TURUN YLIOPISTO

# Osakeportfolion optimointi monitavoitteisena ongelmana

Kiira Notko

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

**Tarkastajat:**
Doc. Yury Nikulin

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LuK-tutkielma
**Pääaine:** Sovellettu matematiikka
**Tekijä:** Kiira Notko
**Otsikko:** Osakeportfolion optimointi monitavoitteisena ongelmana
**Ohjaaja:** Doc. Yury Nikulin
**Sivumäärä:** 13 sivua
**Aika:** Huhtikuu 2026

---

Tutkielma perehtyy sijoitussalkun optimaaliseen muodostamiseen Harry Markowitzin kehittämän modernin portfolioteorian viitekehityksessä. Tavoitteena on selvittää, miten sijoittaja voi määrittää optimaaliset salkun painot matemaattisesti ja minimoida riskiä tiettyjen rajoitteiden vallitessa. Tutkielman teoreettisessa osassa johdetaan salkun odotettu tuotto ja riski, sekä esitellään tärkeimmät käsitteet. Empiirisessä osassa sovelletaan teoreettista mallia neljään eri toimialan pörssiosakkeeseen hyödyntämällä markkinadataa tarkasteluajankohtana 1.1.2021-1.1.2026.

Asiasanat: Optimointi, osakeportfolio, moderni portfolioteoria

# Sisällys

# 1 Johdanto

Tutkielman tausta perustuu sijoittajan perusongelmaan eli pyrkimykseen maksimoida sijoituksen tuotto ja samanaikaisesti minimoida siihen liittyvä riski. Modernin portfolioteorian (MPT) katsotaan olevan Harry Markowitzin (1952) ansiota [5]. Ennen Markowitzia sijoittajien analyysien intressit ohjautuivat pääasiassa yksittäisen arvopaperin tuotto-odotukseen, mutta Markowitz osoitti, että salkun riski riippuu sijoituskohteiden välisistä riippuvuussuhteista. Tutkielmassa tarkastellaan markkinoita tietyin oletuksin, joihin kuuluvat sijoittajien rationaalisuus, tuottojen normaalijakauma sekä kitkaton kaupankäynti. aihe on edelleen ajankohtainen pohja modernille varainhoidolle ja kvantittiiviselle rahoitukselle [4]. Tutkielmassa vastataan kysymykseen "Miten optimaalinen sijoitussalkku muodostetaan matemaattisesti ja miltä tämä näyttää käytännössä?". Työ jakautuu teoreettiseen osaan, jossa johdetaan optimointimallit ja keskeisimmät käsitteet, sekä empiiriseen osaan, jossa malleja sovelletaan valittuihin pörssiosakkeisiin. Tämän tutkielman kirjoituksessa on hyödynnetty ChatGPT-tekoälytyökalua kielenhuoltoon.

# 2 Teoreettinen viitekehys

## 2.1 Tuotto ja riski salkunhoidossa

Sijoitusanalyysissä keskeisiä tekijöitä ovat sijoituskohteen tuoton ja riskin määrittäminen. Tässä tilanteessa huomioidaan sekä arvopaperin arvonnousu että mahdolliset osingot.

**Määritelmä 1.** Yksittäisen arvopaperin $i$ odotettu tuotto $\mu_i$ määritellään tuottojen todennäköisyysjakauman odotusarvona:

$$\mu_i = E[R_i], \tag{1}$$

missä $R_i$ on arvopaperin $i$ tuotto. Käytännön sovelluksissa odotettu tuotto estimoidaan usein historiallisen aineiston keskiarvona [5].

**Määritelmä 2.** Sijoituksen riskiä kuvataan tuottojen vaihteluna eli varianssina $\sigma_i^2$, joka mittaa kuinka laajalle tuotot hajoavat suhteessa niiden odotusarvoon:

$$\sigma_i^2 = Var(R_i) = E[(R_i - \mu_i)^2]. \tag{2}$$

Varianssin neliöjuurta $\sigma_i$ kutsutaan keskihajonnaksi. Mitä suurempi keskihajonta on, sitä suurempana sijoituskohteen riskiä pidetään [4].

Tarkastellaan salkkua joka koostuu $n$ kappaleesta eri arvopapereita. Tällöin salkun odotettu tuotto $E[R_p]$ on sen arvopapereiden odotettujen tuottojen painotettu summa:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \mathbf{w}^T \mu, \tag{3}$$

missä $w_i$ on arvopaperin $i$ osuus salkun kokonaispainosta eli kokonaisarvosta. Painojen summan on oltava yksi, eli $\sum w_i = 1$. Vastaavasti koko riski eli portfolion varianssi $\sigma_p^2$ ei riipu vain yksittäisten osakkeiden variansseista, vaan myös niiden välisistä riippuvuuksista:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}, \tag{4}$$

missä $\sigma_{ij}$ on arvopapereiden $i$ ja $j$ välinen kovarianssi ja $\mathbf{\Sigma}$ on näistä muodostettu kovarianssimatriisi. Kovarianssimatriisi muodostetaan siis arvopapereiden keskihajontojen $\sigma_i, \sigma_j$ ja niiden korrelaatiokertoimen $\rho_{i,j}$ avulla:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{5}$$

