TURUN YLIOPISTO

# Kvaterniot

Sonja Takkunen

LuK-tutkielma
Syyskuu 2025

Tarkastajat:
Dos. Jyrki Lahtonen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Sonja Takkunen: Kvaterniot
LuK-tutkielma, 13 s.
Matematiikka
Syyskuu 2025

---

Kvaterniot ovat kompleksilukujen neliulotteinen laajennus. Niillä on yksi reaaliosa ja kolme imaginääriyksikköä: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$. Kvaternioille on määritelty epäkommutatiivinen tulo ja ne muodostavat ryhmän sen suhteen.

Kvaternioilla voi myös kuvata pisteitä kolmiulotteisessa avaruudessa. Niiden avulla tehtävistä kierroista on hyötyä esimerkiksi tietokonegrafiikoissa ja robotiikassa.

Asiasanat: kvaterniot, kierrot, rotaatiot

# Sisällys

# 1 Johdanto

Kvaterniot ovat kompeksilukujen neliulotteinen laajennus. Ensimmäisenä ne määritteli irlantilainen Sir William Rowan Hamilton vuonna 1843. Hänen tavoitteenaan oli yleistää kompleksilukujen algebra korkeampiin ulottuvuuksiin, jotta laskutoimituksia voisi tehdä myös kolmiulotteisen avaruuden pisteillä. Kolmelle ulottuvuudelle ei kuitenkaan voi määrätä avaruuden kierroissa hyödyllistä kertolaskua. Siispä Hamiltonin ollessa kävelyllä Dublinissa, hänelle " – selvisi, että täytyy ikään kuin lisätä neljäs avaruuden ulottuvuus mahdollistamaan kolmikoilla laskeminen". [1]

Hamilton käytti lähes koko loppuelämänsä kvaternioiden tutkimiseen ja opettamiseen. Monet geometrian ja fysiikan tutkimuskohteet toimivatkin lähes kokonaan kvaternioilla muutaman kymmenen vuoden ajan. Niiden keksimistä pidetään joskus jopa modernin algebran syntymähetkenä. 1800-luvun lopussa vektorit kuitenkin syrjäyttivät ne selkeämmän toimintatapansa vuoksi.

1900-luvun lopulla kvaternioiden suosio nousi uudelleen, koska avaruudelliset kierrot ovat niiden avulla tiiviimpiä, helpompia kuvailla ja nopeampia laskea kuin vastaavilla matriiseilla. Kvaternioiden avulla toteutettavat kierrot ovat erityisen hyödyllisiä esimerkiksi tietokonegrafiikoissa, robotiikassa, satelliiteissa sekä navigoinnissa. Monipuolisten sovelluksiensa vuoksi kvaterniot ovat erittäin kiinnostavia sovelletun matematiikan kannalta. Kvaternioiden olemus eli niiden algebralliset ominaisuudet puolestaan ovat kiinnostavia puhtaan matematiikan alalla. Niillä voi jopa todistaa puhdasta lukuteoriaa.

Tutkielman pääasiallinen lähde on määritelmien ja rotaatioiden osalta Alan F. Beardonin teos *Algebra and geometry* [2] sekä Hurwitz'n kvaternioiden osalta Joe Robertsin *Elementary number theory: a problem oriented approach* [3]. Lisäksi tutkielmassa on hyödynnetty Hamiltonin itsensä kirjoittamaa kvaternioiden syntyä ja perusteita käsittelevää kirjettä [1].

Tutkielman toinen luku sisältää määritelmiä kvaternioille, niiden laskutoimituksille ja alijoukoille. Luvun lopussa todistetaan, että kvaterniot muodostavat ryhmän ja renkaan. Kolmannessa luvussa käsitellään kvaternioiden peilaukset ja rotaatiot sekä niiden hyödyllisyys sovelluksissa.

# 2 Kvaternioiden algebra

## 2.1 Tulo, liittoluku, normi ja puhtaat kvaterniot

Tässä luvussa esitetään kvaternioiden määritelmiä, laskutoimituksia ja ominaisuuksia. Luvun kaikki merkinnät ja suurin osa sisällöstä perustuvat teokseen [2] ellei toisin erikseen mainita.

**Määritelmä 1.** Kvaternio q on ilmaus $a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$, jossa a, b, c ja d ovat reaalilukuja sekä $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ ovat imaginääriyksiköitä. Kvaternioiden joukkoa merkitään Hamiltonin mukaan kirjaimella $\mathbb{H}$.

Kvaterniot ovat kompleksilukujen laajennus, sillä niillä on kolme imaginääriyksikköä yhden sijasta. Ne ovat pohjimmiltaan pisteitä neliulotteisessa Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^4$. Avaruuden $\mathbb{R}^4$ piste (w,x,y,z), avaruuden $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ piste ((w,x),(y,z)) ja avaruuden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ piste (w,(x,y,z)) samaistuvat toisiinsa. Siispä kvaterniot usein tulkitaan myös reaaliluvun ja kolmiulotteisen vektorin yhdistelmänä. Tällöin yksittäinen kvaternioni q on muotoa (a,$\mathbf{x}$), jossa $a \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ja kaikkien kvaternioiden joukko on avaruuksien $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^3$ karteesinen tulo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Kahden kvaternion summa ja tulo määritellään samoin kuin kompleksiluvuillekin.

**Määritelmä 2.** Kun $q_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ja $q_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$, niin niiden summa on $q_1 + q_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}$.

**Määritelmä 3.** Samoin kuin kompleksilukujen imaginääriosille määritellään $\mathbf{i}^2 = -1$, niin myös kvaternioille määritellään niiden imaginääriyksiköiden väliset tulot seuraavasti:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \tag{1}$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji},\ \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj} \text{ ja } \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}. \tag{2}$$

Jokaisen imaginääriyksikön tulo itsensä kanssa on siis reaaliluku (1), mutta toistensa kanssa kerrottuna saadaan aina vektori (2). Tästä määritelmästä myös seuraa, että kvaternioiden tulo ei ole kommutatiivinen, sillä $\mathbf{ij} \neq \mathbf{ji}$.

