RIEMANNIN ZEETA-FUNKTIO JA SEN YHTEYS ALKULUKUIHIN

Mikko Jaskari

Pro gradu -tutkielma
Helmikuu 2021

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

JASKARI, MIKKO: Riemannin zeeta-funktio ja sen yhteys alkulukuihin
Pro gradu -tutkielma, 58 s., 12 liites.
Matematiikka
Helmikuu 2021

Riemannin zeeta-funktio on laajasti tunnettu ja käytetty funktio, jolla on yhteyksiä alkulukuihin. Tämän yhteyden tutkiminen on erityisesti saanut alkunsa noin 1800-luvun puolivälissä saksalaisen Bernhard Riemannin ansiokkaasta työstä. Riemann teki lukuteorian kannalta mullistavia otaksumia, jotka kuitenkin usein jäivät muiden todistettaviksi ja esimerkiksi kuuluisaa Riemannin hypoteesia ei vieläkään olla todistettu.

Alkuluvut ovat keskeisessä roolissa lukuteoriassa ja tämä opitaan yleensä hyvin aikaisessa vaiheessa, kun kokonaislukujen ominaisuuksia tutkitaan. Jaollisuussäännöiltään ainutlaatuiset alkuluvut voivat kiehtoa mystisyydellään, sillä niiden kaikkia salaisuuksia ei olla onnistuttu selvittämään. Alkulukujen tarkan lukumäärän laskeminen tietyllä välillä osoittautuu työlääksi ongelmaksi, sillä mitään helppoa kaavaa ei tähän ongelmaan ole tarjolla.

Tässä tutkielmassa osoitetaan Riemannin zeeta-funktion avulla erityisesti funktioteoriaa hyödyntämällä, että alkulukujen jakautumisella ja zeeta-funktiolla on selvä yhteys. Tämä yhteys tiivistyy lopulta hyvin eleganttiin muotoon. Havaitaan, että alkulukujen jakautuminen liittyy suoraan joukkoon kompleksilukuja, joilla zeeta-funktio saa arvon nolla.

Tutkielman erityinen tavoite on johtaa alkulukulause, joka tarkoittaa sitä, että alkulukujen jakautumista voidaan ennustaa menestyksekkäästi. On siis mahdollista johtaa kaava, jonka antama arvio alkulukujen lukumäärästä annetun lukuarvon alapuolella lähestyy tämän lukuarvon kasvaessa suhteellisesti alkulukujen todellista lukumäärää. Tämä tarkoittaa, että arvion virhe prosentteina lähestyy nollaa. Lopussa tarkastellaan myös Riemannin hypoteesia ja zeeta-funktion merkitystä lukuteoriassa.

Asiasanat: analyyttinen lukuteoria, alkuluvut, alkulukulause, alkulukujen jakautuminen, funktioteoria, zeeta-funktio

MERKINTÄTAVOISTA

Tässä tutkielmassa käytetään seuraavia merkintöjä:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	luonnollisten lukujen joukko
$n \in \mathbb{N}$	luonnollinen luku
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$	alkulukujen joukko
$p \in \mathbb{P}$	alkuluku
$\mathbb{Z}$	kokonaislukujen joukko
$\mathbb{Q}$	rationaalilukujen joukko
$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	kompleksilukujen joukko
$s = \sigma + it$	kompleksinen muuttuja, missä
$s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) = \sigma \in \mathbb{R}$ ja $\mathrm{Im}(s) = t \in \mathbb{R}$	
$\arg z$	kompleksiluvun z argumentti
$\log z = \ln \lvert z \rvert + i \arg z$	kompleksinen logaritmi
$\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$	Möbiuksen funktio (ks. alla)
$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	Eulerin ϕ-funktio (ks. alla)
luku (n, m)	$\mathrm{syt}(n, m)$

Olkoon $\omega(n)$ luvun n jakavien alkulukujen lukumäärä. Tällöin Möbiuksen funktion arvo määritellään seuraavasti:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{kun } n \text{ on neliövapaa} \\ 0, & \text{kun } n \text{ ei ole neliövapaa.} \end{cases}$$

Eulerin ϕ-funktion arvo $\phi(n)$ on lukua n pienempien ja sen kanssa suhteellisten alkulukujen lukumäärä.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä johdantoluvussa käydään läpi tutkielman tavoitteita ja käsitellään joitakin oleellisia matemaattisia käsitteitä, joita tarvitaan, tai joiden ymmärtäminen auttaa tutkielman keskeisten tulosten ymmärtämisessä. Tutkielmassa oletetaan hyvä ymmärrys lukuteoriasta sekä funktioteoriasta. Eräiltä osin matemaattinen osuus voi olla hyvinkin syvällistä, mutta esimerkiksi tutkielman johdanto- ja johtopäätöslukujen yhdistäminen voi olla riittävää uteliaalle lukijalle.

1.1 Tutkielman aiheesta ja tavoitteista

Tutkielman keskeisenä motivaationa voidaan ajatella olevan alkulukujen jakautumisen ymmärtäminen. Alkuluvut eli lukua 1 suuremmat kokonaisluvut, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla 1, ovat ainutlaatuisten ominaisuuksiensa takia hyvin merkittäviä luonnollisten lukujen ominaisuuksiin liittyvien kysymyksien selvittämisessä. Alkulukuja on äärettömän monta ja ne ovat keskeisessä roolissa diskreetissä lukuteoriassa ja algebrassa. Niiden etsiminen on periaatteessa helppoa esimerkiksi jaollisuussääntöjä soveltamalla. Eräs klassinen tapa etsiä alkulukuja joltakin lukuväliltä on *Eratostheneen seula*, jossa listasta poistamalla tiedettyjen alkulukujen monikertoja, voidaan jäljelle jäävistä luvuista löytää vielä löytämättömiä alkulukuja.

Eratostheneen seula on kuitenkin hyvin työläs tapa etsiä alkulukuja erityisesti pitkiltä lukuväleiltä. Tämän takia olisi kätevää, jos voitaisiin määritellä funktio, joka antaa annettua lukuarvoa pienempien alkulukujen lukumäärän, ja jonka arvon laskeminen olisi helppoa. Annettua lukuarvoa pienempien alkulukujen lukumäärää laskevaa funktiota kutsutaan *alkulukufunktioksi*. Alkulukufunktion kaavan määrääminen osoittautuu nopeasti hyvin hankalaksi ongelmaksi, sillä alkulukujen jakautumiselle ei oikein näytä löytyvän mitään säännönmukaisuutta. Diskreetistä lähtökohdasta tarkasteltuna tällaisen kaavan löytäminen on erityisen vaikea ongelma, sillä esimerkiksi peräkkäisten alkulukujen etäisyys toisistaan vaihtelee ilman, että sillä tuntuisi olevan minkäänlaista logiikkaa. Nykyään tiedetään, että tämä etäisyys voi olla mielivaltaisen suuri, mutta toisaalta niin sanotun *alkulukukaksoskonjektuurin* mukaan arvellaan, että tämä etäisyys saa arvon 2 äärettömän monta kertaa.

Alkulukufunktion yksinkertaisen kaavan löytäminen tai edes sen arviointi sekä alkulukujen jakautumisen ymmärtäminen on pitkään ollut tavoitteena matematiikan historiassa ja valistuneitakin arvioita on tehty pidemmän aikaa (ks. [4]: pykälä 1.1). Merkittäviä edistysaskelia on sittemmin otettu ja alkulukujen jakautumista on mahdollista tutkia, kun asian tutkimisille löydetään täysin uusi perspektiivi, joka poikkeaa diskreetistä ajattelutavasta.

Tämä ei valitettavasti tarkoita helpon ja yksinkertaisen kaavan löytämistä alkulukufunktiolle, mutta analyysin avulla on kuitenkin mahdollista osoittaa alkulukufunktion noudattavan tietynlaista asymptotiikkaa. Tätä tulosta kutsutaan *alkulukulauseeksi* ja se käytännössä tarkoittaa, että alkulukufunktion arvoa voidaan arvioida funktiolla, jonka suhteellinen virhe alkulukufunktion todelliseen arvoon verrattuna pienenee nollaan, kun näiden funktioiden arvot kasvavat kohti ääretöntä.