## 2.2 Hajauttaminen ja korrelaatio

Markowitzin mallissa keskeistä on, että salkun varianssia voidaan pienentää valitsemalla sijoituskohteita, jotka eivät korreloi täydellisesti keskenään. Kun korrelaatiokerroin $\rho_{ij} < 1$, salkun riski on pienempi kuin siihen kuuluvien arvopapereiden riskien painotettu summa [7]. Tätä tilannetta kutsutaan hajautushyödyksi.

## 2.3 Pareto-optimaalisuus ja monitavoiteoptimointi

Matemaattisesti tarkasteltaessa monitavoiteoptimointiongelma on tilanne, jossa tavoitteet, eli riskin minimointi ja tuoton maksimointi ovat ristiriidassa keskenään [6]. Tällaisessa tilanteessa ei ole olemassa vain yhtä optimaalista ratkaisua, vaan joukko Pareto-optimaalisia salkkuja. Tämän joukon salkut muodostavat tehokkaan rintaman (engl. *efficient frontier*). Monitavoiteoptimoinnissa ei etsitä yhtä yksittäistä parasta ratkaisua, vaan joukkoa ratkaisuja, joita ei voida parantaa minkään tavoitteen suhteen huonontamatta vähintään yhtä muuta tavoitetta.

**Määritelmä 3.** Tulos $\mathbf{w}^*$ on **Pareto-optimaalinen**, jos ei ole olemassa toista salkun painovektoria $\mathbf{w}$, jolle pätee $f_i(\mathbf{w}) \leq f_i(\mathbf{w}^*)$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$ ja $f_j(\mathbf{w}) < f_j(\mathbf{w}^*)$ vähintään yhdellä tavoitteella $j$.

# 3 Portfolion optimointimallit

## 3.1 Matemaattinen muotoilu ja oletukset

Markowitzin mallissa tavoite on minimoida salkun varianssi halutulla tuottotasolla. Hyödyntämällä luvun 2 kaavoja optimointiongelma voidaan esittää seuraavasti [2]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \\ & \mathbf{w}^T \mu = \mu_p \\ & w_i \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Tässä tavoitefunktio edustaa salkun varianssia. Rajoitteista ensimmäinen $\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$ on budjettirajoite, mikä tarkoittaa, että kaikkien painojen summa on 1. Kaikki varat siis sijoitetaan kokonaisuudessaan. Toinen rajoite $\mathbf{w}^T\mu = \mu_p$ määrittää salkun odotetun tuoton tason. Kolmas rajoite, $w_i \geq 0$ kaikilla $i$, kieltää lyhyeksimyynnin vaatimalla kaikkien painojen olevan ei-negatiivisia.

## 3.2 Variantti 1: Globaali minimivarianssi-portfolio (GMVP)

Ensimmäisessä variantissa tarkastellaan globaalia minimivarianssi-portfoliota (engl. *global minimum variance portfolio, GVMP).* Tässä mallissa ainoana tavoitteena on minimoida salkun varianssi välittämättä odotetusta tuotosta. Matemaattisesti tämä tarkoittaa, että poistetaan luvussa 3.1 esitetystä optimointiongelmasta tuottovaatimusta koskeva rajoite $\mathbf{w}^T = \mu_p$. Tällöin optimointiongelma saadaan muotoon:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1 \\ & w_i \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

GMVP edustaa tehokkaan rintaman vasemmanpuoleisinta pistettä riski-tuottoakselilla. Kaikki tehokkaan rintaman portfolioiden yhdistelmät sijaitsevat tämän pisteen yläpuolella. Tutkielman empiirisessä osassa tämä portfolio toimii vertailukohtana, sillä se osoittaa, kuinka paljon riskiä on mahdollista poistaa optimaalisen hajauttamisen avulla, vaikka tuotto-odotus jätetään huomioimatta.

## 3.3 Variantti 2: Minimivarianssi vakiotuotolla

Toisessa variantissa tavoitteena on löytää salkun painot $\mathbf{w}$, jotka minimoivat riskin annetulla tuotolla $\mu_p$. Muodostetaan tästä Lagrangen kertoimien menetelmällä funktio [2]:

$$L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda_1(\mathbf{w}^T\mathbf{1} - 1) - \lambda_2(\mathbf{w}^T\mu - \mu_p), \tag{8}$$

missä $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ovat Lagrangen kertoimia. Ongelman ratkaisu löytyy asettamalla funktion $L$ osittaisderivaatat nollaan vektorin $\mathbf{w}$ ja kertoimien suhteen. Tästä saadaan ensimmäisen kertaluvun ehto (FOC):

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda_1\mathbf{1} - \lambda_2\mu = 0. \tag{9}$$

Yhtälöstä voidaan myös ratkaista vektori $\mathbf{w}$ kertoimien avulla:

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Sigma}^{-1}(\lambda_1\mathbf{1} + \lambda_2\mu). \tag{10}$$

Lopulliset arvot kertoimille $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ saadaan sijoittamalla ratkaisu alkuperäisiin rajoituksiin.