**Lause 1.** *Kahden kvaternion tulo on $(a, \boldsymbol{x})(b, \boldsymbol{y}) = (ab - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}))$, jossa a ja b ovat reaalilukuja sekä $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat kolmiulotteisia vektoreita. Merkintä $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ tarkoittaa pistetuloa ja $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ ristituloa.*

*Todistus.* Aluksi kirjoitetaan tarkasteltava tulo määritelmää 1 vastaavaan muotoon ja lasketaan näiden tulo. Lasketaan jokaisen termin imaginääriosien tulot määritelmän 3 mukaisesti ja otetaan imaginääriyksiköt yhteisiksi tekijöiksi. Lopuksi huomataan, että saatu tulos on lauseen 1 mukainen. Siis

$$\begin{aligned}
(a, \mathbf{x})(b, \mathbf{y}) =&(a + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k})(b + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\
=&ab + ay_1\mathbf{i} + ay_2\mathbf{j} + ay_3\mathbf{k} + x_1\mathbf{i}b + x_1y_1\mathbf{i}^2 + x_1\mathbf{i}y_2\mathbf{j} + x_1\mathbf{i}y_3\mathbf{k} + x_2\mathbf{j}b \\
&+ x_2\mathbf{j}y_1\mathbf{i} + x_2y_2\mathbf{j}^2 + x_2\mathbf{j}y_3\mathbf{k} + x_3\mathbf{k}b + x_3\mathbf{k}y_1\mathbf{i} + x_3\mathbf{k}y_2\mathbf{j} + x_3y_3\mathbf{k}^2 \\
=&ab + ay_1\mathbf{i} + ay_2\mathbf{j} + ay_3\mathbf{k} + x_1\mathbf{i}b - x_1y_1 + x_1y_2\mathbf{k} - x_1y_3\mathbf{j} + x_2\mathbf{j}b \\
&- x_2y_1\mathbf{k} - x_2y_2 + x_2y_3\mathbf{i} + x_3\mathbf{k}b + x_3y_1\mathbf{j} - x_3y_2\mathbf{i} - x_3y_3 \\
=&ab - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (ay_1 + bx_1 + x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} \\
&+ (ay_2 + bx_2 + x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{j} + (ay_3 + bx_3 + x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{k} \\
=&(ab - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3), a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} \\
&+ (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}) \\
=&(ab - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + (\mathbf{x} \times \mathbf{y})).
\end{aligned}$$

□

Kompleksikonjugaatti eli liittoluku tarkoittaa kompleksiluvuille imaginääriosan merkin vaihtamista. Kvaterniolla q on vastaavasti määritelty konjugaatti, jota merkitään kirjaimella $\overline{q}$.

**Määritelmä 4.** Kvaternion $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ konjugaatti on $\overline{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$. Vaihtoehtoisella merkintätavalla kvaternion $q' = (a, \mathbf{x})$ konjugaatti on $\overline{q'} = (a, -\mathbf{x})$.

Kahden kvaternion tulon konjugaatti on niiden konjugaattien tulo, mutta käänteisessä järjestyksessä. Kun muistetaan, ettei kvaternioiden tulo ole kommutatiivinen, huomataan, että tällä järjestyksellä on merkitystä.

**Lause 2.** *Kvaternioille p ja q pätee* $\overline{pq} = \overline{q}\ \overline{p}$.

*Todistus.* Olkoon kvaterniot p ja q muotoa $p = a + x_1i + x_2j + x_3k$ ja $q = b + y_1i + y_2j + y_3k$. Ensimmäisenä lasketaan näiden tulo lauseen 1 määräämällä tavalla. Seuraavaksi lasketaan tulon konjugaatti vaihtamalla imaginääritermien etumerkit määritelmän 4 mukaan. Lopuksi avataan ja järjestetään uudelleen termit, jolloin huomataan lauseen tulos. Siis

$$
\begin{aligned}
\overline{pq} =& \overline{ab - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (ay_1 + bx_1 + x_2y_3 - x_3y_2)i} \\
& \overline{+(ay_2 + bx_2 + x_2y_3 - x_3y_2)j + (ay_3 + bx_3 + x_2y_3 - x_3y_2)k} \\
=& ab - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - (ay_1 + bx_1 + x_2y_3 - x_3y_2)i \\
& - (ay_2 + bx_2 + x_2y_3 - x_3y_2)j - (ay_3 + bx_3 + x_2y_3 - x_3y_2)k \\
=& ab - ay_1i - ay_2j - ay_3k - bx_1i - x_1y_1 + x_1y_2k - x_1y_3j \\
& - bx_2j - x_2y_1k - x_2y_2 + x_2y_3i - bx_3k + x_3y_1j - x_3y_2i - x_3y_3 \\
=& (a - x_1i - x_2j - x_3k)(b - y_1i - y_2j - y_3k) \\
=& \overline{q}\ \overline{p}.
\end{aligned}
$$

□

Jälleen samaan tapaan kuin kompleksiluvuillekin kvaternion normi kuvaa etäisyyttä origon (0,0,0,0) ja pisteen (a,b,c,d) välillä.

**Määritelmä 5.** Kvaternion q normi on $||q|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Mikäli merkitään $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \mathbf{x}$ niin normi on $||a + \mathbf{x}||$.

Kvaterniota kutsutaan yksikkökvaternioksi tai versoriksi, jos sen normi on 1. Yksikkökvaternio saadaan siis, kun jaetaan kvaternio omalla normillaan.

**Seuraus 1.** *Kvaternion q normi on* $\sqrt{q\overline{q}}$.

*Todistus.* Olkoon $q = (a, \mathbf{x})$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
q\overline{q} &= (a, \mathbf{x})(a, -\mathbf{x}) \\
&= a^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.
\end{aligned}
$$

Ottamalla tästä neliöjuuri puolittain saadaan

$$\sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = ||q||,$$

mikä on haluttu tulos. □

Kahden kvaternion tulon normi on niiden normien tulo. Koska normi kuvaa välin pituutta, ja on siten reaaliluku, seuraavan lauseen esittämä tulo on kommutatiivinen.

