VAHINKOVAKUUTUSMATEMATIIKKAA FOR DUMMIES
eli kuinka mallintaa vahinkovaateiden saapumista ja vakuutusyhtiön tuhotodennäköisyyttä

Sara-Emilia Toivanen

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:
Prof. Jukka Lempa
FT Stefan Emet

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

SARA-EMILIA TOIVANEN: Vahinkovakuutusmatematiikkaa for dummies
Pro gradu -tutkielma, 34 s., 1 liite.
Matematiikka
Toukokuu 2025

Tässä tutkielmassa käsitellään vahinkovakuutusmatematiikan perusteita, laskuriprosesseja, Poisson-prosesseja, Cramér-Lundbergin mallia ja tuhotodennäköisyyttä.

Alussa käydään läpi pohjatietoja ja todennäköisyyslaskennan perusteita, joita käytetään tutkielmassa myöhemmin. Lisäksi luvussa esitellään Poisson-prosessi ja sen ominaisuuksia.

Seuraavaksi esitellään Cramér-Lundbergin malli ja sen sovellusmahdollisuuksia vahinkovakuutusten maailmassa, käsitellään tuhotodennäköisyyttä ja vakuutusmaksujen muodostamismahdollisuuksia.

Lopuksi käydään lyhyesti läpi muita tapoja mallintaa vahinkovaateiden jakaumaa.

Asiasanat: Laskuriprosessi, Poisson-prosessi, Cramér-Lundberg, tuhotodennäköisyys

Sisällys

1 Johdanto

Vahinkovakuutusmatematiikan yksi tärkeimmistä peruspilareista on Poisson-prosessi. Se on yleisin käytössä olevista stokastisista laskuriprosesseista, ja sen avulla voidaan kuvata esimerkiksi vakuutusyhtiöön saapuvien vahinkovaateiden määrää tietyllä aikavälillä. Cramér-Lundbergin malli on niin ikään yksi yleisimmin käytetyistä malleista vakuutusyhtiön vararikkotodennäköisyyttä, eli tuhotodennäköisyyttä, tutkittaessa. Siinä vakuutusyhtiöön saapuvien vahinkovaateiden saapumisaikojen prosessin ajatellaan olevan homogeeninen Poisson-prosessi.

Tutkielman alussa käydään läpi tutkielmassa tarvittavat pohjatiedot, jonka jälkeen siirrytään käsittelemään vahinkovakuutusmatematiikassa yleisesti käytettyjä perusmalleja; Poisson-prosessia ja Cramér-Lundbergin mallia. Näiden avulla tarkastellaan vakuutusyhtiöön saapuvia vakuutusvaateita ja niitä käytetään apuna vakuutusmaksuja muodostettaessa. Tämän jälkeen tutkielmassa käsitellään tuhotodennäköisyyttä, ja kuinka suuria vakuutusmaksujen tulee vähintään olla, jotta vakuutusyhtiö ei ajaudu vararikkoon.

Mainittakoon, että kirjoittaja itse kuuluu otsikon kohderyhmään ja on itsekin aloittelija vakuutusmatematiikassa. Tutkielman tarkoitus onkin tutustuttaa kirjoittajan kanssa vastaavassa tilanteessa olevat, vahinkovakuutusmatematiikasta kiinnostuneet vasta-alkajat tämän kiehtovan maailman perusteisiin, eikä missään nimessä pitää lukijaa typeränä.

Tutkielmassa oletetaan, että lukijalla on ymmärrystä todennäköisyyslaskennasta ja tilastollisesta päättelystä.

Tämän tutkielman kirjoituksessa on hyödynnetty ChatGPT-tekoälytyökalua käsitteiden suomentamisessa ja lauseen 7 todistamisessa.

2 Laskuri- ja Poisson-prosessi

Tässä luvussa käydään läpi todennäköisyyslaskennan perusteita ja määritelmiä, joita tarvitaan myöhemmin tutkielman tulosten käsittelemisessä ja todistamisessa. Tämän jälkeen tutustutaan ensin yleisesti laskuriprosesseihin ja niiden ominaisuuksiin, jonka jälkeen tarkastellaan Poisson-prosesseja tarkemmin. Prosesseista tarkastellaan sekä homogeenisia että epähomogeenisia Poisson-prosesseja, ja lisäksi tutkitaan Poisson-prosessia uudistuvana prosessina.

2.1 Pohjatietoja

Ensimmäiseksi esitellään todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä. Määritelmien 1-20 ja lauseiden 1 - 3 lähteenä on [17]. Tässä tutkielmassa mallinnettavan tilanteen otosavaruudelle käytetään merkintää Ω.

Määritelmä 1. *Sigma-algebra.*
Kokoelma $\mathcal{F}$, jonka alkiot ovat perusjoukon Ω joukkoja, eli tapahtumia, on σ-*algebra*, jos:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
3. $A_i \in \mathcal{F}(i = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Tarkastellaan seuraavaksi käsitettä *todennäköisyys* tarkemmin. Lähteen [17] mukaan tapahtuman A todennäköisyys, $P(A)$, on reaaliluku, jonka on oltava yksikäsitteisesti määrätty, kun tapahtuma $A \in \mathcal{F}$ on annettu. Toisin sanottuna P on funktio, eli kuvaus $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Määritellään tämä vielä tarkasti ja käsitellään sen jälkeen todennäköisyyteen liittyviä ominaisuuksia.

Määritelmä 2. *Todennäköisyys.*
Kuvaus $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on todennäköisyys, jos

1. $P(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. Jos $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \ldots$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, niin $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Määritelmä 3. *Todennäköisyysavaruus.*
Kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on *todennäköisyysavaruus*, jos

1. Ω on ei-tyhjä joukko,
2. $\mathcal{F}$ on σ-algebra,
3. $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on todennäköisyys.

Määritelmä 4. *Borel-joukko.*
Reaalilukujen *Borel-joukkojen luokka* $\mathcal{B}$ on suppein σ-algebra, joka sisältää reaalilukujen avoimet välit. Jos joukko B kuuluu Borel-joukkojen luokkaan, eli $B \in \mathcal{B}$, sitä kutsutaan *Borel-joukoksi.*

Määritelmä 5. *Satunnaismuuttuja.*
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}$ on (reaalinen) *satunnaismuuttuja*, jos

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 6. *Diskreetti satunnaismuuttuja.*
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kuvaus. Kuvaus X on *diskreetti satunnaismuuttuja* todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jos

1. Kuvauksen X arvoujoukko $X(\Omega)$ on (enintään) numeroituva joukko $\{x_1, x_2, \ldots\}$, ja
2. $\{X = x_k\} \in \mathcal{F}$ kaikilla k.

Määritelmä 7. *Pistetodennäköisyysfunktio.*
Diskreetin satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio* on sellainen funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$f(x) = P\{X = x\}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Pistetodennäköisyysfunktio toteuttaa aina seuraavat ehdot:

1. $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) > 0 \Rightarrow x$ kuuluu diskreetin satunnaismuuttujan numeroituvaan arvojoukkoon $\{x_1, x_2, \ldots\}$
3. $\sum_k f(x_k) = 1$.

Määritelmä 8. *Kertymäfunktio.*
Satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio* on sellainen funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$F(x) = P\{X \leq x\}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Diskreetin satunnaismuuttujan X kertymäfunktion määräävät yksikäsitteisesti pistetodennäköisyysfunktiot $p_k = f(x_k) = P\{X = x_k\}, \ x_k \in X(\Omega)$ kaavalla

$$F(x) = \sum_{k:x_k \leq x} p_k, \ x \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 9. *Odotusarvo.*
Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on $\{x_1, x_1, \ldots\}$, joita vastaavat pistetodennäköisyydet ovat $p_k = P\{X = x_k\}$, satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on luku

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k x_k \cdot p_k,$$

jos

$$\sum_k |x_k| \, p_k < \infty,$$

eli jos sarja suppenee itseisesti.

Määritelmä 10. *Tiheysfunktio.*
Satunnaismuuttujalla X on *jatkuva jakauma tiheysfunktiona f*, jos

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$$

kaikilla $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tiheysfunktio, jos ja vain jos

1. $f \geq 0$,

2. f on integroituva yli reaaliukujen joukon $\mathbb{R}$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Lause 1. *Jos satunnaismuuttujalla X on todennäköisyysfunktiona f jatkuva jakauma, niin sen kertymäfunktiolla $F, F(x) = P\{X \leq x\}$, pätee*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in \mathbb{R}.$$

Kääntäen voidaan todeta, että

$$f(x) = F'(x)$$

kaikissa funktion f jatkuvuuspisteissä.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa määritelmästä 10 valitsemalla $b = x$ ja antamalla $a \to -\infty$. Jälkimmäinen väite saadaan differentiaali- ja integraalilaskennalla. □

Määritelmä 11. *Varianssi.*
Olkoon X satunnaismuuttuja odotusarvolla $\mu = \mathbb{E}[X]$. Tällöin satunnaismuuttujan X *varianssi* on

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mu)^2\right],$$

jos kyseinen odotusarvo on olemassa. Muussa tapauksessa sanotaan, ettei satunnaismuuttujan X varianssi ole olemassa.

Määritelmä 12. *Poisson-jakauma.*
Olkoon $\lambda > 0$. Satunnaismuuttuja X on *Poisson-jakautunut parametrina* λ, jos

1. satunnaismuuttujan X arvojoukko on $\{0, 1, 2, \ldots\}$ ja

2. $P\{X = k\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 1, 2 \ldots$

Poisson-jakaumaa noudattavaa satunnaismuuttujaa merkitään $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Poisson-jakauma on diskreetti jakauma.

Huomautus 1. Poisson-jakauman odotusarvo on $\mathbb{E}[X] = \lambda$ ja varianssi $\mathrm{Var}[X] = \lambda$. [1]

Määritelmä 13. *Eksponenttijakauma.*
Olkoon $\lambda > 0$. Satunnaismuuttuja X on *eksponenttijakautunut parametrina* λ, jos sen todennäköisyysfunktio on jatkuva jakauma f,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Eksponenttijakauman kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Eksponenttijakaumaa noudattavaa satunnaismuuttujaa merkitään $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Eksponenttijakauma on jatkuva jakauma.

Määritelmä 14. *Tasajakauma.*
Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Satunnaismuuttuja X on tasajakautunut yli välin (a, b) jos sillä on tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tasajakauman kertymäfunktio on

$$\begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Tasajakaumaa noudattavaa satunnaismuuttujaa merkitään $X \sim \text{Tas}(a, b)$.

Määritelmä 15. *Gammafunktio.*
Määritellään *gammafunktio* kaavalla

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx, (r > 0).$$

Funktion integraalin tulee olla suppeneva kaikille $r > 0$.

Määritelmä 16. *Gammajakauma.*
Olkoon gammafunktio kuten määritelmässä 15. Satunnaismuuttuja on *gammajakautunut parametrein* $r > 0, \lambda > 0$, jos sillä on todennäköisyysfunktiona jatkuva jakauma

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

Gammajakaumaa noudattavaa satunnaismuuttujaa merkitään $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$.

Huomautus 2. Sijoittamalla gammajakauman lausekkeeseen $r = 1$ saadaan eksponenttijakauman $\text{Exp}(\lambda)$ todennäköisyysfunktio $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$. Siis $\text{Exp}(\lambda) = \text{Gamma}(1, \lambda)$.

Määritelmä 17. *Tapahtumien riippumattomuus.*
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja A ja B sen tapahtumia. Sanotaan, että tapahtumat A ja B ovat *riippumattomat*, jos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Riippumattomuutta merkitään AB.

Määritelmä 18. *Ehdollinen todennäköisyys.*
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja A ja B sen tapahtumia. Olkoon lisäksi $P(B) > 0$. Voidaan kysyä, mikä on tapahtuman A sattumisen todennäköisyys, jos tiedetään, että tapahtuma B on sattunut. Tällöin siis kysytään mikä on tapahtuman A *todennäköisyys ehdolla* B, ja tätä merkitään $P(A \mid B)$. Ehdollinen todennäköisyys voidaan laskea kaavalla

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän (18) perusteella saadaan seuraavat kaksi lausetta.

Lause 2. Kertolaskukaava.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A).$$

Todistus. Seuraa suoraan ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä. □

Lause 3. *Jos $P(B) > 0$, niin*

$$AB \iff P(A \mid B) = P(A).$$

Todistus. Seuraa suoraan ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä. □

Määritellään seuraavaksi riippumattomuus useammalle tapaukselle.

Määritelmä 19. *Useamman tapauksen riippumattomuus.*
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja joukko $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ sen tapahtumia. Joukko $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ on riippumaton, jos

$$P(A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdots P(A_{ik})$$

kaikille indeksikombinaatioille $\{i_1, \ldots, i_i\} \subset \{1, \ldots, n\}(k = 2, 3, \ldots, n)$.

Vastaavasti kertolaskukaava 2 voidaan yleistää useammalle tapahtumalle:

Määritelmä 20. *Kertolaskukaava useammalle tapahtumalle.*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Seuraavaksi esitellään neljä tutkielman tulosten todistamisessa tarvittavaa määritelmää. Määritelmät 21 ja 22 ovat lähteestä [12], määritelmä 23 lähteestä [11] ja määritelmä 24 on lähteestä [17].

Määritelmä 21. *Muistittomuusominaisuus.*
Satunnaismuuttujalla X on *muistittomuusominaisuus*, jos $P(X > 0) = 1$, eli toisin sanoen X on positiivinen vakio, ja kaikille $x \geq 0$ ja $t \geq 0$,

$$P(X > t + x) \quad = \quad P(X > x)P(X > t) \tag{1}$$

Huomautus 3. Yhtälö (1) liittyy funktion X jakaumaan. Tapahtuma $(X > t + x)$ ei siis välttämättä riipu tapahtumista $(X > t)$ ja $(X > x)$.

Määritelmä 22. *Eksponenttijakauman muistittomuus.*
Eksponenttijakauman $e^{-\lambda x}$ muistittomuusominaisuus nähdään seuraavasta. Satunnaismuuttujalle X, joka noudattaa eksponenttijakaumaa $e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, kaikille $x \geq 0$, pätee $P(X > x) = e^{-\lambda x}$. Olkoon $t \geq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} P(X > t + x) &= e^{-\lambda(t+x)} \\ &= e^{-\lambda t - \lambda x} \\ &= e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda x} \\ &= P(X > t)P(X > x) \end{aligned} \tag{2}$$

Eli eksponenttijakautunut satunnaismuuttuja X toteuttaa muistittomuusominaisuuden yhtälön (1). Eksponenttijakaumalla on siis myös muistittomuusominaisuus 21.

Määritelmä 23. *Stokastinen prosessi.*
Stokastinen prosessi $N = (n_i)_{i \in I}$ on satunnaismuuttujien n_i, $i \in I$, järjestetty jono, jossa aikaindeksi $i \in I$ määrittää satunnaismuuttujien n_i järjestyksen jonossa.