## 3.4 Laajempi monitavoitteisuus

Vaikka klassinen Markowitzin malli keskittyy vain tuoton ja riskin väliseen tasapainoon, reaalimaailman salkunhoito on usein monitavoitteinen optimointiongelma, jossa tavoitefunktioita on useita. Monitavoiteoptimoinnissa ei tyydytä ainoastaan minimoimaan varianssia, vaan salkulle voidaan asettaa samanaikaisesti muitakin tavoitteita. Tällöin sijoittaja ei tarkastele vain yhtä optimaalista linjaa, vaan tekee valintoja usean eri tavoitefunktion muodostamassa joukossa. Monitavoitteisessa optimoinnissa tarkastellaan tilannetta, jossa on $k$ kappaletta tavoitefunktioita $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, missä $k \geq 2$. Matemaattisesti tämä monitavoitteinen optimointiongelma voidaan esittää muodossa [6]:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \tag{11}$$

missä $\mathbf{x}$ on päätösvaihtoehtojen vektori, eli tässä tutkielmassa salkun painovektori $\mathbf{w}$ ja $S$ on sallittu alue (*feasible region*), joka määräytyy salkulle asetettujen rajoitteiden perusteella. Tässä tutkielmassa aiemmin käsitellyt variantit 1 ja 2 ovat bi-tavoitteisia malleja, joissa päätöksentekokriteereinä ovat ainoastaan salkun odotettu tuotto ja riski ($k = 2$). Tämä lähestymistapa mahdollistaa selkeän kaksiulotteisen tehokkaan rintaman muodostamisen riski-tuotto-avaruuteen.

Mikäli tarkastelua laajennettaisiin laajempaan monitavoitteiseen malliin ($k \geq 3$) esimerkiksi salkun painorajoitteiden tai ESG-kriteerien kautta, Pareto-optimaalisten ratkaisujen joukko laajenisi pinnaksi. Tällöin sijoittaja joutuisi tekemään huomattavasti monimutkaisempia kompromisseja eri tavoitteiden välillä. Monitavoitteinen tarkastelu osoittaa, että lisäkriteerien sisällyttäminen siirtää salkun valintaa tyypillisesti pois optimaaliselta bi-tavoitteiselta rintamalta. Käytännössä tämä tarkoittaa, että sijoittaja joutuu usein maksamaan lisätavoitteista joko kasvaneena riskinä tai laskeneena tuotto-odotuksena saavuttaakseen esimerkiksi paremman vastuullisuustason tai korkeamman osinkotuoton.

### 3.4.1 Erilaisia rajoitteita

Kaavassa 6 esitettyä matemaattista muotoilua ja sen rajoitteita voidaan muokata siten, että halutut kriteerit säilyvät tuloksissa. Mikäli sijoittaja haluaa, ettei yhtä osaketta ole yli tietyn määrän, esimerkiksi 30% salkun kokonaispainosta, tulee hänen asettaa sille ylärajoite. Tällöin rajoite $w_i \geq 0$ muuttuu muotoon:

$$0 \leq w_i \leq 0{,}30 \tag{12}$$

kaikilla i $= 1, \ldots, n$.

Vastaavasti sijoittaja voi haluta asettaa alarajoitteen, jolla varat jakautuvat tasaisemmin. Sijoittaja voi esimerkiksi vaatia, että jokaisen osakkeen painon on oltava vähintään 5%. Tällöin taas rajoite muuttuu muotoon:

$$w_i \geq 0{,}05 \tag{13}$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

Mikäli sijoittaja haluaa huomioida salkunmuodostuksessa vastuullisuuskriteerejä, hän voi asettaa malliin rajoitteen, joka sitoo salkun painotetun keskimääräisen ESG-arvosanan halutulle tasolle. Matemaattisesti tämä voidaan toteuttaa lisäämällä optimointiongelmaan lineaarinen epäyhtälörajoite:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot ESG_i \geq ESG_{target} \tag{14}$$

missä $ESG_i$ edustaa yksittäisen osakkeen vastuullisuusarvosanaa ja $ESG_{target}$ sijoittajan asettamaa vähimmäisvaatimusta salkun keskiarvoksi.

# 4 Tehokas rintama

Vaikka Markowitzin malli perustuu yksinkertaisiin oletuksiin, kuten normaalijakautuneisiin tuottoihin ja vakaisiin kovariansseihin, se muodostaa edelleen modernin portfolioteorian keskeisen perustan. Rajoitteista huolimatta mallia käytetään edelleen laajasti ja se on tehokas työkalu salkun hajauttamisen ja riskienhallinnan suunnittelussa.