**Lause 3.** $||pq|| = ||p||||q||$

*Todistus.* Seurauksen 1 mukaan

$$||pq|| = \sqrt{||pq||^2} = \sqrt{(pq)(\overline{pq})}.$$

Tulon konjugaatti on konjugaattien tulo lauseen 2 perusteella ja kvaternioiden tulo on assosiatiivinen, mikä todistetaan myöhemmin. Siispä

$$\sqrt{(pq)(\overline{pq})} = \sqrt{(pq)(\overline{q}\ \overline{p})} = \sqrt{p||q||^2\overline{p}}.$$

Tulo voidaan ryhmitellä uudelleen, koska kvaternion q normi ei ole kvaternio, ja siten sen tulo on kommutatiivinen. Nyt saadaan

$$\sqrt{p||q||^2\overline{p}} = \sqrt{||q||^2 p\overline{p}} = \sqrt{||q||^2||p||^2} = ||p||||q||,$$

mikä on lauseen väite. □

Puhtaat kvaterniot ovat kvaternioiden alijoukko, joka mahdollistaa kvaternioiden käytön kolmiulotteisessa avaruudessa tehtävissä laskutoimituksissa. Niistä jätetään reaaliosa $a$ pois, jolloin avaruuden pisteitä kuvaamaan jäävät vain imaginääriyksiköiden kertoimet. Puhtaat kvaterniot toimivat siis kuin kolmiulotteiset vektorit ennen kuin vektorit keksittiin.

**Määritelmä 6.** Puhtaaksi kvaternioksi sanotaan kvaterniota, jonka reaaliosan kerroin on nolla eli $a = 0$. Niitä merkitään tilanteesta riippuen joko $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ tai $(\mathbf{x})$. Puhtaiden kvaternioiden joukkoa merkitään kirjaimella $H_0$.

Kvaternioiden tulon määrittävästä lauseesta 1 seuraa tällöin, että puhtaiden kvaternioiden tulo on muotoa $(0, \mathbf{x})(0, \mathbf{y}) = (-\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y})$.

**Seuraus 2.** *Kaikkien puhtaiden yksikkökvaternioiden q neliö $q^2$ = -1.*

*Todistus.* Olkoon q jokin puhdas yksikkökvaternio, jolloin $q = (0, \mathbf{x})$ ja $||\mathbf{x}|| = 1$. Siis $q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, $\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = 1$ ja $q^2 = qq = (-\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{x})$.

Tällöin tarvittava pistetulo on

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = b^2 + c^2 + d^2 = ||\mathbf{x}|| = 1,$$

ja ristitulo on

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x} = (cd - dc)\mathbf{i} + (db - bd)\mathbf{j} + (bc - cb)\mathbf{k} = 0.$$

Nyt kvaternion q neliö $q^2 = (-\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{x}) = (-1, 0)$, eli -1. □

## 2.2 Ryhmä ja rengas

Kvaternioiden joukko on suljettu tulon suhteen, mutta tulo ei ole kommutatiivinen, joten kvaterniot eivät voi muodostaa Abelin ryhmää tulon suhteen tai kuntaa tulon ja summan suhteen. Niiden välinen tulo on kuitenkin sekä assosiatiivinen että distributiivinen, mikä todistetaan tässä luvussa. Täten kvaternioiden joukosta voidaan muodostaa ryhmiä ja renkaita. Mielivaltaisia kvaternioita kuvaavat tässä luvussa merkinnät $q_1 = a + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = (a, \mathbf{x})$, $q_2 = b + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k} = (b, \mathbf{y})$ ja $q_3 = c + z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k} = (c, \mathbf{z})$.

**Lause 4.** *Nollasta eroavien kvaternioiden joukko* $\mathbb{H}\backslash\{0\}$ *on ryhmä lauseen 1 määrittämän tulon suhteen.*

*Todistus.* Kun $\mathbb{H}\backslash\{0\}$ on nollasta eroavien kvaternioiden joukko, niin ollakseen ryhmä niiden täytyy täyttää seuraavat vaatimukset:

1. Kertolasku on suljettu eli kahden kvaternion tulo on myös kvaternio. Tämä pätee, sillä kun $q_1, q_2 \in H$, niin $q_1 \cdot q_2 \in H$ lauseen 1 perusteella. Lisäksi $q_1 \cdot q_2 = 0$, jos ja vain jos $q_1 = (0, (0, 0, 0))$ tai $q_2 = (0, (0, 0, 0))$, koska

$$\begin{aligned}(ab - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}, a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + (\mathbf{x}\times\mathbf{y})) =&(0, (0, 0, 0)), \text{ jos ja vain jos}\\ ab = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \ \text{ ja } \ a\mathbf{y} = b\mathbf{x} =&(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = 0.\end{aligned}$$

   Siispä, kun $q_1, q_2 \in H\backslash\{0\}$, niin $q_1 \cdot q_2 \in H\backslash\{0\}$.

2. Tulo on liitännäinen eli assosiatiivinen. Yhtälö $(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3)$ pätee, koska

$$\begin{aligned}(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 =&(ab - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y},\ a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + (\mathbf{x}\times\mathbf{y})) \cdot q_3\\
=&((ab - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y})c - (a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + (\mathbf{x}\times\mathbf{y}))\cdot\mathbf{z}, (ab - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z}\\
&+ c(a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + (\mathbf{x}\times\mathbf{y})) + (a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + (\mathbf{x}\times\mathbf{y}))\times\mathbf{z})\\
=&(abc - c(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) - a(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}) - b(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) - (\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z},\\
&ab\mathbf{z} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z} + ca\mathbf{y} + cb\mathbf{x} + c(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) + a(\mathbf{y}\times\mathbf{z})\\
&+ b(\mathbf{x}\times\mathbf{z}) - (\mathbf{z}\cdot\mathbf{y})\mathbf{x} + (\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})\mathbf{y})\\
=&(abc - a(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}) - b(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) - c(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) - \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z}),\\
&ab\mathbf{z} + ac\mathbf{y} + a(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) + bc\mathbf{x} - (\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})\mathbf{x}\\
&+ b(\mathbf{x}\times\mathbf{z}) + c(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z})\\
=&(a(bc - \mathbf{y}\cdot\mathbf{z}) - \mathbf{x}\cdot(b\mathbf{z} + c\mathbf{y} + (\mathbf{y}\times\mathbf{z})),\ a(b\mathbf{z} + c\mathbf{y} + (\mathbf{y}\times\mathbf{z}))\\
&+ (bc - \mathbf{y}\cdot\mathbf{z})\mathbf{x} + \mathbf{x}\times(b\mathbf{z} + c\mathbf{y} + (\mathbf{y}\times\mathbf{z})))\\
=&q_1 \cdot (bc - \mathbf{y}\cdot\mathbf{z},\ b\mathbf{z} + c\mathbf{y} + (\mathbf{y}\times\mathbf{z})) = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3).\end{aligned}$$

   Tässä on käytetty apuna pistetulon distributiivisuutta ja kommutatiivisuutta sekä ristitulon distributiivisuutta. Lisäksi tarvitaan kolmitulojen kaavoja $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z} = -(\mathbf{z}\cdot\mathbf{y})\mathbf{x} + (\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z}$ ja $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = (\mathbf{y}\times\mathbf{z})\cdot\mathbf{x}$.