Tässä tutkielmassa asiaa tarkastellaan saksalaisen 1800-luvulla vaikuttaneen matematiikon Bernhard Riemannin aloittaman tutkimustyön pohjalta. Riemannin vuoden 1859 julkaisu *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeben Grösse* eli vapaasti käännettynä *Annettua lukuarvoa pienempien alkulukujen lukumäärästä* näyttää, kuinka sittemmin Riemannin mukaan nimetyllä zeeta-funktiolla eli ζ-funktiolla on merkittäviä yhteyksiä alkulukujen jakautumiseen. Huolimatta Riemannin ansiokkaasta tutkimustyöstä, hän ei julkaisussaan täysin aukottomasti todistanut kaikkia väittämiään, vaan tuloksia todistettiin vielä vuosikymmeniä myöhemmin ja esimerkiksi kuuluisaa *Riemannin hypoteesia* ei olla vieläkään todistettu. Riemannin julkaisun aloittaman tutkimustyön eräs huipentuma on Jacques Hadamardin ja Charles Jean de la Vallée Poussinin todistus alkulukulauseelle vuonna 1896. Alkulukulauseen todistus on tämän tutkielman päätavoite ja sitä varten johdetaan muita tärkeitä tuloksia. Tutkielman pääasiallisena lähteenä on käytetty H. M. Edwardsin kirjaa *Riemann's Zeta Function* [4].

1.2 Matemaattinen johdanto

Tässä pykälässä on tarkoitus tarkastella erilaisia matemaattisia käsitteitä, joita tarvitaan tutkielmassa tai joiden ymmärtämien voi helpottaa asioiden hahmottamista. Tutkielmassa käsiteltävä Riemannin ζ-funktio määritellään ensimmäisen kerran sarjana

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \dots, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1 \tag{1}$$

ja sen ilmeisin yhteys alkulukuihin on ominaisuus

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{2}$$

Tämä ominaisuus mahdollistaa sen, että alkulukujen jakautumista voi tutkia ζ-funktion avulla ja ζ-funktion määrittelyalueen laajentaminen analyyttisella jatkamisella on hyvin oleellinen osa tutkimusta.

1.2.1 Laskentafunktioista

Alkulukufunktion kaavan määrääminen on hankalaa jo senkin takia, että se on laskentafunktio eli funktio, joka laskee alkulukujen lukumäärää. Tällainen funktio ei ole jatkuva, mikä tuntuu lisäävään ongelman hankaluutta.

Asiaa voidaan tarkastella myös siltä kannalta, että tavoitteena olisi löytää funktio, joka laskee luonnollisten lukujen lukumäärän annetun lukuarvon alapuolella. Intuitiivisesti tämä on helppoa, sillä annetun lukuarvon ollessa positiivinen reaaliluku, tämän funktion arvo on kyseinen reaaliluku pyöristettynä alaspäin lähimpään kokonaislukuun. Toisin sanoen tällainen funktio on *lattiafunktio* eli

$$\lfloor x \rfloor = \sum_{n \leq x} 1, \qquad x > 0.$$

Matemaattisesti lattiafunktion kaavan määrääminen ei ole niin intuitiivista, sillä pyöristäminen on tapauskohtainen toimenpide. Tällainen funktio on kuitenkin selvästi jaksollinen ja jakson pituus on 1 ja tässä ongelmassa voidaan hyödyntää Fourier'n sarjoja, jossa jaksolliset trigonometriset funktiot ratkaisevat tämän ongelman.

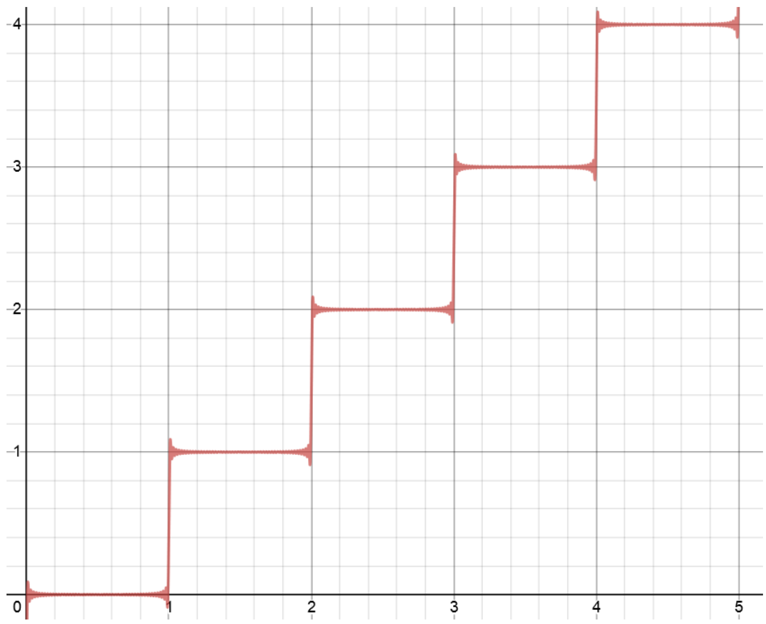
Fourier'n sarjoilla voidaan osoittaa, että positiivisen reaaliluvun x desimaaliosa $\{x\}$ on

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k x)}{k}, \qquad x \notin \mathbb{Z}, \qquad \text{(ks. liite A)}.$$

Tämä kaava saa arvon $1/2$, jos $x \in \mathbb{Z}$, joten määritelmä ei ole aivan täydellinen arvolle $\{x\}$. Kuitenkin, koska $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$, niin

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{n \leq x} 1 + \sum_{n < x} 1\right] = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k x)}{k}, \qquad x > 0.$$

Lattiafunktion Fourier'n sarjaesitys on eräs esimerkki siitä, että diskreetti laskentafunktio voidaan esittää myös eksplisiittisessä kaavamuodossa trigonometrisiä funktioita hyödyntäen. Alkulukufunktion kannalta on pohdittava, että onko vastaavanlainen menetelmä mahdollista myös sille esimerkiksi ζ-funktion avulla.



Kuva 1: Lattiafunktion approksimointia kaavalla $x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{50}\frac{\sin(2\pi kx)}{k}$.

1.2.2 Analyytisesta jatkamisesta

Määritellään funktio $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kaavalla

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Funktion S määrittelemä sarja suppenee, kun $|z| < 1$ ja sen arvo voidaan laskea geometrisen sarjan kaavalla, joka johdetaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} & 1 + z + z^2 + z^3 + \dots && = S(z), \\ \implies\ & z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots && = zS(z), \\ \implies\ & S(z) - 1 && = zS(z), \\ \implies\ & S(z) && = \tfrac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

Nyt kuitenkin voidaan havaita, että koska $\frac{1}{1-z}$ on määritelty aina, kun $z \neq 1$, niin funktio S voidaan määritellä laajemmin kuin aiemmin, mutta se saa silti täsmälleen samat arvot kuin ennenkin tapauksessa $|z| < 1$. Näin funktion S määrittelemää sarjaa jatkettiin analyyttisesti ja tällöin esimerkiksi hajaantuvan sarjan

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

analyyttisesti jatkettu arvo on -1.

Määritelmä 1.1. Funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen kohdassa $z = z_0$ jos ja vain jos on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että f on derivoituva joukossa $\{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$. Jokaisessa määrittelypisteessään analyyttista funktiota kutsutaan *holomorfiseksi* funktioksi. Tällainen koko kompleksitasolla määritelty holomorfinen funktio on *kokonainen* ja yksittäisiä pisteitä lukuunottamatta koko kompleksitasolla määritelty holomorfinen funktio on *meroforminen.*

Kompleksitason alue on sen polkuyhtenäinen avoin osajoukko.

Lause 1.2. Olkoot f ja g holomorfisia funktioita alueella D ja alueella $S \subseteq D$ on voimassa $f = g$. Tällöin $f = g$ koko alueella D (ks. [10]: pykälä 3.2.3).

Lause 1.2 tarkoittaa siis sitä, että analyyttinen jatkaminen on yksikäsitteistä. Analyyttinen jatkaminen on erittäin keskeisessä roolissa, kun erään alkulukuihin liittyvän laskentafunktion kaavaa johdetaan Riemannin ζ-funktion ominaisuuksien avulla. Aluksi ζ-funktio määritellään sarjana (1), jolle voi johtaa yhteyksiä alkulukuihin kaavan (2) mukaan, mutta nämä yhteydet alkulukuihin ovat voimassa vain silloin, kun tämä sarjamuoto on voimassa.