## 4.1 Optimaalisten portfolioiden joukko

Markowitzin mallissa optimaalisten portfolioiden joukko vastaa tehokasta rintamaa, joka saadaan ratkaisemalla luvussa 3 esitetty optimointiongelma eri tuottotavoitteiden arvoilla. Tuloksena saatavat optimaaliset painovektorit $\mathbf{w}$ vastaavat salkkuja, joilla on minimivarianssi kullakion halutulla tuottotasolla. Kun nämä saadut pisteet sijoitetaan koordinaatistoon, jonka x-akselilla on keskihajonta $\sigma_p$ ja y-akselilla odotettu tuotto $E[R_p]$, muodostavat ne sijoitusmahdollisuuksien joukon. Käyrän alareuna, eli tehokas rintama edustaa Pareto-optimaalisia portfolioita, eli tuottoa ei voida kasvattaa ilman riskin lisääntymistä, eikä riskiä voida pienentää ilman tuotto-odotuksen laskua [8]. Kaikki tämän rintaman alapuolella sijaitsevat portfoliot ovat tehottomia, sillä sijoittaja voi saavuttaa saman tuoton pienemmällä riskillä, tai vastaavasti korkeamman tuoton samalla riskitasolla valitsemalla salkun tehokkaalta rintamalta.

## 4.2 Sijoittajan riskinsietokyky ja valintapäätös

Vaikka tehokas rintama tarjoaa joukon matemaattisesti optimaalisia salkkuja, se ei yksiselitteisesti kerro, mikä salkuista on paras. Lopullinen valinta riippuu sijoittajan yksilöllisestä riskinsietokyvystä ja hyötyfunktiosta. Sijoittaja, joka haluaa karttaa riskiä, valitsee salkun joka sijaitsee lähellä globaalia minimivarianssi-portfoliota (GVMP). Tällöin sijoittaja hyväksyy matalamman odotetun tuoton, mutta saa vastineeksi pienempää arvonvaihtelua. Riskihaluisempi sijoittaja puolestaan tavoittelee korkeampaa tuottoa suuremman varianssin kustannuksella [7]

# 5 Empiirinen sovellus

Tässä tutkielmassa ei ainoastaan johdeta klassista Markowitzin portfoliomallia, vaan myös arvioidaan sen käytännön toimivuutta hyödyntämällä todellista markkinadataa vuosilta 2021—2026 sekä analysoidaan, miten hajauttamisen hyödyt riippuvat osakkeiden välisestä korrelaatiorakenteesta.

## 5.1 Aineiston kuvaus

Tutkielman empiirisessä osassa sovelletaan luvussa 3 johdettuja optimointimalleja neljään valittuun osakkeeseen. Aineisto koostuu päivittäisistä päätöskursseista, jotka on noudettu Investing.com-tietokannasta [1].Aineisto on kerätty aikaväliltä 1.1.2021—1.1.2026. Laskennassa käytetään osinkokorjattuja päätöskursseja, jotta sijoittajan saama kokonaistuotto tulee huomioiduksi. Osakkeet on valittu eri toimialoilta ja maantieteellisiltä markkinoilta, jotta salkun rakenne olisi monipuolinen. Valitut yhtiöt ja niiden perustiedot on esitetty taulukossa 1.

| **Yhtiö** | **Tunnus** | **Toimiala** | **Markkina** | **Perustelu** |
|---|---|---|---|---|
| LVMH | MC.PA | Kulutustavarat | Ranska | Syklinen |
| Sampo | SAMPO.HE | Vakuutus | Suomi | Vakaa |
| Microsoft | MSFT | Teknologia | USA | Kasvu |
| Kojamo | KOJAMO.HE | Kiinteistöt | Suomi | Defensiivinen |

Taulukko 1: Tutkielmassa käytettävät osakkeet.

## 5.2 Laskennalliset tulokset

Taulukoissa on laskettu osakkeiden vuosituotot, volatiliteetit ja korrelaatiokertoimet. Tulokset on esitetty taulukoissa 2 ja 3.

| **Osake** | **Vuosituotto** | **Vuosivolatiliteetti** |
|---|---|---|
| Kojamo | -0,0690 | 0,3123 |
| LVMH | 0,0875 | 0,2912 |
| MSFT | 0,1934 | 0,2571 |
| Sampo | 0,1275 | 0,1849 |

Taulukko 2: Osakkeiden annualisoidut tunnusluvut.