3. Identiteettialkio on olemassa eli on jokin $e \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$, jolla $e \cdot q_1 = q_1 \cdot e = q_1$ kaikilla $q_1 \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$. Kvaternio $(1,\mathbf{0})$ toimii identiteettialkiona tulon suhteen,

koska kun q on mikä tahansa kvaternio (myös 0), niin

$$q \cdot (1, \mathbf{0}) = q \text{ ja } (1, \mathbf{0}) \cdot q = q.$$

4. Kaikilla joukon kvaternioilla on käänteisalkio, eli kaikille $q \in H \backslash \{0\}$ on olemassa $q{-}1 \in H \backslash \{0\}$, jolla $q \cdot q^{-1} = 1$. Jos q on nollasta eroava kvaternio ja $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{||q||^2}$, niin

$$q \cdot q^{-1} = q \cdot \frac{\overline{q}}{||q||^2} = \frac{q \cdot \overline{q}}{(\sqrt{q \cdot \overline{q}})^2} = 1,$$

koska seurauksen 1 mukaan $(\sqrt{q \cdot \overline{q}})^2 = q\overline{q}$. Siis kaikilla nollasta eroavilla kvaternioilla q on käänteisalkio $\frac{\overline{q}}{||q||^2}$.

Koska kaikki ehdot toteutuvat, kvaterniot muodostavat ryhmän $(\mathbb{H} \backslash \{0\}, \cdot)$. □

Nollakvaternio ei toteuta viimeistä ehtoa, koska sillä ei ole käänteisalkiota. Tämän vuoksi koko kvaternioiden joukko ei muodosta ryhmää tulon suhteen.

**Lause 5.** *Kvaterniot muodostavat renkaan ($\mathbb{H}$,+,·).*

*Todistus.* Lauseen 4 (myös nollalle pätevien) kohtien 1, 2 ja 3 lisäksi kvaternioiden joukko täyttää myös seuraavat vaatimukset:

1. Summa on suljettu. Jos $q_1, q_2 \in H$, niin $q_1 + q_2 \in H$. Tämä seuraa määritelmästä 2.

2. Summa on liitännäinen. Jos $q_1, q_2, q_3 \in H$, niin $(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3)$, koska

$$\begin{aligned}
&(q_1 + q_2) + q_3 \\
&= (a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}) + q_3 \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + (b_1 + b_2 + b_3)\mathbf{i} + (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{j} + (d_1 + d_2 + d_3)\mathbf{k}) \\
&= q_1 + (a_2 + a_3 + (b_2 + b_3)\mathbf{i} + (c_2 + c_3)\mathbf{j} + (d_2 + d_3)\mathbf{k}) \\
&= q_1 + (q_2 + q_3).
\end{aligned}$$

3. Identiteettialkio on olemassa myös summalle eli on olemassa $e_+ \in H$, jolla $q + e_+ = e_+ + q = q$ kaikilla kvaternioilla q. Summan identiteettialkio on 0 eli kvaternio, jolla $a = b = c = d = 0$. Yhtälö q + 0 = q = 0 + q pätee kaikilla kvaternioilla q.

4. Kaikilla kvaternioilla on käänteisalkio summan suhteen eli kaikille $q \in H$ on olemassa $q_+^{-1} \in H$, jolla $q + q_+^{-1} = q_+^{-1} + q = 0_+$. Kun $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ niin $q_+^{-1} = -a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.

5. Kvaternioiden summa on vaihdannainen eli kommutatiivinen. Jos $q_1, q_2 \in H$, niin $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$

$$\begin{aligned}
q_1 + q_2 =& a + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} + b + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k} \\
=& (a + b) + (x_1 + y_1)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k} \\
=& (b + a) + (y_1 + x_1)\mathbf{i} + (y_2 + x_2)\mathbf{j} + (y_3 + x_3)\mathbf{k} \\
=& b + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k} + a + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = q_2 + q_1
\end{aligned}$$

6. Operaatioilla pätee distributiivisuus eli jos $q_1, q_2, q_3 \in H$, niin $q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3$ ja $(q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3$. Ensimmäinen yhtälö pätee, koska

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot (q_2 + q_3) =& q_1 \cdot ((b + c) + (y_1 + z_1)\mathbf{i} + (y_2 + z_2)\mathbf{j} + (y_3 + z_3)\mathbf{k}) \\
=& (a, (x_1, x_2, x_3)) \cdot (b + c, (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)) \\
=& (a(b + c) - \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}),\ a(\mathbf{y} + \mathbf{z}) + (b + c)\mathbf{x} + (\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}))) \\
=& (ab + ac - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z},\ a\mathbf{y} + a\mathbf{z} + b\mathbf{x} + c\mathbf{x} + (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{z})) \\
=& q_1q_2 + q_1q_3,
\end{aligned}$$

ja toinen yhtälö pätee, koska

$$\begin{aligned}
(q_1 + q_2) \cdot q_3 =& ((a + b) + (x_1 + y_2)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k}) \cdot q_3 \\
=& (a + b, (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)) \cdot (c, (z_1, z_2, z_3)) \\
=& ((a + b)c - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z},\ (a + b)\mathbf{z} + c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + ((\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z})) \\
=& (ac + bc - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{z},\ a\mathbf{z} + b\mathbf{z} + c\mathbf{x} + c\mathbf{y} + (\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + (\mathbf{y} \times \mathbf{z})) \\
=& q_1q_3 + q_2q_3.
\end{aligned}$$

Koska kaikki vaaditut ehdot toteutuvat, joukko $\mathbb{H}$ muodostaa ryhmän määritelmän 2 ja lauseen 1 operaatioiden suhteen. □

Kvaterniot täyttävät kaikki muut kunnan vaatimukset paitsi tulon kommutatiivisuuden, joten niitä kutsutaan jakokunnaksi (eng. skew field).