Määritelmä 24. *Indikaattori.*
Olkoon todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja A sen tapahtuma. Tapahtuman A indikaattori on

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jos } \omega \in A \\ 0, & \text{jos } \omega \ \in A^c \end{cases}$$

Indikaattori siis ilmaisee sen, sattuuko tapahtuma A vai ei.

Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan usein vakuutusmatematiikassa mallintamisessa käytettyjä laskuriprosesseja. Tutustutaan ensin yleisesti laskuriprosesseihin, jonka jälkeen tarkastellaan Poisson-prosessia, joka on siis laskuriprosesseista yleisin.

2.2 Laskuriprosessi

Laskuriprosessi on stokastinen prosessi, jonka avulla voidaan tarkastella esimerkiksi vakuutusmatematiikan kontekstissa sattuneiden vahinkotapausten määrää. Sattuvat tapaukset voivat olla esimerkiksi vahinkovaateita, joita yksittäinen autovakuutuksenottaja lähettää vakuutusyhtiölle, tai esimerkiksi puhelinpalveluun saapuvia soittoja. [5]. Tässä tutkielmassa tapaukset ovat vakuutusyhtiölle saapuvia vahinkovaateita, joiden saapumisajat ovat satunnaisia. Kuvataan tapausten lukumäärää aikavälillä $(0, t)$ satunnaismuuttujalla $N(t)$. Huomattavaa on se, että satunnaismuuttuja

$N(t)$ eroaa merkinnästä N, jolla tarkoitetaan stokastista prosessia. Satunnaismuuttujan $N(0)$ arvo on aina 0, eli hetkellä $t = 0$ ei ole sattunut yhtään tapausta. Tämä tarkoittaa sitä, että yhtään tapausta ei ole sattunut ennen laskuriprosessin käynnistämistä. Laskuriprosessi mittaa siis vain aloitushetken jälkeen sattuvien tapausten lukumäärää, eikä näin ollen ota kantaa ennen tätä sattuneisiin tapauksiin. [5]. Määritellään seuraavaksi laskuriprosessi tarkasti. Laskuriprosessin määritelmän lähde on [1].

Määritelmä 25. *Laskuriprosessi.*
Vahinkoja sattuu toistuvasti ajan kuluessa hetkestä 0 alkaen. Merkitään hetkeen t sattuneiden vahinkojen lukumäärää $N(t)$. Näin määriteltyä prosessia $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ kutsutaan laskuriprosessiksi. Laskuriprosessilla on seuraavia ominaisuuksia:

1. Tila-avaruus, eli satunnaismuuttujan $N(t)$ mahdollisten arvojen joukko on diskreetti: $\{0, 1, 2, \ldots\}$

2. Parametrijoukko $\mathbb{R}_+$ on jatkuva

3. $N(0) = 0$, eli hetkellä 0 tapausten laskeminen aloitetaan alusta

4. Todennäköisyys, että kaksi tai useampi vahinko sattuu yhtä aikaa, on nolla.

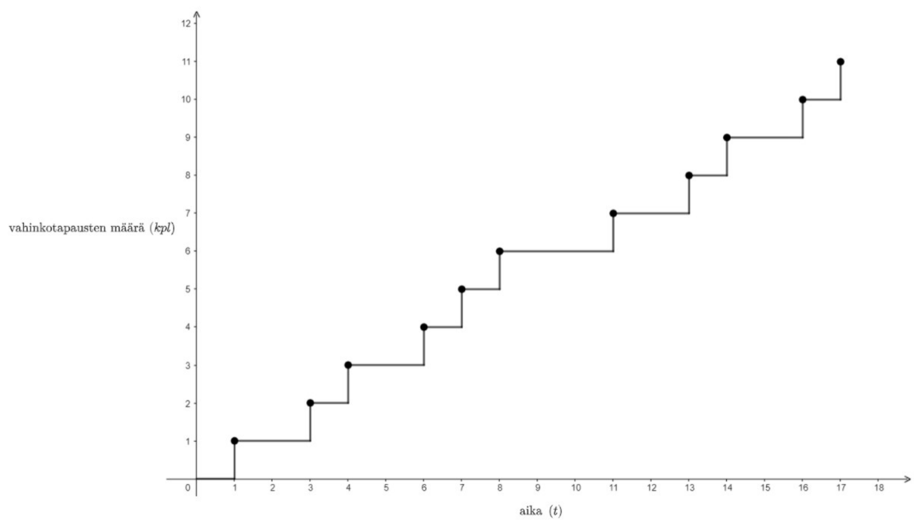
Kuvassa 1 havainnollistetaan laskuriprosessia. Alkuhetkellä ei ole sattunut yhtään tapausta. Tällöin siis $N(0) = 0$. Ensimmäinen tapaus sattuu satunnaisella ajanhetkellä, jolloin laskuriprosessin arvo, eli vahinkotapausten määrä kasvaa yhdellä. Laskuriprosessin kuvaama vahinkotapausten määrä kasvaa satunnaisella ajanhetkellä joko yhdellä, tai ei ollenkaan, koska todennäköisyys sille, että kaksi tai useampia vahinkoja sattuu yhtä aikaa, on nolla. Vahinko siis joko tapahtuu ajanhetkellä, jolloin vahinkotapausten määrä kasvaa yhdellä, tai vahinkoa ei tapahdu, jolloin vahinkotapausten määrä pysyy samana. Tämä huomataan laskuriprosessin porrasmaisena muotona, jossa askelman korkeus on aina yksi, mutta askelman pituus on satunnainen.

Vakuutusyhtiöön saapuvat vahinkovaateet ovat yleensä keskenään erisuuria. Laskuriprosessin avulla voidaan laskea vakuutusyhtiöön tietyllä aikavälillä saapuneiden vahinkovaateiden suuruuksien summa, eli kuinka paljon vakuutusyhtiön tulee maksaa vakuutuksenottajille sattuneista vahingoista. Merkitään tätä summaa $S(t)$. Summaa $S(t)$ kutsutaan *kokonaisvahinkomenoksi.* [1]. Määritellään kokonaisvahinkomeno seuraavaksi. Kokonaisvahinkomenon määritelmän lähteenä toimivat lähteet [7] ja [1]. Määritelmä 27 on myös lähteestä [1].

Määritelmä 26. *Kokonaisvahinkomeno.*
Vahinkovaateiden suuruuksien summaa aikavälillä $[0, t]$, eli kokonaisvahinkomenoa tällä aikavälillä, kuvaava prosessi on

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \ t \ \geq 0,$$

jossa muuttujat X_i ovat vakuutusyhtiöön saapuneiden vaateiden suuruuksia.



Kuva 1: Vahinkotapauksia laskeva laskuriprosessi.

Määritelmä 27. *Yhdistetty muuttuja.*
Jos määritelmän 26 yksittäiset vahingot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, sekä vahinkojen suuruudet X_i ovat samoin jakautuneita, sanotaan, että muuttuja

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t\ \geq 0$$

on yhdistetty muuttuja.

Vakuutusvaateiden voidaan ajatella saapuvan vakuutusyhtiöön satunnaisesti, koska vakuutuksenottajille sattuvien vahinkojen voidaan ajatella tapahtuvan satunnaisesti. *Laskuriprosessin lisäys* $N(t+h)$ kuvaa satunnaista kokonaisvahinkomenon kasvua aikavälillä $(t, t+h)$. Lisäys siis kasvattaa kokonaisvahinkomenon suuruutta $S(t)$. Satunnaismuuttujan $N(t)$ voidaan ajatella olevan kokonaisvahinkomenon lisäysten lukumäärä aikavälillä $(0, t)$. Vakuutusvaateiden satunnaisen saapumisen lisäksi voidaan olettaa *lisäysten riippumattomuus.* Tämä tarkoittaa sitä, etteivät laskuriprosessin erillisillä aikaväleillä tapahtuvat lisäykset riipu toisistaan. [1]. Määritellään seuraavaksi vielä eräs tärkeä ominaisuus laskuriprosessien lisäysten riippumattomuuteen liittyen lähteen [1] avulla.

Merkintä. Olkoon f funktio, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Merkitään

$$f(s, t] = f(t) - f(s),\ 0 \leq s < t < \infty$$

[2]

Tätä lyhennysmerkintää käytetään jatkossa Poisson-prosessin lisäyksistä puhuttaessa.

Määritelmä 28. *Lisäysten stationaarisuus.*
Laskuriprosessin lisäykset ovat stationaariset, jos aikavälillä sattuneiden tapausten

lukumäärä riippuu vain aikavälin pituudesta, eikä sen sijainnista aika-akselilla. Kiinteällä muuttujan t arvolla satunnaismuuttujalla $N(s+t) - N(s)$ on sama jakauma kaikilla muuttujan s arvoilla.

Homogeenisen Poisson-prosessin lisäysten statitonaarisuutta voidaan havainnollistaa myös seuraavasti. Mille tahansa muuttujille $0 \leq s < t$ ja $h > 0$ pätee

$$N\left(s, t\right] \stackrel{d}{=} N\left(s+h, t+h\right] \sim \mathrm{Pois}\left(\lambda\left(t-s\right)\right). \tag{3}$$

Määritelmä 29. *Samat äärellisulotteiset jakaumat.*
Olkoot $N_1 = \{N(t) \mid t \geq 0\}$ ja $N_2 = \{N(t) \mid t \geq 0\}$ stokastisia prosesseja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Prosesseilla N_1 ja N_2 sanotaan olevan samat äärellisulotteiset jakaumat, jos

$$P\left((N_1(t_1), \ldots, N_1(t_n)) \in A\right) = P\left((N_2(t_1), \ldots, N_2(t_n)) \in A\right)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, kaikilla $0 \leq t_1, t_2, \ldots, t_n < \infty$ ja kaikilla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Tätä merkitään $N_1 \stackrel{d}{=} N_2$.

2.3 Poisson-prosessi

Poisson-prosessi on yleisin käytössä olevista laskuriprosesseista. Poisson-prosessia on jo pitkään käytetty todennäköisyyslaskennan sovelluksissa ja stokastisten prosessien teoriassa. Filip Lundberg hyödynsi Poisson-prosessia laskuriprosessinsa N mallina vuoden 1903 lopputyössään, ja myöhemmin 1930-luvulla Harald Cramér kehitti laajemman kollektiivisen riskiteorian, jossa hän hyödynsi kokonaisvahinkomenoa $S(t)$ ja vaateiden saapumisaikoja T_i, jotka voidaan generoida Poisson-prosessin avulla. Nykyäänkin Poisson-prosessi on vakuutusmatematiikan keskiössä. [5]. Poisson-prosessin tapahtumat ovat satunnaisia, riippumattomia ja samoin jakautuneita. Tämä tarkoittaa siis sitä, etteivät aikaisemmilla aikaväleillä sattuneet vahingot kerro mitään tulevien tapauksien lukumäärästä, eivätkä tapaukset riipu toisistaan. Lisäksi tapahtumat noudattavat samaa satunnaisjakaumaa, Poisson-jakaumaa. Poisson-prosessilla on myös voimassa määritelmän 28 mukainen lisäysten stationaarisuus. Tutustutaan seuraavaksi Poisson-prosessiin ja sen ominaisuuksin tarkemmin. Poisson-prosessin tarkka määritelmä, määritelmä 30, on lähteestä [2].

Määritelmä 30. *Poisson-prosessi.*
Stokastinen prosessi $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi, jos

1. Laskeminen aloitetaan alkuhetkestä, eli $N(0) = 0$.

2. Prosessilla on riippumattomat lisäykset, eli mille tahansa t_i, $i = 0, \ldots, n$, $n \geq 1$, joille on voimassa $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, lisäykset $N\left(t_{i-1}, t_i\right] = N(t_i) - N(t_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$ ovat riippumattomia

3. On olemassa ei-vähenevä, oikealta jatkuva funktio $\mu : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\mu\left(0\right) = 0$, siten että lisäykset $N\left(s, t\right]$, $0 < s < t < \infty$ noudattavat Poisson-jakaumaa $\mathrm{Pois}\left(\mu\left(s, t\right]\right)$. Funktio μ on prosessin N keskiarvon funktio.

4. Todennäköisyydellä 1, polku $(N(t,\omega))$ on oikealta jatkuva kun $t \geq 0$ ja sillä on vasemman puoleinen raja-arvo kun $t > 0$.

Määritelmän mukaan Poisson-prosessin N jakauman määrittämiseksi riittää, että tiedetään sen keskiarvon funktio μ. Tämän funktion voidaan ajatella olevan prosessin sisäinen kello, sillä funktion $\mu(s,t]$ suuruus välillä $(s,t]$, $s < t$ määrittää sen, kuinka suuri lisäys $N(s,t]$ on. Tämä nähdään seuraavasta. Jos

$$N(0) = 0 \text{ ja } \mu(0) = 0,$$

Niin

$$N(t) = N(t) - N(0) = N(0,t] \sim \mathrm{Pois}\,(\mu(0,t]) = \mathrm{Pois}\,(\mu(t))\,.$$

Määritellään seuraavaksi Poisson-prosessin *intensiteettifunktio* λ ja tarkastellaan sen yhteyttä prosessin keskiarvon funktioon μ. Tämän avulla voidaan hahmottaa homogeenisen ja epähomogeenisen Poisson-prosessin eroja helpommin. Tässä lähteenä on [13].

Määritelmä 31. *Intensiteettifunktio.*
Prosessilla N on intensiteettifunktio, jos funktio μ on jatkuva. Funktio λ on stokastisen prosessin $N = \{N(t) \mid t \geq 0\}$ odotusarvo. Toisin sanoen, kaikilla arvoilla $s < t$ prosessin lisäysten keskiarvon funktio voidaan merkitä seuraavasti.

$$\mu(s,t] \;=\; \int_s^t \lambda(u)du, \;\; s < t \tag{4}$$

jollain positiivisella mitattavissa olevalla funktiolla λ. Tästä seuraa, että funktio μ on jatkuva.

Muuttuja λ on siis Poisson-prosessin *intensiteetti*, ja se kuvaa sitä nopeutta, jolla Poisson-prosessin mallintamat tapahtumat sattuvat. Intensitetti voi muuttua ajan kuluessa eikä siten ole aina vakio.

Kaksi erillistä Poisson-prosessia, joilla on eri intensiteetit voidaan yhdistää yhdeksi Poisson-prosessiksi. Tätä yhdistelmää kutsutaan *superpositioksi* [4] ja se todistetaan seuraavaksi.

Lause 4. Superpositio.
Olkoon $\{N_1(t) \mid t \geq 0\}$ *ja* $\{N_2(t) \mid t \geq 0\}$ *kaksi toisistaan riippumatonta Poisson-prosessia intensiteeteillä* λ_1 *ja* λ_2. *Tällöin prosessi* $\{N_1(t) + N_2(t) \mid t \geq 0\}$ *on Poisson-prosessi intensiteetillä* $\lambda_1 + \lambda_2$.