Taulukosta 2 havaitaan, että Microsoft on tuottanut korkeinta vuosituottoa, kun taas Sampo tuottanut toiseksi korkeinta tuottoa pienemmällä riskillä.

| | **Kojamo** | **LVMH** | **MSFT** | **Sampo** |
|---|---|---|---|---|
| **Kojamo** | 1,0000 | | | |
| **LVMH** | 0,0223 | 1,0000 | | |
| **MSFT** | 0,0061 | 0,0012 | 1,0000 | |
| **Sampo** | 0,2106 | -0,0125 | 0,0213 | 1,0000 |

Taulukko 3: Osakkeiden väliset korrelaatiokertoimet.

Kuten taulukosta 3 ilmenee, osakkeiden väliset korrelaatiot ovat hyvin lähellä nollaa. Erityisesti Sampon ja LVMH:n välinen korrelaatio tarjoaa suojaa markkinoiden laskua vastaan.

## 5.3 Variantti 1 laskennalliset tulokset

Minimivarianssiportfolion ratkaisemiseksi muodostetaan kovarianssimatriisi $\mathbf{\Sigma}$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0976 & 0,0010 & 0,0053 & 0,0122 \\ 0,0010 & 0,0848 & -0,0011 & -0,0007 \\ 0,0053 & -0,0011 & 0,0661 & -0,0003 \\ 0,0122 & -0,0007 & -0,0003 & 0,0342 \end{pmatrix} \tag{15}$$

,missä $\sigma_1 = \text{Kojamo}$, $\sigma_2 = \text{LVMH}$, $\sigma_3 = \text{MSFT}$, $\sigma_4 = \text{Sampo}$.

Hyödyntämällä taulukoiden 2 ja 3 tietoja kovarianssimatriisin käänteismatriisiksi $\mathbf{\Sigma^{-1}}$ saadaan:

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 10,7792 & -0,1732 & -0,8799 & -3,8460 \\ -0,1732 & 11,8025 & 0,2097 & 0,2967 \\ -0,8799 & 0,2097 & 15,1992 & 0,4583 \\ -3,8460 & 0,2967 & 0,4583 & 30,6174 \end{pmatrix} \tag{16}$$

GMVP-painojen saamiseksi tulee laskea rivisummat $Z_i$ ja niiden kokonaissumma $A$.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 10,7792 & -0,1732 & -0,8799 & -3,8460 \\ -0,1732 & 11,8025 & 0,2097 & 0,2967 \\ -0,8799 & 0,2097 & 15,1992 & 0,4583 \\ -3,8460 & 0,2967 & 0,4583 & 30,6174 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,8801 \\ 12,1357 \\ 14,9873 \\ 27,5264 \end{pmatrix} \tag{17}$$

,jolloin A on:

$$A = 5,8801 + 12,1357 + 14,9873 + 27,5264 = 60,5295 \tag{18}$$

Tällöin saadaan laskettua lopulliset painot $w_i = \frac{Z_i}{A}$

$$\begin{aligned} w_{kojamo} &= \frac{5,8801}{60,5295} &&\approx 9,71\% \\ w_{LVMH} &= \frac{12,1357}{60,5295} &&\approx 20,05\% \\ w_{MSFT} &= \frac{14,9873}{60,5295} &&\approx 24,76\% \\ w_{Sampo} &= \frac{27,5264}{60,5295} &&\approx 45,48\% \end{aligned} \tag{19}$$

Määritetyillä salkun painoilla odotetuksi tuotoksi saadaan:

$$E[R_{GMVP}] = (w_1\mu_1) + (w_2\mu_2) + (w_3\mu_3) + (w_4\mu_4) = 11,67\% \tag{20}$$

ja keskihajonnaksi

$$\sigma_{GMVP} = \sqrt{\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} = \sqrt{0,01652} = 12,85\%. \tag{21}$$

Variantin 1 keskihajonnaksi saatiin $12,85\%$ ja sen odotettu tuotto on $11,67\%$.

## 5.4 Variantti 2 laskennalliset tulokset

Seuraavaksi tarkastellaan tapausta, jossa sijoittaja asettaa salkulleen 15 % tuottovaatimuksen ($\mu_p = 0,15$). Hyödyntämällä luvussa 3.3 johdettua Lagrangen menetelmää määritetään kertoimet $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ratkaisemalla yhtälöpari vakiota $A$, $B$ ja $C$ hyödyntäen.

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} = 60,5295 \\ B &= \mu^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} = 7,0638 \\ C &= \mu^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mu = 1,0613 \end{aligned} \tag{22}$$

Lagrangen kertoimet $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ratkaistaan yhtälöparista:

$$\begin{cases} 60,5295\lambda_1 + 7,0638\lambda_2 = 1 \\ 7,0638\lambda_1 + 1,0613\lambda_2 = 0,15 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 \approx 0,0001 \\ \lambda_2 \approx 0,1405 \end{cases} \tag{23}$$

Sijoittamalla kertoimet yhtälöön (15), saadaan salkun painoiksi 15 %:n tuottotavoitteella:

