Matriisieksponentiaali

Arttu Kähkönen

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:
Apulaisprofessori Ville Salo

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LuK-tutkielma
Pääaine: Matematiikka
Tekijä: Arttu Kähkönen
Otsikko: Matriisieksponentiaali
Ohjaaja: Apulaisprofessori Ville Salo
Sivumäärä: 9 sivua
Aika: Huhtikuu 2026

Tutkielmassa esitetään määritelmä matriisieksponentiaalille sekä sen määritelmää varten tarvittavat välitiedot. Matriisieksponentiaalilla tarkoitetaan funktiota, jonka avulla eksponenttifunktio voidaan laajentaa koskemaan skalaarien lisäksi myös neliömatriiseja.

Toinen luku aloitetaan esittelemällä metriset sekä normitetut avaruudet. Tämän jälkeen määritellään normit vektoriavaruuksille ja edelleen matriisiavaruuksille. Toisen luvun lopussa esitellään euklidinen matriisinormi eli Frobeniuksen normi.

Kolmannessa luvussa esitetään euklidisen matriisinormin sekä sen normittaman avaruuden ominaisuuksia ja niiden avulla päädytään lopulta hyvinmääriteltyyn matriisieksponentiaaliin.

Asiasanat: euklidinen matriisinormi, Frobeniuksen normi, matriisilaskenta, matriisieksponentiaali, matriisieksponenttifunktio

Sisällys

1 Johdanto

Matriisieksponentiaali on neliömatriiseille, eli muotoa $n \times n$ oleville matriiseille, määritelty funktio. Se ikään kuin laajentaa eksponenttifunktion koskemaan skalaarien lisäksi myös matriiseja. Matriisieksponentiaalia hyödynnetään varsinkin lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisussa. Lisäksi se esiintyy käsiteltäessä Lien algebroita, sillä matriisieksponentiaali toimii eksponenttikuvauksena Lien matriisiryhmissä.

Tässä tutkielmassa tutustutaan matriisieksponentiaalin määritykseen sekä taustatietoihin, joiden avulla funktio määritetään. Toisessa luvussa määritellään tarvittavat termit metrinen avaruus sekä normitettu avaruus, jota varten määritellään myös vektorinormi ja matriisinormi. Matriisinormeista esitetään euklidinen matriisinormi. Kolmannessa luvussa osoitetaan ensin euklidisen matriisinormin normittaman matriisiavaruuden olevan Banachin avaruus. Lisäksi alaluvussa 3.2 tutkitaan normin laskusääntöjä, joiden avulla alaluvussa 3.3 esitetyt lauseet todistetaan.

Tutkielman päälähteenä on käytetty Cesar O. Aguilarin *An Introduction to Real Analysis*. Tutkielmassa esiintyvät määritelmät on muodostettu suurimmilta osin kirjassa esitettyjen pohjalta. Poikkeuksena luvussa 2.2 esiintyvä yleinen matriisinormin määritelmä, jonka muodostuksessa on käytetty lähteenä Markku Koppisen luentomonistetta *Matriisilaskenta*. Tutkielman lauseet ja lemmat ovat pääsääntöisesti Aguilarin kirjasta, mutta esimerkiksi Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön todistuksessa on käytetty yhtä Hui-Hua ja Shanhe Wun artikkelissaan *Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality* esittämää todistusta.

2 Metrinen avaruus

Kahden arvon välistä etäisyyttä epätyhjässä joukossa tutkitaan ja hyödynnetään reaalianalyysissä monin tavoin. Yleensä siihen tutustutaan ensimmäistä kertaa jo alakoulussa lukusuoran avulla. Lukusuora kattaa esimerkiksi luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ tai kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$, ja etäisyyksiä määritetään silmämääräisesti. Lopulta luonnollisten lukujen ja kokonaislukujen joukko laajennetaan aina reaalilukuihin $\mathbb{R}$ ja etäisyyden määrittämiseen käytetään funktiota $d(x, y) = |x - y|$. Näin muodostettu pari $(\mathbb{R}, d)$ on yksi esimerkki *metrisestä avaruudesta.*