## 2.3 Hurwitz'n kvaterniot

Kvaternioilla on alijoukkoja, jotka myös muodostavat ryhmiä ja renkaita.

**Määritelmä 7.** [3] Kun kvaternion kaikki kertoimet ovat puolikkaita, sitä merkitään $\rho = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$.

1. Lipschitz'n kvaterniot ovat joukko $\mathbb{L} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$. Niiden kertoimet ovat siis kaikki kokonaislukuja.

2. Hurwitz'n kvaterniot $\mathbb{H}_1 = \mathbb{L} \cup \{\rho + q \mid q \in \mathbb{L}\}$ ovat edellä esiteltyjen kvaternioiden yhdistelmiä. Niiden kertoimet ovat siis kaikki joko kokonaislukuja tai kokonaislukujen puolikkaita. Molempia ei voi kuitenkaan olla sekaisin yhdessä kvaterniossa.

Näistä esimerkiksi Lipschitz'n yksikkökvaterniot $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ muodostavat ryhmän tulon suhteen. Tässä luvussa käsiteltävät Hurwitz'n kvaterniot puolestaan muodostavat kaikkien kvaternioiden renkaan alirenkaan, koska niiden joukko on suljettu summan ja tulon suhteen, ja lisäksi tulon identiteettialkio (1,(0,0,0)) on Hurwitz'n kvaternio. Hurwitz'n yksikkökvaterniot ovat tarkalleen $Q_{24} = Q_8 \cup \{\frac{(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)}{2}\}$, jossa etumerkit voidaan valita missä tahansa järjestyksessä.

Hurwitz'n kvaternioilla voi laskea jakolaskuja ja saada jakojäännöksen, sillä niillä voi muodostaa version Eukleideen algoritmista. Positiivisilla kokonaisluvuilla Eukleideen algoritmi tarkoittaa, että luvuilla n ja d on aina positiivinen osamäärä q ja ei-negatiivinen jäännös r, niin että $n = qd + r$. Vastaavasti kvaternioille n ja d, jolla $||d|| > 0$, pitäisi olla aina olemassa kvaterniot q ja r, joilla $n = qd + r$ ja $||r|| < ||d||$. Lipschitz'n kvaternioiden kertoimilla on mahdollista, että $||r|| = ||d||$. Siksi kannattaa käyttää Hurwitz'n kvaternioita, joilla ehto $||r|| < ||d||$ pätee aina.

Monet algoritmit tarvitsevat jakolaskua toimiakseen. Tämän ominaisuuden vuoksi Hurwitz'n kvaternioita käytetään myös esimerkiksi yhdessä Lagrangen neljän neliön lauseen todistuksista. Seuraavat määritelmät koskevat Hurwitz'n kvaternioiden kerto- ja jakolaskua.

**Määritelmä 8.** [3] Olkoon $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}_1$. Jos $q_1 = q_2 q_3$, niin $q_2$ on kvaternion $q_1$ vasen jakaja ja $q_3$ on kvaternion $q_1$ oikea jakaja. Jos on olemassa kvaterniot $p, q \in Q_{24}$, joilla $q_1 = p q_2 q$, niin $q_1$ ja $q_2$ ovat liitännäisiä alkioita.

**Määritelmä 9.** [3] Hurwitz'n kvaternioiden q ja p yhteinen vasen jakaja, joka on vasemmalta jaollinen jokaisella niiden yhteisellä vasemmalla jakajalla, on niiden vasen suurin yhteinen tekijä.

**Määritelmä 10.** [3] Kvaterniota kutsutaan yhdistetyksi kvaternioksi, jos se voidaan kirjoittaa kahden Hurwitz'n kvaternion, joiden normit ovat suurempia kuin yksi, tulona. Muut Hurwitz'n kvaterniot kuin nollakvaternio, yksikkökvaterniot ja yhdistetyt kvaterniot ovat alkukvaternioita.

**Lemma 1.** *Hurwitz'n kvaternioiden joukko on suljettu tulon suhteen.*

*Todistus.* Kaikille Hurwitz'n kvaternioille $q_1$ ja $q_2$ pätee jokin seuraavista:

- Kvaterniot ovat muotoa $q_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ja $q_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$, missä $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$. Tällöin tulon

$$\begin{aligned} q_1 q_2 =& a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - d_1 c_2)\mathbf{i} \\ &+ (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2)\mathbf{j} + (a_1 d_2 + b_1 c_2 + d_1 a_2 - c_1 b_2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

  kaikki kertoimet ovat kokonaislukuja.

- Kvaterniot ovat muotoa $q_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ja $q_2 = (a_2 + \frac{1}{2}) + (b_2 + \frac{1}{2})\mathbf{i} + (c_2 + \frac{1}{2})\mathbf{j} + (d_2 + \frac{1}{2})\mathbf{k}$, missä $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$. Tällöin niiden tulot ovat

$$
\begin{aligned}
q_1q_2 =& a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \frac{a_1 - b_1 - c_1 - d_1}{2} + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2 \\
&+ \frac{a_1 + b_1 + c_1 - d_1}{2})\mathbf{i} + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2 + \frac{a_1 - b_1 + c_1 + d_1}{2})\mathbf{j} \\
&+ (a_1d_2 + b_1c_2 + d_1a_2 - c_1b_2 + \frac{a_1 + b_1 - c_1 + d_1}{2})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
q_2q_1 =& a_2a_1 - b_2b_1 - c_2c_1 - d_2d_1 + \frac{a_1 - b_1 - c_1 - d_1}{2} + (a_2b_1 + b_2a_1 + c_2d_1 - d_2c_1 \\
&+ \frac{a_1 + b_1 - c_1 + d_1}{2})\mathbf{i} + (a_2c_1 + c_2a_1 + d_2b_1 - b_2d_1 + \frac{a_1 + b_1 + c_1 - d_1}{2})\mathbf{j} \\
&+ (a_2d_1 + b_2c_1 + d_2a_1 - c_2b_1 + \frac{a_1 - b_1 + c_1 + d_1}{2})\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Jos summa $a_1 + b_1 + c_1 + d_1$ on parillinen, niin kaikki kertoimet ovat kokonaislukuja, mutta jos se on pariton niin kaikki kertoimet ovat puolikkaita. Joka tapauksessa tulot ovat Hurwitz'n kvaternioneja.

