



This is a self-archived – parallel-published version of an original article. This version may differ from the original in pagination and typographic details. When using please cite the original.

AUTHOR	Kärki Tomi, McMullen Jake, Halme Hilma, Määttä Saku, Lehtinen Erno, Hannula-Sormunen Minna
TITLE	Pelaamalla kohti joustavaa rationaalilukukäsitettä
YEAR	Psykologia-lehti, 2021, numero 6.
VERSION	Referoitu käsikirjoitus

Pelaamalla kohti joustavaa rationaalilukukäsitettä

Rationaalilukujen laskuprosessien hallinta ja käsitteellinen ymmärrys eivät vielä takaa niiden joustavaa käyttöä vaihtelevissa tilanteissa. Tämän tutkimuksen päätavoitteena on selvittää, voidaanko pelillisen NanoRoboMath-oppimisympäristön avulla edistää rationaalilukukäsitteen oppimista. Lisäksi tavoitteena on tutkia eri pelielementtien pelaamisen yhteyttä rationaalilukukäsitteen osa-alueiden oppimiseen. Kvasikokeellisessa asetelmassa 174 yläkoulun seitsemännen luokan oppilasta oli jaettu koe- ja kontrolliryhmiin. Koeryhmässä oppilaat pelasivat NanoRoboMath-peliä matematiikan oppitunneilla. Kontrolliryhmässä rationaalilukujen opetus toteutettiin oppikirjoihin perustuen. Alku- ja lopputesteissä mitattiin rationaalilukukäsitteen joustavuutta, päässäälaskutaitoa rationaaliluvuilla sekä niiden suuruuden, esitysmuotojen, operaatioiden lopputuloksen suuruuden ja tiheyden ymmärtämistä. Kovarianssianalyysin mukaan NanoRoboMath-pelin käyttäminen opetuksessa tuotti perinteistä kouluopetusta parempaa osaamista kaikilla mitatuilla rationaalilukujen osa-alueilla lukuun ottamatta esitysmuotoihin liittyvää osaamista. Pelaamisen laatu ja määrä olivat yhteydessä joustavan rationaalilukukäsitteen, päässäälaskutaitojen ja operaatioiden ymmärryksen kehittymiseen. Tutkimus vahvistaa käsitystä pelillisten oppimisympäristöjen hyödyllisyydestä rationaalilukukäsitteen ja joustavan matemaattisen ajattelun tukemisessa.

Avainsanat: rationaaliluku, pelillinen oppimisympäristö, joustava matemaattinen ajattelu

JOHDANTO

Peruskoulun aikana oppilaan lukukäsitteen tulisi laajentua lukumäärää ja järjestystä ilmaisevista luonnollisista luvuista rationaali- ja reaalilukuihin. Tärkeä osa lukukäsitteen kehittymistä on ymmärrys rationaaliluvuista eli luvuista, jotka voidaan esittää murtolukumuodossa. Rationaalilukuosaamisella on merkitystä jokapäiväisen elämänhallinnan lisäksi monissa työtehtävissä (Handel, 2016), ja sen on osoitettu ennustavan erityisesti algebrallista ajattelua (Booth & Newton, 2012; Siegler ym., 2012) ja yleisesti matemaattisten taitojen myöhempää kehittymistä (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012). Ongelmallista on, että tutkimusten mukaan monilla oppilaille on vaikeuksia siirtyä luonnollisista luvuista kohti rationaalilukujen edellyttämää ajattelua (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2015; McMullen, Van Hoof, Degrande, Verschaffel & Van Dooren, 2018), ja vain pieni osa heistä näyttää oppivan käyttämään rationaalilukuja joustavasti matematiikan tehtävissä (McMullen, Hannula-Sormunen, Lehtinen & Siegler, 2020). Tässä tutkimuksessa tarkastellaan rationaalilukujen käsitteellistä ymmärrystä ja joustavuutta harjaannuttavan digitaalisen oppimisympäristön vaikutuksia seitsemäsluokkalaisten rationaalilukuosaamiseen.

Aiempi tietämys luonnollisista luvuista luo perustan, mutta joiltain osin myös vaikeuttaa oikeanlaisen käsitteellisen ymmärryksen muodostamista rationaaliluvuista (Ni & Zhou, 2005). On yleistä, että oppilaat tekevät systemaattisesti virheitä tehtävissä, joissa luonnollisten lukujen ominaisuudet eroavat rationaalilukujen yleisistä ominaisuuksista. Virheelliset käsitykset liittyvät muun muassa rationaalilukujen suuruuteen (Stafylidou & Vosniadou, 2004), esitysmuotoihin (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008), laskuoperaatioiden tulosten suuruuteen (Van Hoof, Janssen, Verschaffel & Van Dooren, 2015) sekä rationaalilukujoukon tiheyteen (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Pidemmät desimaalikehitelmät ja suuremmat luvut osoittajassa ja nimittäjässä eivät kerro rationaaliluvun suuruudesta samalla tavoin kuin useampinumeroiset luonnolliset luvut. Luonnollisilla luvuilla on vain yksi esitystapa, mutta rationaaliluvulla on aina ääretön määrä esitysmuotoja sekä ekvivalentteina murtolukuina että eri tarkkuudella ilmoitettuina desimaalilukuina. Kun luonnollisten lukujen kertolaskussa tulo on aina kerrottavaa suurempi ja osamäärä jaettavaa pienempi, itseisarvoltaan yhtä kokonaista pienemmällä luvuilla kerrottaessa ja jaettaessa operaatioiden tuloksen suuruus käyttäytyykin päinvastoin. Jokaisella luonnollisella luvulla on yksikäsitteinen seuraaja, ja kahden luonnollisen luvun välissä on äärellinen määrä muita luonnollisia lukuja. Sen sijaan rationaalilukujen joukko on tiheä. Millään rationaaliluvulla ei ole olemassa seuraavaksi suurempaa rationaalilukua, ja kahden rationaaliluvun välissä on aina ääretön määrä muita rationaalilukuja. Rationaalilukujen osaamisessa proseduraalista tietoa edustaa sekä desimaalilukujen että murtolukujen peruslaskutoimituksiin liittyvien sääntöjen hallinta ja sujuva laskutaito. Käsitteellinen tieto tarkoittaa ymmärrystä rationaaliluvuista ja niiden ominaisuuksista. Matemaattisesti oikeanlaisen käsitteellisen ymmärryksen saavuttaminen rationaaliluvuista on edellä kuvailtujen vääristymää aiheuttavien luonnollisten lukujen ominaisuuksien pohjalta haastavaa ja vaatii usein käsitteellistä muutosta oppilaan ajattelussa (Vamvakoussi, Vosniadou & Van Dooren, 2019). Lisäksi tutkimukset osoittavat, että prosessien osaaminen ja käsitteellinen ymmärrys eivät vielä takaa rationaalilukukäsitteen joustavaa käyttöä (McMullen ym., 2020). Pieni osa oppilaista näyttää kuitenkin kehittävän tavanomaisen osaamisen ylittävän rationaalilukujen hallinnan, joka vastaa Hatanon ja Inagakin (1986) kuvaamaa adaptiivista asiantuntijuutta matematiikassa. Tällainen uudenlaisiin ongelmanratkaisutilanteisiin soveltuva joustava matemaattinen ajattelu näyttäisi edellyttävän rationaalilukujen erilaisten ominaisuuksien integroitumista johdonmukaiseksi kokonaisuudeksi (Bailey, Hansen & Jordan, 2017; McMullen ym., 2020).

Oikean käsitteellisen ymmärryksen saavuttaminen rationaaliluvuista ja proseduraalisen tiedon johdonmukainen integroituminen siihen saattaa olla haastavaa perinteisessä kouluopetuksessa. Oppikirjat usein käsittelevät desimaalilukuja, murtolukuja ja niiden ominaisuuksia erillisinä eivätkä tuo selkeästi esiin rationaalilukujen luonnollisista luvuista eroavia ominaisuuksia ja niihin liittyviä yleisiä virhekäsityksiä (Van Dooren ym., 2019). Lisäksi ongelmallista voi olla opettajien rationaalilukuja koskevan matemaattisen ja pedagogisen sisältötiedon rajoittuneisuus. Vaikka Depaepen ja kollegoiden (2015) tutkimuksessa matematiikkaan erikoistuneiden aineenopettajien matemaattiset taidot olivat parempia kuin luokanopettajien, molemmissa ryhmissä havaittiin puutteita rationaalilukuihin liittyvässä pedagogisessa osaamisessa. Toisaalta jopa käsitteelliseen muutokseen tähtäävien opetusinterventioiden on raportoitu

tuottavan heikkoja oppimistuloksia esimerkiksi tiheyskäsitteen ymmärtämisessä (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012).

Rationaalilukujen oppimiseen liittyvien haasteiden perusteella perinteisten oppimismenetelmien lisäksi tulisi tarkastella uusien teknologisten ratkaisujen hyödyntämistä rationaalilukujen opetuksessa. Aiempi tutkimus osoittaa digitaalisten pelien sekä tukevan matematiikan oppimista että lisäävän kiinnostusta ja innostusta matematiikkaa kohtaan (Bakker, van den Heuvel-Panhuizen & Robitzsch, 2015; Kiili & Ketamo, 2018; Li & Ma, 2010). Kaupallisesti tarjolla olevista matematiikan oppimispeleistä jopa lähes 90 prosenttia on kuitenkin keskittynyt harjoituttamaan sujuvaa laskuprosessien hallintaa toistoon perustuvien menetelmin hyödyntämättä teknologian luomia mahdollisuuksia käsitteellisen ymmärryksen, strategisen kompetenssin tai joustavan ajattelun kehittämiseen (Byun & Joung, 2018; Laato ym., 2020). Digitaaliset oppimispelit voisivat mahdollistaa uudenlaisia tapoja lähestyä oppisisältöjä ja tutkia matemaattisia ilmiöitä (Devlin, 2011) sen sijaan, että ne vain korvaavat perinteistä luokkaopetusta vastaavatyypisillä tehtävillä. Ratkaisevaa on, että oppisisällöt on integroitu mielekkäästi osaksi pelin toiminnallisuutta (Devlin, 2011; Young ym., 2012). Tällöin oppiminen ei tapahdu joidenkin pelistä irrallaan olevien lisäsisältöjen kautta vaan oppimistavoitteet linkittyvät kiinteästi pelimekaniikkaan. Digitaalisten oppimispelien käytöstä onkin saatu lupaavia tuloksia sekä käsitteellisen tiedon oppimisessa (Kiili, Moeller & Ninaus, 2018) että joustavan matemaattisen ajattelun kehittämisessä (Brezovszky ym., 2019; Mercier & Higgins, 2013).