Määritelmä 1. *Metriseksi avaruudeksi* kutsutaan epätyhjän joukon X ja sen *metriikan* muodostamaa paria. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$ on *metriikka*, mikäli se toteuttaa ehdot

(i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ ja $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

(iii) $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$

2.1 Vektorinormi

Metrisiä avaruuksia muodostavat epätyhjät joukot voivat olla myös esimerkiksi vektoriavaruuksia. Vektoriavaruudessa eli lineaariavaruudessa vektoreille voidaan määrittää *normi*. Normi kuvastaa vektorin pituutta. Käytetään tässä tapauksessa skalaarikuntana reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$.

Määritelmä 2. Kuvausta $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kutsutaan *vektorinormiksi*, mikäli se täyttää ehdot:

(i) $h(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $h(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = 0$

(ii) $h(c\mathbf{x}) = |c| h(\mathbf{x}) \quad \forall c \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(iii) $h(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq h(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Vektoriavaruus varustettuna normilla $(\mathbb{R}^n, h)$ on normitettu avaruus. Normitetusta avaruudesta pystytään muodostamaan metrinen avaruus. Vektoriavaruudessa metriikka eli vektoreiden välinen etäisyys, voidaan määrittää normin avulla

$$h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Esimerkki 1. Merkitään vektoria $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vektoriavaruudelle $\mathbb{R}^n$ on määritelty euklidinen normi $\|\cdot\|$ siten, että

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Tällä normilla muodostettu avaruus $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ on euklidinen avaruus.

2.2 Matriisinormi

Määritetään normit edelleen myös matriiseille. Määritelmä mukailee Koppisen [2] luentomonisteessaan esittämää määritelmää. Voidaan rajata määritysjoukko vain $n \times n$ -matriiseiksi, sillä matriisieksponentiaali määritellään myöhemmin vain näille neliömatriiseille. Merkitään $n \times n$ -matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Määritelmä 3. Kuvausta $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R},\ A \mapsto \|A\|$ kutsutaan *matriisinormiksi*, mikäli se täyttää ehdot:

(i) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\|A\| = 0 \iff A = O$

(ii) $\|cA\| = |c|\ \|A\| \quad \forall c \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Tällöin lukua $\|A\|$ kutsutaan matriisin A *normiksi*.

Kun matriisiavaruus $\mathbb{R}^{n \times n}$ samaistetaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^N$ kanssa, missä $N = n^2$, niin huomataan matriisin normien ehtojen olevan samat kuin vektorinormin.

2.3 Euklidinen matriisinormi eli Frobeniuksen normi

Euklidista vektorinormia (esimerkki 1) käytetään yleisesti vektorin pituuden määrittämiseen. Mikäli samaa ideaa sovelletaan matriiseille ja määritetään niillekin euklidinen normi, saadaan $n \times n$-matriisille euklidista pituutta vastaava ominaisuus. Matriiseille euklidinen normi määritellään seuraavasti:

Määritelmä 4. Matriiseille $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ voidaan määrittää *euklidinen matriisinormi*

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Tätä kutsutaan myös *Frobeniuksen normiksi* tai *Hilbertin–Schmidtin normiksi.*

Tässä tutkielmassa käytetään selkeyden vuoksi aina termiä Frobeniuksen normi, kun viitataan euklidiseen matriisinormiin.

3 Normitetun matriisiavaruuden ominaisuudet

Kun normitettu avaruus on muodostettu matriiseille, tutkitaan seuraavaksi, millaisia ominaisuuksia muodostetulla avaruudella on. Euklidisen avaruuden $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ominaisuuksia voidaan soveltaa matriisiavaruuteen $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|_F)$ niiden normien samankaltaisuuksien vuoksi.