Todistus. Olkoon $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Tunnetuille $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m$ lisäykset

$$N_1(t_1), N_1(t_2) - N_1(t_1), \ldots, N_1(t_m) - N_1(t_{m-1}), N_2(t_1), N_2(t_2) - N_1(t_1), \ldots, N_2(t_m) - N_1(t_{m-1})$$

ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Tällöin myös

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_m) - N(t_{m-1})$$

ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Lisäksi $N_1(t_j) - N_1(t_{j-1}) \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1(t_j - t_{j-1}))$ ja $N_2(t_j) - N_2(t_{j-1}) \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2(t_j - t_{j-1}))$. Tällöin $N(t_j) - N(t_{j-1}) \sim \mathrm{Pois}((\lambda_1 + \lambda_2)(t_j - t_{j-1}))$, joten prosessi $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda_1 + \lambda_2$. $\square$

2.4 Homogeeninen Poisson-prosessi

Tunnetuin Poisson-prosesseista on *homogeeninen Poisson-prosessi*, eli sellainen Poisson-prosessi, jonka keskiarvon funktio μ on lineaarinen funktio:

$$\mu(t) = \lambda t,\ t \geq 0, \text{ jollekin } \lambda > 0.$$

Määritellään homogeeninen Poisson-prosessi seuraavaksi lähteen [1] avulla. Huomautus 4, Lauseet 5 ja 6 ovat myös lähteestä [1].

Määritelmä 32. *Homogeeninen Poisson-prosessi.*
Prosessi $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ on homogeeninen Poisson-prosessi intensiteetillä λ, jos

1. prosessilla on riippumattomat lisäykset
2. $N(s+t) - N(s) \sim \text{Pois}\,(\lambda t)$ kaikilla $s > 0$, $t > 0$.

Tällöin pätee siis

$$P\left(N\left(T_2\right) - N\left(T_1\right) = k\right) = \tfrac{\lambda^k (T_2 - T_1)^k}{k!} e^{-\lambda(T_2 - T_1)},$$

mille tahansa $T_2 > T_1$, kun $k = 0, 1, \ldots$.

Huomautus 4. Homogeenisen Poisson-prosessin lisäysten keskiarvo on siis vakiofunktio. Tämä voidaan nähdä myös tarkastelemalla määritelmän 31 yhtälöä 4. Yhdistetään tähän tarkasteluun myös määritelmän 32 kohdat 1 ja 2. Saadaan

$$\begin{aligned} N(s+t) - N(s) &= N(t), s > 0, t > 0 \\ \mu(0,t) &= \int_0^t \lambda(u) du \\ \mu(t) &= \lambda t \end{aligned} \tag{5}$$

Arvolla $\lambda = 1$ homogeenista Poisson-prosessia kutsutaan *standardiksi homogeeniseksi Poisson-prosessiksi.*

Lause 5. *Homogeenisen Poisson-prosessin tapahtumien väliset ajat T_i ovat Exp (λ) jakautuneita.*

Todistus. $P\left(T_i > t\right) = P\left(N\left(s+t\right) - N\left(s\right) = 0\right) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-(\lambda t)} = e^{-\lambda t}$,
joten $P\left(T_i \leq t\right) = 1 - e^{-\lambda t}$, eli $T_i \sim \text{Exp}\,(\lambda)$. □

Poisson-prosessin kuvaamat tapahtuman ajanhetket ovat tasajakautuneita yli sen välin, jolla tapahtuma on sattunut. Tämä tarkoittaa sitä, että jos ajanhetkeen t mennessä on sattunut tarkalleen yksi tapaus, se tapahtuu yhtä suurella todennäköisyydellä kaikilla samanpituisilla välin $(0, t]$ osaväleillä. Tämä ominaisuus seuraa siitä, Poisson-prosessilla on stationaariset ja riippumattomat lisäykset. Todistetaan tämä ominaisuus seuraavaksi.

Lause 6. *Oletetaan, että $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi ja että välillä $(0, t]$ on sattunut yksi tapaus. Olkoon Y_i tämän tapahtuman tapahtumahetki. Silloin $Y_i \sim$ Tas$(0, t)$.*

Todistus. Olkoon $x < t$. Tällöin

$$P(Y_i \leq x) = P(N(x) = 1 \mid N(t) = 1).$$

Koska

$$\begin{aligned} P(N(x) = 1 \cap N(t) = 1) &= P(N(x) = 1 \cap N(t) - N(x) = 0) \\ &= P(N(x) = 1) P(N(t-x) = 0), \end{aligned}$$

joista saadaan

$$\begin{aligned} P(Y_i \leq x) &= \frac{P(N(x) = 1) P(N(t-x) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda(t-x)}}{e^{-\lambda t} \lambda t} \\ &= \frac{e^{-\lambda x} \lambda x \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda x}}{e^{-\lambda t} \lambda t} \\ &= \frac{x}{t} \end{aligned}$$

□

2.4.1 Homogeeninen Poisson-prosessi uudistuvana prosessina

Seuraavaksi esitellään uudistuvat prosessit lyhyesti ja näytetään, kuinka homogeeninen Poisson-prosessi voidaan esittää uudistuvana prosessina. Tässä luvussa lähteenä on lähde [2] tekstissä mainittuja poikkeuksia lukuun ottamatta. Lauseen 7 todistuksessa on käytetty lähteen [2] lisäksi tekoälyä.

Uudistuvat prosessit (lähde [8]) ovat sellaisia (vahinkovaateiden) saapumisprosesseja, joilla (vaateiden) saapumisajat ovat positiivisia, riippumattomia ja samoin jakautuneita. Uudistuviksi näitä prosesseja kutsutaan siksi, että prosessi alkaa aina uudelleen jokaisen alkupisteen S_n kohdalla. Yksittäinen alkupiste voidaan laskea seuraavasti.

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n,$$

jossa $T_i \geq 0$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita saapumisaikoja. Alkupiste on siis yksinkertaisesti vain saapumisaikojen summa. Alkupiste ja laskuriprosessi voidaan liittää toisiinsa seuraavien yhtälöiden avulla.

$$\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\} \tag{6}$$

$$\{S_n > t\} = \{N(t) < n\} \tag{7}$$

Prosessin $N(t)$ uudelleen alkamista havainnollistetaan seuraavaksi. Jos n:s saapuminen tapahtuu kun $S_n = \tau$, tästä eteenpäin laskiessa saadaan, että j:nnes seuraava alkamisaika on hetkellä $S_{n+j} - S_n = T_{n+1} + \cdots + T_{n+j}$. Joten tunnetulle $S_n = \tau$ uudistuva prosessi riippumattomilla ja samoin jakautuneilla saapumisajoilla on $\{N(\tau + t) - N(\tau) \mid t \geq 0\}$, ja tällä on sama jakauma kuin alkuperäisellä uudistuvalla prosessilla.

Ennen kuin tarkastellaan uudistuvia prosesseja, esitellään vielä lyhennysmerkintä, jota käytetään, kun homogeeninen Poisson-prosessi esitellään uudistuvana prosessina. Tämä lyhennysmerkintä on tuttu esimerkiksi henkivakuutusmatematiikasta tilasiirtymiä kuvaavana siirtymätodennäköisyyksien funktiona.

Merkintä. Tarkastellaan peräkkäisiä lisäyksiä $N(t) = N(0,t]$ ja $N(t,t+h]$ kun $t, h > 0$. Tällöin merkintä

$$p_{k,k+l}(t, t+h) = P(N(t) = k, N(t, t+h] = l)$$

kuvaa todennäköisyyttä sille, että lisäysten lukumäärä kasvaa muuttujan k arvon verran aikavälillä $(0, t)$ ja että lisäysten lukumäärä kasvaa muuttujan l verran aikavälillä $(t, t+h)$. Toisin sanoen merkintä kuvaa todennäköisyyttä sille, että hetkellä t lisäyksien arvo on k ja hetkeen $t+h$ mennessä se on kasvanut arvoon $k+l$.

Maininta. Merkintä perustuu Markov-ketjujen teoriaan, johon ei tässä tutkielmassa syvennytä tarkemmin. Mainittakoon kuitenkin sivuhuomautuksena lyhyesti, mihin merkintä pohjautuu ja miksi sitä voidaan käyttää uudistuvien prosessien yhteydessä. Lähteen [8] mukaan uudistuva Markov-ketju, jolla on äärellinen määrä tiloja ja siirtymämatriisi P, joka on alkutilassa i ajanhetkellä 0, ja jonka ensimmäinen paluuhetki tilaan i on ajanhetki n, on tästä ajanhetkestä eteenpäin todennäköisyydeltään kopio vastaavasta Markov-ketjusta, joka on ajanhetkessä 0. Tämä tarkoittaa sitä, että todennäköisyydellä p_{ij} ajanhetkellä 1 ketju on tilassa j, ja kun palaamisaika tilaan i on ajanhetki n, on ketju tilassa j ajanhetkellä $n+1$ todennäköisyydellä p_{ij}. Vastaavasti jokaiselle $m > 0$ pätee

$$P(X_1 = j, \ldots, X_m = k \mid X_0 = i) = P(X_{n+1} = j, \ldots, X_{n+m} = k \mid X_n = i).$$

Jokainen seuraava paluu tilaan i tunnetulla ajanhetkellä n aloittaa siis uuden "todennäköisyyskopion" Markov-ketjusta, joka alkaa tilasta i ajanhetkellä 0. Tästä seuraa, että siirtymisajat tilaan i voidaan kuvata uudistuvan prosessin saapumisaikojen väliaikoina.

Määritellään seuraavaksi uudistuvat prosessit tarkasti ja tarkastellaan sen jälkeen homogeenista Poisson-prosessia uudistuvana prosessina.

Määritelmä 33. *Uudistuva prosessi.*
Olkoon (W_i) riippumaton ja samoin jakautunut jono positiivisia satunnaismuuttujia. Tällöin satunnaiskulkua

$$T_0 = 0, \ T_n = W_1 + \cdots + W_n, \ n \geq 1$$

kutsutaan *uudistuvaksi prosessiksi* ja laskuriprosessia

$$N(t) = \{i \geq 1 \mid T_i \leq t\}, \ t \geq 0$$

sitä vastaavaksi *uudistuvaksi (laskuri-) prosessiksi.*

Seuraavaksi osoitetaan, että mille tahansa homogeeniselle Poisson-prosessille, jolla on intensiteetti λ on olemassa esitys

$$N(t) = \{i \geq 1 \mid T_i \leq t\}, \ t \geq 0, \tag{8}$$

jossa

$$T_n = W_1 + \cdots W_n,\ n \geq 1, \tag{9}$$

ja jossa (W_i) on riippumaton ja samoin jakautunut eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattava jono. Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan asettaa $T_0 = 0$. Koska satunnaiskulkua (T_n), jolla on ei-negatiiviset askelpituudet W_n kutsutaan myös *uudistuvaksi jonoksi*, prosessia N, jolla on esitykset (8) ja (9) yleiselle jonolle (W_i), nimitetään *uudistuvaksi (laskuri-) prosessiksi.*

Lause 7. Homogeeninen Poisson-prosessi uudistuvana prosessina.

1. *Prosessi N, joka saadaan esitysten 8 ja 9 avulla, ja jolla on riippumaton ja samoin jakautunut eksponenttijakaumaa Exp(λ) noudattava jono (W_i) muodostaa homogeenisen Poisson-prosessin intensiteetillä $\lambda > 0$.*

2. *Olkoon N homogeeninen Poisson-prosessi intensiteetillä λ ja vaateiden saapumisajoilla $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$. Tällöin prosessilla N on esitys (8) ja jonolla (T_i) on esitys (9) riippumattomalla ja samoin jakautuneella eksponenttijakaumaa Exp(λ) noudattavalla jonolla (W_i).*

Todistus.
1. Aloitetaan esityksen (9) mukaisella uudistuvalla jonolla (T_i) ja asetetaan $T_0 = 0$ yksinkertaisuuden vuoksi. Määritelmän 30 mukainen Poisson-prosessin ominaisuus $N(0) = 0$ seuraa jonon (T_i) määritelmästä, koska uudistuvan prosessin määritelmän 33 mukaan $W_1 > 0$ ja polku $(N(t,\omega))_{t\geq 0}$ saa arvon i välillä $[T_i, T_{i+1})$ ja ajanhetkellä T_{i+1} se hyppää arvoon $i+1$. Otospolut ovat siis oikealta jatkuvia kun $t \geq 0$ ja niillä on vasemmanpuoleinen raja-arvo kun $t > 0$. Uudistuva jono (T_i) siis täyttää Poisson-prosessin määritelmän mukaiset ominaisuudet 1 ja 4. Osoitetaan seuraavaksi, että prosessi $N(t)$ noudattaa Poisson-jakaumaa $\mathrm{Pois}(\lambda t)$. Ratkaiseva suhde saadaan yhtälöstä

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}, n \geq 0. \tag{10}$$

Koska $T_n = W_1 + \cdots + W_n$ on n kappaleen riippumattomien ja samoin jakautuneiden eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattavien satunnaismuuttujien summa, noudattaa T_n gamma-jakaumaa $\Gamma(n,\lambda)$ kun $n \geq 1$:

$$P(T_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, x \geq 0.$$

Tällöin

$$P(N(t) = n) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Eli satunnaismuuttuja $N(t)$ noudattaa Poisson-jakaumaa $\mathrm{Pois}(\lambda t)$.
Todistetaan seuraavaksi, että prosessi N toteuttaa Poisson-prosessin määritelmän

mukaiset ominaisuudet 2 ja 3. Tarkastellaan peräkkäisiä lisäyksiä $N(t) = N(0,t]$ ja $N(t, t+h)$ kun $t, h > 0$. Täytyy siis osoittaa, että mille tahansa $k, l \in \mathbb{N}_0$ pätee

$$\begin{aligned} p_{k,k+l}(t, t+h) &= P(N(t) = k, N(t, t+h] = l) \\ &= P(N(t) = k) P(N(t, t+h] = l) \\ &= P(N(t) = k) P(N(h) = l) \\ &= e^{-\lambda(t+h)} \frac{(\lambda t)^k (\lambda h)^h}{k! l!} \end{aligned} \tag{11}$$

Tapaus $l = k = 0$ on triviaali, joten aloitetaan tapauksesta $l = 0, k \geq 1$. Käytetään yhtälöä

$$\{N(t) = k, N(t, t+h] = l\} = \{N(t) = k, N(t+h) = k+l\}. \tag{12}$$

Käyttämällä yhtälöitä (10) ja (12) saadaan

$$\begin{aligned} p_{k,k+l}(t, t+h) &= P(T_k \leq t < T_{k+1}, T_k \leq t+h < T_{k+1}) \\ &= P(T_k \leq t, t+h < T_k + W_{k+1}). \end{aligned}$$