Joustava rationaalilukukäsite

Monet tutkimukset ovat perinteisesti keskittyneet tarkastelemaan matemaattiseen osaamiseen liittyviä vaikeuksia, mutta 2000-luvulle tultaessa on alettu kiinnittää enemmän huomiota myös korkeamman tason osaamisen ja joustavan matemaattisen ajattelun tukemiseen ja tutkimiseen (Baroody, 2003; McMullen ym., 2020; Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren, 2009). Asiantuntijat voidaan jakaa rutiiniosaajiin ja adaptiivisiin eli taidoiltaan joustaviin asiantuntijoihin sen mukaan, miten tehokkaasti he pystyvät soveltamaan tietojaan ja taitojaan uusiin tilanteisiin. Adaptiivinen asiantuntijuus edellyttää proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon vahvaa linkittymistä siten, että asiantuntija ymmärtää, mihin hänen käyttämänsä menetelmät perustuvat, ja hän pystyy muokkaamaan ratkaisutapojaan joustavasti tilanteisiin sopiviksi ja jopa keksimään uusia menetelmiä. Sen sijaan rutiiniosaaminen on staattisempaa ja vähemmän linkittyntä tietoa, joka ilmenee vain hyvin harjoitelluissa alkuperäisen kaltaisissa tehtävätilanteissa nopeutena, tarkkuutena ja suorituksen automatisoitumisena (Baroody, 2003; Hatano & Inagaki, 1986; Hatano & Oura, 2003). Hatano ja Oura (2003) painottavat, että adaptiiviseen asiantuntijuuden kehittämisen ei tulisi olla kouluopetuksesta erillään tai ainoastaan taitavien oppilaiden tavoitteena, vaan kouluopetuksen tulisi kasvattaa kaikkia oppilaita kohti adaptiivisin asiantuntijuuden edellyttämää ymmärrystä ja joustavaa ajattelua.

Adaptiivinen asiantuntijuus aritmetiikassa voidaan jakaa kahteen rinnakkaiseen komponenttiin, jotka kummatkin ovat välttämättömiä, mutta eivät riittäviä adaptiivisuuden kannalta. Nämä ovat a) proseduraalinen joustavuus ja b) lukukäsitteen joustavuus (McMullen ym., 2016). Adaptiivinen

aritmeettinen ongelmanratkaisutaito edellyttää proseduraalista joustavuutta käyttäen erilaisia ratkaisustrategioita ja kykyä valita tehtävän ja sosiokulttuuristen normien perusteella itselle sopivin strategia (Torbeys, Verschaffel & Ghesquière, 2006; Verschaffel ym., 2009). Pelkästään erilaisten ratkaisustrategioiden osaaminen ei riitä selittämään niiden tarkoituksenmukaista käyttöä ongelmanratkaisutilanteissa, vaan ongelmanratkaisun adaptiivisuuteen näyttäisivät vaikuttavan taipumus tunnistaa ja hyödyntää yksittäisen tehtävän sisältämien lukujen ominaisuuksia ja niiden välisiä relaatioita (Threlfall, 2009). Tarvitaan joustavaa lukukäsitettä, jolla tarkoitetaan rikasta numeeristen ominaisuuksien ja lukujen välisten aritmeettisten relaatioiden muodostamaa kokonaisuutta, jota yksilö kykenee joustavasti soveltamaan uusissa tilanteissa (McMullen ym., 2017). Joustava (rationaali)lukukäsite on verrattain uusi tutkimuslöydös, ja siihen liittyvät tutkimusartikkelit painottuvat Turun yliopiston matematiikan oppimisen tutkimusryhmän ja sen yhteistyötahojen tutkimustuloksiin.

McMullen ja kollegat (2016, 2017) määrittivät joustavan lukukäsitteen alun pitäen kokonaislukuihin liittyen. Lukukäsitteen joustavuus edellyttää sekä a) numeerisia että b) aritmeettisiä tietoja ja taitoja (McMullen ym., 2017). Numeerinen tieto on ymmärrystä kymmenjärjestelmästä ja tietoa lukujen ominaisuuksista kuten tekijöistä ja niiden lukumäärästä, monikerroista sekä läheisistä ”kivoista” (Dowker, 1992) luvuista kuten tasaluvuista tai luvuista, jotka ovat jaollisia monilla luvuilla. Lisäksi numeeriseen taitoon kuuluu lukujen välisten additiivisten eli yhteen- ja vähennyslaskuun perustuvien ja multiplikaatiivisten eli kerto- ja jakolaskuun perustuvien suhteiden tunnistaminen. Aritmeettistä taitoa ovat sujuvan laskutaidon lisäksi aritmeettisten periaatteiden kuten liitântä- ja vaihdantalakien tunteminen ja hyödyntäminen. Joustavan lukukäsitteen on osoitettu olevan merkityksellinen osa matemaattista tietämystä. Lukukäsitteen joustavuudessa näyttäisi olevan huomattavia yksilöllisiä eroja niin alakoululaisilla kuin yliopisto-opiskelijoillakin, eivätkä erot selity kokonaan proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon perusteella (McMullen ym., 2016). Lisäksi kokonaislukuihin liittyvät joustavat lukukäsitetaidot ennustavat myöhempiä esi-algebrallisia taitoja aritmeettisen käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon huomioimisen jälkeenkin (McMullen ym., 2017).

Hiljattain lukukäsitteen joustavuutta on tutkittu myös rationaalilukujen yhteydessä (McMullen ym., 2020). Joustava rationaalilukukäsite näyttäytyi proseduraalisesta ja käsitteellisestä tiedosta erillisenä komponenttina, ei siis pelkästään parempana rutiiniosaamisena. Aritmeettisten lausekkeiden tuottamistehtävällä mitatut joustavat rationaalilukukäsitetaidot olivat poikkeuksellisen hyviä noin kymmenesosalla yläkouluikäisistä, mikä erotti heidät muista oppilaista, myös niistä, joilla muutoin sekä käsitteelliset että proseduraaliset tiedot rationaaliluvuista olivat korkealla tasolla. Samoin kuin kokonaislukukäsitteen joustavuus ennusti myöhempiä esi-algebrallisia taitoja (McMullen ym., 2017), joustavat rationaalilukukäsitetaidot olivat yhteydessä myöhempään algebran osaamiseen (McMullen ym., 2020). Joustava lukukäsite tukee täten muiden matematiikan sisältöjen oppimista.

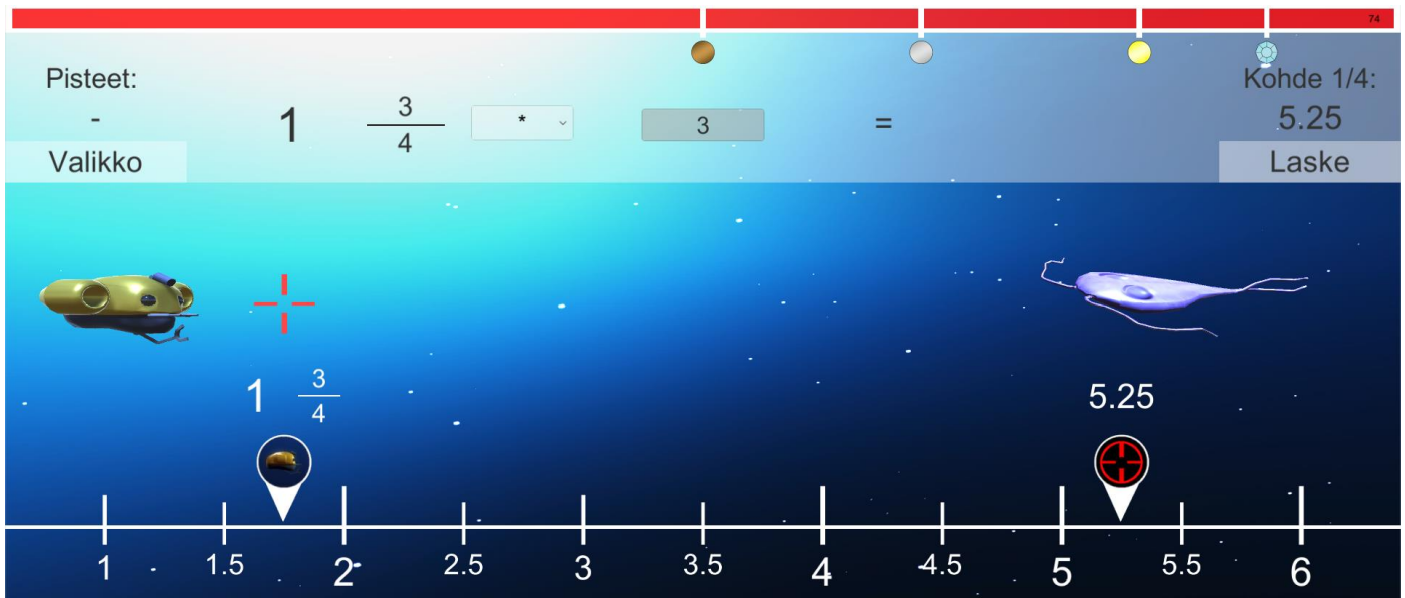
Vahva rationaalilukujen rutiiniosaaminen näyttäisi olevan välttämätöntä, mutta ei riittävää adaptiivisen asiantuntijuuden saavuttamiseksi. Adaptiiviselle asiantuntijuudelle oleellista onkin proseduraalisen ja

käsitteellisen tiedon yhdistyminen eheäksi kokonaisuudeksi. McMullenin ja kollegoiden (2020) tutkimus osoittaa, että rationaalilukujen tapauksessa tärkeää on etenkin erilaisten käsitteellisten tietojen kuten luvun suuruuden, esitysmuotojen ja operaatioiden vaikutusten integroituminen. Oppilaat, joiden joustavat rationaalilukukäsitetaidot olivat korkealla tasolla, pystyivät erityisesti hyödyntämään murtoluku- ja desimaaliesitysten välistä yhteyttä paremmin kuin muut oppilaat. Tällaiset rikkaat käsitteiden väliset yhteydet tarjoavat mahdollisuuksia joustavaan uusien ratkaisutapojen löytämiseen (Threlfall, 2009).

Pelillinen oppimisympäristö NanoRoboMath

Tutkimusryhmämme kehittämä pelillinen NanoRoboMath-oppimisympäristö on suunniteltu tukemaan joustavan rationaalilukukäsitteen kehittymistä. Siinä pelaaja suorittaa nanorobotilla tehtäviä: puhdistaa vettä hävittämällä siinä esiintyvät loiset, parantaa lemmikkieläimiä tuhoamalla niiden verestä viruksia ja auttaa ilmastonmuutoksen torjunnassa poistaen kasveista yhteyttämistä haittaavia loiseläimiä. Esimerkki pelinäköymästä on esitetty Kuvassa 1. Nanorobottia liikutetaan pitkin lukusuoraa neljän peruslaskutoimituksen avulla. Pelaajan sijainti ($1\frac{3}{4}$) näkyy lukusuoralla ja ohjauspaneelissa laskutoimituksen ensimmäisenä lukuna. Kun pelaaja valitsee haluamansa laskuoperaation (kertolasku *) ja syöttää ohjauspaneeliin toisen luvun (kerrottava 3), nanorobotti siirtyy automaattisesti laskulausekkeen arvon mukaiseen sijaintiin. Pelaajan tavoitteena on siirtää nanorobotti tuhottavan kohteen luo yhdellä tai useammalla perättäisellä laskuoperaatiolla. Nanorobotin lähestyessä kohdetta pelinäköymän mittakaava muuttuu suuremmaksi ja lukusuora tarkentuu, jolloin kohteen lähellä olevia rationaalilukuja näkyy enemmän. Nanorobotin loitotessa kohteesta pelinäköymän zoomaus-ominaisuus muuttaa vastaavasti mittakaavaa pienemmäksi.