Analyyttinen jatkaminen voi kuitenkin kertoa funktion ominaisuuksista jotain keskeistä myös jonkin tarkastelualueen ulkopuolelta. Esimerkiksi peräkkäisten luonnollisten lukujen $1, 2, 3, \ldots, n$ summan voi määritellä kaavalla

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Yleistämällä funktion f koko kompleksitasolle kaavalla $f(z) = z^2/2 + z/2$ saadaan kokonainen funktio f. Tällä funktiolla on kaksi nollakohtaa $z = -1$ ja $z = 0$. Kumpikaan nollakohta ei ole luonnollinen luku, mutta tästä huolimatta on algebran peruslauseen mukaan mahdollista määritellä, että

$$f(n) = \frac{1}{2} \prod_{z_0 \in \{-1,0\}} (n - z_0).$$

Edellä käydyn esimerkin tarkoitus oli osoittaa, että analyyttinen jatkaminen voi esimerkiksi mahdollistaa sen, että tutkitulla funktiolla on nollakohtia, jotka voivat esimerkiksi algebran peruslauseen mukaisessa hengessä paljastaa jotain oleellista funktion ominaisuuksista. Juuri tämä on tässä tutkielmassa tavoitteena ζ-funktion kanssa. ζ-funktion yhteydet alkulukuihin on voimassa vain tietyssä osassa määrittelyaluetta, mutta tuon alueen ulkopuolella olevat

ζ-funktion nollakohdat tarjoavat mahdollisuuden määritellä ζ-funktion sellaisessa muodossa, että nuo nollakohdat liittyvät keskeisellä tavalla alkulukujen jakautumiseen.

Tämä yhteys tulee olemaan laskentafunktion

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{p^n \leq x} \log p + \sum_{p^n < x} \log p\right]$$

arvon lausuminen pykälässä 1.2.1 esitetyllä tyylillä, mutta siinä ζ-funktion nollakohdat esiintyvät muodostuvassa sarjaesityksessä. Tämä tulos on merkittävä työkalu varsinaisen alkulukufunktion tutkimisen kannalta.

1.3 Γ-funktio

Gammafunktio eli Γ-funktio on kertoman yleistys kaikille kompleksiluvuille lukuunottamatta negatiivisia kokonaislukuja. Se on myös eräs esimerkki analyyttisesta jatkamisesta. Γ-funktion johtaminen onnistuu derivoimalla muuttujan a suhteen integraaliyhtälöä

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ax}dx &= \frac{1}{a} \\
\int_0^\infty xe^{-ax}dx &= \frac{1}{a^2} \\
\int_0^\infty x^2e^{-ax}dx &= \frac{1\cdot 2}{a^3} \\
&\vdots \\
\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx &= \frac{n!}{a^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla $a = 1$ saadaan

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx,$$

joka suppenee kun $n > -1$.

Määritelmä 1.3. Γ-funktio määritellään kaavalla

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx, \qquad \text{kun } \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Tällöin siis $\Gamma(n) = (n-1)!$, kun $n \in \mathbb{N}$.

Lause 1.4. Seuraavat Γ-funktion identiteetit ovat voimassa (ks. liite B):

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{3}$$

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\right] \tag{4}$$

$$\pi = \Gamma(1-s)\Gamma(s)\sin(\pi s) \tag{5}$$

$$\Gamma(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \tag{6}$$

Yhtälöllä (3) voidaan yleistää Γ-funktio määritellyksi koko kompleksitasolla lukuunottamatta nollaa ja negatiivisia kokonaislukuja.

2 Riemannin ζ-funktio

Tässä luvussa määritellään Riemannin ζ-funktio ja jatketaan sitä analyyttisesti kompleksitasolla. Samalla myös tutkitaan joitakin ominaisuuksia, joita ζ-funktiolla on.

2.1 Määrittely ja ominaisuuksia, kun $\mathrm{Re}(s) > 1$

Määritellään ζ-funktio ja tarkastellaan alustavasti sen yhteyttä alkulukuihin.

Lause 2.1. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

suppenee alueessa $\mathrm{Re}(s) > 1$. Olkoon $\delta > 0$. Tällöin tämä sarja suppenee tasaisesti alueessa $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \delta$.

Todistus. Sarja suppenee sen itseisen suppenemisen seurauksena:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \right| \left| \frac{1}{n^{\mathrm{Im}(s)i}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}.$$

Suppeneminen on tasaista, kun $\delta > 0$ ja $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \delta$, koska laajennetun kolmioepäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \leq \frac{1}{(N+1)^{1+\delta}} + \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\delta}} dx \to 0, \qquad \text{kun } N \to \infty. \end{aligned}$$

□

Määritelmä 2.2. Riemannin ζ-funktion määrittelee kaava

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \text{kun } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

ζ-funktio on tasaisesti suppeneva sarja, jonka termit ovat jatkuvia funktioita, joten ζ-funktio on siten jatkuva.

Lause 2.3. Funktio $\zeta(s)$ on holomorfinen alueessa $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Todistus. Funktio $\zeta(s)$ voidaan derivoida termeittäin:

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

Olkoot $\delta > 0$ ja $s \in \mathbb{C}$ sellaisia, että $\mathrm{Re}(s) = 1 + \delta$ ja olkoon z_0 alueella $|z - s| < \delta/2$. Sarjan suppenemisen kannalta oleellista on tarkastella kompleksisen muuttujan reaaliosaa. Tällöin riittää tutkia tapaus $\mathrm{Re}(z_0) > 1 + \delta/2$ ja tällaisessa pisteessä z_0

$$\frac{\log(N+1)}{(N+1)^{1+\delta/2}} + \int_{N+1}^{\infty} \frac{\log x}{x^{1+\delta/2}} dx = \frac{\log(N+1)}{(N+1)^{1+\delta/2}} + \Big|_{x=N+1}^{\infty} e^{-(\delta/2)\log x} \to 0,$$

kun $N \to \infty$. Siten sarja $\zeta'(s)$ suppenee tasaisesti $\delta/2$ -säteisessä ympäristössä ja tällöin $\zeta'(s)$ on jatkuva. $\square$

Lause 2.4. *Eulerin tulokaava.* Seuraava identiteetti on voimassa:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad \text{kun } \mathrm{Re}(s) > 1,$$

missä p käy läpi kaikki alkuluvut.

Todistus. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ ja $\mathcal{N}$ joukko niitä luonnollisia lukuja n, joiden kaikki alkutekijät ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin N. Tällöin

$$\prod_{p \le N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{n^s},$$

joka on itseisesti suppeneva sarja. Väite todistuu, kun käytetään geometrisen summan kaavaa ja $N \to \infty$. $\square$

Eulerin tulokaava on olennainen osa ζ-funktion ja alkulukujen yhteyttä. Sitä voidaan hyödyntää funktion $\log \zeta(s)$ laskemisessa.

Lause 2.5. Seuraava identiteetti on voimassa:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad \text{kun } \mathrm{Re}(s) > 1,$$

missä μ on Möbiuksen funktio.

Todistus. Eulerin tulokaavan mukaan

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = 1 - \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s} + \sum_{\substack{p_1,p_2\in\mathbb{P}\\ p_1<p_2}}\frac{1}{(p_1p_2)^s} - \sum_{\substack{p_1,p_2,p_3\in\mathbb{P}\\ p_1<p_2<p_3}}\frac{1}{(p_1p_2p_3)^s} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

mikä todistaa lauseen. □

Lemma 2.6. $\zeta(s) \neq 0$, kun $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Todistus. Lauseen 2.5 nojalla

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| < \infty, \quad \text{kun } \mathrm{Re}(s) > 1$$

mistä seuraa, että $\frac{1}{|\zeta(s)|}$ ei voi hajaantua ja siten $\zeta(s) \neq 0$. □

Tällöin $\log\zeta(s)$ on määritelty, kun $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Lause 2.7. Olkoon $\mathrm{Re}(s) > 1$. Tällöin seuraava identiteetti funktiolle $\log\zeta(s)$ on voimassa:

$$\log\zeta(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{ns}},$$

kun $\lim_{\sigma\to\infty}\log\zeta(\sigma+it) = 0$, missä arvo t on kiinnitetty.