Koska tiedetään, että muuttuja T_k noudattaa $\Gamma(k, \lambda)$-jakaumaa tiheydellä $\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$, ja että muuttuja W_{k+1} noudattaa Exp(λ)-jakaumaa tiheydellä $\lambda e^{-\lambda x}$, saadaan

$$\begin{aligned} p_{k,k+l}(t, t+h) &= \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda (\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{t+h-z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda z} dx dz \\ &= \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda (\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t+h-z)} dz \\ &= e^{-\lambda(t+h)} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Tapaukselle $l \geq 1$ käytetään toista ehdollistavaa argumenttia ja yhtälöä (10):

$$\begin{aligned} & p_{k,k+l}(t, t+h) \\ = \; & P(T_k \leq t \leq T_{k+1}, T_{k+1} \leq t+h < T_{k+l+1}) \\ = \; & \mathbb{E}\left[I_{\{T_k \leq t \leq T_{k+1} \leq t+h\}} P(T_{k+l} - T_{k+1} \leq t+h - T_{k+1} < T_{k+l+1} - T_{k+1} \mid T_k, T_{k+1}) \right]. \end{aligned}$$

Olkoon nyt laskuriprosessi N' itsenäinen kopio prosessista N, eli toisin sanoen hyödynnetään laskuriprosessin lisäysten stationaarisuuden määritelmää 28 ja sen yhtälöä (3). Nyt siis $N' \overset{d}{=} N$. Käyttämällä nyt yhtälöä (10) ja vaateiden saapumisiakojen T_{k+1} ja $(T_{k+l} - T_{k+1}, T_{k+l+1} - T_{k+1})$ riippumattomuutta nähdään että

$$
\begin{aligned}
& p_{k,k+l}\left(t, t+h\right) \\
= \;& \mathbb{E}\left[I_{\{T_k \le t \le T_{k+1} \le t+h\}} P\left(N'\left(t+h-T_{k+1}\right) = l-1 \mid T_{k+1}\right)\right] \\
= \;& \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda\left(\lambda z\right)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{t-z}^{t+h-z} \lambda e^{-\lambda z} P\left(N\left(t+h-z-x\right) = l-1\right) dx dz \\
= \;& \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{\lambda\left(\lambda z\right)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{t-z}^{t+h-z} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+h-z-x)} \frac{\left(\lambda\left(t+h-z-x\right)\right)^{l-1}}{(l-1)!} dx dz \\
= \;& e^{-\lambda(t+h)} \int_0^t \frac{\lambda\left(\lambda z\right)^{k-1}}{(k-1)!} dz \int_0^h \frac{\lambda\left(\lambda x\right)^{l-1}}{(l-1)!} dx \\
= \;& e^{-\lambda(t+h)} \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!} \frac{\left(\lambda h\right)^l}{l!}.
\end{aligned}
$$

Tämä on haluttu yhtälö (11), koska

$$
P\left(N\left(t, t+h\right] = l\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(N\left(t\right) = k, N\left(t, t+h\right] = l\right)
$$

Yhtälöstä (11) seuraa myös

$$
P\left(N\left(t\right) = k, N\left(t, t+h\right] = l\right) = P\left(N\left(t\right) = k\right) P\left(N\left(h\right) = l\right).
$$

2. Tarkastellaan sitten homogeenistä Poisson-prosessia, jolla on saapumisajat $0 \le T_1 \le T_2 \le \cdots$ ja intensiteetti $\lambda > 0$. Tässä osassa on käytetty ChatGPT-tekoälytyökalua todistuksen laatimiseen. Väitteen todistamiseksi tulee osoittaa, että on olemassa riippumattomat ja samoin jakautuneet eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattavat satunnaismuuttujat W_i, joille $T_n = W_1 + \cdots + W_n$. Toisin sanoen täytyy osoittaa, että mille tahansa $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n,\ n \ge 1$ pätee

$$
\begin{aligned}
& P\left(T_1 \le x_1, \ldots, T_n \le x_n\right) \\
= \;& P\left(W_1 \le x_1, \ldots, W_1 + \cdots + W_n \le x_n\right) \\
= \;& \int_{w_1=0}^{x_n} \lambda e^{-\lambda w_1} \int_{w_2=0}^{x_2-w_1} \lambda e^{-\lambda w_2} \cdots \int_{w_n=0}^{x_n-w_1-\cdots-w_{n-1}} \lambda e^{-\lambda w_n} dw_n \cdots dw_1.
\end{aligned}
$$

Hyödynnetään tässä yhtälöä

$$
\{T_1 \le x_1, \ldots, T_n \le x_n\} \quad = \quad \{N(x_1) \ge 1, \ldots, N(x_n) \ge n\}, \tag{13}
$$

jonka mukaan yhteispistetodennäköisyys voidaan kirjoittaa todennäköisyytenä sille, että $N\left(x_k\right) \ge k$, jokaisella $1, \ldots, n$ pätee

$$
P\left(T_1 \le x, \ldots, T_n \le x_n\right) \quad = \quad P\left(N\left(x_1\right) \ge 1, N\left(x_2\right) \ge 2, \ldots, N\left(x_n\right) \ge n\right) \tag{14}
$$

Koska laskuri $N\left(x_k\right)$ on kumulatiivinen sattuneiden tapausten summa ja $N\left(x_k\right) \ge N\left(x_{k-1}\right)$, voidaan nämä ehdot laskea rekursiivisesti hyödyntäen Poisson-jakauman

ominaisuuksia.
Kun $k = 1 : N(x_1) \geq 1 :$

$$\begin{aligned} P(N(x_1) \geq 1) &= 1 - P(N(x_1) = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda x_1} \end{aligned}$$

Kun $k = 2 : N(x_2) \geq 2 \mid N(x_1) \geq 1 :$

Poisson-prosessin määritelmästä saadaan

$$N(x_2) = N(x_1) + N((x_1, x_2]),$$

missä $N((x_1, x_2]) \sim \text{Pois}(\lambda(x_2 - x_1))$ ja $N((x_1, x_2])$ on riippumaton prosessista $N(x_1)$. Ehto $N(x_1) \geq 2$ tarkoittaa sitä, että aikavälillä $[0, x_2]$ on tapahtunut vähintään kaksi tapahtumaa. Täten saadaan

$$\begin{aligned} P(N(x_2) \geq 2 \mid N(x_1) \geq 1) &= P(N(x_2 - x_1) \geq 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Kun $k = n : N(x_n) \geq n \mid N(x_{n-1}) \geq n - 1 :$

$$\begin{aligned} P(N(x_n) \geq n \mid N(x_{n-1}) \geq n - 1) &= P(N(x_n - x_{n-1}) \geq 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda(x_n - x_{n-1})} \end{aligned} \tag{15}$$

Yhdistämällä nämä ehdolliset todennäköisyydet saadaan yhtälö

$$P(T_1 \leq x_1, \ldots, T_n \leq x_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda(x_k - x_{k-1})}\right),$$

missä $x_0 = 0$. Koska yhtälö (9) on voimassa ja tiedetään, että $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ja eksponenttijakaumalla on muistittomuusominaisuus 21, vastaavat ehdolliset todennäköisyydet iteratiivista integraalia

$$\int_{w_1=0}^{x_n} \lambda e^{-\lambda w_1} \int_{w_2=0}^{x_2 - w_1} \lambda e^{-\lambda w_2} \cdots \int_{w_n=0}^{x_n - w_1 - \cdots - w_{n-1}} \lambda e^{-\lambda w_n} dw_n \cdots dw_1.$$

□

Käydään seuraavaksi läpi esimerkki, joka hyödyntää Poisson-prosessia uudistuvana prosessina. Esimerkki on lähteestä [2].

Esimerkki 1. *Tarkasteluparadoksi.*
Oletetaan, että tarkastelun kohteena ovat vahinkovaateet, jotka saapuvat vakuutusyhtiöön noudattaen homogeenista Poisson-prosessia N, jolla on intensiteetti λ. Lauseen 7 mukaan tämän prosessin saapumisaikojen väliset ajat $W_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geq 1$, kun $T_0 = 0$, muodostavat riippumattoman ja samoin jakautuneen jonon, joka noudattaa eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(\lambda)$. Tarkastellaan tällaista vakuutuskantaa kiinteällä ajanhetkellä t. Viimeisin vahinkovaade on saapunut ajanhetkellä $T_{N(t)}$ ja seuraava vaade saapuu ajanhetkellä $T_{N(t)+1}$. Voidaan esittää seuraavat kolme kysymystä.

1. Mitä jakaumaa funktio $B(t) = t - T_{N(t)}$ noudattaa? Toisin sanoen, mikä on välin $\big(T_{N(t)}, t\big]$ pituus, eli kuinka paljon aikaa viimeisimmän vaateen saapumisesta on kulunut?
2. Mitä jakaumaa funktio $F(t) = T_{N(t)+1} - t$ noudattaa? Toisin sanoen, mikä on välin $\big(t, T_{N(t)+1}\big]$ pituus, eli kuinka pitkän ajan päästä seuraava vaade saapuu?
3. Mitä voidaan sanoa funktioiden $B(t)$ ja $F(t)$ yhteisjakaumasta?

Funktiota $B(t)$ voidaan kutsua *taaksepäin toistuvaksi ajaksi* tai *iäksi* ja funktiota $F(t)$ *edessäpäin toistuvaksi ajaksi*, *ylimääräiseksi ajaksi* tai *jäännösajaksi.* Intuitiivisesti voitaisiin ajatella, että $P(B(t) \leq x_1) < 1 - e^{-\lambda x_1},\ x_1 < t$ ja $P(F(t) \leq x_2) < 1 - e^{-\lambda x_2},\ x_2 > 0$, koska saapumisajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja ne noudattavat jakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$, ja ajanhetki t on jossakin kahden saapumisajan välissä. Tällainen päättely ei kuitenkaan ole perusteltua, sillä funktioiden $B(t)$ ja $F(t)$ yhteispistetodennäköisyysfunktio muuttujille x_1 ja x_2 on

$$f_{B(t),F(t)}(x_1, x_2) = P(B(t) \leq x_1, F(t) \leq x_2)$$

Koska $B(t) < t$ melko varmasti, käsitellään tapaukset $x_1 < t$ ja $x_1 \geq t$ erikseen. Tarkastellaan ensin tilannetta $x_1 < t$ ja $x_2 > 0$. Nyt

$$\begin{aligned} \{B(t) \leq x_1\} &= \{t - x_1 \leq T_{N(t)} \leq t\} = \{N(t - x_1, t] \geq 1\} \\ \{F(t) \leq x_2\} &= \{t < T_{N(t)+1} \leq t + x_2\} = \{N(t, t + x_2] \geq 1\} \end{aligned}$$

Nyt, koska prosessilla N on stationaariset ja riippumattomat lisäykset, on funktioiden $B(t)$ ja $F(t)$ yhteispistetodennäköisyysfunktio

$$\begin{aligned} f_{B(t),F(t)}(x_1, x_2) &= P(N(t - x_1, t] \geq 1, N(t, t + x_2] \geq 1) \\ &= P(N(t - x_1, t] \geq 1)P(N(t, t + x_2] \geq 1) \\ &= (1 - e^{-\lambda x_1})(1 - e^{-\lambda x_2}). \end{aligned} \tag{16}$$

Samanlaisella laskulla ja yhtälöllä (16) tapaukselle $x_1 \geq t$, $x_2 \geq 0$ saadaan

$$f_{B(t),F(t)}(x_1, x_2) = \left[(1 - e^{-\lambda x_1})I_{[0,t)]}(x_1) + I_{[t,\infty)]}(x_1)\right]\left(1 - e^{-\lambda x_2}\right).$$

Koska funktiot $B(t)$ ja $F(t)$ ovat riippumattomia, funktio $F(t)$ noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$ ja funktio $B(t)$ noudattaa katkaistua eksponenttijakaumaa, jossa tapahtuu hyppäys kohdassa t, saadaan

$$P(B(t) \leq x_1) = 1 - e^{-\lambda x_1},\ x_1 < t \ \text{ ja } P(B(t) = t) = e^{-\lambda t}.$$

Tämä tarkoittaa erityisesti sitä, että edessäpäin toistuvalla ajalla $F(t)$ on sama eksponenttijakauma $\mathrm{Exp}(\lambda)$ kuin Poisson-prosessin N saapumisaikojen välisillä ajoilla W_i. Tämä ominaisuus liittyy läheisesti eksponenttijakauman muistittomuusominaisuuteen:

$$P(W_1 > x + y \mid W_1 > x) = P(W_1 > y),\ x, y \geq 0,$$

ja lisäksi se näkyy Poisson-prosessin määritelmän mukaisissa riippumattomissa lisäyksissä.
Myös seuraava funktion $B(t)$ ominaisuus on mielenkiintoinen ja osoittaa sen, että asymptoottisessa mielessä sekä funktio $B(t)$ että funktio $F(t)$ ovat riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa, jonka parametri on λ:

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t) \leq x_1) = 1 - e^{-\lambda x_1}, \ x_1 > 0.$$

2.5 Epähomogeeninen Poisson-prosessi

Todellisuudessa esimerkiksi vahinkovaateiden saapumista kuvaavan homogeenisen Poisson-prosessin intensiteetti vaihtelee ajan kuluessa, eikä se siis noudata vain yhtä tiettyä lineaarista funktiota koko tarkasteluvälin ajan. Jos tämän intensiteetin vaihtelu olisi tarkasti ennustettavissa, voitaisiin vahinkovaateiden lukumääräprosessia mallintaa *epähomogeenisen Poisson-prosessin* avulla.
Homogeenisella Poisson-prosessilla sen sisäinen kello, prosessin N keskiarvon funktio μ, joka määritellään Poisson-prosessin määritelmässä 30 ja kohdassa 3, on lineaarinen funktio. Epähomogeeninen Poisson-prosessi eroaa homogeenisesta Poisson-prosessista vain siinä, että sen funktio μ ei ole lineaarinen funktio. [1]. Määritellään seuraavaksi epähomogeeninen Poisson-prosessi.

Määritelmä 34. *Epähomogeeninen Poisson-prosessi.*
Prosessi $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ on epähomogeeninen Poisson-prosessi, jos

1. prosessilla on riippumattomat lisäykset
2. $N(s+t) - N(s) \sim \text{Pois}\left(\int_s^{s+t} \lambda(u)du\right)$

[1]

Epähomogeeninen ja homogeeninen Poisson-prosessi liittyvät läheisesti toisiinsa; deterministisellä ajan muutoksella voidaan muuttaa standardi homogeeninen Poisson-prosessi epähomogeeniseksi Poisson-prosessiksi ja vastaavasti myös toisinpäin [2]. Epähomogeenisen prosessin muuntaminen helpommin käsiteltävään standardiin homogeeniseen prosessiin on usein hyödyllistä käytännön sovelluksissa, koska standardia homogeenista prosessia on sen yksinkertaisuuden vuoksi helpompi käsitellä teoreettisesti kuin monimutkaisempaa epähomogeenista prosessia [14]. Ennen tämän muutoksen mahdollisuuden tarkastelemista tutustutaan muunnoksen mahdollistavan lauseen todistamisessa tarvittavaan kahden prosessin äärellisulotteisiin jakaumiin liittyvään määritelmään. Tämä määritelmä ja lause 8 ovat lähteestä [14].