3.1 Banachin avaruus

Banachin avaruuden käsitteen ymmärtämiseksi täytyy ensin määritellä Cauchyn jonot sekä suppenevuus euklidisessa avaruudessa.

Määritelmä 5. (Cauchyn jono) Lukujonoa x_n kutsutaan Cauchyn jonoksi, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa luonnollinen luku K siten, että jos $n, m \geq K$, niin $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Toisin sanoen lukujono on Cauchyn jono, mikäli erotus $|x_n - x_m|$ saadaan mielivaltaisen pieneksi, kun n ja m ovat tarpeeksi suuria. Jokainen Cauchyn jono suppenee joukossa $\mathbb{R}$. Tämän väitteen todistus sivuutetaan, mutta sen voi löytää esimerkiksi Aguilarin kirjasta *An Introduction to Real Analysis* [1].

Tarkastellaan, miten jonojen suppenevuutta voidaan tutkia euklidisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Jono $\mathbb{R}^n$:ssä on funktio $z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Merkitään vektoria $(z(k)) = (z_1(k), z_2(k), \ldots, z_n(k))$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$.

Lause 1. *Olkoon* $(z(k)) = (z_1(k), z_2(k), \ldots, z_n(k))$ *jono normitetussa vektoriavaruudessa* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. *Tällöin vektorijono* $(z(k))$ *suppenee, jos ja vain jos jokaiselle* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *sen komponenttijono* $(z_i(k))$ *suppenee. Edelleen jos* $(z(k))$ *suppenee, niin*

$$\lim_{k\to\infty} z(k) = (\lim_{k\to\infty} z_1(k), \lim_{k\to\infty} z_2(k), \ldots, \lim_{k\to\infty} z_n(k)).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $(z(k))$ suppenee vektorijonoon $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Jokaiselle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pätee

$$|z_i(k) - p_i| \le \sqrt{(z_1(k) - p_1)^2 + (z_2(k) - p_2)^2 + \cdots + (z_n(k) - p_n)^2}.$$

Toisin sanoen $|z_i(k) - p_i| \le \|z(k) - p\|$. Koska $(z(k)) \to p$, niin $\lim_{k\to\infty} \|z(k) - p\| = 0$ ja samoin $\lim_{k\to\infty} \|z_i(k) - p_i\| = 0$. Täten $\lim_{k\to\infty} z_i(k) \to p_i$.

Oletetaan nyt, että vektorijonon komponentit $(z_i(k))$ suppenevat jokaisella $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Olkoon $p_i = \lim_{k\to\infty} z_i(k)$ jokaiselle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ja olkoon $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Jono

$$\begin{aligned} x_k &= \|z(k) - p\| \\ &= \sqrt{(z_1(k) - p_1)^2 + (z_2(k) - p_2)^2 + \cdots + (z_n(k) - p_n)^2} \end{aligned}$$

suppenee kohti nollaa, koska $\lim_{k\to\infty}(z_i(k) - p_i)^2 = 0$ ja neliöjuurifunktio $x \mapsto \sqrt{x}$ on jatkuva. Täten $\lim_{k\to\infty} z(k) = p$. □

Kun tiedetään, miten suppenevuus määritetään myös euklidisille avaruuksille, tarkastellaan täydellisyyttä. *Banachin avaruudeksi* kutsutaan normitettuja avaruuksia, jotka ovat myös täydellisiä, eli toteuttavat seuraavan täydellisyysehdon:

Määritelmä 6. (Täydellisyysehto) Metrinen avaruus X on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee.

Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ täydellisyyttä eli sen Cauchyn jonojen suppenevuutta. Normi $\|A\|_F$ on tavallinen euklidinen normi avaruudessa $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_F)$. Kun $N = n^2 = n \times n$, matriisit tunnistetaan avaruuden $\mathbb{R}^N$ alkioina. Tällöin, jos $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ on täydellinen, niin myös $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|)_F$ on täydellinen.