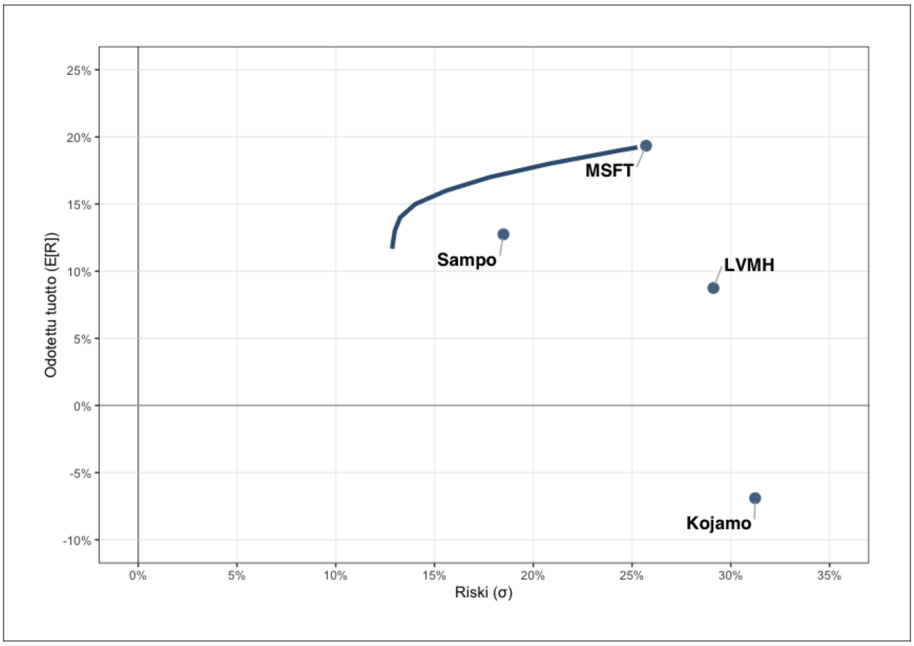
$$\begin{aligned} w_{\text{Kojamo}} &\approx 2,90\,\% \\ w_{\text{LVMH}} &\approx 17,00\,\% \\ w_{\text{MSFT}} &\approx 46,10\,\% \\ w_{\text{Sampo}} &\approx 34,00\,\% \end{aligned} \tag{24}$$

Vastaavasti 15%:n tuottotavoitteen salkun keskihajonnaksi saadaan:

$$\sigma_{V2} = \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}} = 14,20\%. \tag{25}$$

## 5.5 Tehokas rintama

Tehokas rintama saadaan muodostettua ratkaisemalla esitetty optimointiongelma useilla eri tuottotavoitteilla välillä 11,67 % – 19,34 %. Tulokset on koottu kuvaan 1.




Kuva 1: Portfolion tehokas rintama ja yksittäisten osakkeiden sijoittuminen riski-tuotto-avaruudessa.

Kuvasta 1 nähdään, kuinka kaikki yksittäiset arvopaperit sijaitsevat tehokkaan rintaman oikealla puolella tai sen alapuolella. Tämä havainnollistaa hajautushyötyä: sijoittaja voi saavuttaa saman tuoton pienemmällä riskillä siirtymällä yksittäisestä osakkeesta tehokkaalle rintamalle.

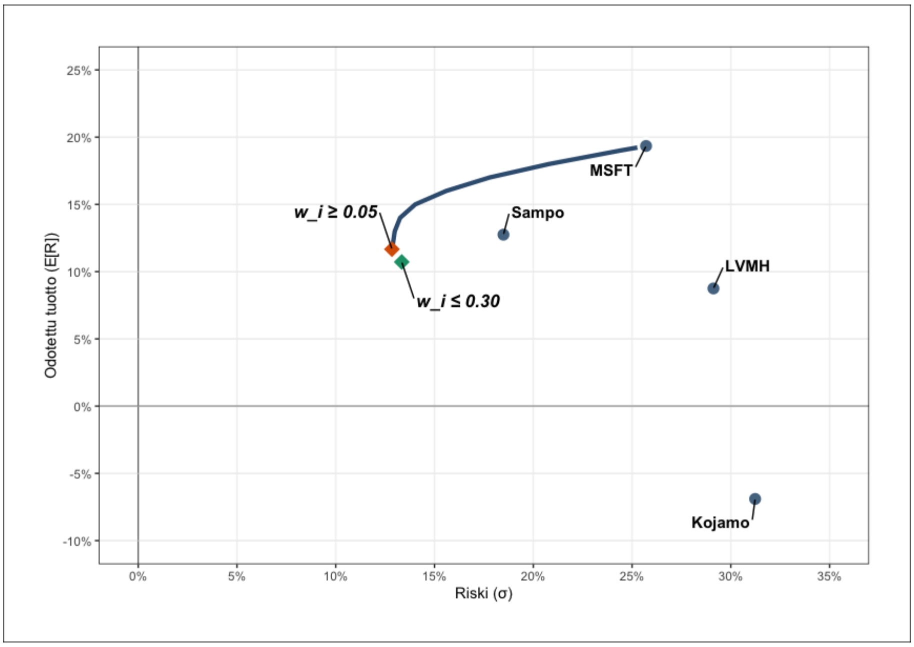
## 5.6 Laajemman monitavoitteisuuden sovelluksia