Lause 8. *Jos μ on epähomogeenisen Poisson-prosessin N lisäysten keskiarvofunktio ja $\tilde{N}$ on standardi homogeeninen Poisson-prosessi, niin*

1. $\{N(t) \mid t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{\tilde{N}(t) \mid t \geq 0\}$
2. *Jos μ on jatkuva, kasvava ja* $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \infty$, *niin*
   $\{N(\mu^{-1}(t)) \mid t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{\tilde{N}(t) \mid t \geq 0\}$

Todistus. 1. Osoitetaan, että prosesseilla on sama pistetodennäköisyysfunktio, jolloin prosessit ovat jakaumaltaan samat:

$$\begin{aligned} P(N(t)-N(s)=m) &= e^{-(\mu(t)-\mu(s))}\frac{(\mu(t)-\mu(s))^m}{m!} \\ &= P(\tilde{N}(\mu(t))-\tilde{N}(s)=m). \end{aligned}$$

Lisäksi, kun $A \subset \{0,1,2,\ldots\}$ eli $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$, niin

$$\begin{aligned} P(N(t)\in A) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t)=a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t)-N(0))=a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\tilde{N}(\mu(t))-\tilde{N}(\mu(0))=a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\tilde{N}(\mu(t)=a_k) \\ &= P(\tilde{N}(\mu(t))\in A) \end{aligned}$$

2. Funktion μ oletuksista seuraa, että sillä on olemassa käänteisfunktio. Nyt vastaavasti kuin kohdassa 1, saadaan

$$\begin{aligned} & P(N(\mu^{-1}(t))-N(\mu^{-1}(s))=m) \\ &= e^{-(\mu(\mu^{-1}(t))-\mu(\mu^{-1}(s)))}\frac{(\mu(\mu^{-1}(t))-\mu(\mu^{-1}(s)))^m}{m!} \\ &= e^{-(t-s)}\frac{(t-s)^m}{m!} \\ &= P(\tilde{N}(t)-\tilde{N}(s)=m) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}(t)\in A) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\tilde{N}(t)=a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\tilde{N}(t)-\tilde{N}(0)=a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(\mu^{-1}(t))-N(\mu^{-1}(0))=a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(\mu^{-1}(t))=a_k) \\ &= P(N(\mu^{-1}(t))\in A) \end{aligned}$$

□

3 Tuhotodennäköisyys ja Cramér-Lundbergin malli

Riskiteoria on synonyymi vahinkovakuutusmatematiikalle, joka käsittelee vakuutusyhtiölle saapuvien vaateiden määrien mallintamista ja sitä, minkä suuruisia vakuutusmaksujen tulee olla, jotta vakuutusyhtiö ei joudu konkurssiin. Konkurssitodennäköisyyttä kutsutaan myös *tuhotodennäköisyydeksi*. Vakuutusyhtiön varallisuutta pitkällä aikavälillä voidaan mallintaa riskiprosessin avulla.[1] ja [2]. Tässä tutkielmassa riskiprosessin tapaukset ovat vakuutusyhtiöön saapuvia vahinkovaateita, jotka noudattavat Poisson-jakaumaa.

Seuraavaksi tarkastellaan yhtä vahinkovakuutusmatematiikan yleisimmistä malleista, *Cramér-Lundbergin mallia*, ja vakuutusyhtiön tuhotodennäköisyyttä. Tämän luvun lähteinä ovat lähteet [1], [2], [3], [7] ja [10].

3.1 Cramér-Lundbergin malli

Modernin riskiteorian isänä voidaan pitää ruotsalaista aktuaaria Filip Lundbergia, joka vuonna 1903 käsitteli työssään stokastista mallia vakuutusliiketoiminnalle ja muotoili myöhemmin riskiprosessin yhdistetyn Poisson-mallin [3]. Lundberg esitteli myös yksinkertaisen mallin, jonka avulla voidaan kuvata homogeenisen vakuutuskannan perusdynamiikkaa. Mallin avulla voidaan arvioida, kuinka haavoittuvainen vakuutusyhtiö on, ja mikä on sen tuhotodennäköisyys. Tämän mallin voidaan ajatella olevan vain tyylitelty kuvaus todellisuudesta, mutta se tiivistää hyvin kaiken oleellisen vakuutusyhtiön ylijäämän dynamiikasta. Tämän vuoksi Cramér-Lundberg on käytetyin malli vararikkotodennäköisyyttä tutkittaessa.
Mallissa ovat voimassa seuraavat kolme oletusta:

1. Vahinkovaateita saapuu tarkasteltavalla aikavälillä satunnainen määrä. Saapumisajoille $\{T_i\}$ pätee $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$.

2. Ajan hetkellä T_i saapuvan i:nnen vaateen koko on X_i. Vaateiden kokojen jono (X_i) muodostuu riippumattomista ja samoin jakautuneista ei-negatiivisista satunnaismuuttujista.

3. Vaateiden kokojen prosessi $\{X_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ ja vaateiden saapumisaikojen prosessi $\{T_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ ovat toisistaan riippumattomia.

Mallin mukaan kokonaisvahinkomeno voidaan kirjoittaa kuten määritelmässä 27:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \ t \ \geq 0.$$

Prosessin $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ sanotaan olevan yhdistetty Poisson-prosessi, koska vahinkovaateet noudattavat Poisson-jakaumaa intensiteetillä λ. [10].

Vakuutusyhtiön toiminta perustuu vakuutuksenottajien maksamiin vakuutusmaksuihin, joiden turvin vakuutusyhtiö pystyy korvaamaan sattuneet vahingot sekä kattamaan toimintaansa liittyvät kustannukset. Vakuutusmaksut vaikuttavat positiivisesti vakuutusyhtiön kassavirtaan. Korvattavat vahingot puolestaan negatiivisesti. Vakuutusyhtiön tuleekin pyrkiä toiminnassaan ylläpitämään tarpeeksi suurta pääomaa, jotta sen todennäköisyys joutua konkurssiin olisi pieni. Vakuutusyhtiö saa jatkaa toimintaansa, mikäli sen vararikkotodennäköisyys, eli tuhotodennäköisyys on riittävän pieni.[1].

Seuraavaksi käydään läpi, kuinka vakuutusmaksut voidaan muodostaa Cramér-Lundbergin klassisen mallin oletusten ollessa voimassa, ja millainen täytyy vakuutusyhtiön (kauden) alkupääoma olla, että yhtiö saa jatkaa toimintaansa. Toisin sanoen kuinka suuri vakuutusyhtiön alkupääoman tulee olla, jotta yhtiön tuhotodennäköisyys on riittävän pieni toiminnan jatkumisen sallimiseksi.

Määritelmä 35. *Vakuutusmaksujen funktio.*
Vakuutusmaksujen kertymistä aikavälillä $[0, t]$ voidaan mallintaa funktiolla $p(t)$. Olkoon $p : [0, \infty) \to [0, \infty)$ lineaarinen funktio

$$p(t) = ct, t \geq 0,$$

jossa $c > 0$ on vakuutusmaksujen kertymistä kuvaava vakio.

Määritelmä 36. [7] *Riskiprosessi.*
Prosessia $\{U(t) \mid t \geq 0\}$, jossa

$$U(t) = U_0 + p(t) - S(t) = U_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

ja jossa U_0 on alkuperäinen pääoma, $p(t)$ on määritelmän 35 mukainen vakuutusmaksujen funktio ja $S(t)$ on määritelmän 27 mukainen kokonaisvahinkomeno, kutsutaan riskiprosessiksi, kun $t \geq 0$.

$U(t)$ kuvaa siis vakuutusyhtiön pääoman suuruutta ajanhetkellä t.

Lause 9. *[7] Aikavälillä $[0, t]$ sattuneiden tapausten vaateiden suuruuksien summan odotusarvo Cramér-Lundbergin mallissa on*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} X_i\right] = \lambda \frac{1}{r}\left(1 - e^{-rt}\right) \cdot \mathbb{E}[X_1], \tag{17}$$

jossa $r > 0$ on vakuutusmaksujen summan nykyhetkeen diskonttaamisessa käytetty korko ja λ on vaateiden saapumista kuvaavan homogeenisen Poisson-prosessin intensiteetti. Tämä kuvaa keskimäärin sitä rahasummaa, jonka vakuutusyhtiö tarvitsee korvatakseen aikavälillä $[0, t]$ sattuneet vahingot.

Todistus. Merkitään vahinkovaateiden kokonaissummaa kuten määritelmässä 27. Tämän mallin nykyhetkeen diskontattu summa aikaväliltä $[0, t]$ korolla $r > 0$ on

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} X_i, t \geq 0.$$

Lauseen A2 mukaan mille tahansa $t \geq 0$ pätee

$$S(t) \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rtU_i} X_i$$

jossa $\{U_i\}$ on riippumaton ja samoin jakautunut jono, jonka jäsenet ovat $\text{Tas}\,(0,1)$ jakautuneita. Hyödynnetään seuraavaksi liitteen 1 lauseen A2 mukaista joukkoperheiden riippumattomuutta. Saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S\left(t\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rtU_i} X_i\right] \qquad (18)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} e^{-rtU_i} X_i \ \mid N\left(t\right) = n\right] \cdot P\left(N\left(t\right) = n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{E}\left[e^{-rU_1}\right] \cdot \mathbb{E}\left[X_1\right] \cdot P\left(N\left(t\right) = n\right)\\
&= \mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] \cdot \mathbb{E}\left[X_1\right] \cdot \left(\int_0^1 e^{-rty} dy\right) = \lambda \frac{1}{r}\left(1 - e^{-rt}\right) \cdot \mathbb{E}\left[X_1\right]
\end{aligned}$$

□

[7] Jos yhtälössä (17) vakuutusmaksujen nykyhetkeen diskonttaamiseen käytetty korko $r \to 0$, saadaan kokonaisvahinkomenon odotusarvoksi $\mathbb{E}[S(t)] = \lambda t \mathbb{E}[X_1]$. Tämä nähdään seuraavalla laskulla.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} X_i\right] &= \lambda \frac{1}{r}\left(1 - e^{-rt}\right) \cdot \mathbb{E}\left[X_1\right]\\
\lim_{r \to 0} \lambda \frac{1}{r}\left(1 - e^{-rt}\right) \cdot \mathbb{E}\left[X_1\right] &= \lambda \cdot \mathbb{E}[X_1] \cdot \lim_{r \to 0} \frac{1 - e^{-rt}}{r} \qquad \text{(Käytetään L'Hôpitalin sääntöä)}\\
&= \lambda \cdot \mathbb{E}[X_1] \cdot \lim_{r \to 0} \frac{t(-e^{-rt})}{1}\\
&= \lambda t \mathbb{E}[X_1]
\end{aligned}$$

Nyt siis vakuutusyhtiön pääoman suuruuden odotusarvoksi saadaan

$$\mathbb{E}[U(t)] = U_0 + p(t) - \mathbb{E}[S(t)] = U_0 + ct - \lambda t \mathbb{E}[X_1],$$

jolloin vakuutusmaksujen koron suuruuden vähimmäisvaatimukseksi on

$$c > \lambda \mathbb{E}[X_1].$$

Tällöin vakuutusyhtiö kykenee maksamaan sinne saapuneet vahinkovaateet keskimäärin vakuutusmaksutuotoilla.

Vakuutusmaksun suuruutta ei kuitenkaan todellisuudessa voida määrittää pelkästään mahdollisten tulevien korvausten avulla, ja käytännössä huomioon täytyy ottaa muitakin seikkoja, kuten vakuutusyhtiön liiketoiminnasta koituvat kulut. Seuraavaksi perehdytään vakuutusmaksun muodostamiseen hieman tarkemmin ja muotoillaan vakuutusmaksu *kustannuskulukuormituksen*, *riskimaksun* ja *varmuuslisän* avulla.

Määritelmä 37. *Kustannuskulukuormitus.*
Kustannuskulukuormituksella tarkoitetaan sitä vakuutusmaksuun liittyvää summaa, jolla vakuutusyhtiö hoitaa toiminnastaan syntyviä kuluja. Usein se on muotoa

$$E = a + b\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] + c\mathbb{E}\left[S\left(t\right)\right],$$

jossa a ja b ovat vakioita, $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]$ sattuneiden vahinkojen summan odotusarvo tarkasteltavalla aikavälillä ja $\mathbb{E}\left[S\left(t\right)\right]$ on vakuutusvaateiden suuruuksien summan odotusarvo.

Määritelmä 38. *Riskimaksu.*
Riskimaksuksi kutsutaan sitä vakuutusmaksun osaa, jonka tarkoituksena on kattaa sattuneen vahingon kulut. Riskimaksun suuruutta arvioidaan hetkestä 0 nykyhetkeen sattuneiden vahinkojen vahinkovaateiden suuruuksien summan odotusarvon avulla. Merkitään riskimaksua kirjaimella P, jolloin

$$P = \mathbb{E}\left[S\left(t\right)\right]$$

Viimeisenä palasena tämän tutkielman vakuutusmaksun muodostamista on varmuuslisä. Sen tarkoitus vakuutusmaksussa on etenkin vahinkokehitykseltään huonoina vuosina suojata vakuutusyhtiötä vahinkomenon heilahtelulta. Se voidaan määrittää usealla eri tavalla, joista kolme esitetään seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 39. *Varmuuslisä.*
Varmuuslisä voidaan määritellä esimerkiksi suhteessa riskimaksuun P, suhteessa kokonaisvahinkomenon hajontaan $\sigma_{S(t)}$ tai suhteessa kokonaisvahinkomenon varianssiin $\sigma^2_{S(t)}$ seuraavasti.

$$\begin{aligned} L &= \xi P \\ L &= \xi \sigma_{S(t)} \\ L &= \xi \sigma^2_{S(t)} \end{aligned}$$

Parametriä ξ kutsutaan *varmuuslisäkertoimeksi.*

Nyt, kun kaikki tarvittavat palaset vakuutusmaksun muodostamista varten on määritelty, voidaankin siirtyä määrittelemään vakuutusmaksu.

Määritelmä 40. *Vakuutusmaksu.*

Vakuutusmaksu B voidaan kirjoittaa

$$B = P + E + L,$$

jossa $P = \mathbb{E}\left[S\left(t\right)\right]$ on riskimaksu, E on kustannuskulukuormitus ja L on varmuuslisä.

Vakuutusyhtiö kasvattaa varallisuuttaan esimerkiksi vakuutusmaksuja keräämällä ja sijoitustoiminnalla. Mikäli vakuutusyhtiön varallisuus ei riitä saapuvien vahinkovaateiden ja yhtiön hoitamisesta syntyvien kulujen maksamiseen, se joutuu konkurssiin. Vakuutusyhtiön todennäköisyyttä joutua konkurssiin kutsutaan *tuhotodennäköisyydeksi.* Tutustutaan tähän seuraavaksi.

Määritelmä 41. *Tuhotodennäköisyys.*
Klassisessa Cramér-Lundberg -mallissa tuhotodennäköisyys määritellään kaavalla

$$\psi(u) = P\left(\inf_{t\in[0,\infty)} U(t) < 0\right).$$

Tuhotodennäköisyys on siis todennäköisyys sille, että vakuutusyhtiön varallisuus ei riitä tulevien korvausten ja maksujen kattamiseen. Tämän tapahtuman ajankohta voidaan määrittää seuraavasti.

