infty} \cup (E_{(n+1)j})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, joten $B_n \cup E_{n+1} = B_{n+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Tämä todistaa, että jos $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(\mathcal{F})$ niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Seuraavaksi todistetaan, että erotus $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Olkoot $E_1 = E$ ja $E_2 = B$.

$$\begin{aligned} E \setminus B &= \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \\ &= \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus B_j) \\ &= \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_{ijk} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} Y_{ijk} \end{aligned}$$

jossa $\bigcap_{j=1}^{\infty} Y_{ijk} \in \mathcal{F}$ kaikilla i ja k , koska \mathcal{F} on puolirengas ja suljettu leikkauksen suhteen. Näin ollen on olemassa $(X_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, jolle pätee $E \setminus B = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Koska unionijoukko $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ on σ -algebra ja $S(\mathcal{F})$ on pienin joukon \mathcal{F} sisältävä σ -algebra, niin $S(\mathcal{F}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Näin ollen kaikilla $E \in S(\mathcal{F})$ on olemassa hajotelma $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ja $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Koska tiedetään, että $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ kaikille joukoille $E \in \mathcal{F}$, niin kaikille erillisille joukoille $(E_i) \subset \mathcal{F}$ pätee

$$\bar{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

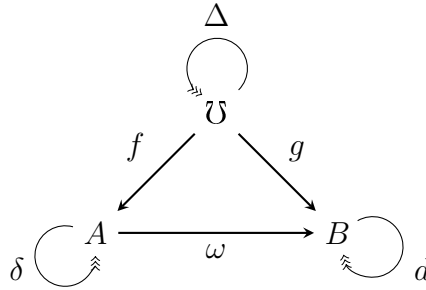
□

2.2 Muutos

2.2.1 Maailma ja malli

Maailma on kaikki se mitä on olemassa. Havainnointikykyämme on rajoittunut maailmaan. Jos oletetaan, että haivainnoisimme jotain maailman ulkopuolelta, on se silloin olemassa, mutta kaikki olemassa oleva on maailmassa, joten se mitä havaittiin maailman ulkopuolelta olikin maailmassa. Muutoksen syyt ovat maailman ulkopuolella [24].

Kun maailma muuttuu, jokin maailmassa on erilaista. Tämä erilaisuus siirtyy maailmasta malliin, jonka pitää muuttua maailman kanssa, jotta se esittäisi maailmaa ja todella olisi tämän malli. Erilaiset mallit muuttuvat eri tavalla. Maailmasta havaittu muutos riippuu siitä mallista, josta käsin maailmaa tarkastellaan. Muutos esiintyy mallin tulkinnassa $\omega \in \Omega$, joka seuraa maailman muutosta. (kuva 3).



Kuva 3: Endomorfismi Δ on maailman muutos. Endomorfismit δ ja d ovat mallin lähdön ja maalin muutokset. Mallin tulkinta ω seuraa maailmaan muutosta lähdön tai maalin muutoksen suhteen.

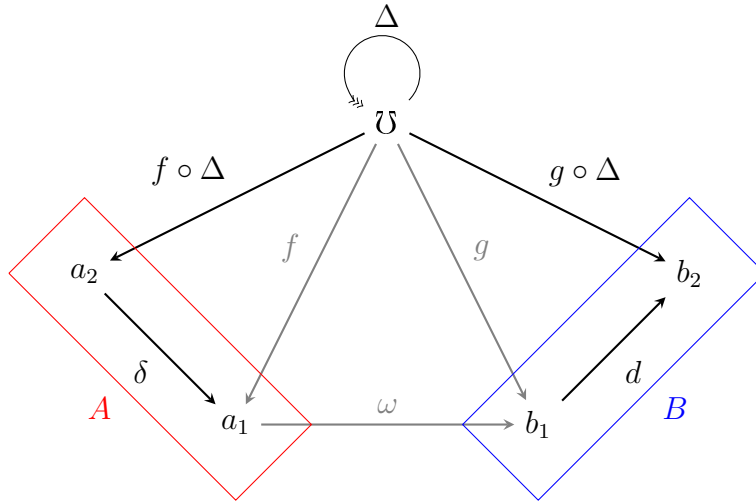
Määritelmä 19. *Maailman muutos* on endomorfismi $\Delta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, joka ei ole identiteetti. Mallin $(A, B; \omega)$ endomorfismi $\delta : A \rightarrow A$ on mallin *lähdön muutos* ja $d : B \rightarrow B$ *maalin muutos*. Malli seuraa maailmaa muutoksessa, kun f ja g ovat niin kuin kuvassa 3, ja $\omega \circ f = g$, sekä

$$(d \circ \omega \circ \delta) \circ f \circ \Delta = g \circ \Delta$$

Sanotaan, että malli on *temporaalisesti sitoutunut*, silloin kun malli seuraa maailmaa muutoksessa.

Esimerkki 6. Tarkastellaan maailmaa, jossa on kaksi urnaa a_1 ja a_2 . Urnat ovat muuten samanlaisia, mutta niihin on kiinnitetty nimilaput, joilla ne erotetaan toisistaan. Maailmassa on myös kaksi mustaa kuulaa b_1 ja b_2 , jotka ovat samanlaisia mutta eroteltu toisistaan nimitarralla. Kummassakin urnassa voi olla kuulia. Esitetään urnien luokitteluobjektia symbolilla A ja kuulien symbolilla B . Tulkinta ω näiden välillä on morfismi, joka yhdistää urnan niihin kuuliin, joiden katsotaan olevan urnassa sisällä. Oletetaan, että molemmat kuulat voivat siirtyä urnien välillä.

Kommutointiehto $\omega \circ f = g$ pätee sillä välin, kun maailma pysyy muuttumattomana. Jos maailma muuttuu, kommutointiehto ei välttämättä enää päde. Muutos



Kuva 4: Luokitteluobjektit $A := \{a_1, a_2\}$ ja $B := \{b_1, b_2\}$ ovat joukkoa. Mallin $(A, B; \omega)$ tulkinta on ontologisesti sitoutunut maailman alkutilaan (harmaa kaavio). Maailman muutos Δ vaikuttaa kahteen sidokseen f ja g . Uudet sidokset ovat $f \circ \Delta$ ja $g \circ \Delta$. Malli sopeutuu muutokseen endomorfismien δ ja d avulla, siten että $d \circ \omega \circ \delta$ on uusi ontologisesti sitoutunut tulkinta. Malli on ontologisesti sitoutunut maailmaan sekä muutosta ennen, että sen jälkeen. Endomorfismit δ ja d esittävät niitä mekanismeja, joilla malli sopeutuu maailman muutokseen Δ .

voi vaikuttaa morfismien f ja g lähtöön ja Δ ei ole identiteetti. Malli muuttuu vain silloin jos,

$$f \neq f \circ \Delta \quad \text{tai} \quad g \neq g \circ \Delta$$

Tilanne on sama kuin kuvassa 4. Määritelmän 19 perusteella, maailma muuttuu siten, että muutoksen jälkeen maailma on erilainen kuin ennen. Maailman muutos esiintyy mallissa tulkinnan muutoksena $\omega \mapsto d \circ \omega \circ \delta$.