Monitavoitteisen optimoinnin mukaisesti salkun sallittua aluetta $S$ voidaan rajoittaa sijoittajan asettamilla reunaehdoilla. Ensimmäisessä tilanteessa salkulle asetettiin pakotettu hajautus vaatimalla jokaiselle osakkeelle vähintään 5% osuus ($w_i \geq 0{,}05$). Toisessa skenaariossa rajoitettiin yksittäisen osakkeen keskittymistä asettamalla painon ylärajaksi 30% ($w_i \leq 0{,}30$). Tulokset on koottu taulukkoon 4.

| **Osake** | $w_i \geq 0{,}05$ | $w_i \leq 0{,}30$ |
|---|---|---|
| Kojamo | 9,7 % | 15,4 % |
| LVMH | 20,0 % | 24,6 % |
| Microsoft | 24,8 % | 30,0 % |
| Sampo | 45,5 % | 30,0 % |
| **Salkun varianssi** | **0,0165** | **0,0178** |

Taulukko 4: Salkun painojen ja varianssin vertailu eri rajoitteilla.

Taulukosta havaitaan, että rajoitteiden kiristäminen nostaa salkun varianssia, mikä osoittaa teoreettisen tehokkuuden heikkenemistä sijoittajan asettamien lisätavoitteiden seurauksena. Erityisesti ylärajoite $w_i \leq 0{,}30$ pakottaa salkun siirtämään painoa tehokkaimmista kohteista, kuten Samposta riskisempään Kojamoon, jolloin salkun varianssi nousee. Sijoittamalla nämä salkut riski-tuotto-avaruuteen havaitaan, että molemmat rajoitetut salkut sijaitsevat tehokkaan rintaman alapuolella. Tämä on havainnollistettu kuvassa 2.




Kuva 2: Monitavoitteiset salkut tehokkaalla rintamalla.

Tämä on suora seuraus siitä, että kun optimointiongelmaan lisätään uusia tavoitteita tai rajoitteita, joudutaan teoreettisesta riski-tuotto-optimista tinkimään.

# 6 Tulosten analyysi

Laskennallisten tulosten tarkastelu osoittaa, että Markowitzin malli kykenee hyödyntämään tehokkaasti arvopapereiden välisiä matalia korrelaatioita riskin minimoimiseksi. Kun tarkastellaan tuloksia monitavoitteisen optimoinnin viitekehyksessä, havaitaan erilaisia ilmiöitä, jotka havainnollistavat Pareto-optimaalisuutta. Sijoittaja ei voi saavuttaa korkeampaa tuotto-odotusta kasvattamatta samalla salkun varianssia.

Tuottotavoitteen kasvaessa 11,67%:sta 15%:iin riski eli keskihajonta kasvoi 1,35 prosentiyksikköä. Samalla Microsoftin osakkeen paino lähes kaksinkertaistui 46,1%:iin salkun kokonaispainosta. Tämä osoittaa, että korkeampi tuottotavoite pakottaa sijoittajan luopumaan hajautuksesta ja samalla sen tuomastahyödystä, sekä keskittämään varojaan parhaiten tuottavaan kohteeseen.

Luvun 5.5. tulokset taulukossa 4 osoittavat, että reaalimaailman rajoitteet, kuten painojen ylärajat ($w_i \leq 0{,}30$) siirtävät salkun pois teoreettiselta tehokkaalta rintamalta. Kun sijoittaja asettaa salkulle lisätavoitteita, kuten ylä- tai alarajoja, hän joutuu tinkimään matemaattisesta tehokkuudesta saavuttaakseen muut tavoitteensa.

Vaikka empiiriset tulokset osoittavat hajauttamisen hyödyt selkeästi, on mallin käytännön sovellettavuudessa huomioitava useita rajoitteita. Malli on matemaattisesti erittäin herkkä syöttöarvoille, ja pienetkin virheet odotetun tuoton arvioinnissa voivat johtaa salkun painojen merkittävään muuttumiseen. Lisäksi on huomioitava, että malli perustuu historialliseen aineistoon eikä mennyt tuotto ole tae tulevasta. Erityisesti tarkastelujaksolle ajoittunut koronapandemian jälkeinen markkinatilanne on saattanut vääristää osakkeiden välisiä korrelaatioita, jotka eivät välttämättä päde vakaammissa olosuhteissa.

Lisäksi tutkielmassa tarkastellaan vain neljää osaketta, jolloin hajautushyöty on rajallista. Mallin oletus kitkattomasta kaupankäynnistä ei myöskään ota huomioon transaktiokustannuksia tai välityspalkkioita.