Määritelmä 42. *Tuhoajankohta.*
Klassisessa Cramér-Lundberg -mallissa tuhon ajankohta määritellään seuraavalla kaavalla

$$\tau = \inf\{t \mid U(t) < 0\}.$$

Eli tuhoajankohta on enimmäinen ajanhetki τ, jolla vakuutusyhtiön varallisuus on alle nollan.

3.1.1 Riskiprosessi ja tuhotodennäköisyys toisin

Edellä käsitellyssä riskiprosessissa vakuutusyhtiöön saapuvat vahinkovaateet noudattivat homogeenista Poisson-prosessia vakiointensiteetillä λ ja vakuutusmaksuja kertyi yksinkertaisen lineaarisen funktion $p(t) = ct$ mukaan. Tämä tilanne vastaa todellisuutta hyvin heikosti, joten seuraavaksi esitellään todellisuutta paremmin kuvaava riskiprosessin malli. Tämän aliluvun lähde on [9].

Ennen kuin päästään tarkastelemaan tätä tarkempaa riskiprosessia, on tarpeen esitellä *sekoitettu Poisson-prosessi*, jota käytetään vakuutusvaateiden saapumisprosessien mallintamisessa tässä mallissa. Sekoitettu Poisson-prosessi on sellainen laskuriprosessi, jonka vaateiden saapumisajat noudattavat *sekoitettua Poisson-jakaumaa* [19].

Määritelmä 43. *Sekoitettu Poisson-jakauma.*
Olkoon $\lambda > 0$. Saapuvien vaateiden $N(t)$ jakauma noudattaa sekoitettua Poisson-jakaumaa, jos sen jakaumafunktio on

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda),$$

missä $k = 1, 2, \ldots$, $\lambda > 0$ ja $F_\Lambda(\lambda) = P(\Lambda \leq \lambda)$ on *sekoitusmuuttujan* Λ jakaumafunktio.

Tarkastellaan seuraavaksi vakuutuskantaa, jossa on n kappaletta vakuutuksia ja jossa vahinkovaateiden saapumisprosessit $N_i = \{N_i(t) \mid t \geq 0\}, i = 1, \ldots, n$ ovat riippumattomia sekoitettuja Poisson-prosesseja. Kuten aikaisemminkin, merkitään vahinkovaateiden summaa $N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t), t \geq 0$.

Käydään seuraavaksi läpi, kuinka sekoitetun Poisson-prosessin sekoitusmuuttujat Λ_i muodostetaan tässä mallissa.

Määritelmä 44. *Sekoitusmuuttujan muodostaminen.*
Jokaiselle $i \in \{1, \dots, n\}$ sekoitusmuuttuja Λ_i saadaan kaavalla $\Lambda_i = \lim_{t\to\infty} N_i(t)/t$ todennäköisyydellä 1, kun oletetaan, että $\mathbb{E}[\Lambda_i] < \infty$. Muuttujien Λ_i samoin jakautuneisuutta ei tarvitse olettaa.

Prosessin N_i aikaansaamaa suodatusta merkitään $\mathcal{F}_i = \{\mathcal{F}_i(t) \mid t \geq 0\}$ ja se määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 45. *Suodatus.*
Suodatus $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(t) \mid t \geq 0\}$ saadaan kaavalla $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(t) \vee \cdots \vee \mathcal{F}_n(t)$.

Myös vakuutusmaksujen kertyminen määritellään tässä mallissa tarkemmin kuin aikaisemmassa mallissa, joten tutustutaan tähän määritelmään vielä ennen riskiprosessin määritelmää.

Määritelmä 46. *Vakuutusmaksujen funktio toisin.*
Vakuutusmaksujen hetkellinen arvo $c = \{c(t) \mid t \geq 0\}$ saadaan kaavalla

$$c(t) = (1+\theta)\mu \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\Lambda_i \mid \mathcal{F}_i(t)], t \geq 0,$$

missä θ on positiivinen vakio, varmuuslisä, ja $\mu = \mathbb{E}[X_k] < \infty$. $\mathbb{E}[\Lambda_i \mid \mathcal{F}_i(t)]$ on sekoitusmuuttujan Λ_i odotusarvo ehdolla $\mathcal{F}_i(t)$. Sekoitusmuuttujat Λ_i saadaan määritelmän 44 avulla ja niiden suodatukset $\mathcal{F}$ määritelmän 45 avulla.

Näiden avulla voidaan määritellä edellistä riskiprosessia tarkempi riskiprosessi.

Määritelmä 47. *Riskiprosessi toisin.*
Olkoon riskiprosessi

$$U(t) = U_0 + \int_0^t c(s)ds - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, t \geq 0,$$

jossa $U_0 > 0$ on vakuutusyhtiön alkupääoma, c on määritelmän 46 mukainen vakuutusmaksujen funktio ja vakuutusvaateiden suuruudet ovat jono riippumattomia ja samoin jakautuneita positiivisia muuttujia $X_1, X_2, \dots$, ja riippumattomia prosesseista N_i.

Klassisen Cramér-Lundbergin mallin mukaan määritellyn riskiprosessin 36 ja sen tarkemman yleistyksen 47 tärkein ero on Poisson-prosessin intensiteetti, joka on klassisessa mallissa vakio λ, ja yleistetyssä mallissa satunnaismuuttuja Λ_i. Yleistetyn mallin satunnaismuuttujalla kuvataan tilannetta, jossa jokaisen vakuutetun vakuutusvaateiden saapumisintensiteetti on tuntematon vakuutussopimuksen alkaessa. Tämän vuoksi yleistetyssä mallissa hetkellinen vakuutusmaksujen arvo määritetään jokaisen satunnaismuuttujan Λ_i ennusteiden $\mathbb{E}[\Lambda_i \mid \mathcal{F}_i(t)]$ avulla. Tuhotodennäköisyys ja tuhoajankohta lasketaan tälle mallille samoin kuin yksinkertaisemmallekin mallille.

3.1.2 Alkupääoman mitoitus

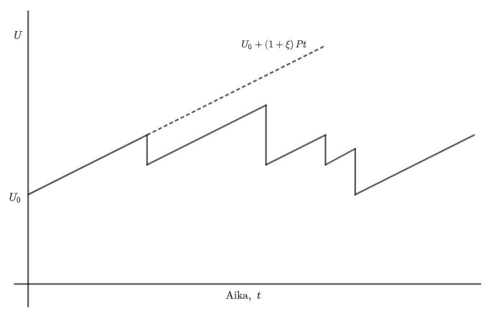
Vakuutusyhtiöllä tulee olla vakuutuskauden alussa tarpeeksi suuri alkupääoma, jotta sen tuhotodennäköisyys on riittävän pieni ja vakuutusyhtiö saa jatkaa toimintaansa. Seuraavaksi käsitellään sitä, kuinka alkupääoma voidaan mitoittaa sopivan kokoiseksi. Tarkastellaan vakuutusyhtiön kassavirtaa vuoden pituisella ajanjaksolla. Merkitään vakuutusyhtiön varallisuutta tarkasteluhetkellä kirjaimella U. Yksinkertaistetaan vakuutusyhtiön kassavirran tarkastelua siten, että ajatellaan vakuutusmaksujen koostuvan pelkästään riskimaksusta $P = \mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]$ ja varmuuslisästä $L = \xi P$, joka on laskettu suhteessa kyseiseen riskimaksuun. Vakuutusyhtiö saa siis vuoden aikana vakuutusmaksuja summan

$$B = P + \xi P$$

verran. Vakuutusyhtiön mahdollista sijoitustoimintaa tai muita tapoja kerryttää varallisuuttaan ei huomioida.
Vakuutusyhtiöllä on varallisuutta vuoden alussa jo ennen vakuutusmaksujen perimistä. Tätä kutsutaan *alkupääomaksi*. Merkitään alkupääomaa U_0. Vakuutusyhtiön varallisuus vuoden jälkeen on

$$U = U_0 + B - S\left(t\right), \tag{19}$$

missä $S\left(t\right)$ on vuoden aikana sattuneiden vahinkojen vaateiden suuruuksien yhteissumma. Kuvassa 2 on hahmoteltu vakuutusyhtiön kassavirtaa ja pääomaa siten, että vakuutusyhtiöllä on alussa alkupääoma U_0, jonka jälkeen kassavirta kasvaa määritelmän 35 lineaarisen vakuutusmaksujen funktion mukaan. Kuvassa pääoman arvot tippuvat, kun vakuutusyhtiö maksaa sattuneista vahingoista korvaussummia. Katkoviivalla kuvataan vakuutusmaksujen lineaarista funktiota. Kuvasta voidaan huomata, että jokaisen korvaussumman maksamisen jälkeen pääoman kasvu noudattaa kulmakertoimeltaan samaa funktiota.



Kuva 2: Vakuutusyhtiön kassavirta.

3.1.3 Tuhotodennäköisyys alkupääomalla U_0

Kun vakuutusyhtiön pääomaa kuvataan muuttujalla U, tarkoitetaan tuhotodennäköisyydellä tapauksen $U < 0$ todennäköisyyttä. Tällöin siis alkupääoma ja vakuutusyhtiölle maksetut vakuutusmaksut eivät riitä sattuneiden vahinkojen korvaamiseen.

Vakuutusyhtiö saa jatkaa toimintaansa riittävän pienellä tuhotodennäköisyydellä. Tämä voidaan selvittää ratkaisemalla pienin alkupääoman arvo yhtälöstä

$$P\left(U<0\right)=P\left(U_0+b-S\left(t\right)<0\right)=\epsilon,$$

jossa siis vakuutusyhtiön pääomaa kuvataan luvussa 3.1.2 esitellyllä kaavalla (19). Järjestelemällä termejä uudelleen voidaan riittävä alkupääoma ratkaista yhtälöstä

$$P\left(S\left(t\right)>U_0+B\right)=\epsilon.$$

Jos vanhinkovaateiden saapumisajat noudattavat Poisson-jakaumaa, ja jos niiden saapumista mallinnetaan määritelmän 27 mukaan yhdistetyllä muuttujalla, puhutaan *yhdistetystä Poisson-muuttujasta*. Yhdistetyn Poisson-muuttujan jakauma lähestyy normaalijakaumaa, kun vahinkojen lukumäärän odotusarvo lähestyy ääretöntä. Tällöin satunnaismuuttujia voidaan arvioida sopivalla approksimaatiomenetelmällä muunnoksen

$$Y=V\left(X\right).$$

avulla. Eräs tällainen arviointimenetelmä on *NP-approksimaatio*, jossa muunnosfunktio $V\left(x\right)$ on

$$V\left(x\right)=-\frac{3}{\gamma_{S(t)}}+\sqrt{\frac{9}{\gamma_{S(t)}^2}+1+\frac{6}{\gamma_{S(t)}}\frac{x-\mu_{S(t)}}{\sigma_{S(t)}}},\tag{20}$$

jossa $\gamma_{S(t)}$ on satunnaismuuttujan $S\left(t\right)$ vinous, $\mu_{S(t)}$ on satunnaismuuttujan $S\left(t\right)$ odotusarvo ja $\sigma_{S(t)}$ on satunnaismuuttujan $S\left(t\right)$ varianssi. Muunnosfunktion (20) käänteisfunktio on toisen asteen polynomi

$$V^{-1}(y)\ =\ \mu_{S(t)}+\sigma_{S(t)}\left(y+\frac{\gamma_{S(t)}}{6}\left(y^2-1\right)\right)\tag{21}$$

NP-approksimaatio on yhdistetyn Poisson-muuttujan tapauksessa normaaliapproksimaatiota parempi ja tarkempi tapa approksimoida vahinkovaateiden suuruksien summaa, koska yhdistetyn Poisson-muuttujan vinous haittaa normaaliapproksimaation käyttöä.

NP-approksimaation avulla tuhotodennäköisyyttä voidaan arvioida seuraavasti.

$$1-\epsilon=P\left(S\left(t\right)\leq U_0+B\right)=F_{S(t)}\left(U_0+B\right)\approx\Phi\left(V\left(U_0+B\right)\right),$$

jossa $F_X(x)$ on normaaliapproksimaatio $F_X(x)=P\left(X\leq x\right)=P\left(Y\leq V(x)\right)\approx\Phi\left(V(x)\right)$, $\Phi_{S(t)}$ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio ja $V(x)$ on muunnosfunktio (20). Kun merkitään $y_\epsilon=\Phi\left(1-\epsilon\right)$ ja sovelletaan muunnosfunktion käänteisfunktion kaavaa (21) saadaan

$$U_0+B=V^{-1}(y_\epsilon)=\mu_{S(t)}+\sigma_{S(t)}\left(y_\epsilon+\frac{\gamma_{S(t)}}{6}\left(y_\epsilon^2-1\right)\right),$$

josta saadaan alkupääomalle seuraava *perusyhtälö*

$$U_0 = \left(y_\epsilon + \frac{\gamma_{S(t)}}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\right)\sigma_{S(t)} - \xi P \tag{22}$$

Todellisuudessa vakuutusyhtiön saamien vahinkovaateiden saapumista kuvaavan Poisson-prosessin lisäysten riippumattomuus on tuskin koskaan voimassa. Esimerkiksi liikenneonnettomuudet korreloivat jonkin verran keskenään sääolosuhteiden, kuten sademäärän ja lämpötilan vaikutuksesta ja täten riippuvat toisistaan. [6] Tällöin myös vakuutusyhtiöön saapuvat vahinkovaateet riippuvat jonkin verran toisistaan. Pitkällä aikavälillä myöskään laskuriprosessien lisäysten stationaarisuuskaan ei voi olla voimassa, koska ympäröivä maailma on jatkuvassa muutoksessa. Epähomogeeniseen Poisson-prosessiin johtava lievempi ehto on automaattisesti voimassa, sillä vakuutus perustuu siihen, ettei tapauksen sattumisajankohta ole ennalta tiedossa. [1]

4 Muita mahdollisuuksia mallintaa vahinkovaateiden jakaumaa

Kuten tässäkin tutkielmassa, vahinkovaateiden kokonaismäärän mallintaminen on olennainen osa vakuutusten hinnoittelua myös todellisessa ympäristössä. Lukumääräregressioanalyysi mahdollistaa riskitekijöiden tunnistamisen ja vaateiden saapumisintensiteetin ennustamisen, kun vakuutuksenottajien ominaisuudet tunnetaan. Tunnettujen riskitekijöiden avulla vakuutusmaksu lasketaan yleensä vaateiden kokonaismäärän ehdollisen odotusarvon avulla yhdistämällä se vaateen suuruuden ominaisarvoon. Näin tehtiin myös tässä tutkielmassa luvussa 3, jossa tutkittiin vakuutusyhtiön tuhotodennäköisyyttä ja lopulta myös vakuutusmaksun muodostumista Poisson-jakaumaan pohjautuvan Cramér-Lundebergin mallin avulla. Poisson-jakaumalla on kuitenkin varjopuolensa, kuten se, että sen odotusarvo ja varianssi ovat yhtäsuuret.
Poisson-jakauma on kuitenkin ehkä yleisin tapa mallintaa juuri vahinkovaateiden saapumisaikoja, mutta se ei ole suinkaan ainoa mahdollinen tapa mallintaa näitä satunnaisia tapahtumia vakuutusmatematiikassa. Poisson-jakauman odotusarvon ja varianssin yhtäsuuruuden lisäksi toinen merkittävä haittapuoli Poisson-jakaumalla ja Poisson-prosessilla mallinnettaessa on sen lisäysten stationaarisuudesta johtuen mahdollista tutkia sattuneita tapauksia vain kiinteillä, tasaisilla aikaväleillä.[18]. Todellisuudessa tarvitaan usein myös monimutkaisempaa mallintamista. Todellisuuden ja teorian eroihin liittyy myös Poisson-jakauman odotusarvon ja varianssin yhtäsuuruuden mahdollinen ongelmallisuus. Vaikka onkin teoreettisesti ja laskennallisesti yksinkertaisempaa käsitellä aineistoa, jonka odotusarvo ja varianssi ovat yhtäsuuret, todellinen data ei aina vastaa näin helppoa tilannetta, eikä tällainen yksinkertainen malli kuvaa sitä riittävällä tarkkuudella. Tomasz Rolski ym. mainitsevat kirjassaan Stochastic processes for insurance and finance. John Wiley & Sons, 2009 ([19]), että esimerkiksi liikennevakuutuksissa sääolosuhteet vaikuttavat saapuviin vakuutusvaateisiin, eikä tähän pohjautuvaa odotusarvoa pystytä etukäteen ennustamaan muuttuvien sääolosuhteiden takia riittävällä tarkkuudella vakuutusvaateiden jakauman arvioimiseksi. Viimeisenä tässä tutkielmassa tutustutaankin lyhyesti muutamaan muuhun tapaan mallintaa vahinkovaateiden jakaumaa.