Oletetaan, että maailman muutos Δ on sellainen, että urnat a_1 ja a_2 vaihtuvat keskenään. Oletetaan myös, että kuulatkin b_1 ja b_2 vaihtuvat keskenään. Tällainen muutos voisi seurata vaikka siitä, että urnan a_1 nimilappu siirtyy urnaan a_2 , ja urnan a_2 nimilappu siirtyy urnaan a_1 . Samanlainen muutos voisi tapahtua myös mustien kuulien nimitarroille. Malli ei pysty selittämään muutoksen syytä, mutta se seuraa maailman muutosta temporaalisen sitoutumisen periaatteen nojalla.

Urnien nimilappujen muutos voidaan esittää luokitteluobjektin A endomorfismina δ , joka *palauttaa* maailman muutoksen. Toisin sanotusti

$$\delta \circ (f \circ \Delta) = f$$

Nimilappujen muutoksen jälkeen malli ei ole tulkinnan ω suhteen enää ontologisesti sitoutunu maailmaan, koska ω tulkitsee urnien kuulaprofiilit keskenään ristiin eli väärin. Jos urnassa a_1 oli ennen nimilappumuutosta kuula b_1 ja urnassa a_2 kuula b_2 , muutoksen jälkeen urnassa a_1 on kuula b_2 ja urnassa a_2 on kuula b_1 . Tulkinta ω yhdistää kuulat vanhan profiilin mukaan eikä uuden. Jos tulkinta *korjataan oikealta* puolelta endomorfismilla δ , uusi tulkinta $\omega \circ \delta$ tulkitsee kuulaprofiilin jälleen oikein.

Vastaavasti kuulien nimitarrojen muutos voidaan esittää luokitteluobjektin B endomorfismina d , joka *toteuttaa* maailman muutoksen.

$$d \circ g = g \circ \Delta$$

Nimitarrojen muutoksen jälkeen ω tulkitsee uurnien kuulaprofiilin jälleen väärin. Tulkinta *korjataan vasemmalta* puolelta endomorfismilla d . Uusi tulkinta $d \circ \omega$ tulkitsee taas kuulaprofiilin oikein.

Maailmassa voi tapahtua asioita, jotka ovat mallin saavuttamattomissa. Muutos Δ vaikuttaa malliin vain silloin, kun se muuttaa mallin tilaa eli tulkintaa. Mikään malli ei pysty mallintamaan maailman kaikkia muuttuneita asiointiloja.

Määritelmän perusteella maailman muutos Δ ei ole identiteetti, mutta mallin muutokset δ ja d voivat olla myös identiteettimorfismeja. Malli muuttu vain silloin, jos maailman muutos koskee mallinnettavaa osaa maailmasta. Sidokset f ja g voivat olla vakioita muutoksen suhteen. Jos g on vakio, maalin muutos d on identiteetti, koska

$$d \circ g = g \circ \Delta = g$$

Samalla tavalla jos f on vakio, lähdön muutos on identiteetti.

$$\delta \circ f \circ \Delta = \delta \circ f = f$$

Malli ei välttämättä muutu silloin kun maailma muuttuu.

Palautetaan mieleen mallin tila-avaruus $\Omega := \text{hom}(A, B)$, joka on mallin mahdollisten tulkintojen joukko. Tila-avaruus sisältää kaiken mahdollisen tiedon maailmasta mallin suhteen. Tila-avaruuden jäsenet ovat mallin tulkintoja, mutta tässä kontekstissa niitä kutsutaan mallin tiloiksi. Tila $\omega \in \Omega$ on maailmasta tehty havainto mallin suhteen, silloin kun malli on ontologisesti sitoutunut maailmaan. (kts. määr. 5).

Maailman muutos Δ on maailman \mathcal{U} endomorfismi, joka ei kuitenkaan ole identiteetti. Malli on temporaalisesti sitoutunut maailmaan, silloin kun tämä seuraa maailmaa muutoksessa. Toisin sanotusti mallin kaksi tulkintaa ω_1 ja $\omega_2 := d \circ \omega_1 \circ \delta$ ovat vuorollaan ontologisesti sitoutuneita, eli toteuttavat kommutointiehdon:

$$\text{ensin } \omega_1 \circ f = f \quad \text{ja sitten } \omega_2 \circ f \circ \Delta = g \circ \Delta$$

Ensin ω_1 on maailman tila mallin suhteen ja sitten ω_2 .

Mallin muutos on tila-avaruuden “*ensin ... ja sitten ...*” relaatio. Tämä relaatio ja tila-avaruuden karteesisen tulon piste ovat ekvivalentteja esityksiä mallin muutokselle.

$$\text{ensin } \omega_1 \text{ ja sitten } \omega_2 \equiv (\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$$

Temporaalinen sitoutuminen riippuu nyt tästä relaatiosta. Relaatio on tosi vain silloin kun malli on temporaalisesti sitoutunut maailmaan.

2.2.2 Tapahtuma-avaruus ja prosessi

Määritelmä 20. Olkoon \mathcal{U} maailma, ja $(A, B; \omega)$ maailman malli, ja Δ maailman muutos. Maailman tila-avaruus on Ω . *Tapahtuma-avaruus* on $\Omega^{\{1,2\}}$. *Tapahtuma* on

$\omega \in \Omega^{\{1,2\}}$. Sanotaan, että tapahtuma $\omega : \{1, 2\} \mapsto \Omega$ on temporaalisesti sitoutunut maailmaan, jos ensin $\omega_1 := \omega(1)$ ja sitten $\omega_2 := \omega(2)$ ovat ontologisesti sitoutuneita tulkintoja muutoksen Δ suhteen.

Maailman mahdollisten tapahtumien joukko $\Omega^{\{1,2\}}$ on huomattavasti suurempi kuin mahdollisten tilojen joukko Ω . Tapahtumille, tiloille, ja tulkinnoille käytetään samaa symbolia ω . Sen pitäisi olla ilmiselvää asiayhteydestä, että mitä objektia milloinkin tarkoitetaan. Jos sekaannuksen vaara on olemassa, voidaan käyttää muita symboleja sekaannuksen välttämiseksi.

Tilamuuttuja X on kuvaus tila-avaruudesta reaalinlukuihin. Tapahtuma $\omega \in \Omega^{\{1,2\}}$ ei kuitenkaan ole sama asia kuin tila, mutta tämän kuva $\omega(i) \in \Omega$ on mallin tila, jossa $i \in \{1, 2\}$. Kuvaus tapahtuma-avaruudesta reaalinlukuihin ei ole tilamuuttuja vaan prosessi X . Tämä merkitään samalla symbolilla, mutta sen pitäisi olla asiayhteydestä selvää, mitä symbolilla tarkoitetaan.

Määritelmä 21. Kuvaus $X : \Omega^{\{1,2\}} \mapsto \mathbb{R}^n$ on *prosessi*. Prosessin *realisaatio* on $X(\omega) : \{1, 2\} \mapsto \mathbb{R}^n$.

Prosessi on numeerinen keino esittää maailmasta havaittu muutos tai tapahtuma. Prosessissa on kaksi vaihetta. Ensimmäinen vaihe $X_1(\omega)$ on sama kuin tilamuuttuja maailman ensimmäisen tilan suhteen.

$$X_1(\omega) := X(\omega_1)$$

Toinen vaihe on sama kuin tilamuuttuja maailman toisen tilan suhteen.

$$X_2(\omega) := X(\omega_2)$$

Prosessi on temporaalisesti sitoutunut silloin kun pätee

$$\text{Ensin } X_1(\omega) \quad \text{ja sitten } X_2(\omega)$$

2.2.3 Integroituva tilamuuttuja

Käsitellään seuraavaksi tekstin kannalta olennaiset todennäköisyysteorian määritelmät ja lauseet. Tekstin materiaali on peräisin kirjoista: Protter ja Jacod, Probability Essential [8]; Williams, Probability with martingales [23]; Sheldon, Introduction to probability models [20]; Durrett, Essentials of stochastic processes [5]; Øksendal, Stochastic differential equations an introduction with applications [15]; Revuz, Markov chains [17].