Pelaajan saamat pisteet ja mitalit (pronssi, hopea, kulta, timantti) riippuvat tehtävätyypistä, joita NanoRoboMath-pelissä on kolme: energiatehtävät, aikatehtävät ja lähestymistehtävät. Energiatehtävissä syötetty luku kuvaa siirron vaatimaa energiamäärää ja tavoitteena on päästä kohteen luo käyttämällä energiaa mahdollisimman vähän. Tämä tehtävätyyppi suosii kerto- ja jakolaskun käyttöä yhteen- ja vähennyslaskun asemesta. Käänteislukuja ja käänteisiä laskutoimituksia hyödyntämällä voidaan päästä vielä parempiin tuloksiin. Kuvan 1 esimerkki on energiatehtävästä, jossa tuhotaan veden saastuttajabakteereja. Käytettävissä oleva energiamäärä on esitetty yläosan punaisen palkin avulla. Palkissa näkyvät myös eri mitalien edellyttämät energiankulutukset. Pelaajan valitsema kertolasku ($1\frac{3}{4} * 3$) vie energiaa luvun 3 verran, mikä on vähemmän kuin yhteenlaskun ($1\frac{3}{4} + 3.5$) edellyttämä energiamäärä 3.5. Vielä kannattavampaa olisi jakaa luku $1\frac{3}{4}$ luvun 3 käänteisluvulla $1/3$.



KUVA 1. NanoRoboMath-pelin pelinäkö, jossa nanorobotti on vasemmalla lukusuoran kohdassa $1 \frac{3}{4}$ ja kohteena oleva loiseläin kohdassa 5,25.

Aikatehtävissä nanorobotin ei tarvitse osua kohteen tarkkaan sijaintiin vaan riittää, että pääsee kohteen lähiympäristöön. Pisteitä saa sen mukaan, kuinka nopeasti ja tarkasti kohde saavutetaan. Kohteen tuhoamiseksi sallittu lähiympäristö laajenee tehtävään käytetyn ajan kuluessa. Tehtävätyyppi vaatii kompromissien tekemistä aikaa vievän tarkan laskemisen ja nopean likimääräisen laskemisen välillä. Esimerkiksi nanorobotin liikuttamiseen sijainnista 8.625 kohteen 4.5 lähiympäristöön riittäisi vähennyslasku $8.625 - 4$ sen sijaan, että laskisi tarkasti $8.625 - 4.125$. Jälkimmäisestä tavasta saisi kuitenkin enemmän tarkkuuspisteitä.

Lähestymistehtävissä nanorobotti ei saa osua kohteeseen tai ohittaa sitä, vaan pelaajan on päästävä mahdollisimman vähillä laskutoimituksilla mahdollisimman lähelle kohdetta. Kun lukusuoralle merkitty kohteen lähietäisyys on saavutettu, peli saattaa pyytää pelaajaa etenemään vieläkin lähemmäksi. Asteittaisen lähestymisen ideana on konkretisoida, että kahden rationaaliluvun väliltä löytyy aina lisää rationaalilukuja. Peli koostuu viidestä pelimaailmasta, joista kukin sisältää kymmenen tasoa. Ensimmäisessä pelimaailmassa laskuoperaatiot tehdään desimaaliluvuilla, toisessa murtoluvuilla, ja kolmannen pelimaailman laskuissa käytetään molempia esitysmuotoja sekaisin. Neljännessä pelimaailmassa rationaalilukujen esitysmuodon saa valita vapaasti, mutta osa laskuoperaatioista on poistettu käytöstä, jolloin oppilaan on löydettävä käännteisten laskutoimitusten avulla uusia tapoja lukusuoralla liikkumiseen. Neljässä ensimmäisessä pelimaailmassa energiatehtäviä ja aikatehtäviä on yhtä paljon, ja tasot sisältävät kahdesta kahdeksaan kohdetta, joiden yhteenlaskettu lukumäärä on 44. Viimeinen pelimaailma sisältää ainoastaan lähestymistehtäviä. Niissä desimaali- ja murtolukuesitysten käyttö on suunniteltu siten, että desimaalilukujen avulla lähestytään paitsi desimaalilukuja myös murtolukuja ja päinvastoin.

Rationaalilukukäsitteen joustavuus edellyttää hyvää käsitteellistä ymmärrystä rationaaliluvuista ja erilaisten käsitteellisten tietojen sujuvaa yhteen liittämistä (McMullen ym., 2020). Täten pelin suunnittelussa on pyritty ottamaan huomioon useita sellaisia rationaalilukujen ominaisuuksia, joissa tutkimuskirjallisuuden

mukaan luonnollisten lukujen tietämys häiritsee oikeanlaisen käsitteellisen ymmärryksen muodostamista. Näitä ovat lukujen suuruus, esitysmuodot, operaatiot ja tiheys (Van Hoof ym., 2015).

Luvun suuruuden ymmärtäminen vaikuttaisi olevan edellytys myös muiden käsitteellisten asioiden kuten tiheyden ymmärtämiselle (McMullen ym., 2015). Käsitteellisen ymmärryksen tukemiseksi pelin keskeisenä ominaisuutena käytetään lukusuoralla liikkumista (Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Rationaaliluvun suuruus ilmenee siinä, että sillä on yksikäsitteinen paikka lukusuoralla. Lukusuoran avulla pelaaja myös pystyy havaitsemaan oman sijaintinsa suuruuden suhteessa muiden lukujen ja erityisesti kohteen suuruuteen. Lisäksi luvun suuruusluokan nopea hahmottaminen korostuu aikatehtävissä, joissa yhtenä strategiana voi hyödyntää likimääräistä laskemista.

Rationaaliluvun erilaisten esitysmuotojen sujuva hallinta näyttäisi olevan yhteydessä rutiiniosaajia parempaan rationaalilukukäsitteen joustavuuteen (McMullen ym., 2020). Tästä syystä NanoRoboMath-pelissä käytetään rationaaliluvuista sekä desimaali- että murtolukuesitystä ja joskus jopa Kuvan 1 tapaan molempia esitysmuotoja samassa tehtävässä. Tämän on tarkoitus korostaa, että kyseessä on kaksi saman luvun eri merkitsemistapaa eikä kaksi eri lukua. Lukusuoralla käytetään koko pelin ajan desimaalilukuja, jolloin lukusuoralle merkityt pelaajan ja kohteen murtolokusijainnit yhdistyvät desimaaliesitykseen. Joustavaa ajattelua tuetaan myös sillä, että osassa kentistä pelaajan on mahdollista vapaasti vaihtaa nanorobotin ja kohteen sijainnin sekä ohjauspaneeliin syötettävän luvun esitysmuotoja kutakin erikseen. Lisäksi on huomattava, että lukusuora itsessään on yksi tapa esittää rationaalilukuja visuaalisesti. Yhteyden löytäminen saman matemaattisen objektin symbolisen ja visuaalisen esitysmuodon välillä eli rationaaliluvun tulkitseminen pituutena lukusuoralla tukee käsitteellisen ymmärryksen muodostumista (Deliyianni & Gagatsis, 2013).

Pelissä pelaajan on mahdollista kohdata operaatioihin liittyvät väärinkäsitykset ”kertolasku tekee suuremmaksi” ja ”jakolasku tekee pienemmäksi”. Näin tapahtuu, kun pelaaja käyttää itseisarvoltaan ykköistä pienempää lukua kertolaskussa siirtyäkseen lähemmäs nollaa ja jakolaskussa siirtyäkseen kauemmas nolasta. Energiatehtävissä pelaaja saa vinkkejä parempien mitalien ansaitsemiseen. Timanttitason pelivinkin toteuttaminen edellyttää luopumista operaatioiden lopputuloksen suuruuteen liittyvästä edellä mainitusta virhekäsityksestä. Viimeistään neljännen pelimaailman rajoitettujen operaatioiden energiategävissä oppilaan on pohdittava totutusta ajattelusta poikkeavaa tapaa käyttää operaatioita, kun itseisarvoltaan suurempiin lukuihin liikkumiseen on käytössä vain vähennys- ja jakolasku ja pienempiin lukuihin liikkumisessa yhteen- ja kertolasku.

Rationaalilukujen tiheyskäsitteen ymmärtämisen tukeminen perustuu lukusuoran zoomautuvuuteen. Jokaisessa pelin tehtävässä pelaaja voi havaita nanorobotin ja kohteen välillä yhä enemmän ja tarkempia rationaalilukuja lähestyessään kohdetta. Pelimekaniikan näkökulmasta tiheyskäsite on vahvimmin läsnä lähestymistehtävissä, joissa asteittain lähestyttäessä kohdetta löydetään uusia vielä lähempänä kohdetta olevia rationaalilukuja. Ideana on osoittaa konkreettisesti, että lähestymistä voi jatkaa loputtomiin koskettamatta kohdetta. Kohteen ja nanorobotin välissä on siis aina loputon määrä muita rationaalilukuja.

Pelilliset oppimisympäristöt voivat rohkaista oppilaita kokeilemaan matematiikkaa leikinomaisessa ympäristössä ilman epäonnistumisen pelkoa (Devlin, 2011). NanoRoboMath-peli luo turvallisen ympäristön tutkia erilaisia rationaalilukujen ja operaatioiden välisiä yhteyksiä ja kannustaa löytämään uusia ratkaisutapoja. Oletetaan, että lukujen välisten monipuolisten yhteyksien tutkiminen tukee joustavan lukukäsitteen ja aritmeettisen ajattelun kehittymistä (Baroody, 2003; Threlfall, 2009; Van Dooren ym., 2019). Pelimaailmat ja niiden tasot on suunniteltu pelattavaksi vaikeutuvassa järjestyksessä. Pelimaailman sisällä seuraavalle tasolle pääsee vain suorittamalla edellisen tason. NanoRoboMath-pelin pilottiversion pelaamisessa havaittiin erilaisia pelitapoja ja strategioita (Kärki, McMullen & Lehtinen, 2021). Joku pelaajista pyrki vain pelaamaan tason läpi, kun taas toinen halusi saavuttaa mahdollisimman hyviä tuloksia pelaamalla tasoja uudelleen. Pelissä onkin haluttu kannustaa tarkoituksenmukaiseen harjoitteluun (Lehtinen, Hannula-Sormunen, McMullen & Gruber, 2017) mahdollistamalla tasojen pelaaminen uudelleen ja myöntämällä mitaleita paremmin suoritetuista tasoista.

Tutkimuskysymykset ja hypoteesit

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan pelillisen oppimisympäristön, NanoRoboMathin, vaikutuksia seitsemäsluokkalaisten rationaalilukuosaamiseen. Tutkimuksen päätavoitteena on selvittää, voidaanko oppimisympäristön avulla edistää rationaalilukukäsitteen oppimista. Lisäksi tavoitteena on tutkia pelin eri elementtien pelaamisen yhteyttä rationaalilukukäsitteen osa-alueiden oppimiseen. Asetimme seuraavat tutkimuskysymykset:

1: Tuottaako pelillisen NanoRoboMath-oppimisympäristön käyttäminen opetuksessa perinteistä, oppikirjaperustaista kouluopetusta parempaa rationaalilukujen osaamista koskien

1.1: päässälaskua,

1.2: lukujen suuruutta,

1.3: lukujen esitysmuotoja,

1.4: operaatioiden lopputuloksen suuruutta,

1.5: lukujoukon tiheyttä,

1.6: rationaalilukukäsitteen joustavuutta?