Todistus. Eulerin tulokaavan mukaan

$$\lim_{N\to\infty}\log\left(\zeta(s)\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right) = \log 1 = 0. \tag{7}$$

Nyt

$$\log\left(\zeta(s)\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right) = \log\zeta(s) + \sum_{p\leq N}\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) + i2\pi k_N(s), \tag{8}$$

missä k_N on kokonaislukuarvoinen funktio. Käyttämällä Maclaurinin sarjakehitelmää

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-z)^{n+1}}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots, \qquad |z| < 1$$

saadaan

$$\sum_{p\leq N}\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=-\sum_{p\leq N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{ns}}$$

ja oikean puoleinen sarja suppenee myös silloin, kun $N\to\infty$. Tällöin myös kokonaislukuarvoinen funktio $k_N(s)$ suppenee johonkin kokonaislukuarvoon $k(s)$. Nyt

$$\begin{aligned}0&=\lim_{s\to\infty}\left[\lim_{N\to\infty}\left(\log\zeta(s)-\sum_{p\leq N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{ns}}+i2\pi k_N(s)\right)\right]\\&=\lim_{s\to\infty}\left[\log\zeta(s)-\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{ns}}\right]+\lim_{s\to\infty}i2\pi k(s)=\lim_{s\to\infty}i2\pi k(s),\end{aligned}$$

missä $k(s)=\lim_{N\to\infty}k_N(s)$. Funktio k on kokonaislukuarvoinen ja myös jatkuva, sillä

$$\left[\log\zeta(s)-\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{ns}}\right]$$

on muuttujan s suhteen jatkuva funktio. Siten $k(s)=0$ ja lause on yhtälöiden (7) ja (8) mukaan todistettu. $\square$

Lause 2.8. Sarja $\sum_{p\in\mathbb{P}}1/p$ hajaantuu.

Todistus. Olkoon $\sigma>1$. Tällöin lauseen 2.7 mukaan

$$\begin{aligned}\log\zeta(\sigma)&=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^\sigma}+\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np^{n\sigma}}\\&<\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^\sigma}+\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p^n}=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^\sigma}+\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p(p-1)}<\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^\sigma}+\zeta(2).\end{aligned}$$

Väite seuraa siitä, että $\lim_{\sigma\to1^+}\log\zeta(\sigma)=\infty$, sillä $\lim_{\sigma\to1^+}\zeta(\sigma)=\infty$. $\square$

2.2 Analyyttinen jatkaminen

Tähän asti $\zeta(s)$ on määritelty vain, kun $\mathrm{Re}(s)>1$. Tämän pykälän tavoitteena on laajentaa määrittelyalue analyyttisesti pistettä $s=1$ lukuunottamatta koko kompleksitasolle, milloin tuloksena on meromorfinen funktio, jolla on kuitenkin voimassa jo aiemmin määritellyt ominaisuudet. Tämä voidaan nyt esitettävän tavan lisäksi tehdä usealla muullakin tavalla ja lause 1.2 takaa, että lopputulos on käytetystä tavasta riippumaton.

Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{1}{n^s}\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s}.$$

Lemma 2.9. Oletetaan funktiojonon (f_n) funktiot ei-negatiivisiksi ja integroituviksi välillä $[0,\infty)$. Tällöin, jos $\sum_n f_n$ suppenee ja $\int_0^\infty \sum_n f_n$ suppenee, niin silloin on voimassa

$$\int_0^\infty \sum_n f_n = \sum_n \int_0^\infty f_n.$$

Todistus. Lebesguen dominoidun konvergenssilauseen seuraus. □

Olkoon $\sigma > 1$. Lemman 2.9 nojalla

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(\sigma)}{n^\sigma} = \int_0^\infty (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots)x^{\sigma-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{e^x-1}dx,$$

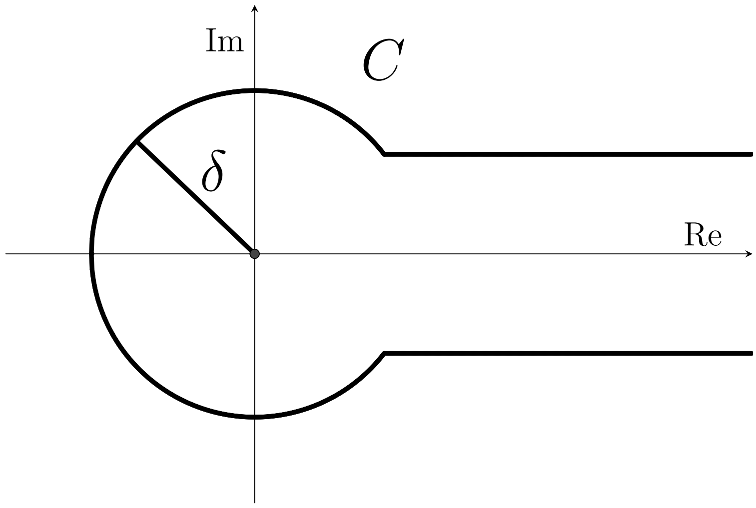
eli

$$\zeta(\sigma)\Gamma(\sigma) = \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{e^x-1}dx, \qquad \text{kun } \sigma > 1. \tag{9}$$

Koko kompleksitasolle laajentamista varten määritellään ensin kompleksitason tie C, joka kulkee äärettömyydestä aivan positiivisen reaaliakselin yläpuolella lähelle origoa, minkä jälkeen se pyörähtää vastapäivään origon ympäri ja palaa takaisin äärettömyyteen aivan positiivisen reaaliakselin alapuolella. Olkoon pyörähdyssäde origon suhteen $\delta > 0$.

Aloitetaan tarkastelemalla yhtälöä

$$\int_C \frac{(-z)^s}{e^z-1}\frac{dz}{z} = \left(\int_{+\infty}^\delta + \int_{|z|=\delta} + \int_\delta^{+\infty}\right)\frac{(-z)^s}{e^z-1}\frac{dz}{z}.$$



Kuva 2: Tie C, kun kiertosuunta on vastapäivään ja $\delta \to 0^+$.

Tämän kolmivaiheisen integraalin ensimmäisessä vaiheessa $\arg(-z) = -\pi$, kun z kulkee positiivisen reaaliakselin päällä. Tämän jälkeen, kun tie C pyörähtää yhden kokonaisen ympyrän kierroksen ympäri, on tällöin voimassa $\arg(-z) = \pi$. Huomioidaan myös, että $(-z)^s = e^{s\log(-z)}$, kun valitaan kompleksisen logaritmin päähaara. Siten

$$\left(\int_{+\infty}^{\delta} + \int_{z=|\delta|} + \int_{\delta}^{+\infty}\right) \frac{(-z)^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z}$$
$$= \int_{+\infty}^{\delta} \frac{e^{s(\log z - i\pi)}}{e^z - 1}\frac{dz}{z} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{s(\log\delta - i\pi + i\theta)}}{e^{\delta e^{i\theta}} - 1} i d\theta + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{s(\log z + i\pi)}}{e^z - 1}\frac{dz}{z}.$$

Näistä jokainen integraali suppenee kaikilla arvoilla $s \in \mathbb{C}$, koska $\delta > 0$ ja eksponenttifunktion kasvunopeus on huomattavasti polynomia suurempi. Suppeneminen on vieläpä tasaista. Seuraavaksi pyrkimyksenä on tutkia tapausta $\delta \to 0^+$.