Moderni todennäköisyysteoria perustuu mittateorialle. Seuraavat lauseet ja määritelmät voitaisiin esittää suoraan myös mittateoreettisessa kontekstissa. Todennäköisyysteorian mahti piilee siinä, että se tulkitsee abstraktit mittateorian objektit siten, että ne voidaan yhdistää maailmasta tehtyihin havaintoihin.

Määritelmä 22. Todennäköisyysavaruus on mitta-avaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jossa \mathbb{P} on *todennäköisyysmitta* eli äärellinen tilamitta $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Määritelmä 23. Olkoon $X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{1}_{E_i}$ yksinkertainen tilamuuttuja. Jos tilamitta on äärellinen $\mathbb{P}(E_i) < \infty$ aina kun $\varepsilon_i \neq 0$, tilamuuttuja on silloin *integroituva*. Integraalia kutsutaan *odotusarvoksi*:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{P}(E_i)$$

Jos yksinkertainen tilamuuttuja on integroituva, sen odotusarvo on äärellinen. Väite seuraa suoraan määritelmästä. Määritelmän 23 perusteella $\mathbb{P}(E_i) < \infty$ kaikille indekseille, joilla $\varepsilon_i \neq 0$. Koska yksinkertaisessa tilamuuttujassa on äärellinen määrä termejä, odotusarvon on näin ollen myös äärellinen.

Lause 14. Jos X ja Y ovat integroituvia yksinkertaisia tilamuuttujia, siten että

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i} \quad \text{ja} \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{E_i}$$

sekä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, silloin odotusarvo on lineaarinen

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$

Todistus.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i) \mathbb{P}(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha a_i \mathbb{P}(A_i) + \sum_{i=1}^n \beta b_i \mathbb{P}(A_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{P}(A_i) + \beta \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{P}(A_i) \\ &= \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

□

Lause 15. Jos $X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{1}_{E_i}$ on yksinkertainen ja melkein varmasti positiivinen tilamuuttuja, silloin odotusarvo on positiivinen

$$\mathbb{E}[X] \geq 0$$

Todistus. Jos $X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{1}_{E_i} \geq 0$, niin $\varepsilon_i \geq 0$ kaikilla indekseillä $i \in \mathbb{N}$, joten $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{P}(E_i) \geq 0$ ja $\mathbb{E}[X] \geq 0$. □

Lause 16. Olkoon X ja Y yksinkertaisia tilamuuttujia, siten että

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i} \quad \text{ja} \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{E_i}$$

sekä $X \geq Y$. Tällöin pätee:

1. $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$
2. $\mathbb{E}[|X + Y|] \leq \mathbb{E}[|X|] + \mathbb{E}[|Y|]$

$$3. |\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$$

Todistus. Kun sovelletaan lauseeseen 15 tapausta $X - Y \geq 0$, saadaan:

$$\mathbb{E}[X - Y] \geq 0$$

Lauseen 14 perusteella ensimmäinen väite on tosi:

$$\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$$

Kolmio-epäyhtälöstä $|X + Y| \leq |X| + |Y|$ ja odotusarvon monotonisuudesta seuraa toinen väite:

$$\mathbb{E}[|X + Y|] \leq \mathbb{E}[|X|] + \mathbb{E}[|Y|]$$

Koska $|X| \geq X$, odotusarvon monotonisuudesta seuraa:

$$\mathbb{E}[|X|] \geq \mathbb{E}[X]$$

Toisaalta $|X| \geq -X$, joten

$$\mathbb{E}[|X|] \geq -\mathbb{E}[X]$$

Tästä päätellään, että

$$-\mathbb{E}[|X|] \leq \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[|X|]$$

joka on sama kuin väite. □

Määritelmä 24 (Odotusarvo). Sanotaan, että tilamuuttuja X on integroitava, jos on olemassa kasvava jono integroituvia yksinkertaisia tilamuuttujia $(X_i)_{i=1}^\infty$, joka suppenee kohti raja-arvoa X . Tilamuuttujan odotusarvo on yksinkertaisten tilamuuttujien odotusarvojen raja-arvo:

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{P}(E_i)$$

Yksinkertaisten tilamuuttujien odotusarvon määritelmä perustuu siihen, että odotusarvo on äärellinen. Näin ollen, jos tilamuuttuja X on integroitava mitallinen kuvaus, sen odotusarvo on myös äärellinen.

Lause 17. *Jos X on integroitava tilamuuttuja ja $\alpha \in \mathbb{R}$, niin αX on myös integroitava tilamuuttuja.*

Todistus. Oletetaan, että X on integroitava tilamuuttuja, joten määritelmän perusteella on olemassa yksinkertaisista tilamuuttujista koostuva monotonisesti kasvava jono $(X_n)_{n=1}^\infty$, joka suppenee kohti tilamuuttujaa X .

Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$. Tutkitaan jonoa $(\alpha X_n)_{i=n}^\infty$. Yksinkertaisten tilamuuttujien integraaleja koskevasta lauseesta 14 tiedetään, että odotusarvo on lineaarinen.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\alpha X] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{P}(E_i) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{P}(E_i) \\ &= \alpha \mathbb{E}[X] < \infty \end{aligned}$$

Näin ollen αX on integroitava tilamuuttuja. □

Lause 18. Jos X ja Y ovat integroituvia tilamuuttujia, niin $X + Y$ on integroituva tilamuuttuja.

Todistus. Olkoot $(X_n)_{n=1}^\infty$ ja $(Y_m)_{m=1}^\infty$ sellaisia yksinkertaisista tilamuuttujista koostuvia jonoja, jotka suppenevat kohti raja-arvoja X ja Y . Tutkitaan jonoa $(X_n + Y_n)_{n=1}^\infty$

$$\mathbb{E}[X + Y] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \mathbb{P}(E_i) \quad (15)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{P}(E_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{P}(E_i) \quad (16)$$

$$= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] < \infty \quad (17)$$

Näin ollen $X + Y$ on integroituva tilamuuttuja. □

Lause 19. Tilamuuttuja X on integroituva, jos ja vain jos X^+ ja X^- ovat integroituvia tilamuuttujia.

Todistus. Oletetaan, että tilamuuttuja X on integroituva. Hajotelma positiiviseen ja negatiiviseen osaan on $X = X^+ - X^-$. Koska positiivinen ja negatiivinen osa voidaan esittää muodossa

$$X^+ = \frac{|X| + X}{2}$$

$$X^- = \frac{|X| - X}{2}$$

ovat myös X^+ ja X^- integroituvia tilamuuttujia, mikä seuraa odotusarvon ominaisuuksista (kts. lause 16).

Oletetaan että X^+ ja X^- ovat integroituvia. Odotusarvo on lineaarinen operaattori. Tilamuuttujan hajotelma on

$$X := X^+ - X^-$$

joten myös X on integroituva. □

Lause 20. Integroituvan tilamuuttujan X integraalifunktio

$$\nu(E) := \mathbb{E}[X | E]$$

on täysadditiivinen joukkofunktio

Todistus. Oletetaan että X on integroituva tilamuuttuja, jolloin on olemassa yksinkertaisista tilamuuttujista koostuva jono $(X_n)_{n=1}^\infty$, joka suppenee kohti rajafunktiota X .