4.1 Panjerin rekursiosuhde

Eräs klassinen esimerkki vahinkovaateiden mallintamisessa käytettävistä relaatioista on *Panjerin rekursiosuhde*. Ennen kuin käsitellään sitä tarkemmin, tutustutaan ensin yhteen ylikatkonaiseen jakaumaan ja yhteen alikatkonaiseen jakaumaan. Näiden, ja Poisson-jakauman avulla voidaan tarkastella Panjerin rekursiosuhdetta tarkemmin. Tämän aliluvun lähde on [19]. Määritellään ensin jakaumien vertailussa tarvittava dispersioindeksi.

Määritelmä 48. *Dispersioindeksi*
Todennäköisyysjakauman dispersioindeksi on sen varianssin (Määritelmä 11) ja odotusarvon (Määritelmä 9) suhde. Dispersioindeksi I_N voidaan laskea vahinkovaateiden

jakaumalle seuraavasti.

$$I_N = \frac{\mathrm{Var}N}{\mathbb{E}\left[N\right]},$$

jossa N on siis vahinkovaateiden saapumista kuvaava stokastinen prosessi (Määritelmä 23).
Jos jakauman dispersio on suurempi kuin 1, sanotaan, että jakauma on *ylikatkonainen* ja jos jakauman dispersio on pienempi kuin 1, sanotaan, että jakauma on *alikatkonainen*. Jos jakauman dispersio on tasan 1, sanotaan, että jakauma on *Poisson-tyyppinen* jakauma. Tämä seuraa siitä, että Poisson-jakauman varianssi ja odotusarvo ovat yhtä suuret, kuten huomautuksessa 1 sanotaan.

4.1.1 Negatiivinen binomijakauma

Vahinkovaateiden lukumäärän jakaumaa voidaan mallintaa myös *negatiivisen binomijakauman* avulla. Tämä on itseasiassa melko suosittu tapa mallintaa vahinkovaateiden jakaumaa. Suosiota voidaan selittää esimerkiksi sillä, että negatiivinen binomijakauma on ylikatkonainen jakauma, mikä tarkoittaa sitä, että käytetyssä aineistossa on teoreettista mallia enemmän vaihtelua. Tällöin aineiston arvot eroavat niiden odotusarvosta enemmän kuin teoreettinen malli ennusti. Tämä saattaa vastata todellista tilannetta paremmin kuin Poisson-tyyppinen jakauma.

Määritelmä 49. *Negatiivinen binomijakauma.*
Olkoon $\alpha, r > 0$ ja $p \in (0, 1)$. Satunnaismuuttuja X on *negatiivisesti binomijakautunut*, jos sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$P\{X = k\} = \binom{\alpha + \ k - 1}{k}(1-p)^{\alpha}p^k, \ k \in \mathbb{N}.$$

Negatiivista binomijakaumaa parametrein α, p noudattavaa satunnaismuuttujaa merkitään $X \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$.

Huomautus 5. Negatiivisen binomijakauman odotusarvo on $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{\alpha p}{(1-p)}$ ja varianssi $\mathrm{Var}\left[X\right] = \frac{\alpha p}{(1-p)^2}$. Täten negatiivisen binomijakauman dispersioindeksi on suurempi kuin 1 ja jakauma on ylikatkonainen.

4.1.2 Binomijakauma

Oletetaan, että vakuutus kattaa tietokonejärjestelmän tärkeän komponentin hajoamisen. Vuoden alussa vakuutuskannassa on n samoin tuotettua ja vasta-asennettua tällaista komponenttia. Todennäköisyys sille, että sattumanvarainen, mutta kiinnitetty, vasta-asennettu komponentti hajoaa ennen ajanhetkeä t saadaan jakaumafunktion $G(t)$ avulla. Todennäköisyys sille, että tapahtuu yhteensä N hajoamista ajanhetkeen t mennessä saadaan binomijakauman avulla. Binomijakauman määritelmässä on yhdistetty lähteitä [17] ja [19].

Määritelmä 50. *Binomijakauma.*
Olkoon $n \in \mathbb{N}_+$ ja $0 \leq p \leq 1$. Satunnaismuuttuja X on *binomijakautunut*, jos

1. sen X arvojoukko on $\{1, 2, \ldots, n\}$ ja

2. $P\{X = k\} = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$

Binomijakaumaa, parametreilla n ja p, noudattavaa satunnaismuuttujaa merkitään $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Määritelmässä 50 $p = G(t)$, eli todennäköisyys sille, että vasta-asennettu komponentti hajoaa.

Huomautus 6. Binomijakauman odotusarvo on $\mathbb{E}[X] = np$ ja varianssi $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$. Täten binomijakauman dispersioindeksi on pienempi kuin 1 ja jakauma on alikatkonainen.

Poisson-jakauman, negatiivisen binomijakauman ja binomijakauman todennäköisyysfunktiot $\{p_k\}$ toteuttavat kaikki Panjerin rekursiosuhteen

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

jossa $a < 1$ ja $b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Seuraavaksi esitellään lause, jonka mukaan mikään muu jakauma ei toteuta Panjerin rekursiosuhdetta (23).

Lause 10. Panjerin rekursiosuhteen jakaumat.
Oletetaan, että satunnaismuuttujan N, $N \in \mathbb{N}$ todennäköisyysfunktio $\{p_k\}$ toteuttaa Panjerin rekursiosuhteen (23). Tällöin funktio $\{p_k\}$ on binomijakautuneen, Poisson-jakautuneen tai negatiivisesti binomijakautuneen satunnaismuuttujan todennäköisyysfunktio. Tarkemmin:

1. *Jos $a = 0$, tällöin $b = \lambda > 0$ ja satunnaismuuttuja N noudattaa Poisson-jakaumaa $Po(\lambda)$.*

2. *Jos $0 < a < 1$, tällöin $a + b > 0$, ja satunnaismuuttuja N noudattaa negatiivista binomijakaumaa $NB(\alpha, p)$, jossa $p = a$ ja $\alpha = 1 + bp^{-1}$.*

3. *Jos $a < 0$, tällöin $b = -a(n+1)$ jollekin $n \in \mathbb{N}$ ja satunnaismuuttuja N noudattaa binomijakaumaa $Bin(n, p)$, jossa $p = a(a-1)^{-1}$ ja $n = -1 - ba^{-1}$.*

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $a = 0$. Tällöin tarvitaan $b > 0$. Kun sijoitetaan yhtälön (23) vasen puoli toistuvasti yhtälön oikealle puolelle, nähdään, että $p_k = p_0(b^k/k!)$. Koska $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, saadaan nyt $p_0 = e^{-b}$. Funktio $\{p_k\}$ on siis Poisson-jakauman $\mathrm{Po}(b)$ todennäköisyysfunktio.
Oletetaan seuraavaksi, että $a \neq 0$. Toistamalla yhtälön (23) rekursiota huomataan, että

$$p_k = p_0(\Delta + k - 1)(\Delta + k - 2) \cdots (\Delta + 1)\Delta \frac{a^k}{k!}, \ k \in \mathbb{N},$$

missä $\Delta = ba^{-1}$. Koska $\sum_{k=0}^{\infty} c(c+1) \cdots (c+k-1)z^k/k! = (1-z)^{-c}$ kaikille $c \in \mathbb{R}$ ja $|z| < 1$ nähdään, että funktio p_k on muotoa

$$p_k = \binom{\Delta + k - 1}{k} a^k (1-a)^{\Delta}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Tapauksessa $0 < a < 1$ yhtälön (23) oikea puoli on positiivinen kaikille $k \in \mathbb{N}$ jos ja vain jos $\Delta > 0$ tai yhtäpitävästi kun $b > -a$. Näin tapahtuu jos ja vain jos kyseessä on negatiivinen binomijakauma. Kun $a < 0$ yhtälön (23) todennäköisyydet ovat epänegatiivisia jos ja vain jos $b = -a(n+1)$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Tämä tarkoittaa että $-\Delta \in \mathbb{N}$, mikä johtaa binomijakautuneeseen jakaumaan. □

4.2 Alieksponentiaaliset jakaumat

Mainitaan vielä lopuksi eksponenttijakaumaan pohjautuvista malleista, joiden avulla vakuutusvahinkovaateita voidaan myös mallintaa. Tässä osiossa lähteenä on [7]

Vakuutusvaateiden riippumattoman ja samoin jakautuneen jonon $\{X_i\}$ voidaan siis ajatella noudattavan myös eksponenttijakaumaa. Tällöin $P(X_i > x) = e^{-\lambda x}$, $x > 0$ kun $\lambda > 0$, eli tällöin vakuutusvaateiden jakauman oikeanpuoleinen reuna vaimenee eksponentiaalisesti. Eksponentiaalinen vaimeneminen on suurimmalla osalla tilastollisessa mallintamisessa käytettävillä jakaumilla. Tämän vaimenemisen lisäksi on olemassa myös muunlaista vaimenemista, kuten Gaussin normaalijakaumaa noudattavaa vaimenemista, joka vaimenee nopeammin kuin eksponenttijakaumaa noudattavat mallit. Tällaisia jakaumia kutsutaan kevythäntäisiksi jakaumiksi. Vahinkovaateet ja niiden suuruudet eivät välttämättä noudata mainittuja kevythäntäisiä jakaumia. Esimerkiksi riskit, jotka liittyvät lentokoneisiin, pilvenpiirtäjiin, patoihin ja siltoihin ovat todella suuria. Jotkin vakuutusyhtiöt ovat päätyneet vararikkoon tai lähelle vararikkoa, koska niiltä on peritty (hyvin) pieni määrä (hyvin) suuria vahinkovaateita. Joissakin tapauksissa vararikkoon joutumisen syynä on ollut yksittäinen valtava vahinkovaade. Raskashäntäisistä jakaumista vakuutuskontekstissa löytyy useampikin esimerkki, joista yksi hyvin monikäyttöinen versio esitellään seuraavaksi.

Esimerkki 2. Olkoon F jakaumafunktio välillä $(0, \infty)$. Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ riippumaton ja samoin jakautunut jono, joka noudattaa yleistä jakaumaa F. Olkoon $S_= \sum_{i=1}^{n} X_i$ ja $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Jos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1, \text{ kun } n \geq 2, \tag{24}$$

sanotaan, että F on alieksponentiaalinen. Yhtälö (24) tarkoittaa, että osittaissumman ja osittaismaksimin reunat käyttäytyvät samalla tavalla.

Intuitiivisesti ajateltuna siis kumulatiivinen vaateiden kokonaissuuruus voidaan määrittää suurimman saapuneen vaateen koon avulla. Jos F on alieksponentiaalinen, voidaan osoittaa, että $e^{ax}P(X \geq x) \to \infty$ mille tahansa $a > 0$, kun X on satunnaismuuttuja, joka noudattaa jakaumaa F.
Jos vahinkovaateiden jakauma kuuluu alieksponentiaalisten jakaumien sopivaan alaluokkaan, voidaan osoittaa, että tuhotodennäköisyys pienenee vain neliöllisesti. Vararikko on siis paljon todennäköisempi, jos vaateiden jakauma on raskashäntäinen.

5 Yhteenveto

Tämän tutkielman tarkoituksena oli tutustuttaa lukija vahinkovakuutusmatematiikan peruskäsitteisiin. Tutkielma alkoi työssä käytettävien todennäköisyyslaskennan määritelmien ja tulosten esittelemisellä tarkoituksena antaa lukijalle riittävät tiedot tutkielman ymmärtämiseen. Tutkielma eteni laskuriprosessista Poisson-prosessiin, jonka jälkeen esiteltiin Cramér-Lundbergin malli, jossa Poisson-prosessi on olennainen osa mallin muodostamista ja sillä kuvattavien ilmiöiden mallintamista. Nämä kolme ovat hyvin tunnettuja ja yleisesti käytettyjä työkaluja vahinkovakuutusmatematiikasta, joten oli tärkeää käydä ne heti alkuun.
Myöhemmin tutkielmassa tutustutaan vakuutusyhtiön toiminnan ylläpitämisen perusteena oleviin vakuutusmaksuihin ja niiden muodostamiseen paremmin. Nämä liittyvät oleellisesti myös tutkielman tavoitteeseen esitellä vahinkovakuutusmatematiikan peruskäsitteitä, kuten esimerkiksi tuhotodennäköisyyttä, koska vakuutusyhtiöt kerryttävät varallisuuttaan yksinkertaisessa mallissa vain vakuutusmaksuilla. Niistä saatavan pääoman suuruus taas on erittäin kiinnostavaa vakuutusyhtiön toiminnan ja selviämisen kannalta, ja todennäköisyys sille, että pääomaa on liian vähän toiminnan jatkumiselle, on tuhotodennäköisyys, joka sekin on keskeinen osa vahinkovakuutusmatematiikan perusteita.
Tutkielma esittelee käsitteet melko pintapuolisesti, eikä ota kantaa niiden todellisiin sovelluksiin kovinkaan paljoa. Tutkielmassa käytetään hyvin yksinkertaistettuja malleja, jotta asia pysyisi helposti ymmärrettävänä kokemattomallekin lukijalle. Monimutkaisempia malleja, joilla voidaan kuvata todellisuutta tarkemmin, esitellään vain muutama ja nekin jäävät melko pintapuolisiksi. Vahinkovakuutusmatematiikan peruskäsitteet käydään kuitenkin läpi ja kokematonkin lukija ymmärtää vahinkovakuutusmatematiikkaa paremmin tutkielman luettuaan. Tämä tutkielma toimii hyvänä alkusysäyksenä vahinkovakuutusmatematiikan maailman tutkimiseen, joskin tarkempi tutustuminen vaatii jatkotyöskentelyä ja monimutkaisempiin malleihin tutustumista.