2: Miten pelaamisen laatu ja määrä NanoRoboMath-pelissä on yhteydessä edellä mainittujen rationaalilukukäsitteen osa-alueiden kehittymiseen

2.1: koko pelissä,

2.2: energiatehtävissä,

2.3: aikatehtävissä,

2.4: sekoitettujen esitysmuotojen tehtävissä,

2.5: rajoitettujen operaatioiden tehtävissä?

Tutkimuskysymykseen 2 liittyen emme pystyneet tämän tutkimuksen aineistossa tarkastelemaan mielekkäällä tavalla pelaamisen laadun yhteyttä rationaalitiedon eri osa-alueisiin NanoRoboMath-pelin lähestymistehtävissä, sillä tutkimusasetelman naturalistisuudesta johtuen vain pieni osa ($n = 25$) koeryhmän oppilaista pääsi pelissä etenemään viidennen pelimaailman lähestymistehtäviin.

Aiemmin on havaittu, että pelillisen oppimisympäristön avulla voidaan kehittää oppilaiden eritasoisia tietoja ja taitoja, niin perusosaamista, käsitteellistä ymmärrystä kuin rationaalilukukäsitteen joustavuuttakin (Brezovszky ym., 2019; Kiili ym., 2018). NanoRoboMath-pelin pilottiversion on todettu mahdollistavan joustavan rationaalilukujen ja niiden välisten suhteiden tutkiskelun, ja pelaajien on havaittu käyttävän pelissä monipuolisesti erilaisia luku–operaatio-yhdistelmiä (Kärki ym., 2021). Tämän voisi olettaa kehittävän joustavia rationaalilukukäsitetaitoja samaan tapaan kuin Number Navigation Game -oppimisympäristö kehittää kokonaislukukäsitteen joustavuutta (Brezovszky ym., 2019). Lisäksi NanoRoboMath-pelin aiemman version havaittiin tukevan käsitteellisen tiedon kehittymistä ja erityisesti operaatioiden lopputuloksen suuruuden ymmärtämistä (Kärki, McMullen & Lehtinen, arvioitavana). Koska perinteinen kouluopetus käsittelee usein rationaalilukukäsitteen eri osa-alueita erillisinä ja jättää käsitteellistä muutosta vaativat aspektit vähälle huomiolle (Van Dooren ym., 2019), hypoteesinamme on:

1: Pelillinen oppimisympäristö NanoRoboMath tuottaa perinteistä, oppikirjaperustaista kouluopetusta parempaa osaamista kaikilla mitatuilla rationaalilukujen osa-alueilla, kun ennen NanoRoboMath-pelin pelaamista mitatut taidot on kontrolloitu.

Aiemmassa tutkimuksessa havaittiin joustavan lukukäsitteen kehittämiseen tähtäävän Number Navigation -pelin tukevan korkeatasoista oppimista erityisesti niillä oppilailta, jotka pyrkivät pelin eri vaiheissa mahdollisimman korkeatasoiseen suoritukseen (Brezovszky ym., 2019). NanoRoboMath-pelissä on samanlainen idea rohkaista pelaajaa jatkuvasti parantamaan suoritustaan toistamalla vähemmän optimaalisesti suoritettuja tehtäviä. Pelin aiemman version yhteydessä pelaamisen laadun todettiin olevan yhteydessä joustaviin rationaalilukukäsitetaitoihin sekä eri esitysmuotoja ja operaatioiden lopputuloksen suuruutta koskevaan käsitteelliseen osaamiseen (Kärki ym., arvioitavana). Pelaaminen ei kuitenkaan ollut yhteydessä tiheyskäsitteen ymmärtämiseen. Aiemmassa tutkimuksessa ei mitattu päässälaskutaitoja eikä lukujen suuruuteen liittyvää käsitteellistä ymmärrystä eikä pyritty tarkemmin selvittämään oppimisen yhteyttä pelin eri tehtävätyyppeihin. Koska pelin eri tehtävätyyppien pelimekaniikat on suunniteltu erityisesti tiettyjen rationaalilukukäsitteen osa-alueiden tukemiseen, asetimme seuraavat hypoteesit:

2: Korkeampi pelaamisen laatu ja määrä on yhteydessä parempaan osaamiseen loppumittauksessa. Kun ennen NanoRoboMath-oppimisympäristön käyttöä mitatut taidot on kontrolloitu, pelaamisen laatu ja määrä on yhteydessä

2.1: koko pelissä rationaalilukukäsitteen joustavuuteen,

2.2: energiatehtävissä operaatioiden lopputuloksen suuruuden ymmärtämiseen ja rationaalilukukäsitteen joustavuuteen,

2.3: aikatehtävissä päässälaskutaitoihin, lukujen suuruuden ymmärtämiseen ja rationaalilukukäsitteen

joustavuuteen,

2.4: sekoitettujen esitysmuotojen tehtävissä lukujen eri esitysmuotojen osaamiseen ja rationaalilukukäsitteen joustavuuteen,

2.5: rajoitettujen operaatioiden tehtävissä operaatioiden lopputuloksen suuruuden ymmärtämiseen ja rationaalilukukäsitteen joustavuuteen.

MENETELMÄT

Tutkimusasetelma ja tutkimuksen kulku

Tutkimuksen aineisto kerättiin syksyllä 2019 osana Growing Mind -hankkeeseen (<https://growingmind.fi/theproject>) kuuluvaa laajempaa opetuskokeilua, jossa seitsemäsluokkalaiset käyttivät kahta rationaalilukujen oppimiseen suunniteltua pelillistä oppimisympäristöä matematiikan tunneilla kahdeksan viikon aikana. NanoRoboMath-peliä ennen opetuskokeilussa käytettiin NumberTrace-peliä, jossa arvioidaan lukujen sijaintia lukusuoralla ja joka on aiemmissa yhteyksissä tutkitun Semideus-pelin laajennus (Kiili ym., 2018). Lupa tutkimuksen toteuttamiseen saatiin Helsingin yliopiston eettiseltä toimikunnalta, kaupungilta, koulujen rehtoreilta ja tutkimukseen osallistuneilta opettajilta. Oppilaiden huoltajilta kerättiin kirjalliset suostumukset ja testien yhteydessä oppilaita muistutettiin heidän oikeudestaan missä tahansa vaiheessa kieltäytyä tutkimukseen osallistumisesta. Tutkimuksessa noudatettiin Helsingin ja Turun yliopistojen, Growing Mind -hankkeen ja Tutkimuseettisen neuvottelukunnan (TENK) eettistä ohjeistusta.

Kyseessä on kvasikokeellinen tutkimusasetelma, jossa vastaajat valittiin koe- ja kontrolliryhmiin luokkakohtaisesti rationaalilukuihin liittyvän opetusaikataulun ja käytetyn oppikirjan perusteella. Tavoitteena oli näin varmistaa, että kontrolliryhmät saivat rationaalilukuihin liittyvää perinteistä opetusta vastaavana aikana kuin koeryhmien opetuksessa hyödynnettiin digitaalisia oppimisasipelejä. Intervention pelillinen harjoittelu korvasi normaalin matematiikan opetuksen kahdeksan oppitunnin osalta, ja opettajia ohjeistettiin olemaan käsittelemättä rationaalilukuja pelillisen oppimisympäristön ulkopuolella mittausten välisenä aikana. Kontrolliryhmän opettajat toteuttivat rationaalilukuisältöjen opetusta vapaasti oppikirjoihin pohjautuen. Koe- ja kontrolliryhmien rationaalilukujen opetuksen voitaneen ajatella sisältäneen kutakuinkin toisiaan vastaavat matemaattiset käsitteet ja operaatiot, mutta eri luokkien toteutusten välillä on todennäköisesti ollut eroa sisältöjen painotuksissa ja esitystavoissa. Matematiikan oppikirjojen perusteella rationaalilukujen laskutoimitukset, suuruusvertailu sekä murtolukujen ja desimaalilukujen yhteys kuuluvat perinteisen opetuksen sisältöihin. Sen sijaan ei ole luultavaa, että perinteinen opetus olisi pelillisen opetuksen tapaan hyödyntänyt vahvasti lukusuoraesitystä, pyrkinyt sekoittamaan esitysmuotoja, pyrkinyt kiinnittämään oppilaiden huomiota operaatioiden lopputuloksen suuruuteen ja lukujoukon tiheyteen tai sisältänyt lukukäsitteen joustavuutta tukevia harjoitteita.

NumberTrace-peliin liittyvän alkumittauksen ja kahden tunnin mittaisen opettajien koulutuksen jälkeen

koeryhmän oppilaiden tuli pelata NumberTrace-peliä kolmen 45 minuutin mittaisen oppitunnin ajan. Neljännellä tutkimusviikolla tehtiin mittaus, joka toimi NumberTrace-kokeilun loppumittauksena ja NanoRoboMath-kokeilun alkumittauksena. Tämän jälkeen järjestettiin koeryhmien opettajille toinen koulutus, jossa keskityttiin NanoRoboMath-oppimisympäristön ominaisuuksiin, oppimistavoitteisiin ja pelimekaniikkoihin. Koulutuksessa korostettiin, että luokan on tärkeää keskustella yhdessä pelin eri tehtävyyppien erilaisista ratkaisustrategioista ja että opettajien tulisi rohkaista oppilaita löytämään erilaisia strategioita parempien tulosten saavuttamiseksi. Opettajien koulutus- ja ohjeistusmateriaali on nähtävissä osoitteessa https://osf.io/62cg3/?view_only=8422dca45a17449f8d0b5967c167c683. Koulutusta seuranneen syyslomaviikon jälkeen opettajia pyydettiin käyttämään NanoRoboMath-oppimisympäristöä matematiikan opetuksessa kahden viikon aikana viiden 45 minuutin mittaisen oppitunnin ajan. NanoRoboMath-osion ja koko opetuskokeilun loppumittaus järjestettiin viimeisen pelikerran jälkeen. Kaikki kolme testausta toteutettiin matematiikan oppitunneilla tietokoneavusteisesti jonkun tutkijan ohjauksessa. Testit vastasivat sisällöllisesti toisiaan ja kestivät noin 40 minuuttia. Jokainen oppilas teki testin tietokoneella. Ohjeet näytettiin tietokoneen ruudulla ja luettiin ääneen. Heikosti suomea osaaville oppilaille oli tarjolla englanninkieliset ohjeet sekä kirjallisesti että ääneen luettuna. Laskimen käyttö oli testissä kielletty.