- Kvaterniot ovat muotoa $q_1 = (a_1 + \frac{1}{2}) + (b_1 + \frac{1}{2})\mathbf{i} + (c_1 + \frac{1}{2})\mathbf{j} + (d_1 + \frac{1}{2})\mathbf{k}$ ja $q_2 = (a_2+\frac{1}{2})+(b_2+\frac{1}{2})\mathbf{i}+(c_2+\frac{1}{2})\mathbf{j}+(d_2+\frac{1}{2})\mathbf{k}$, missä $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$. Nyt tulo on

$$
\begin{aligned}
q_1q_2 =& a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + \frac{a_1 + a_2 - b_1 - b_2 - c_1 - c_2 - d_1 - d_2 - 1}{2} \\
&+ (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2 + \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 - c_2 - d_1 + d_2 + 1}{2})\mathbf{i} \\
&+ (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2 + \frac{a_1 + a_2 - b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 - d_2 + 1}{2})\mathbf{j} \\
&+ (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + \frac{a_1 + a_2 + b_1 - b_2 - c_1 + c_2 + d_1 + d_2 + 1}{2})\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

  Jos summa $a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2+d_1+d_2$ on parillinen, niin kaikki kertoimet ovat puolikkaita, ja jos se on pariton, niin ne ovat kaikki kokonaislukuja.

Kaikissa tapauksissa kahden Hurwitz'n kvaternion tulo on myös Hurwitz'n kvaternio eli niiden joukko on suljettu tulon suhteen. □

**Lause 6.** *[3] Kaikki alkukvaternion liitännäiset alkiot ovat myös alkukvaternioita.*

*Todistus.* Olkoon $q_1$ alkukvaternio, eli $q_1 \neq (0, (0, 0, 0))$, $||q_1|| \neq 1$ ja $q_1 \neq pr$, kun $p, r \in \mathbb{H}_1$. Jos sillä on liitännäinen kvaternio $q_2$, niin $q_1 = pq_2r$ ja $||p|| = ||r|| = 1$. Tehdään vastaoletus, että liitännäinen $q_2$ ei ole alkukvaternio. Nyt jokin seuraavista pätee kvaterniolle $q_2$:

1. Se on nollakvaternio eli $q_2 = (0, (0, 0, 0))$. Nyt $q_1 = p \cdot (0, (0, 0, 0)) \cdot r = (0, (0, 0, 0))$, mikä on ristiriita.

2. Se on yksikkökvaternio eli $||q_2|| = 1$. Nyt lauseen 3 mukaan $||q_1|| = ||pq_2r|| = ||p||||q_2||||r|| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, mikä on ristiriita.

3. Se on yhdistetty kvaternio eli $q_2 = p_1 r_1$, joillakin $p_1, r_1 \in \mathbb{H}_1$. Kvaternioiden tulon assosiatiivisuutta hyödyntäen $q_1 = p(p_1 r_1)r = (pp_1)(r_1 r)$. Lemmasta 1 seuraa, että $pp_1, r_1 r \in \mathbb{H}_1$, jolloin $q_2$ on yhdistetty kvaternio, mikä on ristiriita.

Koska kaikki mahdolliset tilanteet johtavat ristiriitaan, niin $q_2$ on alkukvaternio. □

# 3 Peilaukset ja kierrot kvaternioilla

Tässä luvussa käsitellään kolmiulotteisen avaruuden peilaus tason suhteen ja kierto suoran suhteen kvaternioiden avulla. Luvun sisältö perustuu pääasiassa teokseen [2]. Vaikka kvaterniot ovat pisteitä neliulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^4$, niin tässä luvussa samaistetaan puhtaiden kvaternioiden joukko avaruuteen $\mathbb{R}^3$.

## 3.1 Peilaukset

Peilaus tason suhteen voidaan tehdä kun tunnetaan tason yhtälö vektorimuodossa.

**Lause 7.** *Kuvaus $\theta : H \to H$, $\theta(y) = -qyq^{-1}$, missä $q$ on nollasta eroava puhdas kvaternioni, on peilaus tason $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{q} = 0$ suhteen. Se kuvaa joukon $H_0$ itseensä kun $H_0$ samaistetaan joukkoon $\mathbb{R}^3$ ja kvaternio $q$ samaistetaan vektoriin $\boldsymbol{q}$.*

*Todistus.* Aloitetaan funktion $\theta$ kiintopisteistä joukossa $H_0$. Kvaternio y on funktion $\theta$ kiintopiste eli $\theta(y) = y$, jos ja vain jos $y = -qyq^{-1}$, mistä saadaan yhtälö $-qy = yq$ kerrottaessa oikealta kvaterniolla q.

Merkitään kvaternioita $q = (0, \mathbf{q})$ ja $y = (0, \mathbf{y})$ ja sijoitetaan ne yhtälöön. Nyt

$$-(0, \mathbf{q})(0, \mathbf{y}) = (0, \mathbf{y})(0, \mathbf{q}),$$

josta saadaan lauseen 1 määrittelemän tulon avulla

$$-(-\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{q} \times \mathbf{y}) = (-\mathbf{y} \cdot \mathbf{q}, \mathbf{y} \times \mathbf{q}).$$

Koska $\mathbf{q} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{q}$ nähdään, että yhtälö toteutuu ja puhdas kvaternio y on kiintopiste, jos ja vain jos $\mathbf{y} \cdot \mathbf{q} = 0$. Olkoon $\Pi$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, jonka yhtälö $\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} = 0$ määrää. Silloin $\theta$ kiinnittää jokaisen tason $\Pi$ pisteen.