Lemma 2.10. Olkoot C_1 ja C_2 kaksi yksinkertaista sulkeutuvaa tietä, joista C_1 on kokonaan tien C_2 sisäosassa. Olkoon $f(z)$ analyyttinen alueessa, joka sisältää nämä tiet ja niiden väliin jäävän alueen. Silloin

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$

Todistus. Lause on esitetty luentomonisteessa (ks. [12]: lause 6.19) ja se on jatkoa Cauchyn integraalilauseelle (ks. [10]: pykälä 2.3). □

Lemman 2.10 mukaan luvun δ valinnalla ei pitäisi siis olla vaikutusta integraalin tulokseen. Kun $\sigma > 1$, niin

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{s(\log\delta - i\pi + i\theta)}}{e^{\delta e^{i\theta}} - 1}\right| &= \left|\frac{\delta^s \cdot e^{-i\pi s} \cdot e^{i\theta s}}{e^{\delta e^{i\theta}} - 1}\right| = \frac{\delta^\sigma e^{t(\pi-\theta)}}{|e^{\delta e^{i\theta}} - 1|} \\ &\le \left(\frac{\delta}{e^\delta - 1}\right)\delta^{\sigma-1}e^{t\pi} \to 1 \cdot 0 = 0, \qquad \text{kun } \delta \to 0^+,\end{aligned}$$

joten

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_0^{2\pi}\frac{e^{s(\log\delta - i\pi + i\theta)}}{e^{\delta e^{i\theta}} - 1} i d\theta = 0.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\int_C \frac{(-z)^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z} &= \lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_{+\infty}^{\delta}\frac{e^{s(\log z - i\pi)}}{e^z - 1}\frac{dz}{z} + \int_{\delta}^{+\infty}\frac{e^{s(\log z + i\pi)}}{e^z - 1}\frac{dz}{z}\right) \\ &= -e^{-i\pi s}\int_0^\infty \frac{z^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z} + e^{i\pi s}\int_0^\infty \frac{z^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z} \\ &= (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s})\int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}dz.\end{aligned}$$

Nyt (9):n mukaan

$$\int_C \frac{(-z)^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z} = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s})\zeta(s)\Gamma(s).$$

Eli

$$\zeta(s) = \frac{1}{2i\sin(\pi s)\Gamma(s)}\int_C \frac{(-z)^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z},$$

milloin (5):n mukaan

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z}.$$

Nyt integraali tien C yli suppenee kuitenkin kaikilla $s \in \mathbb{C}$, sillä C kiertää origon ja eksponenttifunktion kasvunopeus on aina huomattavasti suurempi kuin polynomilla. Suppeneminen on vieläpä tasaista jokaisessa kompleksitason kompaktissa alueessa, joten integraali on muuttujan s suhteen holomorfinen funktio. On huomioitava kuitenkin, että $\Gamma(1-s)$ hajaantuu, kun s on jokin positiivinen kokonaisluku. ζ-funktio on kuitenkin määritelty, kun

$\mathrm{Re}(s) > 1$ aiemman määritelmän perusteella, joten integraalin nollakohtien on kumottava Γ-funktion hajaantumisen vaikutus tässä alueessa.

Tapauksessa $s = 1$ arvo $\Gamma(1-s)$ hajaantuu, mutta vanhankaan määritelmän mukaan $\zeta(s)$ ei ole määritelty tässä pisteessä. Tällöin

$$\int_C \frac{(-z)}{e^z - 1}\frac{dz}{z} = \oint_{|z|=\delta} \frac{-1}{e^z - 1} dz.$$

Koska $-1/(e^z - 1)$ on holomorfinen lukuunottamatta origoa, jossa sillä on yksinkertainen napa, on residylaskennan mukaan voimassa

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{-1}{e^z - 1} dz = 2\pi i \lim_{z \to 0} \frac{-z}{e^z - 1} = -2\pi i.$$

Siten $\lim_{s \to 1} \zeta(s)$ hajaantuu.

Määritelmä 2.11. Olkoon tie C kuten aiemmin tässä pykälässä määritelty. Tällöin ζ-funktio on määritelty kaavalla

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^s}{e^z - 1}\frac{dz}{z} \qquad \text{alueessa } s \neq 1.$$

Lause 2.12. ζ-funktio on holomorfinen alueessa $s \neq 1$ eli kompleksitasolla meromorfinen funktio ja sille on voimassa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

2.2.1 Vaihtoehtoinen tapa, kun $\mathrm{Re}(s) > 0$

Johdetaan vaihtoehtoinen kaava $\zeta(s)$:lle, kun $\mathrm{Re}(s) > 0$. Kun $\mathrm{Re}(s) > 1$, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^s} = \frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s).$$

Vähentämällä tämä arvosta $\zeta(s)$ saadaan

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \eta(s),$$

eli

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{10}$$

Alternoivaa sarjaa η kutsutaan *Dirichlet'n eta-funktioksi*. Todetaan vielä, että $\eta(s)$ suppenee ja on holomorfinen, kun $\mathrm{Re}(s) > 1$. Selvästi

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\eta(s) &= \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx - \frac{1}{2^s}\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx + \frac{1}{3^s}\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx - \dots \\ &= \int_0^\infty x^{s-1}(e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - \dots)dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}dx,\end{aligned}$$

mikä kuitenkin suppenee myös silloin, kun $\mathrm{Re}(s) > 0$. Integraalin suppeneminen on tasaista, sillä eksponenttifunktion kasvunopeus on jälleen huomattavasti suurempi kuin polynomin ja siten se on myös holomorfinen funktio muuttujan s suhteen. Tällöin siis

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}}\eta(s), \qquad \text{kun } \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{11}$$

Aikaisempi analyyttinen jatkaminen osoittaa, että η-funktiolla on tällä alueella nollakohtia vain samoissa kohdissa kuin ζ-funktiolla lukuunottamatta suoran $\mathrm{Re}(s) = 1$ pisteitä, joissa funktio

$$\frac{1}{1-2^{1-s}}$$

hajaantuu paitsi kohdassa $s = 1$, kun $\eta(1) = \log 2$. Tällöin $\eta(s) = 0$, kun

$$s = 1 \pm \frac{k2\pi i}{\log 2}, \qquad \text{kun } k \in \mathbb{N}.$$

2.3 Funktionaaliyhtälö

Funktionaaliyhtälöllä tarkoitetaan tässä tapauksessa ζ-funktion arvojen $\zeta(s)$ ja $\zeta(1-s)$ kytkemistä toisiinsa. Tällä tuloksella on merkittäviä seurauksia, sillä se tekee kompleksitason suorasta $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ eräänlaisen symmetriasuoran ζ-funktiolle.

Määritelmä 2.13. Jacobin ϑ-funktio määritellään kaavalla

$$\vartheta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \qquad x > 0.$$

Lause 2.14. Seuraava yhtälö on voimassa:

$$\frac{1+2\vartheta(x)}{1+2\vartheta(x^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Todistus. [4]: Pykälä 10.4. □

Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{s/2-1}dx &= \frac{1}{(n^2\pi)^{s/2}}\int_0^\infty e^{-x}x^{s/2-1}dx \\ &= \frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \qquad \text{missä } \mathrm{Re}(s) > 1.\end{aligned}$$

Summataan n kaikkien luonnollisten lukujen yli, milloin

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty \vartheta(x)x^{s/2-1}dx \qquad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{12}$$

Nyt lauseen 2.14 mukaan

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \vartheta(x)x^{s/2-1}dx = \int_1^\infty \vartheta(x)x^{s/2-1}dx - \int_\infty^1 \vartheta(x^{-1})x^{-s/2-1}dx \\ &= \int_1^\infty \vartheta(x)x^{s/2-1}dx + \int_1^\infty \left(x^{1/2}\vartheta(x) + \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}\right)x^{-s/2-1}dx \\ &= \int_1^\infty \vartheta(x)\left(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(x^{-(s-1)/2-1} - x^{-s/2-1}\right)dx.\end{aligned}$$

Eli

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_1^\infty \vartheta(x)\left(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right)\frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}. \tag{13}$$

Nyt yhtälön (13) oikean puolen arvo ei selvästi muutu, kun tehdään sijoitus $s = 1 - s$.

Yhtälön (13) oikea puoli suppenee tasaisesti, sillä kun $x \to \infty$, niin integroitava funktio suppenee kohti nollaa hyvin nopeasti. Yhtälön molemmat puolet ovat siten holomorfisia alueessa $s \notin \{0, 1\}$ ja tässä alueessa on voimassa

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \zeta(1-s)\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right). \tag{14}$$

Lause 2.15. *ζ-funktion funktionaaliyhtälö.* Seuraava yhtälö on voimassa kaikilla $s \in \mathbb{C}$:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Todistus. Yhtälön (14) mukaan

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \zeta(1-s)\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\\
\iff \qquad \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{\pi^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\cdot\pi\cdot\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).
\end{aligned}$$

Tehdään Γ-funktion identiteetin (5) mukainen sijoitus

$$\pi = \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

Tällöin

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Toisaalta (6):n ja (3):n mukaan

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-s) &= \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\\
&= \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right).
\end{aligned}$$

Eli

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

□

Funktionaaliyhtälö on tärkeä tulos, sillä nyt ζ-funktion arvot liittyvät kompleksitason suoran eli niin sanotun *symmetriasuoran* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ molemmin puolin toisiinsa. Erityisen tärkeä funktionaaliyhtälö on ζ-funktion nollakohtien kannalta. Nimittäin on helppo nähdä, että jokaisen negatiivisen ja parillisen kokonaisluvun arvolla s on voimassa $\zeta(s) = 0$, sillä sinifunktio saa tällöin arvon 0 ja funktioilla $\Gamma(1-s)$ tai $\zeta(1-s)$ ei kummallakaan ole napaa tällaisessa kohdassa. Muiden nollakohtien tapauksessa yhden nollakohdan löytäminen tarkoittaa välittömästi toisenkin nollakohdan löytämistä.