Osallistujat

Koko kahdeksanviikkoisen opetuskokeilun koe- ja kontrolliryhmiin osallistui yhteensä 277 oppilasta erään suomalaisen kaupungin kahdeksasta koulusta. Heistä tutkimusluvan antoi 207 oppilasta (75 %). Tässä tutkimuksessa tarkastellaan opetuskokeilun NanoRoboMath-peliä koskevaa osuutta. Aineistona on NanoRoboMath-osuuden alku- ja loppumittauksen tuottama data sekä pelin lokitiedot. Tutkimusjoukon muodostivat ne kontrolliryhmän oppilaat, jotka osallistuivat molempiin mittauksiin, ja ne koeryhmän oppilaat, jotka molempiin mittauksiin osallistumisen lisäksi pelasivat NanoRoboMath-peliä vähintään yhden tason verran. Tämän pelaamiskriteerin vuoksi vain yksi koeryhmän oppilas jäi tutkimusjoukon ulkopuolelle. Näiden kriteerien pohjalta tutkimusjoukon kooksi muodostui $N = 174$, joista 82 oli poikia ja 92 tyttöjä. Vastaajien keski-ikä oli 13.2 ($KH = 0.34$) vuotta. Koeryhmään kuului 103 oppilasta yhdeksästä luokasta ja kontrolliryhmään 71 oppilasta neljästä luokasta, joista yksi oli kolmen opetusryhmän yhdistelmäluokka. Koeryhmien oppilaat pelasivat NanoRoboMath-peliä keskimäärin 1 tunnin ja 31 minuuttia ($KH = 57$ min). Pelaamisajassa oli suuria vaihteluja (minimi 18 min, maksimi 4 h 28 min). Tarkempi analyysi osoitti, että interventioon osallistuneet luokat käyttivät NanoRoboMath-peliä ohjeistuksesta huolimatta kovin eri tavoin. Neljässä luokassa yli 80 prosenttia oppilaista eteni pelissä neljanteen tai viidenteen pelimaailmaan. Kolmessa luokassa enemmistö oppilaista pelasi NanoRoboMathia toiseen tai kolmanteen pelimaailmaan asti, kun taas kahdessa koeluokassa kukaan oppilaista ei edennyt ensimmäistä pelimaailmaa pidemmälle ja heidän pelaikansa rajoittui 18–30 minuuttiin. Pelissä etenemiseen ja pelaamisen määrään vaikuttivat oppilaan osaamistason ja motivaation lisäksi siis myös luokkien erilaiset pelillisen oppimisen toteutustavat ja ajankäyttö. Tällainen variaatio on tutkimusasetelman naturalistisuudesta johtuen luonnollista, ja se tulee ottaa huomioon tuloksia analysoitaessa ja tulkittaessa.

Mittarit

Tässä tutkimuksessa rationaalilukujen osaaminen jaettiin tutkimuskysymyksen 1 mukaisesti kuuteen osa-alueeseen, joita mitattiin alku- ja loppumittauksessa kahdeksalla erilaisella tehtävätyypillä. Näiden mittarien reliabiliteetit on esitetty Taulukossa 1.

TAULUKKO 1. Mittarien reliabiliteetit.

Mittari	Osatehtävien lukumäärä	Cronbachin α alkumittauksessa	Cronbachin α loppumittauksessa
Päässäslasku	12	0.74	0.78
Lukujen suuruusjärjestys	6	0.77	0.81
Luvun paikka lukusuoralla	8	0.65	0.68
Esitysmuotojen tunnistaminen	2	0.73	0.76
Esitysmuotojen muuntaminen	8	0.85	0.85
Operaatioiden lopputuloksen suuruus	6	0.72	0.72
Lukujoukon tiheys	4	0.82	0.88
Joustava rationaalilukukäsitys	4	0.86	0.88

Rationaalilukujen päässäslaskun sujuvuutta mitattiin kuudella murtolukulaskulla (esim. $\frac{1}{2} : 2$, $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$), viidellä desimaalilukulaskulla (esim. $0.375 - 0.125$, $2 : 0.25$) ja yhdellä sekoitettujen esitysmuotojen laskulla (esim. $\frac{1}{2} \cdot 0.5$). Jokaisesta oikeasta vastauksesta sai yhden pisteen (maksimi 12 pistettä).

Lukujen suuruuden ymmärtämistä mitattiin kahden tehtävätyypin, järjestämistehtävän (Stafylidou & Vosniadou, 2004) ja lukusuoratehtävän (Siegler ym., 2011), avulla. Lukujen järjestämistehtävissä kolme tai neljä rationaalilukua tuli järjestää suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan. Kahdessa tehtävässä käytettiin vain desimaalilukuja, kahdessa vain murtolukuja ja kahdessa sekä desimaali- että murtolukuja. Täysin oikeasta järjestyksestä sai yhden pisteen, muutoin nolla pistettä. Lukujen suuruusjärjestyksen summamuuttujan maksimi oli täten 6 pistettä. Lukusuoratehtävässä vastaajan tuli merkitä annetun luvun paikka lukusuoralla. Neljässä tehtävässä käytettiin lukuväliä 0–1 ja neljässä tehtävässä lukuväliä 0–5. Suorituksen tarkkuus saatiin vähentämällä sadan prosentin tarkkuudesta suorituksen prosentuaalinen virhe, joka laskettiin jakamalla vastaajan merkitsemän paikan etäisyys oikeasta arvosta lukusuoran pituudella. Luvun paikka lukusuoralla -muuttujan arvona käytettiin tehtäväkohtaisten tarkkuuksien keskiarvoa. Luvun suuruutta koskevan osaamisen kokonaisuudesta saatiin laskemalla yhteen järjestämistehtävän summamuuttujan ja lukusuoratehtävän keskiarvomuuttujan standardoidut arvot. Kahden muuttujan tapauksesta johtuen yhdistetyn muuttujan reliabiliteetin laskennassa käytettiin Spearman–Brownin rhoota (Eisinga, te Grotenhuis & Pelzer, 2013), jonka arvo alkumittauksessa oli 0.77 ja loppumittauksessa 0.73.

Lukujen eri esitysmuotojen osaamista mitattiin kahdella tehtävätyypillä. Rationaaliluvun esitysmuotojen tunnistamistehtävä oli muokattu versio Gearyn, Baileyn ja Hoardin (2009) suunnittelema tehtävätyypistä. Oppilaalla oli minuutti aikaa tunnistaa annetun rationaaliluvun (esim. $\frac{1}{2}$ ja 0.9) symbolisia ja visuaalisia esityksiä 18 vaihtoehdon joukosta, joista oikeita oli 10–13. Oikeasta vastauksesta sai yhden pisteen, ja väärästä vastauksesta menetti yhden pisteen. Molemmissa mittauksissa annettuina lukuina käytettiin yhtä murto- ja yhtä desimaalilukua. Näiden kahden tehtävän standardoitujen arvojen summaa käytettiin esitysmuotojen tunnistamisen mittana. Rationaalilukujen muunnostehtävässä oppilaan tuli muuntaa neljä murtolukua desimaaliluvuksi ja neljä desimaalilukua murtoluvuksi. Jokaisesta oikeasta muunnoksesta sai yhden pisteen (maksimi 8 pistettä). Lukujen esitysmuotojen osaamisen kokonaismitan muodostamiseksi laskettiin yhteen tunnistamistehtävän ja muunnostehtävän summamuuttujien standardoidut arvot. Yhdistetyn muuttujan reliabiliteettia kuvaava Spearman–Brownin ρ oli alkumittauksessa 0.79 ja loppumittauksessa 0.80.

Rationaalilukujen välisten laskuoperaatioiden käsitteellistä ymmärrystä mitattiin Van Hoofin ja kollegoiden (2015) testistä muunnetuilla kuudella monivalintatehtävällä. Tehtävissä mitattiin operaatioiden lopputuloksen suuruuden ymmärtämistä tilanteissa, joissa luonnollisten lukujen mukaisen ajattelun on todettu johtavan virheellisiin päätelmiin. Esimerkiksi kysyttiin ”Onko laskun $21 : 0.7$ tulos pienempi vai suurempi kuin 21?” ja ”Onko $72 \cdot 0.99$ pienempi vai suurempi kuin 72?”. Jokaisesta oikeasta vastauksesta sai yhden pisteen (maksimi 6 pistettä).

Rationaalilukujoukon tiheyden ymmärtämistä mitattiin neljän Vamvakoussilta ja Vosniadoulta (2004) muokatun monivalintatehtävän avulla. Kysymykset olivat muotoa ”Kuinka monta lukua on lukujen x ja y välissä?”. Vastaukset pisteytettiin seuraavasti: ”ei muita lukuja” 0 pistettä, ”äärellinen määrä murtolukuja” tai ”äärellinen määrä desimaalilukuja” 1 piste, ”ääretön määrä murtolukuja” tai ”ääretön määrä desimaalilukuja” 2 pistettä, ”ääretön määrä lukuja, sisältäen murtolukuja ja desimaalilukuja” 3 pistettä. Kahdessa tehtävässä annetut luvut x ja y olivat murtolukuja ja kahdessa desimaalilukuja. Lukujoukon tiheyden maksimipistemääräksi tuli täten 12 pistettä.

Rationaalilukukäsitteen joustavuutta mitattiin rationaalilukuihin muokatulla aritmeettisten lausekkeiden tuottamistehtävällä (McMullen ym., 2017, 2020). Oppilaiden tuli kahden minuutin aikana tuottaa annettujen viiden luvun ja neljän peruslaskutoimituksen avulla mahdollisimman monta laskulauseketta, joiden tuloksena oli tietty tavoiteluku. Samoja lukuja ja laskuoperaatioita sai käyttää useaan kertaan. Ensin oppilaat tekivät harjoitustehtävän kokonaisluvuilla (tavoiteluku 6, annetut luvut 1, 2, 3 ja 4). Tämän jälkeen heillä oli mahdollisuus kysyä tarkentavia kysymyksiä, minkä jälkeen tehtiin neljä rationaalilukuja sisältävää tuottamistehtävää. Jokainen tehtävä sisälsi kaksi paria ekvivalentteja murto- ja desimaalilukuja (esim. $\frac{1}{4}$ ja 0.5 sekä $\frac{3}{4}$ ja 0.75), yhden kokonaisluvun (esim. 2) ja tavoiteluvun (esim. $\frac{1}{2}$). Jokaisesta oikein tuotetusta aritmeettisestä lausekkeesta sai yhden pisteen. Täysin samaa vastausta ei voinut antaa uudelleen, mutta vastaukset, joissa luvut esiintyivät eri esitysmuodoissa (esim. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ ja $0.75 - 0.25$) tai eri järjestyksessä ($0.25 + \frac{1}{4}$ tai $\frac{1}{4} + 0.25$) kelpasivat oikeiksi vastauksiksi. Joustavan rationaalilukukäsitteen mittarina

käytettiin näiden neljän tuottamistehtävän oikein tuotettujen aritmeettisten lausekkeiden lukumäärän keskiarvoa.

Pelaamisen määrän mittarina oli pelissä suoritettujen tasojen lukumäärä, jonka maksimi oli koko pelissä 50, energia- ja aikatehtävissä 20 ja sekä sekoitettujen esitysmuotojen että rajoitettujen operaatioiden tehtävissä 10. Pelissä saavutetut mitalit pisteytettiin: pronssimitalista sai yhden pisteen, hopeasta kaksi, kullasta kolme ja timantista neljä pistettä. Pelaamisen laadun mittarina käytettiin mitalisuorituksista saatujen pisteiden keskiarvoa. Keskiarvoa laskettaessa huomioitiin vain tason paras mitalisuoritus. Kaikissa tehtävätyypeissä korkeampiarvoinen mitali vastasi laadukkaampaa pelisuoritusta. Energiatehtävissä pronssitaso vastasi liikkumista lukusuoralla yhteen- tai vähennyslaskun avulla koko ajan lähestyen kohdetta menemättä sen yli. Kultamitalin saadakseen tuli kerto- ja jakolaskua hyödyntää silloin, kun se oli etenemisen kannalta edullisin vaihtoehto. Hopeamitalin mukainen energian käyttö sijoittui pronssi- ja kultatason puoliväliin. Timanttitaso osoitti osaamisen edellytti itsearvoltaan yhtä kokonaista pienempien lukujen käyttöä kerto- ja jakolaskussa. Aikatehtävissä mitali määräytyi suoritusnopeuden mukaan. Laskemisen tarkkuus liittyi mitalien mukaiseen suoritukseen siten, että suoritusajan ylittäessä mitalin aikarajan pelaajan ei enää tarvinnut päästä yhtä lähelle kohdetta kuin aiemmin. Pelaamisen laadun ja määrän kokonaismittana käytettiin standardoitujen pelaamisen laadun ja määrän muuttujien summaa. Pelaamisen laatua ja määrää tarkasteltiin 1) koko pelissä, 2) energiatehtävissä, 3) aikatehtävissä, 4) sekoitettujen esitysmuotojen tehtävissä ja 5) rajoitettujen operaatioiden tehtävissä.