Olkoon y mikä tahansa puhdas kvaternio. Voidaan ilmaista $y = p + \lambda q$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $p \in \Pi$. Koska $\theta$ on lineaarinen, $\theta(y) = \theta(p) + \lambda\theta(q) = p + \lambda q$. Nähdään, että $\theta(y)$ on puhdas kvaternio ja kvaternion y peilaus tason $\Pi$ suhteen. □

**Seuraus 3.** *Jos $q$ on puhdas yksikkökvaternio, niin $\theta(y) = qyq$.*

*Todistus.* Jos q on puhdas yksikkökvaternio, niin $q^2 = -1$, jolloin $q^{-1} = -q$ lauseen 4 kohdan seurauksena. Tästä seuraa, että $\theta(y) = -qyq^{-1} = qyq$. □

**Esimerkki 1.** (Tehtävä 6.3.4 [2]) Olkoon $\Pi$ yhtälön $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0$, jossa $\mathbf{n} = (1, -1, 0)$, määrittämä taso ja R peilaus tason suhteen. Merkitään $\mathbf{x} = (a, b, c)$ ja $\mathbf{y} = R(\mathbf{x})$. Tarkistetaan nyt kvaternioita käyttäen, että $\mathbf{y} = (b, a, c)$.

Koska vektori $\mathbf{n} = (1, -1, 0)$, niin kvaternio $n = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Peilatun pisteen y sijainti saadaan funktiolla $R(x) = -nxn^{-1}$. Tähän tarvitaan arvot $-n = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $n^{-1} = \frac{\overline{n}}{||n||^2} = \frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}^2} = \frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}}{2}$, joka saadaan lauseen 4 kohdasta 4. Vektoria $\mathbf{x}$ vastaava kvaternio on $x = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Nyt $y = R(x) = -nxn^{-1} = (-\mathbf{i}+\mathbf{j}) \cdot (a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}) \cdot (-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j})$, johon seuraavaksi sovelletaan lausetta 1 kaksi kertaa peräkkäin. Koska

$$\begin{aligned}
&(-\mathbf{i}+\mathbf{j}) \cdot (a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}) \cdot (-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}) \\
&= (0, (-1, 1, 0)) \cdot (0, (a, b, c)) \cdot (0, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)) \\
&= (a - b, (c, c, -b - a)) \cdot (0, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)) \\
&= (0, (b, a, c)) = b\mathbf{i} + a\mathbf{j} + c\mathbf{k},
\end{aligned}$$

niin $y = (b, a, c)$.

## 3.2 Kierrot

Kierto voidaan muodostaa yhdistämällä kaksi peilausta. [4] Seuraavaksi kuitenkin esitetään kierron muodostaminen kun tunnetaan kiertoakselin suuntavektori ja kiertokulma radiaaneina.

**Lause 8.** *Olkoon $r = (cos(\frac{1}{2}\theta), sin(\frac{1}{2}\theta\boldsymbol{n})$, jossa $\boldsymbol{n}$ on yksikkövektori. Nyt $r$ on yksikkökvaternio ja kuvaus $x \to rxr^{-1} = rx\overline{r}$ on kierto myötäpäivään kulman $\theta$ verran $\boldsymbol{n}$ suuntaisen akselin ympäri.*

*Todistus.* Valitaan yksikkövektorit $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$, joilla $p \cdot q = cos\frac{1}{2}\theta$ ja $p \times q = sin\frac{1}{2}\theta\mathbf{n}$. Näiden vektoreiden välisen kulman on oltava $\frac{\theta}{2}$, jotta saadaan haluttu pistetulo. Niiden molempien täytyy myös olla kohtisuorassa vektorin $\mathbf{n}$ kanssa, jotta ristitulo on vektorin $\pm\ \mathbf{n}$ suuntainen.

Nyt lauseen kuvaama kierto on ensin peilaus yhtälön $x \cdot p = 0$ määräämän tason suhteen ja sitten toinen peilaus yhtälön $x \cdot q = 0$ tason suhteen. Peilauksen määrittävän lauseen 7 mukaan se on siis muotoa $R(x) = q(pxp)q = (qp)x(pq)$ kun $p = (0, \mathbf{p})$ ja $q = (0, \mathbf{q})$.

Kvaternioiden tulosta eli lauseesta 1 seuraa, että

$$\begin{aligned}
qp = (-\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{q} \times \mathbf{p}) &= (-cos\frac{1}{2}\theta, -sin\frac{1}{2}\theta\mathbf{n}) = -r \\
\text{ja } pq = (-\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \mathbf{p} \times \mathbf{q}) &= (-cos\frac{1}{2}\theta, sin\frac{1}{2}\theta\mathbf{n}) = -\overline{r}.
\end{aligned}$$

Nämä sijoittamalla funktioon R(x) saadaan $R(x) = (-r)\mathbf{x}(-\overline{r}) = r\mathbf{x}\overline{r}$. Koska r on yksikkökvaternio eli $||r|| = 1$, niin $\overline{r} = r^{-1}$. Siis $R(x) = r\mathbf{x}\overline{r} = r\mathbf{x}r^{-1}$. □

Tämän seurauksena voidaan muodostaa kahden kierron yhdiste.

**Seuraus 4.** *Olkoon $R_r$ kierto, joka saadaan kvaterniolla $r = cos\frac{1}{2}\theta + sin\frac{1}{2}\theta\boldsymbol{n}$ ja samoin olkoon $R_s$ kvaternion $s = cos\frac{1}{2}\phi + sin\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{m}$ tuottama kierto. Tällöin $R_sR_r = R_{sr}$.*

*Todistus.* Yhdiste $R_r R_s$ on kuvaus $x \to s(r\mathbf{x}\overline{r})\overline{s}$, joka on lauseen 2 ja tulon liitännäisyyden perusteella $(sr)\mathbf{x}(\overline{sr})$. Nähdään, että $R_s R_r = R_{sr}$, missä sr on lauseessa 1 määritelty kvaternioiden tulo. $\square$

**Esimerkki 2.** (Tehtävä 6.3.3 [2]) Käytetään kvaternioita laskemaan muuttujan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ kierron $\frac{\pi}{6}$ myötäpäivään k suuntaisen akselin ympäri.