Olkoot $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ erillinen joukkojono, siten että $\bigcup_i E_i \in \mathcal{F}$. Nyt integroituvan tilamuuttujan määritelmästä ja yksinkertaisten tilamuuttujien integraalifunktion täysadditiivisuudesta seuraa

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_i E_i\right) &= \mathbb{E}\left[X \mid \bigcup_i E_i\right] \\
&= \lim_n \mathbb{E}\left[X_n \mid \bigcup_i E_i\right] \\
&= \lim_n \nu_n\left(\bigcup_i E_i\right) \\
&= \lim_n \sum_i \nu_n(E_i) \\
&= \sum_i \lim_n \nu_n(E_i) \\
&= \sum_i \nu(E_i)
\end{aligned}$$

□

2.2.4 Siirtymäoperaattori

Palautetaan mieleen Carathéodoryn lause (kts. lause 13). Puolirenkaaseen määritellyllä täysadditiivisella joukkofunktiolla on yksiselitteinen laajennus puolirenkaan generoimaan σ -algebraan. Integroituvan tilamuuttujan integraalifunktio on täysadditiivinen joukkofunktio. Carathéodoryn lauseen perusteella tämä voidaan yksiselitteisesti laajentaa mitaksi σ -algebraan \mathcal{F} .

Määritelmä 25. Olkoon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ tilamuuttuja. Tilamuuttujan indusoima σ -algebra $\sigma(X)$ on pienin σ -algebra jonka suhteen X on mitallinen kuvaus. Olkoon $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ toinen tilamuuttuja. Tilamuuttujan Y ehdollinen odotusarvo tilamuuttujan X suhteen on sellainen integraalifunktio

$$\nu_Y := \mathbb{E}[Y \mid \sigma(X)]$$

jolle pätee $\nu_Y(E) = \nu(E)$ kaikilla $E \in \sigma(X)$.

Määritelmä 26. Olkoon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ tilamuuttuja ja $\sigma(X)$ tämän indusoima σ -algebra. Ehdollinen todennäköisyysmitta $\mathbb{P}(E \mid \sigma(X))$ tilamuuttujan X suhteen on indikaattorin $\mathbb{1}_E$ ehdollinen odotusarvo

$$\mathbb{P}(E \mid \sigma(X)) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_E \mid \sigma(X)]$$

Ehdollinen odotusarvo on kaksipaikkainen operaattori. Borel-joukko sisältää kaikki numeroituvat joukot. Pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ alkukuva on määritelmän perusteella mitallinen joukko. Ehdollinen odotusarvo $\mathbb{P}(E \mid X = x)$ on parametrin x suhteen mitallinen kuvaus, mutta joukon E suhteen mitta.

Määritelmä 27. Olkoon \mathcal{U} maailma ja (Ω, \mathcal{F}) maailman mallin tila-avaruus. *Siirtymäoperaattori* on kaksipaikkainen kuvaus

$$P : \Omega \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

joka on kaikkien $\omega \in \Omega$ suhteen mitta $P(\omega, \cdot)$, mutta joukkojen $E \in \mathcal{F}$ suhteen \mathcal{F} -mitallinen kuvaus $P(\cdot, E)$.

Palautetaan mieleen tilamitta μ (kts. määr. 11). Oletetaan, että tilamitta on todennäköisyyssmitta. Tässä mielessä $\mu(E)$ on todennäköisyys sille, että maailman mallin tila on joukossa $E \in \mathcal{F}$. Tilamitta tavallaan sisältää kaiken tiedon maailman tilasta mallin suhteen. Siirtymäoperaattori operoi tilamittaan oikealta puolelta.

$$\mu P(E) := \mathbb{E}_\mu [P(\cdot, E)]$$

Ehdollinen todennäköisyys määrittelee siirtymäoperaattorin reaalitylukujen joukkoon. Olkoon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tilamuuttujia. Oletetaan, että siirtymäoperaattori on pisteen $\omega \in \Omega$ suhteen todennäköisyyssmitta. Satunnaismuuttujan X jakautuma on $\mathbb{P}(X^{-1}(B))$, jossa $B \in \mathcal{B}$ on Borel-joukko. Ehdollisen todennäköisyyden suhteen tilamuuttujan X jakautuma määrittää siirtymäoperaattorin.

$$P(x, B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B) | X = x)$$

Prosessi X on kuvaus tapausavaruudesta $\Omega^{\{1,2\}}$ reaalitylukuihin. Prosessi koostuu vaiheista X_1 ja X_2 , jotka ovat temporaalisesti sitoutuneita maailmaan (kts. määr. 21). Siirtymäoperaattori esittää niitä mekanismeja, joilla mallin tila $\omega_1 \in \Omega$ muuttuu toiseksi tilaksi $\omega_2 \in \Omega$. Operaattori antaa todennäköisyyden sille, että malli on seuraavaksi tilassa ω_2 . Temporaalisen sitoutumisen periaate koskee siirtymäoperaattoria. Jos mallin alkutilan tilamitta on μ , malli on temporaalisesti sitoutunut operaattorimielessä, silloin kun $\mu P(E)$ on mallin tilamitta muutoksen jälkeen.

Määritelmä 28. Prosessi $X : \Omega^T \mapsto \mathbb{R}^n$ on Markovinen, silloin kun seuraavan kokeen todennäköisyys riippuu vain prosessin nykytilasta. Toisin sanotusti

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = x | X_t = y_t, X_{t-1} = y_{t-1}, \dots, X_0 = y_0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = x | X_t = y_t)$$

Diskreetin Markovin prosessin siirtymätodennäköisyydet voidaan esittää siirtymäoperaattorilla $P(i, j) := \mathbb{P}(X = j | X = i)$. Diskreetit siirtymäoperaattorit ovat kaikki myös matriisioperaattoreita. Matriisimuodossa riviavaruus on siirtymätodennäköisyydet tilasta $X(\omega_1) = i$ tilaan $X(\omega_2) = j$.

Esimerkki 7. Tarkastellaan taas maailmaa, jossa on kaksi urnaa a_1 ja a_2 . Maailmassa on myös n mustaa kuulaa. Kuulien lukumäärä on vakio. Kummassakin urnassa voi olla kuulia. Tila-avaruus (Ω, \mathcal{F}) sisältää mallin kaikki mahdolliset tilat ja tapahtuma-avaruus $\Omega^{\{1,2\}}$ kaikki mahdolliset muutokset urnien ja kuulien suhteen. Oletetaan, että mikä tahansa kuula voi siirtyä urnien välillä. Määrätään prosessi

$$X : \Omega^{\{1,2\}} \rightarrow \mathbb{R}$$

sellaiseksi kuvaukseksi, jonka arvo $X_1(\omega)$ on urnan a_1 mustien kuulien lukumäärä alkutilanteessa.