Analyysimenetelmät

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen osalta koe- ja kontrolliryhmien vertailuun käytettiin kovarianssianalyysia (ANCOVA). Ryhmien oppimistulosten vertailemiseen olisi ollut mahdollista käyttää toistettujen mittauskertojen varianssianalyysia (ANOVA), mutta tutkimuksen kysymyksenasettelun kannalta kovarianssianalyysi sopii paremmin loppumittauksen perusteella saavutetun osaamistason ryhmien välisten erojen tarkasteluun, kun osaaminen alkumittauksessa kontrolloidaan kovarianttina. Interventiossa saavutetun osaamistason painottaminen osaamisen muutosten sijaan kiinnostaa meitä erityisesti kehittyneempää matemaattista ajattelua mittaavien muuttujien, operaatioiden lopputuloksen suuruuden, tiheyden ymmärtämisen ja joustavan rationaalilukukäsitteen, kohdalla. Tulososiossa rationaalilukukäsitteen osaamistasoa kuvataan esittämällä muuttujien standardoimattomat keskiarvot ja ryhmien välisiä eroja tarkastellaan sekä tilastollisen merkitsevyyden ja efektikoon että arvioitujen reunakeskiarvojen eron avulla. Toiseen tutkimuskysymykseen vastattiin hierarkkisella regressioanalyysillä. Selvittäessämme pelaamisen laadun ja määrän kokonaismitan yhteyttä rationaalilukukäsitteen eri osa-alueisiin kontrolloimme regressioissa kyseisen osa-alueen alkumittauksen tulokset.

TULOKSET

Ensimmäisenä tutkimuskysymyksenä selvitimme, tuottaako NanoRoboMath-oppimisympäristön

käyttäminen opetuksessa perinteistä kouluopetusta parempaa osaamista rationaalilukuihin liittyvän tiedon eri osa-alueilla. Pyrimme kovarianssianalyysin (ANCOVA) avulla määrittämään, oliko koe- ja kontrolliryhmien välillä tilastollisesti merkitsevää eroa rationaalilukuihin liittyvän osaamisen loppumittauksessa, kun osaaminen alkumittauksessa kontrolloitiin. Kovarianttina käytimme kunkin osaamisen osa-alueen kohdalla sitä vastaavaa alkumittauksen muuttujaa. Analyysin tulokset on esitetty Taulukossa 2.

TAULUKKO 2. Koe- ja kontrolliryhmien osaamiserot kovarianssianalyysin (ANCOVA) perusteella.

		<i>n</i>	Alkumittaus <i>KA (KH)</i>	Loppumittaus <i>KA (KH)</i>	<i>F</i>	<i>p</i>	η^2_p																																																								
Päässäälasku [†]	koeryhmä	93	7.23 (2.46)	8.68 (2.50)	6.77	0.010	0.045																																																								
	kontrolliryhmä	55	6.40 (2.32)	7.33 (2.35)				Lukujen suuruus ^{*,†}	koeryhmä	86	0.33 (1.68)	0.45 (1.51)	4.10	0.045	0.029	kontrolliryhmä	53	-0.49 (1.96)	-0.57 (2.09)	Lukujen esitysmuodot ^{*,†}	koeryhmä	88	0.80 (2.38)	0.82 (2.22)	0.38	0.539	0.003	kontrolliryhmä	53	-0.93 (2.57)	-0.74 (2.73)	Operaatioiden lopputuloksen suuruus	koeryhmä	84	2.44 (1.86)	3.10 (1.92)	5.73	0.018	0.042	kontrolliryhmä	49	1.96 (1.79)	2.18 (1.70)	Lukujoukon tiheys	koeryhmä	84	4.85 (3.41)	5.94 (3.38)	5.86	0.017	0.041	kontrolliryhmä	55	5.04 (2.87)	5.16 (3.17)	Joustava rationaalilukukäsite [†]	koeryhmä	103	3.47 (2.30)	5.38 (2.59)	6.86	0.010	0.040
Lukujen suuruus ^{*,†}	koeryhmä	86	0.33 (1.68)	0.45 (1.51)	4.10	0.045	0.029																																																								
	kontrolliryhmä	53	-0.49 (1.96)	-0.57 (2.09)				Lukujen esitysmuodot ^{*,†}	koeryhmä	88	0.80 (2.38)	0.82 (2.22)	0.38	0.539	0.003	kontrolliryhmä	53	-0.93 (2.57)	-0.74 (2.73)	Operaatioiden lopputuloksen suuruus	koeryhmä	84	2.44 (1.86)	3.10 (1.92)	5.73	0.018	0.042	kontrolliryhmä	49	1.96 (1.79)	2.18 (1.70)	Lukujoukon tiheys	koeryhmä	84	4.85 (3.41)	5.94 (3.38)	5.86	0.017	0.041	kontrolliryhmä	55	5.04 (2.87)	5.16 (3.17)	Joustava rationaalilukukäsite [†]	koeryhmä	103	3.47 (2.30)	5.38 (2.59)	6.86	0.010	0.040	kontrolliryhmä	66	2.58 (1.93)	3.94 (2.34)								
Lukujen esitysmuodot ^{*,†}	koeryhmä	88	0.80 (2.38)	0.82 (2.22)	0.38	0.539	0.003																																																								
	kontrolliryhmä	53	-0.93 (2.57)	-0.74 (2.73)				Operaatioiden lopputuloksen suuruus	koeryhmä	84	2.44 (1.86)	3.10 (1.92)	5.73	0.018	0.042	kontrolliryhmä	49	1.96 (1.79)	2.18 (1.70)	Lukujoukon tiheys	koeryhmä	84	4.85 (3.41)	5.94 (3.38)	5.86	0.017	0.041	kontrolliryhmä	55	5.04 (2.87)	5.16 (3.17)	Joustava rationaalilukukäsite [†]	koeryhmä	103	3.47 (2.30)	5.38 (2.59)	6.86	0.010	0.040	kontrolliryhmä	66	2.58 (1.93)	3.94 (2.34)																				
Operaatioiden lopputuloksen suuruus	koeryhmä	84	2.44 (1.86)	3.10 (1.92)	5.73	0.018	0.042																																																								
	kontrolliryhmä	49	1.96 (1.79)	2.18 (1.70)				Lukujoukon tiheys	koeryhmä	84	4.85 (3.41)	5.94 (3.38)	5.86	0.017	0.041	kontrolliryhmä	55	5.04 (2.87)	5.16 (3.17)	Joustava rationaalilukukäsite [†]	koeryhmä	103	3.47 (2.30)	5.38 (2.59)	6.86	0.010	0.040	kontrolliryhmä	66	2.58 (1.93)	3.94 (2.34)																																
Lukujoukon tiheys	koeryhmä	84	4.85 (3.41)	5.94 (3.38)	5.86	0.017	0.041																																																								
	kontrolliryhmä	55	5.04 (2.87)	5.16 (3.17)				Joustava rationaalilukukäsite [†]	koeryhmä	103	3.47 (2.30)	5.38 (2.59)	6.86	0.010	0.040	kontrolliryhmä	66	2.58 (1.93)	3.94 (2.34)																																												
Joustava rationaalilukukäsite [†]	koeryhmä	103	3.47 (2.30)	5.38 (2.59)	6.86	0.010	0.040																																																								
	kontrolliryhmä	66	2.58 (1.93)	3.94 (2.34)																																																											

*Standardoitujen muuttujien summamuuttuja, [†]koe- ja kontrolliryhmä erosivat alkumittauksessa $p < 0.05$. Teknisen vian vuoksi alkumittauksen vastausmäärät vaihtelivat.

Esitimme hypoteesina, että NanoRoboMath-pelin käyttäminen opetuksessa tuottaa kaikilla mitatuilla rationaalilukukäsitteen osa-alueilla perinteistä kouluopetusta parempaa osaamista. Tilastollisen merkitsevyyden ($p < 0.05$) perusteella hypoteesin voidaan todeta pitävän paikkansa kaikissa muissa tapauksissa lukuun ottamatta luvun esitysmuotojen osaamista. Kun välimittauksen tulokset kontrolloitiin, koeryhmä saavutti kontrolliryhmää paremman lopputuloksen päässäälaskussa ($ARE^1 = 0.75$, $KH = 0.29$), luvun suuruuden ymmärtämisessä ($ARE = 0.36$, $KH = 0.18$), operaatioiden lopputuloksen suuruuden ymmärtämisessä ($ARE = 0.57$, $KH = 0.24$), tiheyskäsitteen osaamisessa ($ARE = 0.92$, $KH = 0.38$) sekä rationaalilukukäsitteen joustavuudessa ($ARE = 0.60$, $KH = 0.23$).

Toisena tutkimuskysymyksenä tarkastelimme lineaarisen hierarkkisen regressioanalyysin avulla pelaamisen laadun ja määrän yhteyttä rationaalilukuosaamiseen loppumittauksessa, kun alkumittauksen taidot kontrolloitiin. Analyysit tehtiin erikseen koko pelin ja neljän pelielementin osalta, ja niiden tulokset on

esitetty Taulukossa 3.

TAULUKKO 3. NanoRoboMath-pelin pelaamisen laadun ja määrän yhteys rationaalilukuosaamiseen loppumittauksessa hierarkkisen regressioanalyysin mukaan.