Määritelmä 2.16. ζ-funktion funktionaaliyhtälön mukaan $\zeta(-2n) = 0$, aina kun $n \in \mathbb{N}$. Tällaista nollakohtaa kutsutaan ζ-funktion *triviaaliksi nollakohdaksi*. Muita mahdollisia nollakohtia kutsutaan *epätriviaaleiksi nollakohdiksi* ja sellaisen nollakohdan edustajaa merkitään symbolilla ρ.

Lause 2.17. ζ-funktion epätriviaalille nollakohdalle ρ on voimassa $0 \leq \mathrm{Re}(\rho) \leq 1$ ja $\mathrm{Im}(\rho) \neq 0$ sekä

$$\zeta(\rho) = 0 \Longleftrightarrow \zeta(1-\rho) = 0,$$

Todistus. Nollakohtien ρ ja $1-\rho$ relaatio on suora seuraus funktionaaliyhtälöstä ja nollakohdan ρ reaaliosan rajaus on seuraus lemmasta 2.6, jonka mukaan $\zeta(s) \neq 0$ kun $\mathrm{Re}(s) > 1$. Pykälän 2.2.1 mukaan johdetun ζ-funktion esitysmuodon (10) perusteella pitäisi reaalivälillä $(0,1)$ olevan epätriviaalin nollakohdan olla myös funktion $\Gamma(\sigma)\eta(\sigma)$ nollakohta. Koska

$$\Gamma(\sigma)\eta(\sigma) = \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{e^x+1}dx > 0, \qquad \text{kun } \sigma > 0,$$

niin $\rho \notin (0,1)$. Koska määritelmän 2.11 ja residylaskennan mukaan

$$\zeta(0) = \frac{\Gamma(1)}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z(e^z-1)}dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z(e^z-1)}\right)\right) = -\frac{1}{2},$$

niin $\rho \neq 0$. □

Lause 2.18. ζ-funktiolla on seuraava ominaisuus:

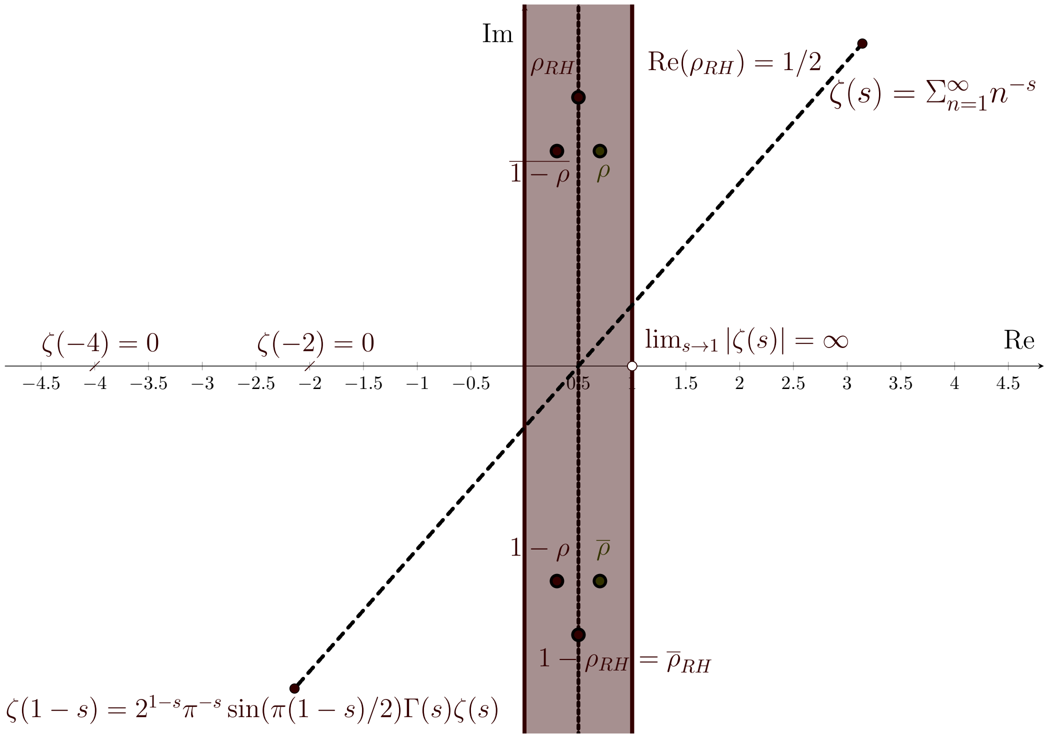
$$\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

ja tästä seuraa, että $\zeta(\overline{\rho}) = 0$.

Todistus. Oletetaan, että $\mathrm{Re}(s) > 1$. Tällöin ominaisuuden $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ mukaan

$$\zeta(\overline{s}) = \sum_{n=1}^\infty n^{-\overline{s}} = \sum_{n=1}^\infty \overline{n^{-s}} = \overline{\zeta(s)}$$

ja analyyttisen jatkamisen nojalla väite on todistettu koko ζ-funktion määrittelyalueella. □



Kuva 3: ζ-funktio kompleksitasolla. Väritetty alue on niin sanottu kriittinen kaista, jossa kaikki epätriviaalit nollakohdat ρ ovat. Tässä ρ_{RH} on *Riemannin hypoteesin* eli ehdon $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$ toteuttava nollakohta ja toistaiseksi muita kuin Riemannin hypoteesin toteuttavia nollakohtia ei ole löydetty.

Luvussa 5 todistetaan, että $\mathrm{Re}(\rho) \neq 1$, mistä seuraa funktionaaliyhtälön mukaan myös se, että $\mathrm{Re}(\rho) \neq 0$ eli $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$. Riemannin hypoteesista huolimatta tämän lukuvälin kaventaminen on kuitenkin osoittautunut hyvin haastavaksi. On osoitettu vahvempia tuloksia kuin $\mathrm{Re}(\rho) < 1$ (ks. luku 6), mutta mikään niistä ei poista sitä mahdollisuutta, että nollakohtia voisi olla mielivaltaisen lähellä suoraa $\mathrm{Re}(s) = 1$.

3 ξ-funktio

Riemannin ζ-funktion ja erityisesti sen nollakohtien yhteys alkulukuihin on kuuluisa etenkin johdantoluvussa esitetyn Riemannin hypoteesin vuoksi. Edellisessä luvussa todettiin, että ζ-funktiolla on triviaaleja ja epätriviaaleja nollakohtia. Näistä juuri epätriviaalit nollakohdat liittyvät olennaisesti alkulukujen jakautumiseen. Tässä luvussa tarkastellaan Riemannin ξ-funktiota, jonka nollakohdat ovat yhteisiä ζ-funktion epätriviaalien nollakohtien kanssa.

3.1 Määrittely

Määritellään ξ-funktio ja tarkastellaan sen nollakohtien merkitystä.

Määritelmä 3.1. Riemannin ξ-funktion määrittelee kaava

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\pi^{-s/2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Lause 3.2. Seuraava funktionaaliyhtälö on voimassa:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Todistus. Suora seuraus yhtälöstä (14). □

ξ-funktio on siis muodostettu käyttämällä apuna yhtälöä (13). Näin tuloksena on yksinkertaistetumpi funktionaaliyhtälö, joka on parempi ζ-funktion epätriviaalien nollakohtien käsittelyä varten.

Lause 3.3. $\xi(s)$ on määritelty kaikilla $s \in \mathbb{C}$ ja $\xi(s) = 0$ jos ja vain jos $s = \rho$, missä ρ on ζ-funktion epätriviaali nollakohta.