Uskotaan, että havaintojen perusteella ollaan päädytty sellaiseen malliin, että jos alkutilassa uurnassa a_1 on $X(\omega_1) = k$ mustaa kuulaa, niin muutoksen jälkeen lopputilassa on $X(\omega_2) = k + 1$ mustaa kuulaa varmuudella $\frac{n-k}{n}$ tai $X(\omega_2) = k - 1$ mustaa kuulaa varmuudella $\frac{k}{n}$. Määritellään siirtymäoperaattori P tila-avaruuteen Ω siten, että tilamuuttujan X jakautuma siirtymäoperaattorin suhteen yhtyy luottamuslukuihin $\frac{n-k}{n}$ ja $\frac{k}{n}$.

$$P(k, k + 1) := \mathbb{P}(X_2(\omega) = k + 1 \mid X_1(\omega) = k) = \frac{n - k}{n}$$

$$P(k, k - 1) := \mathbb{P}(X_2(\omega) = k - 1 \mid X_1(\omega) = k) = \frac{k}{n}$$

Määritellään tilamitta μ . Tämä mitta on mallin alkutilan todennäköisyysmitta. Jos $\mu(E) = 1$, mallin alkutila on varmasti joukossa $E \subset \Omega$. Joukko voi olla myös yksiö, koska tila-avaruus Ω on diskreetti. Siirtymäoperaattori $P(\cdot, j)$ operoi mittaan μ oikealta seuraavalla tavalla:

$$\mu P(E) := \sum_{i \in \Omega} \mu(i) P(i, j)$$

Tulos $\mu P(j)$ on todennäköisyys sille, että muutoksen jälkeen mallin tila on $j \in \Omega$. Toisin sanotusti $X_2(\omega) = j$ todennäköisyydellä $\mu P(j)$.

2.3 Aika

Tavoite on määrittää aika. Koko tekstin tarkoitus on johdattaa lukija aikateoriaan. Toistaiseksi ei ole käsitelty aikaa kuin vain johdannossa. Aika havaitaan vain maailmasta ja liittyy olennaisesti muutokseen. Maailman ja muutoksen määrittelemine oli kuitenkin välttämätöntä. Maailma \mathcal{U} on kaikki se mitä on olemassa. Maailman malli $(A, B; \omega)$ on ne puitteet, josta maailmaa voidaan havainnoida. Muutos Δ on maailman endomorfismi, joka ei ole identiteetti. Muutos liittyy olennaisesti aikaan, mutta ei kuitenkaan ole aika itse. Muutoksesta seuraa aika, mutta ajasta ei välttämättä seuraa muutos.

Erilaisia aikakuvia on kaksi – suhteellinen ja absoluuttinen aika. Nämä tunnetaan myös ajan A- ja B-sarjana sekä yhdistetään filosofisiin suuntauksiin presentismi ja eternalismi [12]. Suhteellinen aika havaitaan maailmasta suoraan ja sitä mitataan kelloilla. Se virtaa tulevaisuudesta menneisyyteen ja on ekvivalentti muutoksen kanssa. Absoluuttinen aika määrittää tapahtumien järjestyksen. Absoluuttinen aika sisältää kaiken tiedon tulevasta ja menneistä tapahtumista ja on rakenteellinen osa maailman mallia.

Tutkitaan seuraavaksi näitä kahta erilaista aikakuvaa. Molemmat määritellään muutoksen kautta, mutta eri tavalla. Suhteellisen ajan määritelmän perusajatus on se, että aika ja muutos ovat keskenään ekvivalentit. Absoluuttisen ajan perusajatus on puolestaan se, että aika ei välttämättä implikoi muutosta. Suhteellinen ja absoluuttinen aika ovat riippuvaisia siitä mallista, josta maailmaa tarkastellaan.

Muutos esiintyy mallissa tulkinnassa $\omega \in \text{hom}(A, B)$, joka on morfismi luokitteluobjektista A luokitteluobjektiin B . Maailman muutos Δ , lähdön muutos δ , ja maalin muutos d ovat sellaisia endomorfismeja, jotka esittävät niitä mekanismeja, joilla maailma muuttuu ja malli seuraa maailmaan muutosta. Toisin sanotusti muutoksessa pätee, että

$$\text{ensin } \omega \text{ ja sitten } d \circ \omega \circ \delta$$

määrittävät ontologisesti sitoutuneen maailman mallin. Sanotaan, että malli on *temporaalisesti sitoutunut* silloin kun se toteuttaa tämän relaation. (kts. määr. 19 ja 20).

Maailman mallin tulkinta on myös mallin tila $\omega \in \Omega$. Temporaalisesti sitoutuneen mallin muutos esitetään tila-avaruuden jäsenten järjestettynä parina $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$. Voidaan ajatella, että $\omega_2 := d \circ \omega_1 \circ \delta$. Temporaalisen sitoutumisen periaatteen nojalla järjestetty pari toteuttaa relaation

$$\text{ensin } \omega_1 \text{ ja sitten } \omega_2$$

Kahden tilan muodostama piste $\omega := (\omega_1, \omega_2)$ on *tapahtuma*, jossa mallin tila muuttuu ensimmäisestä toiseksi. Tapahtuma on myös kuvaus $\omega \in \Omega^{\{1,2\}}$ lukuparista tila-avaruuteen.

2.3.1 Tapahtumaketju

Tapahtumat mallintavat maailman muutosta. Malli on temporaalisesti sitoutunut maailmaan, silloin kun se seuraa maailmaa muutoksessa. Toisin sanotusti mallissa tapahtuma on sellainen muutos, joka todella havaitaan maailmassa.

Tapahtumat voidaan järjestää ketjuksi. Yhtä tapahtumaa seuraa toinen silloin, kun näiden tilat sopivat yhteen. Olkoon $\omega := (\omega_1, \omega_2)$ ja $\eta := (\eta_1, \eta_2)$ kaksi tapahtumaa. Nämä muodostavat ketjun kun $\omega_2 = \eta_1$. Tapahtumaketju voidaan esittää kolmikkona $(\omega_1, \omega_2, \eta_2)$.

Määritelmä 29. Olkoon \mathcal{U} maailma ja $\Omega^{\{1,2\}}$ maailman mallin tapahtuma-avaruus. *Tapahtumaketju* on tapahtumista järjestetty jono

$$\omega := (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n)$$

siten että $(\omega_i, \omega_{i+1}) \in \Omega^2$ kaikilla indekseillä $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Kaikkien tapahtumaketjujen joukkoa $\Omega^{\mathbb{N}}$ kutsutaan *tapahtuma-avaruudeksi*.

Tapahtumien joukko $\Omega^{\{1,2\}}$ ja tapahtumaketjujen joukko $\Omega^{\mathbb{N}}$ ovat molemmat tapahtuma-avaruuksia. Sen pitäisi olla selvää asiayhteydestä, että kumpaa objektiä tarkoitetaan. Tapahtumien joukko $\Omega^{\{1,2\}}$ on tapahtumaketjujen erikoistapaus, jossa ketjussa on vain kaksi jäsentä. Tapahtuma-avaruudella tarkoitetaan tästä alkaen tapahtumaketjujen joukkoa $\Omega^{\mathbb{N}}$, joka sisältää myös tapahtumien joukon.

Maailman muutos Δ ei ole identiteettimorfismi mutta lähdön muutos δ ja mallin muutos d voivat olla. Temporaalisen sitoutumisen nojalla malli seuraa *maailman muutosta*. Malli muuttuu vain silloin, kun maailman muutos koskee maailman mallinnettavaa osaa. Tapahtuma $\omega \in \Omega^{\{1,2\}}$ esittää mailmasta havaittua muutosta mallin suhteen. Tapahtuma voi olla niin sanotusti *nolla tapahtuma*, jos maailma muuttuu mutta malli ei.