Loppumittaus												
	Päässä-lasku		Suuruus		Esitysmuodot		Operaatiot		Tiheys		JrLK	
	β	ΔR^2	β	ΔR^2	β	ΔR^2	β	ΔR^2	β	ΔR^2	β	ΔR^2
Koko peli	$(n = 93)$		$(n = 86)$		$(n = 88)$		$(n = 84)$		$(n = 84)$		$(n = 103)$	
1 Alkum.	0.62***	0.50***	0.73***	0.63***	0.80***	0.68***	0.66***	0.52***	0.76***	0.57***	0.68***	0.61***
2 Pelaam.	0.19*	0.03*	0.13	0.01	0.04	0.00	0.19*	0.03*	-0.01	0.00	0.25***	0.05***
R^2	0.53		0.65		0.68		0.55		0.57		0.67	
Energia	$(n = 93)$		$(n = 86)$		$(n = 88)$		$(n = 84)$		$(n = 84)$		$(n = 103)$	
1 Alkum.	0.66***	0.50***	0.78***	0.63***	0.80***	0.68***	0.67***	0.52***	0.75***	0.57***	0.73***	0.61***
2 Pelaam.	0.14	0.02	0.05	0.00	0.05	0.00	0.18*	0.03*	0.01	0.00	0.16*	0.02*
R^2	0.52		0.64		0.68		0.55		0.57		0.64	
Aika	$(n = 93)$		$(n = 86)$		$(n = 88)$		$(n = 84)$		$(n = 84)$		$(n = 103)$	
1 Alkum.	0.66***	0.50***	0.76***	0.63***	0.84***	0.68***	0.70***	0.52***	0.73***	0.57***	0.71***	0.61***
2 Pelaam.	0.15	0.02	0.09	0.01	-0.06	0.00	0.11	0.01	0.06	0.00	0.21***	0.04***
R^2	0.52		0.64		0.69		0.53		0.57		0.65	
Sekoitetut	$(n = 58)$		$(n = 56)$		$(n = 55)$		$(n = 56)$		$(n = 57)$		$(n = 62)$	
1 Alkum.	0.64***	0.52***	0.66***	0.57***	0.85***	0.70***	0.76***	0.60***	0.82***	0.71***	0.75***	0.67***
2 Pelaam.	0.26**	0.06**	0.02*	0.04*	-0.07	0.00	0.04	0.00	0.09	0.01	0.23**	0.05**
R^2	0.58		0.61		0.70		0.60		0.72		0.71	
Rajoitetut	$(n = 39)$		$(n = 40)$		$(n = 37)$		$(n = 40)$		$(n = 41)$		$(n = 42)$	
1 Alkum.	0.68***	0.63***	0.79***	0.56***	0.88***	0.75***	0.76***	0.66***	0.84***	0.77***	0.78***	0.66***
2 Pelaam.	0.25*	0.05*	-0.08	0.00	-0.04	0.00	0.13	0.01	0.15	0.02	0.01	0.01
R^2	0.68		0.56		0.75		0.67		0.79		0.67	

Energia = energiatehtävät, Aika = aikatehtävät, Sekoitetut = sekoitettujen esitysmuotojen tehtävät, Rajoitetut = rajoitettujen operaatioiden tehtävät, Alkum. = loppumittauksen muuttujaa vastaava alkumittauksen muuttuja, Pelaam. = pelaamisen laatu ja määrä, Suuruus = lukujen suuruus, Esitysmuodot = lukujen esitysmuodot, Operaatiot = operaatioiden lopputuloksen suuruus, Tiheys = lukujoukon tiheys, JrLK = joustava rationaalilukukäsite, * $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$.

NanoRoboMath-oppimisympäristössä opiskelu oli positiivisesti yhteydessä joustavan rationaalilukukäsitteen kehittämiseen. Korkeampi pelaamisen laatu ja määrä oli tilastollisesti merkitsevästi yhteydessä parempaan

rationaalilukukäsitteen joustavuuteen loppumittauksessa kaikilla muilla käytetyillä mittareilla (hypoteesit 2.1–2.4) paitsi rajoitettujen operaatioiden tehtävissä (hypoteesi 2.5). Energiatehtävissä oli tilastollisesti merkitsevä yhteys pelaamisen laadun ja määrän sekä loppumittauksessa mitatun laskuoperaatioiden lopputuloksen suuruuden ymmärtämisen välillä (hypoteesi 2.2). Tämä yhteys havaittiin myös koko pelin kohdalla. Vastoin hypoteesiamme (2.3) aikatehtävissä ei löytynyt yhteyttä pelaamisen ja päässäälaskutaitojen tai pelaamisen ja lukujen suuruuden ymmärtämisen välillä. Samoin hypoteesiemme vastaisesti emme havainneet pelaamisen laadun ja määrän yhteyttä eri esitysmuotojen osaamiseen sekoitettujen esitysmuotojen tehtävissä (hypoteesi 2.4) emmekä operaatioiden lopputuloksen suuruuden ymmärtämiseen rajoitettujen operaatioiden tehtävissä (hypoteesi 2.5). Sitä vastoin pelaamisen laatu ja määrä oli koko pelissä sekä erityisesti sekoitettujen esitysmuotojen ja rajoitettujen operaatioiden tehtävissä yhteydessä päässäälaskutaidon kehittymiseen ja lisäksi sekoitettujen esitysmuotojen tehtävissä myös lukujen suuruuden ymmärtämiseen, mitä emme olleet ennakoineet.

POHDINTA JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Tämän tutkimuksen kovarianssianalyysin (ANCOVA) perusteella pelillisessä NanoRoboMath-oppimisympäristössä opiskelu näyttöisi tuottavan perinteistä, oppikirjaperustaista kouluopetusta parempaa rationaalilukujen osaamista kaikilla mitatuilla rationaalilukujen osa-alueilla lukuun ottamatta esitysmuotoihin liittyvää osaamista. Pelaamisen laadun ja määrän havaittiin olevan yhteydessä joustavan rationaalilukukäsitteen kehittymiseen. Mitä korkeampi oli pelaamisen laatu ja määrä, sitä parempi lukukäsitteen joustavuus oppilaille oli loppumittauksessa. Lisäksi hypoteesimme mukaisesti energiateghtävien pelaamisella havaittiin olevan tilastollisesti merkitsevä positiivinen yhteys operaatioiden lopputuloksen suuruuden ymmärtämiseen loppumittauksessa. Toisaalta aiemmista tutkimushavainnoista poiketen NanoRoboMath-pelin pelaamisen laadun ja määrän yhteyttä moniin muihin mitattuihin rationaalilukukäsitteen osa-alueisiin ei tässä aineistossa havaittu.

NanoRoboMath-pelin suunnittelussa on pyritty huomioimaan joustava strategioiden käyttö sekä rationaalilukujen ja niiden välisten suhteiden monipuolinen tutkiminen. Hypoteesiemme mukaisesti pelillisen oppimisympäristön avulla pystyttiin kehittämään oppilaiden rationaalilukukäsitteen joustavuutta. Tämä on merkittävää, sillä koulussa keskitytään usein hyvään matemaattiseen rutiiniosaamiseen kuten sujuvaan laskutaitoon eikä välttämättä pyritä tukemaan edistyneempien matemaattisten taitojen kehitystä ja joustavaa matemaattista ajattelua. Aiemmin on todettu joustavan rationaalilukukäsitteen olevan yhteydessä oppilaan taitoihin yhdistää rationaalilukuihin liittyvää proseduraalista ja käsitteellistä tietoa johdonmukaiseksi kokonaisuudeksi (Bailey ym., 2017; McMullen ym., 2020). Vaikka pelillinen oppimisympäristö tuotti kovarianssianalyysin perusteella perinteistä kouluopetusta parempaa rationaalilukuosaamista, pelaamisen laatu ja määrä ei ollut yhtä vahvasti yhteydessä rationaaliluvun osa-alueisiin kuin aiemmassa viides- ja kuudesluokkalaisten pilottitutkimuksessa (Kärki ym., arvioitavana). Peli saattaa siis tukea rationaalilukujen käsitteellistä osaamista eri luokka-asteilla eri tavoin.

Toisaalta on hyvä huomioida, että NanoRoboMath-oppimisympäristö oli tässä tutkimuksessa osa laajempaa opetuskokeilua. Ennen NanoRoboMathin käyttöä hyödynnettiin NumberTrace-peliä, joka pyrkii tukemaan erityisesti rationaaliluvun suuruuteen liittyvää osaamista ja jossa rationaaliluvuista käytettiin eri symboliesitysten ja lukusuoran lisäksi muita visuaalisia esitysmuotoja (Kiili ym., 2018; McMullen ym., arvioitavana). NumberTrace on siis ollut vaikuttamassa tämän tutkimuksen alku- ja loppumittauksen tuloksiin etenkin lukujen suuruuden ja esitysmuotojen ymmärtämisen osalta, ja näiden taitojen kohdalla alkumittauksessa havaittiinkin ero koe- ja kontrolliryhmän välillä. Näin ollen koeryhmän alkumittauksen taidot eivät välttämättä vastaa muunlaisessa opetuksessa olleiden seitsemäsluokkalaisten taitoja, ja tältä osin on syytä varovaisuuteen yleistämisen suhteen.

NanoRoboMathin oppimisvaikutusten arvioinnin tueksi tarvitaan evidenssiä pelaamisen laadun yhteydestä oppimiseen. Joustavien rationaalilukukäsitetaitojen osalta regressioanalyysi osoittaa selkeän yhteyden. Käsitteellisen tiedon osalta yhteyksiä havaittiin vain muutamissa tehtävätyypeissä. Tämä voi selittyä sillä, että itse pelin pelaaminen ei ollut ainoa oppimisympäristössä vaikuttava uusi tekijä. Opettajia pyydettiin käymään luokan kanssa yhteisiä keskusteluja pelistä ja erilaisista ratkaisustrategioista. Käydyistä opetuskeskusteluista ei valitettavasti ole tarkempaa tietoa, sillä oppitunteja ei voitu videoida tai observoida. Tältä osin opetuskeskustelujen vaikutusta ja intervention fideliteettiä on hankala arvioida.

Tässä tutkimuksessa käytettiin kvasikokeellista asetelmaa satunnaistetun sijaan ja koe- ja kontrolliryhmät muodostettiin eri luokista, mikä täytyy ottaa huomioon tuloksia tulkittaessa ja yleistettäessä. Pelin lokitietojen perusteella koeryhmän luokkien välillä oli selkeitä eroja oppimisympäristön käytössä, mikä on naturalistisen tutkimusasetelman huomioiden luonnollista. Tämän vuoksi tässä tutkimuksessa tuloksia analysoitiin myös regressioanalyysillä, jolla voitiin osoittaa pelaamisen laadun ja määrän yhteys tuloksiin. Satunnaistetut kokeilut isommilla, populaatioon yleistettävillä otoksilla ovat tarpeen oppimisympäristön vaikutusten ja yleistettävyyden varmistamiseksi. Tulosten yleistettävyyttä voidaan jatkossa parantaa myös käyttämällä laajempaa tehtäväpatteristoa rationaalilukutaitojen ja joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen. Tulevissa tutkimuksissa olisi myös syytä tarkastella pelin vaikutuksia lähtötason taidoiltaan erilaisiin oppilaisiin sekä pyrkiä kuvaamaan myös pelitunneilla käytävää opetuskeskustelua ja opettajien antamaa ohjausta ja näiden vaikutusta oppilaiden oppimistuloksiin. On mahdollista, että peli tukee erilaisten taitojen kehittymistä eritasoisilla oppijoilla, sillä pelitavoitteiden saavuttaminen on mahdollista erilaisia strategioita käyttäen (Kärki ym., 2021). Jatkossa on tärkeää myös tutkia NanoRoboMath-pelin opettajan materiaalin ja ohjeistuksen vaikuttavuutta.