Lause 2. *Jokainen Cauchyn jono suppenee avaruudessa* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Todistus. Olkoon $(z(k))$ Cauchyn jono joukossa $\mathbb{R}^n$. Tällöin jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $K \in \mathbb{N}$ siten, että $\|z(k) - z(m)\| < \varepsilon$ kaikille $k, m \ge K$. Täten, jos $k, m \ge K$, kaikille $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pätee

$$|z_i(k) - z_i(m)| \le \|z(k) - z(m)\| < \varepsilon.$$

$(z_i(k))$ on Cauchyn jono joukossa $\mathbb{R}$ ja on siten myös suppeneva, sillä kuten aiemmin todettiin, jokainen Cauchyn jono on suppeneva joukossa $\mathbb{R}$. Lauseen 1 mukaan $(z(k))$ on siis suppeneva. □

Voidaan siis todeta, että Frobeniuksen normin ja joukon $\mathbb{R}^{n\times n}$ muodostama avaruus $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|)_F$ on täydellinen eli Banachin avaruus, sillä se on normitettu täydellinen avaruus.

3.2 Frobeniuksen normin tärkeät laskusäännöt

Jotta päästään ensimmäiseen laskusääntöön, käsitellään sen todistuksessa esiintyvä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö. Tässä tutkielmassa tarvitaan epäyhtälön summamuotoa. Usein Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö esitetään kuitenkin vektorin sisätulolle. Todistetaan epäyhtälö seuraavaksi käyttäen Hui-Hua Wun ja Shanhe Wun [3] esittämää todistusta.

Lemma 1 (Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö)**.**

$$\left(\sum_{l=1}^{N} x_l y_l\right)^2 \leq \left(\sum_{l=1}^{N} x_l^2\right)\left(\sum_{l=1}^{N} y_l^2\right)$$

Todistus. Aloitetaan summasta

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Kertomalla summat auki saadaan

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{j=1}^{N} y_j^2 + \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - 2\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{j=1}^{N} y_j x_j.$$

Koska kaikki summat kulkevat yhdestä N:ään, voidaan merkitä $j = i$. Saadaan

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i^2 + \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{i=1}^{N} y_i x_i.$$

Nyt ryhmittelemällä termeittäin saadaan

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)^2.$$

Koska lähdettiin reaalilukujen neliöiden summasta, on tuloksen oltava yhtä suuri tai suurempi kuin nolla. Voidaan siis kirjoittaa

$$2\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)^2 \geq 0$$

ja edelleen

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)^2.$$

Näin päädyttiin siis Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöön. □

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä käyttämällä voidaan muodostaa ensimmäinen laskusääntö Frobeniuksen normille. Tätä hyödynnetään myös potenssilaskusäännön todistuksessa. Seuraavat lemmat todistuksineen on muodostettu Aguilarin [1] esittämien pohjalta.

Lemma 2. *Frobeniuksen normille pätee*

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

Todistus. Cauchy-Schwarzin epäyhtälön avulla voidaan kirjoittaa

$$(AB)_{i,j}^2 = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{i,l} b_{l,j} \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{n} b_{l,j}^2 \right).$$

Kun lasketaan Frobeniuksen normi matriisille AB, huomataan, että

$$\|AB\|_F = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (AB)_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{n} b_{l,j}^2 \right) \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i,l=1}^{n} a_{i,l}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j,l=1}^{n} b_{l,j}^2 \right)^{1/2}$$

$$= \|A\| \|B\|.$$

Eli $\|AB\|_F \leq \|A\|_F |B\|_F$. □

Voidaan edelleen todistaa myös seuraava ominaisuus Frobeniuksen normille induktion avulla.

Lemma 3. *Frobeniuksen normille pätee*

$$\|A^k\|_F \leq \|A\|_F^k$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Todistus. Kirjoitetaan vasen puoli epäyhtälöstä

$$\|A^k\|_F = \|A \cdot A \cdot A \cdots A\|_F.$$

Aiemman lemman perusteella $\|AB\|_F \leq \|A\|_F |B\|_F$, jolloin

$$\|A^k\|_F = \|A \cdot A \cdot A \cdots A\|_F \leq \|A\|_F \|A\|_F \|A\|_F \ldots \|A\|_F = \|A\|_F^k$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. □

Näitä Frobeniuksen normin ominaisuuksia hyödynnetään seuraavassa luvussa.