Määritelmä 30. Tapahtuma-avaruuden tapahtuma $\Theta \in \Omega^{\{1,2\}}$ on *nolla-tapahtuma*, silloin kun

$$\Theta(1) = \Theta(2)$$

Maailmasta *havaittu muutos* on sellainen tapahtuma, joka ei ole nolla-tapahtuma. Havaittu muutos todella muuttaa mallin tilaa yhdestä toiseksi. Nolla-tapahtuma ei muuta mallin tilaa. Vaikka maailma muuttuisi, malli ei välttämättä muutu. Nolla-tapahtuma voi esiintyä silloin kun muutos on mallinnuksen ulkopuolella tai sellaisessa osassa mallinnettavaa maailmaa, että mallin tarkkuus ei pysty sitä havaitsemaan.

Tapahtumaketju voi sisältää sekä havaittuja muutoksia, että nolla-tapahtumia. Tapahtuma ja muutos riippuvat toisistaan kun malli on temporaalisesti sitoutunut maailmaan. Suhteellisessa aikakuvassa muutos ja aika ovat keskenään ekvivalentit. Muutoksesta seuraa aika ja ajasta seuraa muutos, joten myös tapahtumasta seuraa aika ja ajasta tapahtuma. Nolla-tapahtumassa mikään ei muutu mallin suhteen. Absoluuttisessa aikakuvassa aika voi olla olemassa ilman muutosta. Maailmaan malli ei välttämättä muutu vaikka maailma muuttuisikin. Nolla-tapahtumasta voi seurata aika ja ajasta nolla-tapahtuma. Absoluuttinen ja suhteellinen aika eroavat toisistaan sen perusteella, onko tapahtumaketjussa nolla-tapahtumia vai ei.

2.3.2 Suhteellinen ja absoluuttinen aika

Määritelmä 31. Olkoon $\Omega^{\mathbb{N}}$ maailman tapahtuma-avaruus. *Aika* on mitta-avaruus $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \tau)$, jonka suhteen tapahtumaketju on mitallinen kuvaus $\omega : \mathbb{N} \mapsto \Omega$. *Ajanjakso* on mitallinen joukko $T \in \mathcal{N}$. *Ajanmitta* on täysadditiivinen ja positiivinen joukkofunktio τ , eli tilamitta.

Tapahtuma-avaruus on temporaalisesti sitoutunut maailmaan. Temporaalisen sitoutumisen periaate takaa sen, että tapahtumaketjun tapahtumat ovat oikeassa järjestyksessä. Tapahtumaketjun alkutila voi olla mikä tahansa maailman mallin tila, joka on alkuhetkellä ontologisesti sitoutunut maailmaan. Tapahtumaketju seuraa maailmaa siten, että tämä pysyy ontologisesti sitoutuneena kaikilla parametrin $t \in \mathcal{N}$ arvoilla.

Määritelmä 32. Olkoon $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \tau)$ maailman mallin Aika. Tapahtuman $\omega(t) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ parametri t on *suhteellinen aika*, jos tapahtumaketjussa ei ole nolla-tapahtumia. Toisin sanotusti kaikilla $t \in \mathbb{N}$

$$\omega(t) \neq \omega(t + 1)$$

Parametri t on *absoluuttinen aika* jos se ei ole suhteellinen aika.

Suhteellinen aika on määritelmän mukaan ekvivalentti mallin muutoksen kanssa. Malli muuttuu jos ja vain jos suhteellinen aika muuttuu. Toisaalta absoluuttinen aika ei ole ekvivalentti muutoksen kanssa. Maailman mallin muutos implikoi absoluuttisen ajan muutosta. Absoluuttinen aika voi muuttua vaikka mallin tila ei muuttuisi. Maailman malli on temporaalisesti sitoutunut maailmaan. Aika kuitenkin havaitaan vai maailman mallista ja on riippuvainen maailman muutoksesta. Malli ei kuitenkaan ole sama asia kuin maailma. Maailma itse on olemassa ja maailma voi muuttua, mutta siinä on kaikki mitä maailmasta voidaan sanoa.

Esimerkki 8. Oletaan, että maailman mallin tila-avaruus koostuu kahdesta tilasta.

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2\}$$

Tapahtuma-avaruus voidaan esittää tuloavaruutena

$$\Omega^{\{1,2\}} := \{(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2)\}$$

Malli on temporaalisesti sitoutunut maailmaan. Toisin sanotusti, tapahtumalle $\omega \in \Omega^2$ pätee relaatio

$$\text{ensin } \omega_i \text{ ja sitten } \omega_j$$

jossa $i, j \in \{1, 2\}$.

Oletetaan, että tapahtuman $\omega(t)$ parametri t on suhteellinen aika. Toisin sanotusti vain (ω_1, ω_2) ja (ω_2, ω_1) ovat mahdollisia tapahtumia. Tapahtumaketjussa mallin tila muuttuu vuorotellen yhdestä tilasta toiseksi $(\omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_2, \dots)$.

Olkoon $X : \Omega^{\{1,2\}} \mapsto \mathbb{R}$ prosessi, siten että $X(\omega_1) = 1$ ja $X(\omega_2) = 2$. Tälle prosessille voidaan rakentaa yksinkertainen siirtymäoperaattori

$$P(i, j) := \mathbb{P}(X(\omega) = j \mid X(\omega) = i)$$

jonka arvo on nolla silloin kun $i = j$, mutta muuten yksi. Tämän siirtymäoperaattori matriisiesitys on:

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Selvästi matriisin parilliset iteraatiot ovat identiteetti $P^{2k} = \mathbb{1}$ ja parittomat matriisi itse $P^{2k+1} = P$. Siirtymämatriisin potenssit käyvät tällä tavalla kaikki luonnolliset luvut läpi. Näin ollen siirtymäoperaattori pätee sellaisenaan myös tapahtumaketjun muutoksen mallintamiseen. Malli on temporaalisesti sitoutunut maailmaan. Siirtymämatriisin iterointiluku on mallin *suhteellinen aika*, joka muuttuu vain silloin kun maailma muuttuu. Suhteellisen ajan määritelmän perusteella muutos ja aika ovat ekvivalentit.

Oletetaan seuraavaksi, että tapahtuman parametri t on *absoluuttinen aika*. Nyt nolla-tapahtumat (ω_1, ω_1) ja (ω_2, ω_2) ovat myös mahdollisia. Siirtymäoperaattorin matriisin lävistäjän arvot eivät enää ole nolla.

$$P := \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Operaattori on riveittäin todennäköisyyksimitta, joten rivisummat ovat

$$p_{11} + p_{12} = 1 \quad p_{21} + p_{22} = 1$$

Oletetaan, että prosessin tilamitta aloitushetkellä on $\mu(1) = 1$ ja $\mu(2) = 0$. Tämä voidaan esittää rivivektorina $(1, 0)$. Siirtymäoperaattori operoi tilamittaan oikealta puolelta.

$$\mu P := (1, 0) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Laskemalla saadaan, että

$$\mu P(1) = p_{11} \quad \mu P(2) = p_{12}$$

Näin ollen alkutilan ω_1 jälkeen mallissa havaitaan tapahtuma (ω_1, ω_1) todennäköisyydellä p_{11} ja tapahtuma (ω_1, ω_2) todennäköisyydellä p_{12} . Mielenkiintoinen seikka on se, että todennäköisyydellä p_{11} mallin tila ei muutu, jolloin mallista ei voida myöskään mitata suhteellista aikaa. Absoluuttinen aika voi muuttua vaikka suhteellinen aika ei muuttuisi.