Viitteet

[1] K. Parvinen: Riskiteoria - luentomoniste, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun Yliopisto, Syksy 2024

[2] T. Mikosch: Non-Life Insurance Mathematics, An Introduction with the Poisson Process Second edition, Springer 2009

[3] Encyclopedia of Mathematics: Lundberg, Ernest Filip Oskar, Luettu: 21.11.2024 https://encyclopediaofmath.org/wiki/Lundberg,_Ernest_Filip_Oskar

[4] University of Manitoba, Luettu 27.11.2024 https://home.cc.umanitoba.ca/~thavane/ASS305/5pp.pdf

[5] Daniel, James W., and Austin Actuarial Seminars. "Poisson processes (and mixture distributions)." Luettu 29.11.2024 http://www.casact.org/library/studynotes/3_Poisson_2008 pdf (2008)

[6] Zou, Xiping, et al. "The effects of weather factors on road traffic casualties: Analysis on provincial panel data of China from 2006 to 2021."Heliyon 10.17 (2024)

[7] Ramasubramanian, S. "POISSON PROCESS AND INSURANCE: AN INTRODUCTION1."Prepared for a series of lectures given at a Refresher course in Applied Stochastic Processes, held at the Indian Statistical Institute, New Delhi. https://www.isibang.ac.in/~statmath/ram/ASPDelhi05.pdf in (2005)

[8] MIT OpenCourseWare, "6.262 Discrete Stochastic Processes", Spring 2011, Chapter 4 Luettu 10.1.2025 https://ocw.mit.edu/courses/6-262-discrete-stochastic-processes-spring-2011/931ffa0940899c27f34b71ad64fd2bb0_MIT6_262S11_chap04.pdf

[9] Tomita M, Takaoka K, Ishizaka M. On the ruin probability of a generalized Cramér–Lundberg model driven by mixed Poisson processes. Journal of Applied Probability. 2022;59(3):849-859. doi:10.1017/jpr.2021.99 Luettu 24.1.2025

[10] Michel Mandjes & Onno Boxma, The Cramér-Lundberg model and its variants - A queueing perspective, Springer Nature, June 13, 2023

[11] Tuomas Nurmiainen, Esimerkkejä stokastisista prosesseista ja niiden hyödyntäminen lukio-opetuksessa, Pro Gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto, Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Matematiikan ja tilastotieteenlaitos, kesä 2021, Luettu: 5.2.2025 https://helda.helsinki.fi/server/api/core/bitstreams/1041045a-3077-4675-9840-833db349517c/content

[12] MIT OpenCourseWare, "6.262 Discrete Stochastic Processes", Spring 2011, Chapter 2 Luettu 7.2.2025 https://ocw.mit.edu/courses/6-262-discrete-stochastic-processes-spring-2011/3a19ce0e02d0008877351bfa24f3716a_MIT6_262S11_chap02.pdf

[13] Anniina Kallio, Poisson-prosessi vakuutusmatematiikassa, Pro gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto, Informaatiotieteiden yksikkö, Matematiikka, Toukokuu 2016, luettu 12.2.2025 https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/99219/GRADU-1465199650.pdf;jsessionid=941E322968B7B579C8E18689049D9FBA?sequence=1

[14] Heli Taattola, Poisson-prosessit, Matematiikan pro gradu, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Kevät 2015, luettu 13.2.2025 https://jyx.jyu.fi/jyx/Record/jyx_123456789_45931#

[15] Finanssiala, Palo-, murto- ja vuotovahingot, 14.6.2024 artikkeli. Luettu 14.2.2025 https://www.finanssiala.fi/aiheet/palo-murto-vuotovahingot/#/

[16] Finanssiala, vakuutusvuosi 2021, Vakuutusyhtiöiden tuloskatsaus, Julkaisut ja tutkimukset 2022, 20.4.2022. Luettu 14.2.2025 https://www.finanssiala.fi/wp-content/uploads/2022/04/Vakuutusvuosi-2021.pdf

[17] Tuominen Pekka: Todennäköisyyslaskenta I, Limes ry, 1993, Helsinki

[18] Boucher, Jean-Philippe, Michel Denuit, and Montserrat Guillén. "Models of insurance claim counts with time dependence based on generalization of Poisson and negative binomial distributions."Variance 2.1 (2008): 135-162.

[19] Rolski, Tomasz, et al. Stochastic processes for insurance and finance. John Wiley & Sons, 2009.

A Liite 1

Tässä liitteessä esitellään Poisson-prosessin ominaisuus, *järjestysstatistiikan ominaisuus*, joka ei rajaudu pelkästään homogeenisille Poisson-prosesseille, vaan pätee mille tahansa Poisson-prosessille. Tätä ominaisuutta käytetään hyväksi todistettaessa homogeenisen Poisson-prosessin ominaisuuksia lauseessa A2, jota tarvitaan lauseen 9 todistamisessa.

Lause A1. Poisson-prosessin järjestysstatistiikan ominaisuus.

Olkoon $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ *Poisson-prosessi, jolla on lähes kaikkialla jatkuva positiivinen intensiteettifunktio* λ *ja saapumisajat* $0 < T_1 < T_2 < \cdots$. *Tällöin, kun* $\{N(t) = n\}$ *jonon* $(T_1, \ldots, T_n)$ *ehdollinen todennäköisyysjakauma on riippumattomasta ja samoin jakautuneesta otoksesta* $X_1, \ldots, X_n$ *järjestetyn otoksen* $\left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ *jakauma yhteisellä tiheydellä* $\lambda/\mu(t)$, $0 < x \leq t$:

$$(T_1, \ldots, T_n \mid N(t) = n) \stackrel{d}{=} \left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right).$$

Toisin sanoen, vasemmanpuoleisella vektorilla on ehdollinen tiheys

$$\begin{aligned} f_{T_1,\ldots,T_n}(x_1, \ldots, x_n \mid N(t) = n) = \frac{n!}{(\mu(t))^n} \prod_{i=1}^{n} \lambda(x_i), \\ 0 < x_1 < \cdots < x_n < t. \end{aligned} \tag{25}$$

Todistus. Todistetaan, että raja-arvo

$$\lim_{h_i \to 0, i=1,\ldots,n} \frac{P\left(T_1 \in (x_1, x_1 + h_1], \ldots, T_n \in (x_n, x_+ h_n] \mid N(t) = n\right)}{h_1, \cdots h_n} \tag{26}$$

on olemassa, ja että se on muuttujien x_i jatkuva funktio. Tämän raja-arvon voidaan ajatella olevan ehdollisen todennäköisyysjakauman $(T_1, \ldots, T_n)$ tiheys kun $\{N(t) = n\}$.

Koska $0 < x_1 < \cdots < x_n < t$ voidaan muuttujat h_i valita siten, että välit $(x_i, x_i + h] \subset [0, t], i = 1, \ldots, n$ ovat epäjatkuvia. Tästä seuraa yhtälö

$$\begin{aligned} & \{T_1 \in (x_1, x_1 + h_1], \ldots, T_n \in (x_n, x_n + h_n], N(t) = n\} \\ = \ & \{N(0, x_1] = 0, N(x_1, x_1 + h_1] = 1, N(x_1 + h_1, x_2] = 0, \\ & N(x_2, x_2 + h_2] = 1, \ldots, N(x_{n-1} + h_{n-1}, x_n] = 0, \\ & N(x_n, x_n + h_n] = 1, N(x_n + h_n, t] = 0\} \end{aligned}$$

Kun molemmilta puolilta otetaan todennäköisyydet ja lisäksi hyödynnetään Poisson-prosessin N lisäysten riippumattomuutta saadaan

$$\begin{aligned}
& P\left(T_1 \in (x_1, x_1+h_1], \ldots, T_n \in (x_n, x_n+h_n], N(t)=n\right) \\
= \; & P\left(N(0,x_1]=0\right) P\left(N(x_1,x_1+h_1]=1\right) P\left(N(x_1+h_1,x_2]=0\right) \\
& P\left(N(x_2,x_2+h_2]=1\right) \cdots P\left(N(x_{n-1}+h_{n-1},x_n]=0\right) \\
& P\left(N(x_n,x_n+h_n]=1\right) P\left(N(x_n+h_n,t]=0\right) \\
= \; & e^{-\mu(x_1)} \left[\mu(x_1,x_1+h_1]e^{-\mu(x_1,x_1+h_1]}\right] e^{-\mu(x_1+h_1,x_2]} \\
& \left[\mu(x_2,x_2+h_2]e^{-\mu(x_2,x_2+h_2]}\right] \cdots e^{-\mu(x_{n-1}+h_{n-1},x_n]} \\
& \left[\mu(x_n,x_n+h_n]e^{-\mu(x_n,x_n+h_n]}\right] e^{-\mu(x_n+h_n,t]} \\
= \; & e^{-\mu(t)} \mu(x_1,x_1+h_1] \cdots \mu(x_n,x_n+h_n].
\end{aligned}$$

Saatiin siis yhtälö

$$\begin{aligned}
& P\left(T_1 \in (x_1, x_1+h_1], \ldots, T_n \in (x_n, x_n+h_n], N(t)=n\right) \\
& = e^{\mu(t)} \mu(x_1,x_1+h_1] \cdots \mu(x_n,x_n+h_n].
\end{aligned}$$

Jaetaan yhtälön molemmat puolet yhtälöllä $P(N(t) = n) = e^{-\mu(t)}(\mu(t))^n/n!$ ja tulolla $h_1 \cdots h_n$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
& \frac{P(T_1 \in (x_1, x_1+h_1], \ldots, T_n \in (x_n, x_n+h_n] \mid N(t)=n)}{h_1 \cdots h_n} \\
= \; & \frac{n!}{(\mu(t))^n} \frac{\mu(x_1,x_1+h_1]}{h_1} \cdots \frac{\mu(x_n,x_n+h_n]}{h_n} \\
\to \; & \frac{n!}{(\mu(t))^n} \lambda(x_1) \cdots \lambda(x_n),
\end{aligned}$$

kun $h \to 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Saatiin siis todistettua, että raja-arvo 26 on nyt halutun ehdollisen tiheyden 25 muotoa. Viimeisessä kohdassa käytettiin funktion λ jatkuvuutta sen osoittamiseksi, että $\mu'(x_i) = \lambda(x_i)$.

□

Lause A2. *Olkoon $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ homogeeninen Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$ ja merkitään vaateiden saapumisaikoja prosessissa N seuraavasti: $0 < T_1 < T_2 < \cdots$. Olkoon $\{X_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ riippumaton ja samoin jakautunut prosessista $\{N(t)\}$ riippumaton jono. Tällöin on olemassa jono $\{U_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$, ja seuraavat ominaisuudet ovat voimassa.*

1. *$\{U_j\}$ on samoin jakautunut ja riippumaton jono satunnaismuuttujia, jotka ovat $Tas\,(1, 0)$ jakautuneita,*

2. *joukkoperheet $\{U_j\}$, $\{X_i\}$ ja $\{N(t)\}$ ovat toisistaan riippumattomia,*

3. mille tahansa kahden muuttujan mitalliselle funktiolle g pätee

$$\sum_{i=1}^{N(t)} g\left(T_i,X_i\right) \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{N(t)} g\left(tU_i,X_i\right), \ t \ \geq 0.$$

Olkoon (X_i) riippumaton ja samoin jakautunut jono, joka ei riipu homogeenisen Poisson-prosessin N, jolla on intensiteetti λ, saapumisaikojen jonosta (T_i). Tällöin mille tahansa mitalliselle funktiolle $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pätee seuraava yhtälö

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g\left(T_i, X_i)\right) \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{N(t)} g\left(tU_i,X_i\right),$$

jossa $U(i)$ on jonoista (X_i) ja (T_i) riippumaton jono, joka noudattaa jakaumaa $U(0,1)$.

Todistus. Ehdollistavan argumentin ja Poisson-prosessin järjestysstatistiikan ominaisuuden A1 avulla saadaan, että muuttujalle $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g(T_i, X_i) \leq x \mid N(t) = n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} g(tU_{(i)}, X_i) \leq x\right),$$

jossa $U_1, \ldots, U_n$ on riippumaton ja samoin jakautunut otos jakaumasta $\mathrm{Tas}(0,1)$, joka on myös riippumaton jonoista (X_i) ja (T_i) ja $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}$ on vastaava otos. Koska jono (X_i) on riippumaton ja samoin jakautunut ja riippumaton jonosta (U_i) voidaan jonon (X_i) jäsenten järjestystä permutoida vapaasti ilman, että summan $\sum_{i=1}^{n} g(tU_{(i)}, X_i)$ jakauma muuttuu. Saadaan

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{i=1}^{n} g(tU_{(i)}, X_i) \leq x\right) \\ = \ & \mathbb{E}\left[P\left(\sum_{i=1}^{n} g(tU_{(i)}, X_i) \leq x \mid U_1, \ldots, U_n\right)\right] \\ = \ & \mathbb{E}\left[P\left(\sum_{i=1}^{n} g(tU_{(i)}, X_{\pi(i)}) \leq x \mid U_1, \ldots, U_n\right)\right], \end{aligned} \tag{27}$$

missä π on mikä tahansa permutaatio $\{1, \ldots, n\}$. Erityisesti voidaan valita sellainen π siten, että kun $U_1, \ldots, U_n$ tiedetään, pätee $U_{(i)} = U_{\pi(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Nyt yhtälö 27 saadaan muotoon

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[P\left(\sum_{i=1}^{n} g\left(tU_{\pi(i)}, X_{\pi(i)}\right) \leq x \mid U_1, \ldots, U_n\right)\right] \\ = \ & \mathbb{E}\left[P\left(\sum_{i=1}^{n} g\left(tU_i, X_i\right) \leq x \mid U_1, \ldots, U_n\right)\right] \\ = \ & P\left(\sum_{i=1}^{n} g\left(tU_i, X_i\right) \leq x\right) = P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g\left(tU_i, X_i\right) \leq x \mid N(t) = n\right). \end{aligned}$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
P\quad & (S(t) \leq x) = E[P(S(t) \leq x | N(t))] \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g\left(T_i, X_i\right) \leq x \mid N(t)=n\right) \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g\left(U_i, X_i\right) \leq x \mid N(t)=n\right) \\
= \quad & P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g\left(tU_i, X_i\right) \leq x\right).
\end{aligned}
$$

Tämä todistaa väitteen. □