Lauseessa 8 käytettävät muuttujat ovat siis $\theta = \frac{\pi}{6}$ ja $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, joka on selvästi yksikkökvaternio ja vektorin $\mathbf{k}$ suuntainen. Nyt

$$\begin{aligned} r =& (cos(\frac{\pi}{12}), sin((0,0,\frac{\pi}{12}))) = (cos(\frac{\pi}{12}), (0,0,sin(\frac{\pi}{12}))) = cos(\frac{\pi}{12}) + sin(\frac{\pi}{12})\mathbf{k} \\ \text{ja } \overline{r} =& (cos(\frac{\pi}{12}), -(0,0,sin(\frac{\pi}{12}))) = cos(\frac{\pi}{12}) - sin(\frac{\pi}{12})\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Kvaternion r normi on $||r|| = \sqrt{cos(\frac{\pi}{12})^2 + 0^2 + 0^2 + sin(\frac{\pi}{12})^2} = \sqrt{1} = 1$ eli se on yksikkökvaternio kuten sen kuuluukin olla. Vektorimuuttuja $\mathbf{x}$ on kvaterniona x = (0,$(x_1, x_2, x_3)$), ja sen kierron kuva on

$$\begin{aligned} rx\overline{r} =& (cos(\frac{\pi}{12}), (0,0,sin(\frac{\pi}{12}))) \cdot (0, (x_1, x_2, x_3)) \cdot (cos(\frac{\pi}{12}), (0,0,-sin(\frac{\pi}{12}))) \\ =& (-sin(\frac{\pi}{12})x_3, (cos(\frac{\pi}{12}) - sin(\frac{\pi}{12})x_2, cos(\frac{\pi}{12}) + sin(\frac{\pi}{12})x_1, cos(\frac{\pi}{12}))) \\ & \cdot (cos(\frac{\pi}{12}), (0,0,-sin(\frac{\pi}{12}))) \\ =& (0, (-2 \cdot cos(\frac{\pi}{12})sin(\frac{\pi}{12})x_2 + (cos(\frac{\pi}{12})^2 - sin(\frac{\pi}{12})^2)x_1, \\ & 2 \cdot cos(\frac{\pi}{12})sin(\frac{\pi}{12})x_1 + (cos(\frac{\pi}{12})^2 - sin(\frac{\pi}{12})^2)x_2, (cos(\frac{\pi}{12})^2 + sin(\frac{\pi}{12})^2)x_3)). \end{aligned}$$

Tästä sivennettynä trigonometrisilla kaavoilla saadaan kierron kuvaksi

$$(0, (-sin(\frac{\pi}{6})x_2 + cos(\frac{\pi}{6})x_1, sin(\frac{\pi}{6})x_1 + cos(\frac{\pi}{6})x_2, x_3)).$$

Vertailun vuoksi tehdään sama laskutoimitus matriiseilla. Kierto z-akselin ympäri tehdään matriisilla

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.[4]$$

Nyt vektorin $\mathbf{x}$ kierron kuva saadaan kertomalla se tällä matriisilla. Koska

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{6}) & -sin(\frac{\pi}{6}) & 0 \\ sin(\frac{\pi}{6}) & cos(\frac{\pi}{6}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{6})x_1 - sin(\frac{\pi}{6})x_2 \\ sin(\frac{\pi}{6})x_1 + cos(\frac{\pi}{6})x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

niin tulos on sama kuva kuin kvaternioidenkin avulla.

Kun kierrossa käytettävä r on Hurwitz'n kvaternio, niin kierto säilyttää kuution, jonka kärjet ovat $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ kaikilla mahdollisilla merkkien järjestyksillä. Kun

$r \in Q_8$, kierrot tehdään jonkin pääakselin suhteen. Vektorit $\pm\mathbf{i}$ kiertävät x-akselin ympäri, $\pm\mathbf{j}$ y-akselin ympäri ja $\pm\mathbf{k}$ z-akselin ympäri $\pi$ radiaanin verran ja merkki määrää kiertosuunnan. Kun taas $r \in \{\frac{(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)}{2}\}$, niin kierto tapahtuu jonkin kuution lävistäjän suhteen ja on suuruudeltaan joko $\frac{2\pi}{3}$ tai $\frac{4\pi}{3}$ radiaania. Molemmissa tapauksissa kierrot säilyttävät kuution, mutta muut kuin käytetyllä lävistäjällä olevat kärjet ja kaikki sivut vaihtavat paikkaa.

Kvaternioilla kierrot tarvitsevat vähemmän laskutehoa ja tilaa. Kierron kuvaavan kvaternion tallentamiseen tarvitaan neljä reaalilukua, kun taas kiertomatriisissa on yhdeksän reaalilukua. Kvaternioiden käyttö säästää tallennustilaa ja on siten usein parempi tapa tehdä paljon kiertoja, kuten esimerkiksi tietokonegrafiikoissa täytyy tehdä. Lisäksi kvaterniot kestävät pieniä virheitä paremmin kuin matriisit ja sopivat myös hitaamman siirtymän kuvaamiseen paremmin.

# 4 Yhteenveto

Kvaternioilla on samoja ominaisuuksia kuin kompleksiluvuilla. Niiden summa, liittoluku ja normi onkin määritelty kompleksilukuja vastaavalla tavalla. Kvaternioiden tulo on epäkommutatiivinen, mikä estää Abelin ryhmien tai kuntien muodostamisen. Kvaternioista voi kuitenkin muodostaa ryhmiä ja renkaita, joten niillä on mielenkiintoisia algebrallisia ominaisuuksia.

Kvaternioilla on myös hyödyllisiä alijoukkoja. Hurwitz'n kvaternioiden avulla voidaan esimerkiksi todistaa lukuteorian lauseita tai laskea jakolaskuja. Puhtailla kvaternioilla puolestaan voidaan kuvata kolmiulotteisen avaruuden pisteitä.

Kvaternioiden avulla voidaan laskea peilauksia ja kiertoja kolmiulotteisessa avaruudessa tavalla, johon tarvitaan vähemmän talletustilaa kuin vastaavan matriisin tallentamiseen. Tämän takia kvaternioita käytetään esimerkiksi tietokonegrafiikoissa, robotiikassa ja tietokonenäössä. Kvaternioilla on siis paljon hyödyllisiä sovelluksia ja potentiaalia.

# Viitteet

[1] William R. Hamilton: *Letter from Sir William R. Hamilton to John T. Graves, Esq. on Quaternions.* Philosophical Magazine, 1844

[2] Alan F. Beardon: *Algebra and Geometry.* Cambridge University Press, 2005

[3] Joe Roberts: *Elementary number theory: a problem oriented approach.* The MIT Press, 1977

[4] Markku Koppinen: *Analyyttinen geometria.* Turun yliopisto, 2016