Onko reaaliarvoisilla potensseilla minkäänlaista tulkintavoimaa? Iterointiluku eli suhteellinen aika t on esimerkin tapauksessa diskreetti. Se saa arvonsa vain kokonaislukujen joukosta. Reaalilukuarvot olisivat kuitenkin mukavia, joten tutkitaan tätä kysymystä hiukan.

Muutetaan yhtälön (18) siirtymämatriisin potenssit reaaliarvoisiksi seuraavalla tavalla. Lasketaan matriisin logaritmi ja sijoitetaan se eksponenttifunktioon. Eksponenttifunktiolle määritellään reaaliarvoiset potenssit lukusarjana. Ensin selvitetään transitiomatriisin logaritmi. Käytetään eksponenttifunktiota ja tutkitaan tämän sarjakehitelmää.

$$\exp(\theta P) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} P^k$$

Kun $\theta = \frac{i\pi}{2}$, niin

$$\exp(\theta P) = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + iP \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = iP$$

Päätellään tästä, että

$$\ln(P) = \frac{i\pi}{4}(3\mathbb{1} + 2P) = \frac{i\pi}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Prosessin jatkuva-aikainen interpolaatio voidaan esittää eksponenttifunktion ja siirtymämatriisin logaritmin avulla. Palautetaan mieleen, että siirtymämatriisin potenssi on mallin muutosten lukumäärää.

$$\begin{aligned} P^t &:= \exp\left(t \frac{i\pi}{4}(3\mathbb{1} + 2P)\right) \\ &= \mathbb{1} e^{\frac{3\pi i}{4}t} \left(\cos\left(\frac{t\pi}{2}\right)\mathbb{1} + iP \sin\left(\frac{t\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Jos $t \in \mathbb{R}$, siirtymämatriisin komponentit ovat kompleksilukuja. Kompleksiluvut ovat seuraus siitä, että yritetään interpoloida jatkuva-arvoisella muuttujalla diskreettia mallia. Tilanne on sama, kuin jos yritettäisiin korottaa negatiivinen luku reaaliarvoiseen potenssiin.

Esimerkki 9. Olkoon $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\}$ tila-avaruus. Tarkastellaan tapahtumaketjua $(\omega_i)_{i=1}^\infty \in \Omega^{\mathbb{N}}$. Oletetaan, että $\mathbb{P}(\omega_j | \omega_i) = \frac{1}{n}$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Toisin sanotusti tapahtumat ovat tasaisesti jakautuneita. Tarkastellaan suhteellista aikaa absoluuttisen ajan näkökulmasta.

Suhteellisen ajan määritelmän mukaan tapahtumaketjussa ei ole nolla-tapahtumia. Jos hetkellä t maailman mallin tila on $\omega(t) = \omega_i$, niin todennäköisyys sille, että tila pysyy samana eli havaitaan nolla-tapahtuma on

$$\mathbb{P}(\omega(t+1) = \omega_i | \omega(t) = \omega_i) = \frac{1}{n}$$

Vastaavasti todennäköisyys sille, että näin ei ole on edellisen komplementti, eli

$$\mathbb{P}(\omega(t+1) \neq i | \omega(t) = \omega_i) = \frac{n-1}{n}$$

Prosessi on Markovin prosessi, eli siirtymätodennäköisyydet ovat riippumattomia absoluuttisen ajan hetkestä t . Tämän lisäksi prosessi on bernoulli jakautunut. Näin ollen todennäköisyys sille, että absoluuttisen ajan hetkellä t suhteellinen aika on t_s noudattaa binomijakautumaa

$$t_s \sim \text{Bin}\left(t, \frac{n-1}{n}\right)$$

Suhteellinen aika t_s on näin ollen binomijakautunut absoluuttisen ajan suhteen.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta suhteellisen ajan näkökulmasta. Oletetaan, että tapahtumaketjun parametrinti t on suhteellinen aika. Tämä ei pysty mittaamaan nolla-tapahtumien määrää. Tilanne on nyt päinvastainen kuin edellisessä asetelmassa. Mikä on absoluuttisen ajan t_a arvo kun suhteellinen aika on t ? Tämä kysymys on täsmälleen negatiivisen binomijakautuman määritelmä. Päätellä, että absoluuttinen aika on negatiivisesti binomijakautunut suhteellisen ajan suhteen.

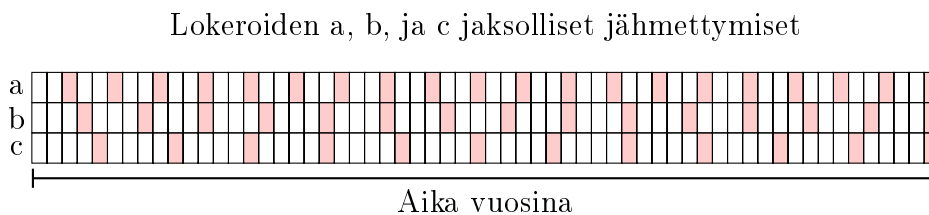
$$t_a \sim \text{NB}\left(t, \frac{n-1}{n}\right)$$

Absoluuttinen ja suhteellinen aika ovat toistensa suhteen todennäköisyysjakautuneita. Toisin sanotusti, jos maailmaa tarkastellaan absoluuttisen ajan näkökulmasta, ei voida varmuudella tietää, mikä on maailman mallin suhteellinen aika. Sama toisin päin.

Tutkitaan seuraavaksi Shoemakerin ajatuskoetta [21]. Shoemakerin ajatuskokeen lyhyt versio kuuluu näin:

Ajatellaan, että maailma voidaan jakaa lokeroihin joista kukin lokero pysähtyy täysin ja kokonaan tietyin väliajoin. Lokerosta voidaan havainnoida muiden lokeroiden pysähtyneisyys, mutta ei sitä onko lokero itse pysähtynyt vai ei. Tällaisessa maailmassa elävät oliot voivat tehdä maailmasta kaksi teoriaa, joista toinen on absoluuttisen ajan teoria ja toinen suhteellisen ajan. Molemmat teoriat selittävät maailmasta tehdyt havainnot täysin, eikä voida vakuuttavasti sanoa yhden mallin olevan parempi kuin toinen.

Esimerkki 10 (Shoemakerin ajatuskoe). Jaetaan maailma kolmeen lokeroon a, b, c . Lokerot jähmettyvät 3, 4, ja 5 vuoden välein. Jähmettymisen vuotena lokerossa ei havaita muutosta, muuta muutoin lokero voi muuttua tila-avaruuden Ω_a, Ω_b , tai Ω_c suhteen. Esitetään maailman jähmettymiset kuvassa 5.



Kuva 5: Shoemakerin ajatuskokeen malli, jossa jokainen lokero on omalla vaakarivillään. Punaiset suorakulmiot tarkoittavat jähmettyneitä vuosia. Jähmettymisjakson pituus on 60 vuotta, jonka jälkeen kaava toistuu.