Todistus. Väite $\xi(\rho) = 0$ seuraa suoraan ξ-funktion määritelmästä. Tällöin on tarkistettava, että muita nollakohtia ei ole ja että $\xi(s)$ on määritelty kaikilla $s \in \mathbb{C}$. ζ-funktion triviaalien nollakohtien tapauksissa Γ-funktion hajaantuminen kumoaa nollakohdan muodostumisen, mikä nähtiin jo ζ-funktion funktionaaliyhtälöstä. Pisteiden $s = 0$ ja $s = 1$ tarkastelemista varten huomataan, että yhtälön (13) perusteella:

$$\begin{aligned} \zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_1^\infty \vartheta(x)\left(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right)\frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)} \\ \implies \qquad 2\xi(s) &= s(s-1)\int_1^\infty \vartheta(x)\left(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right)\frac{dx}{x} + 1. \end{aligned}$$

Suoraan sijoittamalla havaitaan, että $\xi(0) = \xi(1) = 1/2$ ja lause on siten todistettu. □

Seuraava askel on pohtia erilaista esitysmuotoa ξ-funktiolle. Algebran peruslauseen mukaan äärellisasteisella polynomilla on sen astelukua vastaava määrä kompleksisia juuria ja polynomin voi esittää tulomuodossa, jossa esiintyy kaikki sen juuret. Erityisesti tavoiteltava esitysmuoto olisi

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \tag{15}$$

mutta koska $\xi(s)$ ei ole polynomi ja juuria ρ voi olla ääretön määrä, niin tämän esitysmuodon olemassaolo ei ole varmaa.

Määritelmä 3.4. ζ-funktion epätriviaalien nollakohtien eli ξ-funktion kaikkien nollakohtien joukossa toistuu sama nollakohdan arvo sen kertalukua vastaavan monta kertaa. Erityisesti

$$\text{sarjassa} \qquad \sum_{\rho} \qquad \text{ja tulossa} \qquad \prod_{\rho}$$

tulkitaan, että ρ käy läpi koko ζ-funktion epätriviaalien nollakohtien joukon. Joskus on tarpeellista huomioida summattavien tai kerrottavien termien järjestys. Tätä varten määritellään seuraavat merkinnät:

$$\sum_{\rho}^{\#} = \lim_{h \to \infty} \sum_{|\mathrm{Im}(\rho)| \leq h} \qquad \text{sekä} \qquad \prod_{\rho}^{\#} = \lim_{h \to \infty} \prod_{|\mathrm{Im}(\rho)| \leq h},$$

jolloin erityisesti jokaisen nollakohdan ρ määräämä termi lisätään sarjaan samanaikaisesti sitä vastaavan nollakohdan $1 - \rho$ määräämän termin kanssa.

3.2 Tulokaavan todistus Hadamardin lauseella

Riemann ei omassa julkaisussaan onnistunut osoittamaan aukottomasti tulokaavan pätevyyttä. Vasta vuonna 1893 ranskalainen Jacques Hadamard todisti, että kokonainen funktio voidaan esittää algebran peruslauseelle tyypillisessä tulomuodossa mikäli se täyttää tietyt ehdot.

Lause 3.5. *Hadamardin tekijälause.* Oletetaan, että f on kompleksitasolla kokonainen funktio. Olkoon q kokonaisluku ja oletetaan, että on olemassa sellainen positiivinen luku $t < q+1$, että on voimassa $|f(z)| \leq \exp\left(|z|^t\right)$, kun $|z|$ on riittävän suuri. Tällöin f voidaan esittää muodossa

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_q\left(\frac{z}{z_k}\right).$$

Tässä joukko $\{z_k\}$ on funktion f nollasta poikkeavien juurien joukko, jossa jokainen tällainen juuri esiintyy sen kertalukua vastaavan monta kertaa. Luku m on nollakohdan $z = 0$ aste, $h(z)$ on polynomi, jonka aste on enintään q ja

$$E_q(\omega) = (1-\omega)\exp\left(\sum_{n=1}^{q}\frac{\omega^n}{n}\right).$$

Todistus. (ks. [9]: Theorem 9 ja [10]: pykälät 8.2 ja 9.3) □

Nyt tarkoituksena on todistaa tulokaavan (15) voimassaolo Hadamardin tekijälauseen avulla. Lähtemällä yhtälön (13) tarkastelusta voidaan havaita ξ-funktiolla olevan sarjaesitys, joka mahdollistaa tekijälauseen vaatiman epäyhtälön voimassaolon tarkistamisen. Yhtälön (13) mukaan

$$\xi(s) = \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\int_1^\infty \vartheta(x)(x^{s/2} + x^{(1-s)/2})\frac{dx}{x}.$$

Tällöin alueessa $s \notin \{0,1\}$

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2}\Bigg|_{x=1}^{\infty}\left[\vartheta(x)\left(\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right)\right] \\
&+ \frac{s(1-s)}{2}\int_1^\infty \vartheta'(x)\left(\frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{s(1-s)}{2}\vartheta(1)\left(\frac{2}{s} + \frac{2}{1-s}\right) + \int_1^\infty \vartheta'(x)((1-s)x^{s/2} + sx^{(1-s)/2})dx \\
&= \frac{1}{2} + \vartheta(1) + \int_1^\infty \vartheta'(x)x^{3/2}((1-s)x^{(s-1)/2-1} + sx^{-s/2-1})dx \\
&= \frac{1}{2} + \vartheta(1) + \Bigg|_{x=1}^{\infty}\left[x^{3/2}\vartheta'(x)(-2x^{(s-1)/2} - 2x^{-s/2})\right] \\
&- \int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\vartheta'(x)](-2x^{(s-1)/2} - 2x^{-s/2})dx \\
&= \frac{1}{2} + \vartheta(1) - \vartheta'(1)(-2-2) + \int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\vartheta'(x)](2x^{(s-1)/2} + 2x^{-s/2})dx.
\end{aligned}$$

Toisaalta lauseen 2.14 eli funktion ϑ funktionaaliyhtälön mukaan

$$1 + 2\vartheta(x) = x^{-1/2}(1 + 2\vartheta(x^{-1})),$$

jolloin

$$\begin{aligned}
& 2\vartheta'(x) = -\frac{1}{2x^{5/2}}(4\vartheta'(x^{-1}) + 2x\vartheta(x^{-1}) + x) \\
\Longrightarrow\quad & 2\vartheta'(1) = -\frac{1}{2}(4\vartheta'(1) + 2\vartheta(1) + 1)
\end{aligned}$$

eli

$$\frac{1}{2} + \vartheta(1) + 4\vartheta'(1) = 0.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\vartheta'(x)] \left(\frac{x^{s/2-1/2} + x^{-s/2}}{2}\right) dx \\
&= 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\vartheta'(x)] x^{-1/4} \left(\frac{x^{s/2-1/4} + x^{-s/2+1/4}}{2}\right) dx.
\end{aligned}$$

Käyttämällä funktiota $\cosh(z) = (\exp(z) + \exp(-z))/2$ saadaan

$$\xi(s) = 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\vartheta'(x)] x^{-1/4} \cosh\left(\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\log x\right) dx. \tag{16}$$

Hyperbolinen kosinifunktio voidaan myös esittää sarjamuodossa

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

mistä seuraa, että pisteen $s = 1/2$ ympäristössä $\xi(s)$ voidaan esittää sarjana

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n}, \tag{17}$$

kun

$$a_{2n} = 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}[x^{3/2}\vartheta'(x)] x^{-1/4} \frac{\left(\frac{1}{2}\log x\right)^{2n}}{(2n)!} dx.$$

Sarja (17) suppenee, sillä $(2n)!$ kasvaa paljon nopeammin kuin mikään eksponenttifunktio ja tämä viittaisi mahdollisesti siihen, että ξ-funktiota voitaisiin käsitellä ääretönasteisena polynomina ja että algebran peruslauseen mukainen tulokaava olisi mahdollinen. Koska

$$x^{3/2}\vartheta'(x) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{3/2}}{e^{n^2\pi x}} < 0 \qquad \text{ja termi} \qquad \frac{n^2 x^{3/2}}{e^{n^2\pi x}}$$

on vähenevä funktio kun $n \in \mathbb{N}$ ja $x \geq 1$, niin funktio $x^{3/2}\vartheta'(x)$ on siten kasvava, kun $x \geq 1$. Tällöin sen derivaatta on positiivinen ja siten kertoimet a_{2n} ovat kaikki positiivisia reaalilukuja.