3.3 Matriisieksponentiaalin määritys

Matriisieksponentiaalissa esiintyy ääretön summa. Tähän asti esiintyneet summat ovat olleet äärellisiä eli niissä on ollut äärellinen määrä termejä. Jotta matriisieksponentiaali voidaan muodostaa, tulee äärettömät summat siis määritellä ennen sitä.

Määritelmä 7. Olkoon (x_k) lukujono. Sen generoimaa ääretöntä summaa $x_1 + x_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ kutsutaan *sarjaksi*. Lukujonon n:n ensimmäisen termin summaa merkitään

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Summaa s_n kutsutaan sarjan *osasummaksi*. Merkintä (s_n) tarkoittaa osasummien jonoa.

Seuraavaksi tarkastellaan äärettömän summan suppenevuutta. Tätä varten käsitellään osasummien muodostamaa jonoa $(s_n) = s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Määritelmä 8. Olkoon (x_k) lukujono ja (s_n) sen generoimien osasummien jono. Jos $\lim_{n\to\infty} s_n$ on olemassa ja se on yhtä suuri kuin luku K, sanotaan, että lukujonon (x_n) generoima sarja suppenee kohti lukua K. Tällöin siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = K = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Myöhemmin todistetaan matriisieksponentiaalissa esiintyvän sarjan suppenevuus, mutta sen todistamiseen tarvitaan seuraavan lemman ja lauseen antamia aputuloksia. Näiden todistukset on muodostettu Aguilarin [1] esittämien pohjalta.

Lause 3. *Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ Banachin avaruus ja olkoon z_n jono joukossa V. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$ suppenee, myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee joukossa V.*

Todistus. Oletetaan, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$ suppenee. Tällöin sen osasummien jono t_n=$\sum_{k=1}^{n} \|z_n\|$ suppenee. Silloin t_n on Cauchyn jono. Käsitellään osasummien jonoa $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$. Luvuille $n > m$ saadaan

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} z_n \right\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|z_n\| \\ &= t_n - t_m \\ &= |t_n - t_m| \end{aligned}$$

ja koska t_n on Cauchyn jono, niin $|t_n - t_m| < \varepsilon$, kun m ja n ovat tarpeeksi suuria. Tällöin myös s_n on Cauchyn jono joukossa V ja siten suppenee, sillä V on täydellinen metrinen avaruus. $\square$

Olkoon $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ potenssisarja, joka suppenee $\mathbb{R}$:ssä. Koska sarjan suppenevuus tarkoittaa kuvauksen saavan jokaisella muuttujan x arvolla olemassaolevan arvon reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$, on kuvaus hyvinmääritelty. Määritellään seuraavaa lausetta varten kuvaus $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k.$$

Ennen itse lauseen todistamista esitellään vielä lemma potenssisarjan suppenemisesta. Lemmassa käytetään potenssisarjan suppenemissäteelle Cauchyn–Hadamardin lauseen muotoa

$$R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Cauchyn–Hadamardin lause on kompleksianalyysin tulos, ja sen avulla voidaan selvittää potenssisarjan suppenevuussäde. Lauseen todistus sivuutetaan tässä tutkielmassa.

Lemma 4. *Jos potenssisarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ suppenee välillä $(-R, R)$, missä $R \in \mathbb{R}$, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| x^k$ suppenee välillä $(-R, R)$.*

Todistus. Ensimmäisen sarjan suppenemissäde saadaan $R = \dfrac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}}$. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| x^k$ suppenemissäde $R' = \dfrac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{||a_k||}}$. Koska $||a_k|| = |a_k|$, niin myös $R' = R$. □

Suppenemisväli on esitetty lemmassa avoimena, sillä Cauchyn-Hadamardin lause ei anna vastausta sarjan suppenemisesta suppenemisvälin päätepisteissä. Olennaista seuraavassa lauseessa on kuitenkin vain se, että sarjoilla on samat suppenemisvälit.