Olkoon $X : \Omega_a^{\mathbb{N}} \times \Omega_b^{\mathbb{N}} \times \Omega_c^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{R}^3$ prosessi, maailman mallin tapahtuma-avaruudesta reaalityyppisiin. Parametroidaan prosessi parametrilla $t \in \mathbb{R}$ siten, että $t \in [0, 1)$ on ensimmäisen vuoden ajan parametri, $t \in [1, 2)$ on toisen vuoden, ja $t \in [n - 1, n)$ n -vuoden ajan parametri. Jos ajan parametri on absoluuttinen aika, viimeisenä eli 60 vuotena prosessi ei muutu. Toisin sanotusti $X_t(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ on vakio kun $t \in [59, 60)$. Vuosi 60 sisältää paljon nolla-tapahtumia. Määritelmän perusteella suhteellisen ajan mukaan parametroitu tapahtumaketju ei voi sisältää nolla-tapahtumia. Näin ollen suhteellisen ajan kuvassa 60:nnetta vuotta ei ole olemassa.

3 Loppusanat

Tutkielmani tulos ei ehkä ole se aikateoria, joka on lopullinen matemaattinen teoria ajasta. Toivon kuitenkin, että lukija saisi tästä tekstistä sen ajatuksen, että matemaattinen ajan teoria on olemassa. Tehtävä on vain löytää se.

Ryhdyin etsimään ajan matemaattista teoriaa siitä lähtökohdasta, että sen olisi sovittava yhteen ajan metafysikaalisten näkemysten kanssa. Aikaa käsittelevää lähdeaineistoa ei löytynyt kirjastosta matematiikan osastolta yhtään. Fysiikan osastolta löysin muutaman lähteen, mutta ne kaikki käsittelevät aikaa vain yhdestä näkökulmasta. Einsteinin suhteellisuusteorian, termodynamiikan, ja kvanttimekaniikan vaikutus fysikaaliseen aikakäsitykseen on suuri. Yksinkertaisesti sanottuna luonnontieteistä ei löydy melkein yhtään lähdetä matemaattisen ajan teorialle, joka olisi riippumaton edellä mainituista fysikaalisista teorioista.

Tämä on ongelma siitä syystä, että luonnontieteissä tavallisesti oletetaan ilman perusteluja absoluuttinen aika. Leipätekstissä nähtiin, että absoluuttinen aika on vain puolet ajan todellisesta luonteesta. Lisäksi jos absoluuttinen aika on teorian postulaatti, niin kuin se on kaikissa fysikaalisissa teorioissa, ei tällainen teoria voi tutkia aikaa ilman kehäpäätelmiä.

Kävin koko yliopiston kirjaston läpi, kun etsin aikaa käsittelevää lähdekirjallisuutta. Metafysiikan osasto oli ainoa kunnollinen aikaa käsittelevä kirjallisuuslähde. Tämä filosofian alalaji sisältää kokonaisvaltaisesti vuosisatoja kestänyttä pohdintaa siitä mitä aika on. Ajan filosofia on pysynyt alusta saakka hyvin samankaltaisena. Eri aikakausien filosofit päätyivät kaikki samoihin perusajatuksiin ajasta, maailmasta, ja muutoksesta.

Tavoitteeksi muodostui formalisoida ajan metafysiikka ja rakentaa matemaattinen ajan teoria. Metafysiikassa aikakäsitys oli merkittävästi erilainen kuin fysiikassa. Toisin sanotusti metafysiikka tunnusti myös suhteellisen ajan mahdollisuuden. Absoluuttinen ja suhteellinen aika näyttäytyivät lopulta yhden ja saman asian eri puolina.

Työ ei lopu tähän. Tästä tutkielmasta on jätetty pois sellaiset määritelmät, esimerkit, lauseet, ja muut tulokset, jotka olivat vielä kirjoitushetkellä keskeneräisiä. Esimerkiksi kysymys jatkuva-arvoisesta ajan parametroidista jätettiin pois. Maailmaa ja muutosta koskevaa jatkotutkimusta voisi tehdä vaikka maailman mallin osamallista, jonka määritelmä jätettiin myös tästä tekstistä kokonaan pois.

Minulle henkilökohtaisesti tärkeä kysymys on kuitenkin se, että miten mallin tila-avaruus upotetaan metriseen avaruuteen, ja mikä on tämän avaruuden dimensio? Aikateorian puitteissa on mahdollista määrittää tilojen välinen etäisyys, ja tähän voidaan käyttää aikaa. Toisin sanotusti kahden tilan välinen etäisyys on se aikaero (suhteellinen tai absoluuttinen) joka todennäköisesti on näillä kahdella tilalla tapahtumaketjussa. Etäisyys eli metriikka tuo aikateoriaan lisää rakennetta, jota voisi tutkia.

Tämän tekstin luomistyö on ollut koettelemus, mutta kannustan jokaista lukijaa pohtimaan hetken sitä kysymystä, että mikä on matemaattinen ajan teoria. Tämä se ei ehkä ole, mutta uskon sen olevan olemassa. Ajan matemaattinen teoria on mielenkiintoinen tutkimuskohde jo itsensä tähden, mutta sen merkittävin hyöty olisi sen sovelluksissa.

Viitteet

- [1] Aristoteles. *Fysiikka*. Gaudeamus, Helsinki, 1992.
- [2] K. Athreya ja S. Lahiri. *Measure Theory and Probability Theory*. Springer, New York, 2006.
- [3] S. Axler. *Measure, Integration & Real Analysis*. Springer Nature, Cham, ensimmäinen laitos, 2020.
- [4] C. C. Chang ja H. J. Keisler. *Model theory*. North-Holland, Amsterdam, toinen laitos, 1977.
- [5] R. Durrett. *Essentials of stochastic processes*. Springer, New York, kolmas laitos, 1999.
- [6] P. Halmos. *Measure Theory*. Van Nostrand, New York, 1950.
- [7] S. Hossenfelder. *Lost in math : how beauty leads physics astray*. Basic Books, New York, ensimmäinen laitos, 2018.
- [8] J. Jacod ja P. Protter. *Probability essentials*. Springer, Berlin, toinen laitos, 2004.
- [9] R. Juti. *Lyhyt metafysiikan historia*. Gaudeamus, Helsinki, 2019.
- [10] G. W. Leibniz, T. Aho, ja et al. *Filosofisia tutkielmia*. Gaudeamus, Helsinki, 2011.
- [11] C. Macdonald. *Varieties of things : foundations of contemporary metaphysics*. Blackwell, Oxford, 2005.
- [12] J. E. McTaggart. The unreality of time. *Mind*, 17(68):457–474, 1908.
- [13] S. K. Miettinen. *Logiikan perusteet*. Gaudeamus, Helsinki, 2002.
- [14] I. Newton ja A. Janiak. *Isaac Newton : philosophical writings*, ss. 59–114. Cambridge University Press, Cambridge, toinen laitos, 2014.
- [15] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, viides laitos, 1998.
- [16] S. Pihlström, A. Siitonen, ja R. Vilkkö. *Aika*. Gaudeamus, Helsinki, 2000.
- [17] D. Revuz. *Markov chains*, osa 11. North-Holland publishing company, Amsterdam, 1975.
- [18] B. Russel. *The analysis of matter*. Routledge, London, 1992.
- [19] B. Russel. *A critical exposition of the philosophy of Leibniz : with an appendix of leading passages*. Routledge, London, 1992.

- [20] M. R. Sheldon. *Introduction to probability models*. Academic press, New York, 10. laitos, 2010.
- [21] S. Shoemaker. Time without change. *The Journal of Philosophy*, 66(12):363–381, 1969.
- [22] H. Simmons. *An introduction to category theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [23] D. Williams. *Probability with martingales*. Cambridge university press, Cambridge, ensimmäinen laitos, 1991.
- [24] L. Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus*. Kegan Paul, Trench, Trubner and CO., LTD., 1922.