## 6.1 Tulosten arviointi reaalimaailman näkökulmasta

Empiiriset tulokset osoittavat, että globaalissa minimivarianssisalkussa Sampon paino nousi lähes 45 prosenttiin. Reaalimaailman sijoittajalle näin suuri painotus yhdessä osakkeessa on usein epärealistista ja riskialtista, vaikka se matemaattisesti minimoisikin varianssin historiallisessa aineistossa. Usein sijoittajat asettavat salkunhoitosäännöissään ylärajoja yksittäisten osakkeiden painoille varmistaakseen riittävän hajautuksen [3]. Tilannetta voidaan hallita asettamalla painoille ylä- tai alarajoitteita, kuten taulukossa 4 on tehty.

Myös asetettu 15 % tuottotavoite on historiallisessa kontekstissa varsin korkea. Pitkällä aikavälillä osakemarkkinoiden keskimääräinen tuotto on ollut lähempänä 7–10 prosenttia. Kuten tuloksista havaittiin, 15 % tuoton tavoittelu pakoitti salkun keskittymään voimakkaasti Microsoftiin (46,1 %), mikä nosti salkun keskihajonnan 14,20 prosenttiin. Sijoittajan onkin syytä pohtia, onko tällainen tuotto-odotus realistinen suhteessa markkinoiden yleiseen riskitasoon vai onko kyseessä tarkastelujakson poikkeuksellinen kehitys.

# 7 Päätelmät

Tämän tutkielman tavoitteena oli selvittää, miten optimaalinen sijoitussalkku muodostetaan matemaattisesti hyödyntämällä Markowitzin modernia portfolioteoriaa ja miten teoreettinen malli soveltuu käytännön markkinadataan. Tutkielmassa osoitettiin, että portfolion optimointi on monitavoitteinen optimointiongelma, jossa sijoittaja pyrkii tasapainoittamaan kahta toisilleen vastakkaista tavoitetta, riskiä ja tuottoa.

Teoreettisen johtamisen ja empiirisen analyysin perusteella voidaan nähdä, että hajautushyöty on todellista. Mallia sovellettiin neljään pörssiosakkeeseen aikavälillä 1.1.2021–1.1.2026 ja tulokset vahvistivat Markowitzin teorian perusoletusta kovarianssin merkityksestä. Globaalin minimivarianssisalkun keskihajonta (12,85 %) oli matalampi, kuin yhdenkään yksittäisen osakkeen volatiliteetti. Voidaan siis todeta, että optimaalinen salkku muodostetaan huomioimalla arvopapereiden väliset kovarianssit, ei pelkästään yksittäisiä tuottoja.

Tehokas rintama tarjoaa sijoittajalle joukon tasavertaisia ratkaisuja, joiden välillä tehtävä lopullinen valinta on subjektiivinen päätös, joka riippuu sijoittajan riskinsietokyvystä. Tutkielmassa kuitenkin havaittiin, että kun malliin tuodaan reaalimaailman vaatimuksia, kuten hajautuspakkoja, tai pitoisuusrajoitteita, salkku siirtyy tehokkaan rintaman alapuolelle. Tämä tarkoittaa tinkimistä suuremmasta odotetusta tuotosta tietyssä riskitasossa muiden tavoitteiden saavuttamiseksi.

Lopuksi on todettava, että vaikka Markowitzin malli tarjoaa edelleen vankan perustan modernille rahoitusteorialle, sen soveltaminen vaatii kriittisyyttä historiallisen datan asettamien rajoitteiden vuoksi. Tutkielma kuitenkin osoittaa, että optimaalinen hajauttaminen ja siirtyminen tehokkaalle rintamalle on tehokas työkalu rationaaliselle sijoittamiselle, joka pyrkii maksimoimaan tuoton suhteessa odotettuun riskiin.

# Viitteet

[1] Investing.com Historical Price Data: LVMH, Sampo, Microsoft, Kojamo.

[2] Stephen P. Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization.* Cambridge University Press, Cambridge New York Melbourne New Delhi Singapore, version 29 edition, 2023.

[3] Frank J. Fabozzi, editor. *Robust portfolio optimization and management.* Frank J. Fabozzi series. John Wiley, Hoboken, New Jersey, 2007.

[4] Samuli Knüpfer and Vesa Puttonen. *Moderni rahoitus (2024).* Alma Insights, 13 edition.

[5] Harry Markowitz. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.

[6] Kaisa Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization.* Number v.12 in International Series in Operations Research and Management Science Ser. Springer, Boston, 1st ed edition, 1998.

[7] Jyrki Niskanen and Mervi Niskanen. *Yritysrahoitus*, volume 2016 of *Business.* Sanoma Pro Oy, 8 edition.

[8] Stephen D. Williamson and Stephen D. Williamson. *Macroeconomics, Global Edition.* Pearson, Harlow, 6 edition, 2018.