Tämä tutkimus havainnollistaa, miten adaptiivista asiantuntijuutta matematiikassa voidaan tukea pelillisillä oppimisympäristöillä (Lehtinen ym., 2017). Tutkimustuloksista ei voida tulkita pelillisen oppimisen olevan rationaalilukujen opetusmenetelmänä perinteistä opetusta tehokkaampaa, sillä koe- ja kontrolliryhmien oppisisältöjä ja niiden painotuksia ei interventiossa yhdenmukaistettu. Sen sijaan tulokset viittaavat siihen, että pelillisen oppimisympäristön avulla on mahdollista saavuttaa perinteistä opetusta parempaa rationaalilukuosaamista ja sellaista joustavaa matemaattista ajattelua, jonka tukeminen perinteisessä

luokkahuoneopetuksessa on haasteellista (Feltovich, Spiro & Coulson, 1997; Hatano & Oura, 2003). Oppikirjan yksinkertaista toistoa sisältävien tehtävien siirtäminen sellaisenaan digitaaliseen muotoon ei palvele tätä tarkoitusta, vaan digitaalisia oppimisolustoja pitäisi tutkimusperustaisesti kehittää tukemaan proseduraalista ja käsitteellistä joustavuutta sekä mahdollistamaan tarkoituksellista harjoittelua. Tämä tutkimus NanoRoboMathista indikoi pelillisten oppimisympäristöjen hyödyllisyyttä rationaalilukukäsitteen joustavuutta kehittäväna opetusmenetelmänä.

Artikkeli on saatu toimitukseen 14.11.2020 ja hyväksytty julkaistavaksi 19.5.2021.

Kiitokset

Lämpimät kiitoksemme osallistuneille kouluille, opettajille ja oppilaille sekä prof. Kristian Kiilille, Antero Lindstedille ja Antti Koskiselle hienosti sujuneesta tutkimusyhteistyöstä. Tutkimusta on rahoittanut Suomen Akatemia (vast.johtaja: Jake McMullen 310388) ja Suomen Akatemian Strateginen Neuvosto (vast.johtaja: Erno Lehtinen 312528, vast.johtaja: Minna Hannula-Sormunen 336068).

Viite

¹ARE = arvioitujen reunakeskiarvojen ero.

Lähteet

- Bailey, D. H., Hansen, N. & Jordan, N. C. (2017). The codevelopment of children's fraction arithmetic skill and fraction magnitude understanding. *Journal of Educational Psychology*, 109(4), 509–519. doi:10.1037/edu0000152.
- Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L. & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(3), 447–455. doi:10.1016/j.jecp.2012.06.004.
- Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Robitzsch, A. (2015). Effects of playing mathematics computer games on primary school students' multiplicative reasoning ability. *Contemporary Educational Psychology*, 40, 55–71. doi:10.1016/j.cedpsych.2014.09.001.
- Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. Teoksessa A. J. Baroody & A. Dowker (toim.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructive adaptive expertise* (s. 1–33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. doi:10.4324/9781410607218.
- Booth, J. L. & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247–253. doi:10.1016/j.cedpsych.2012.07.001.
- Brezovszky, B., McMullen, J., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., ... & Lehtinen, E. (2019). Effects of a mathematics game-based learning environment on

primary school students' adaptive number knowledge. *Computers & Education*, 128, 63–74.

doi:10.1016/j.compedu.2018.09.011.

Byun, J. & Joung, E. (2018). Digital game-based learning for K-12 mathematics education: A meta-analysis. *School Science and Mathematics*, 118(3–4), 113–126. doi:10.1111/ssm.12271.

Deliyianni, E. & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology*, 33(4), 427–442.

doi:10.1080/01443410.2013.765540.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., ... & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82–92.

doi:10.1016/j.tate.2014.12.009.

Devlin, K. (2011). *Mathematics education for a new era: Video games as a medium for learning*. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Dowker, A. D. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 45–55.

Eisinga, R., te Grotenhuis, M. & Pelzer, B. (2013). The reliability of a two-item scale: Pearson, Cronbach, or Spearman-Brown? *International Journal of Public Health*, 58(4), 637–642. doi:10.1007/s00038-012-0416-3.

Feltovich, P. J., Spiro, R. J. & Coulson, R. L. (1997). Issues of expert flexibility in contexts characterized by complexity and change. Teoksessa P. J. Feltovich, K. M. Ford & R. R. Hoffman (toim.), *Expertise in context: Human and machine* (s. 125–146). Menlo Park, CA: AAAI/MIT Press.

Geary, D. C., Bailey, D. H. & Hoard, M. K. (2009). Predicting mathematical achievement and mathematical learning disability with a simple screening tool: The number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27(3), 265–279. doi:10.1177/0734282908330592.

Handel, M. J. (2016). What do people do at work? *Journal for Labour Market Research*, 49(2), 177–197. doi:10.1007/s12651-016-0213-1.

Hatano, G. & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. Teoksessa H. W., Stevenson, H. Azuma & K. Hakuta, (toim.), *A series of books in psychology. Child development and education in Japan* (s. 262–272). New York, NY, US: W H Freeman/Times Books/ Henry Holt & Co.

Hatano, G. & Oura, Y. (2003). Commentary: Reconceptualizing school learning using insight from expertise research. *Educational Researcher*, 32(8), 26–29.

Kiili, K. & Ketamo, H. (2018). Evaluating cognitive and affective outcomes of a digital game-based math test. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 11(2), 255–263. doi:10.1109/TLT.2017.2687458.

Kiili, K., Moeller, K. & Ninaus, M. (2018). Evaluating the effectiveness of a game-based rational number

training – In-game metrics as learning indicators. *Computers & Education*, 120, 13–28.

doi:10.1016/j.compedu.2018.01.012.

Kärki, T., McMullen, J. & Lehtinen, E. (2021). Designing a game-based environment for enhancing rational number knowledge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 26(2), 25–46.

Kärki, T., McMullen, J. & Lehtinen, E. (arvioitavana). Improving rational number knowledge using the NanoRoboMath digital game.

Laato, S., Lindberg, R., Laine, T. H., Bui, P., Brezovszky, B., Koivunen, L., ... & Lehtinen, E. (2020).

Evaluation of the pedagogical quality of mobile math games in app marketplaces. *2020 IEEE International Conference on Engineering, Technology and Innovation (ICE/ITMC)*, 1–8.

doi:10.1109/ICE/ITMC49519.2020.9198621.

Lehtinen, E., Hannula-Sormunen, M., McMullen, J. & Gruber, H. (2017). Cultivating mathematical skills: From drill-and-practice to deliberate practice. *ZDM – Mathematics Education*, 49(4), 625–636.

doi:10.1007/s11858-017-0856-6.

Li, Q. & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22(3), 215–243. doi:10.1007/s10648-010-9125-8.

McMullen, J., Brezovszky, B., Hannula-Sormunen, M. M., Veermans, K., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N. & Lehtinen, E. (2017). Adaptive number knowledge and its relation to arithmetic and pre-algebra knowledge. *Learning and Instruction*, 49, 178–187. doi:10.1016/j.learninstruc.2017.02.001.

McMullen, J., Brezovszky, B., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M. M. & Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. *Learning and Individual Differences*, 47, 172–181. doi:10.1016/j.lindif.2016.02.007.

McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. M., Lehtinen, E. & Siegler, R. S. (2020). Distinguishing adaptive from routine expertise with rational number arithmetic. *Learning and Instruction*, 68, 101347.

doi:10.1016/j.learninstruc.2020.101347.

McMullen, J., Koskinen, A., Kärki, T., Lindstedt, A., Määttä, S., Halme, H., ... & Kiili, K. (arvioitavana). A game-based approach to promoting adaptive rational number knowledge.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, 37, 14–20.

doi:10.1016/j.learninstruc.2013.12.004.

McMullen, J., Van Hoof, J., Degrande, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2018). Profiles of rational number knowledge in Finnish and Flemish students – A multigroup latent class analysis. *Learning and Individual Differences*, 66, 70–77. doi:10.1016/j.lindif.2018.02.005.

Mercier, E. M. & Higgins, S. E. (2013). Collaborative learning with multi-touch technology: Developing adaptive expertise. *Learning and Instruction*, 25, 13–23. doi:10.1016/j.learninstruc.2012.10.004.

- Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
doi:10.1207/s15326985ep4001_3.
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691–697.
doi:10.1177/0956797612440101.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296. doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001.
- Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5 SPEC.ISS.), 503–518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, 41(5), 541–555.
doi:10.1007/s11858-009-0195-3.
- Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, 24(4), 439–465. doi:10.1207/s1532690xci2404_2.
- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453–467.
doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013.
- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 265–284.
doi:10.1080/10986065.2012.717378.
- Vamvakoussi, X., Vosniadou, S. & Van Dooren, W. (2019). The framework theory approach applied to mathematics learning. Teoksessa S. Vosniadou (toim.), *International handbook of research on conceptual change* (s. 305–321). New York: Routledge.
- Van Dooren, W., Christou, K., Depaepe, F., Inglis, M., Määttä, S., McMullen, J., ... & Woollacott, B. (2019). Tackling the natural number bias – A comparative textbook analysis. Esitys tapahtumassa EARLI bi-annual meeting, Aachen, Germany.
- Van Hoof, J., Janssen, R., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). Inhibiting natural knowledge in fourth graders: Towards a comprehensive test instrument. *ZDM*, 47(5), 849–857. doi:10.1007/s11858-014-0650-7.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335–359. Haettu osoitteesta <http://www.jstor.org/stable/23421697>.
- Vosniadou, S., Vamvakoussi, X. & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. Teoksessa S. Vosniadou (toim.), *International handbook of research on conceptual change* (s. 3–34). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Young, M. F., Slota, S., Cutter, A. B., Jalette, G., Mullin, G., Lai, B., ... & Yukhymenko, M. (2012). Our princess is in another castle: A review of trends in serious gaming for education. *Review of Educational Research*, 82(1), 61–89. doi:10.3102/0034654312436980.

Kärki, T., McMullen, J., Halme, H., Määttä, S., Lehtinen, E., & Hannula-Sormunen, M.

Towards adaptive rational number knowledge by playing games

Procedural and conceptual knowledge of rational numbers does not guarantee their adaptive application in novel contexts. However, game-based learning environments may be useful for supporting adaptive and flexible mathematical knowledge and skills, especially adaptive number knowledge. The main aim of this research is to assess whether and how NanoRoboMath, a game-based learning environment, can support the acquisition of rational number knowledge. The quasi-experimental design included 174 seventh grade students. Experimental group students played the NanoRoboMath game during mathematics lessons, while control group students had textbook-based mathematics lessons. Pre- and post-tests were used to measure adaptive rational number knowledge, mental calculation skills, and conceptual knowledge of size, representations, operations and density. The analysis showed that using the NanoRoboMath-game yielded higher knowledge in all the aspects of rational number knowledge, except for representational knowledge. Game performance was related to improved adaptive rational number knowledge, mental calculation skills, and understanding of operations. The current study contributes to the understanding of the usefulness of game-based learning environments for the development of mathematical knowledge.

Keywords:

rational numbers, game-based learning, adaptive number knowledge

Authors:

Tomi Kärki, PhD,

title of docent, senior lecturer,

Department of Teacher Education,

University of Turku,

Finland

Jake McMullen, PhD,

title of docent, associate professor,

Department of Teacher Education,

University of Turku,

Finland

Hilma Halme, MSc,

doctoral student,
Department of Teacher Education,
University of Turku,
Finland

Saku Määttä, MA,
doctoral student,
Department of Teacher Education,
University of Turku,
Finland

Erno Lehtinen, PhD,
title of docent, professor emeritus,
Department of Teacher Education,
University of Turku;
Vytautas Magnus University,
Lithuania

Minna Hannula-Sormunen, PhD,
title of docent, professor,
Department of Teacher Education,
University of Turku,
Finland