Lause 4. *Kuvaus f on hyvinmääritelty, ja jos $c_k \geq 0$, niin $\|f(A)\|_F \leq f(\|A\|_F)$ eli*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k \|A\|_F^k.$$

Todistus. Normitettu matriisiavaruus $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|_F)$ on Banachin avaruus ja siten määritelmän mukaan täydellinen. Lauseen 3 mukaan sarja $\sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k$ suppenee silloin, kun $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k A^k\|_F$ suppenee. Aikaisemmin todistettujen laskusääntöjen avulla voidaan arvioida sarjan jäseniä ylöspäin: lemman 2 mukaan $\|c_k A^k\|_F \leq |c_k| \|A^k\|_F$ ja edelleen lemman 3 avulla $|c_k| \|A^k\|_F \leq |c_k| \|A\|_F^k$. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \|A\|_F^k$ suppenee lemman 4 mukaan samalla välillä kuin potenssisarja $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \|A\|_F^k$. Nyt majoranttiperiaatteen mukaan myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k A^k\|_F$ suppenee kyseisellä välillä. Täten kuvaus on hyvinmääritelty. Kun $c_k \geq 0$, niin

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m} c_k A^k \right\|_F &\leq \sum_{k=1}^{m} |c_k| \|A\|_F^k \\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k \|A\|_F^k. \end{aligned}$$

Koska normi on funktiona jatkuva, voidaan hyödyntää raja-arvoa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k\right\|_F &= \lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{m} c_k A^k\right\|_F \\ &\leq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} c_k\|A\|_F^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k\|A\|_F^k.\end{aligned}$$

Täten saatiin siis $\|f(A)\|_F \leq f(\|A\|_F)$. □

Näiden aputulosten avulla päästään käsittelemään matriisieksponentiaalille olennaista sarjaa. Siinä nimittäin esiintyy sarja $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|_F^k}{k!}$. Todistetaan nyt kyseisen sarjan suppeneminen suhdetestin avulla.

Lemma 5. *Sarja* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|_F^k}{k!}$ *suppenee.*

Todistus. Merkitään sarjaa $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|_F^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Tutkitaan sarjan suppenemista suhdetestillä, eli tutkitaan lukua $L = \lim_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$.

$$\left|\frac{\|A\|_F^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{\|A\|_F^k}\right| = \left|\frac{\|A\|_F^{k+1}}{\|A\|_F^k}\cdot\frac{k!}{(k+1)!}\right| = \left|\frac{\|A\|_F}{k+1}\right|,$$

jolloin $L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\|A\|_F}{k+1}\right| = 0$. Koska $L < 1$, niin tutkimalla jonon määräämää osasummien jonoa, huomataan sen raja-arvon olevan olemassa eli sarja suppenee. □

Todistettiin, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|_F^k}{k!}$ suppenee. Tällöin lauseen 3 mukaan myös sarja $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ suppenee. Muodostetaan seuraavaksi matriisieksponentiaali näiden tietojen pohjalta.

Määritelmä 9. Matriisieksponentiaali on eksponenttifunktio

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$$

kaikille matriiseille $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Voidaan todeta sen olevan hyvinmääritelty, sillä sarja, joka määrää matriisieksponentiaalin, suppenee.

Viitteet

[1] Cesar O. Aguilar. *An Introduction to Real Analysis.* 2022. s. 118–121, 267–311

[2] Markku Koppinen. Luentomoniste: *Matriisilaskenta.* Turun yliopisto, 2012. s. 66–75.

[3] Hui-Hua Wu, Shanhe Wu. *Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality.* 2009. Octogon Mathematical Magazine, 17 (1). s. 221–229.