Lemma 3.6. Kaikilla riittävän suurilla $R \in \mathbb{R}$ on voimassa $|\xi(\frac{1}{2}+\omega)| \le R^R$, kun $|\omega| \le R$.

Todistus. Koska sarjassa (17) kertoimet ovat kaikki positiivisia, on ξ-funktio kasvava välillä $[\frac{1}{2}, \infty)$. Samasta syystä arvo $|\xi(\frac{1}{2}+\omega)|$ on kiekossa $|\omega| \le R$ suurimmillaan kun $\omega = R$. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ sellainen, jolle on voimassa $\frac{1}{2}+R \le 2N \le \frac{1}{2}+R+2$. Koska ξ on kokonainen funktio, niin sarjaesitys (17) on voimassa kaikilla $s \in \mathbb{C}$. Nyt

$$\xi\left(\frac{1}{2}+R\right) \le \xi(2N) = N!\pi^{-N}(2N-1)\zeta(2N).$$

Koska ζ-funktio on vähenevä välillä $[2, \infty)$, on sen arvo rajoitettu. Samoin rajoitettu on myös π^{-N}, joten on olemassa sellainen $k \in \mathbb{R}$, että

$$\xi(2N) \le kN!(2N-1) \le 2kN^{N+1} \le 2k\left(\frac{1}{2}R+\frac{5}{4}\right)^{R/2+9/4} \le R^R,$$

kun R on riittävän suuri. $\square$

Lemman 3.6 välitön seuraus on, että $|\xi(\frac{1}{2}+\omega)| \le \exp(|\omega|^{3/2})$, kun $|\omega|$ on riittävän suuri, sillä $R^R = e^{R\ln R} \le e^{R^{3/2}}$, kun R on riittävän suuri. Koska $\xi(\frac{1}{2}) \ne 0$, mikä voidaan todeta esimerkiksi siitä, että lauseen 2.17 mukaan $\zeta(\frac{1}{2}) \ne 0$, niin Hadarmardin lauseen tilanteessa $m = 0$. Näin ollen $\xi(\frac{1}{2}+\omega)$ toteuttaa Hadamardin lauseen ehdon valinnalla $q = 1$. Siten sillä on olemassa tuloesitys

$$\xi\left(\frac{1}{2}+\omega\right) = e^{h(\omega)}\prod_{\alpha} E_1\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = e^{h(\omega)}\prod_{\alpha}\left(1-\frac{\omega}{\alpha}\right)e^{\omega/\alpha},$$

missä $h(\omega)$ on enintään ensimmäisen asteen polynomi ja α käy läpi funktion $\xi(\frac{1}{2}+\omega)$ juuret. Merkitään epätriviaalia nollakohtaa $\rho = \frac{1}{2}+\alpha$. Tällöin lauseen 2.17 mukaan jokaista juurta α kohtaan löytyy sitä vastaava toinen juuri $-\alpha$. Tästä seuraa, että suppenevassa tulossa $\exp(\omega/\alpha) \cdot \exp(-\omega/\alpha) = 1$ ja

$$\xi\left(\frac{1}{2}+\omega\right) = e^{h(\omega)}\prod_{\alpha}^{\#}\left(1-\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Koska ξ-funktion funktionaaliyhtälön perusteella tämän yhtälön vasemmalla puolella oleva funktio ja oikealla puolella oleva tulo ovat molemmat parillisia funktioita muuttujan ω suhteen, täytyy siten termin $e^{h(\omega)}$ olla myös parillinen, mikä tässä tapauksessa tarkoittaa että sen on oltava vakio, jota merkitään symbolilla c. Suoritetaan sitten muuttujan vaihtaminen $s = \frac{1}{2}+\omega$, jolloin

$$
\begin{aligned}
& \xi(s) = c\prod_{\rho}^{\#}\left(1-\frac{s-1/2}{\rho-1/2}\right) \\
\Longrightarrow \quad & \frac{\xi(s)}{\xi(0)} = \prod_{\rho}^{\#}\left[\left(1-\frac{s-1/2}{\rho-1/2}\right)\left(1+\frac{1/2}{\rho-1/2}\right)^{-1}\right] \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{\xi(s)}{\xi(0)} = \prod_{\rho}^{\#}\left(1-\frac{s}{\rho}\right).
\end{aligned}
$$

Lauseen 3.3 mukaan $\xi(0) = 1/2$, eli täten on esitetty seuraavan lauseen todistus:

Lause 3.7. *ξ-funktion tulokaava.* ξ-funktiolle on voimassa

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\prod_{\rho}^{\#}\left(1-\frac{s}{\rho}\right),$$

missä siis ρ käy läpi kaikki ζ-funktion epätriviaalit juuret.

3.3 Nollakohtien jakautumisesta

Tämän pykälän tavoitteena on tutkia funktioteorian tulosten avulla ζ-funktion epätriviaalien nollakohtien jakautumista kriittisellä kaistalla ja näitä nollakohtia merkitään symbolilla ρ tässä pykälässä. Jakautumisen tarkastelu on olennaista monissa suppenemistarkasteluissa myöhemmässä vaiheessa tutkielmaa. Pykälässä käytetty tulos funktioteoriasta on seuraava *Jensenin lause.*

Lause 3.8. *Jensenin lause.* Olkoon $R \geq 0$. Oletetaan, että $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on holomorfinen kompleksitason kiekossa $|z| \leq R$. Oletetaan, että funktiolla f ei ole nollakohtia ympyrällä $|z| = R$. Olkoon joukko $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ funktion f kiekossa $|z| < R$ olevien nollakohtien joukko, jossa jokainen nollakohta esiintyy astelukuaan vastaavan monta kertaa. Kun oletetaan vielä, että $f(0) \neq 0$, niin tällöin on voimassa

$$\log\left|f(0)\prod_{k=1}^{n}\frac{R}{z_k}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(Re^{i\theta})\right|d\theta.$$

Todistus. (ks.[4]: Pykälä 2.2). □

Määritelmä 3.9. Olkoot $R \geq 0$ ja $N : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ funktio, jonka arvo $N(R)$ on ξ-funktion kiekossa $|s - 1/2| \leq R$ olevien nollakohtien ρ astelukujen summa.

Lause 3.10. Olkoon $R \geq 0$. Tällöin $N(R) \leq 3R \log R$, kun R on riittävän suuri.

Todistus. Koska ξ-funktio on kokonainen ja se ei ole identtisesti nolla, niin sen nollakohtien joukolla ei analyyttisen jatkamisen nojalla voi olla kasautumispistettä. Tällöin niitä on oltava jokaisessa kompleksitason kiekossa äärellinen määrä. Voidaan olettaa, että ympyrällä $|s - 1/2| = 2R$ ei ole nollakohtia, sillä jos näin olisi, niin Jensenin lausetta voisi seuraavaksi kuvattavalla tavalla soveltaa kiekossa $|s - 1/2| \leq 2R + \varepsilon$, kun $\varepsilon > 0$ on pieni. Lemman 3.6 mukaan $\log|\xi(s + 1/2)| \leq \log((2R)^{2R})$, kun R on riittävän suuri. Koska

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log((2R)^{(2R)}) d\theta = \log((2R)^{(2R)}),$$

niin Jensenin lauseen mukaan

$$\log\left|\xi\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \sum_{|\rho - 1/2| < 2R} \log\frac{2R}{|\rho - 1/2|} \leq \log((2R)^{2R}).$$

Tässä ehdossa vasemmalla puolella olevan sarjan termit ovat kaikki positiivisia ja kiekossa $|\rho - 1/2| \leq R$ on voimassa ehto

$$\log\frac{2R}{|\rho - 1/2|} \geq \log 2.$$

Siten

$$\begin{aligned} & N(R)\log 2 \leq 2R\log 2R - \log\left|\xi\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\ \implies \qquad & N(R) \leq \frac{2}{\log 2} R\log R - \frac{\log\left|\xi\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\log 2} + 2R \leq 3R\log R, \end{aligned}$$

kun R on riittävän suuri. Näin ollen lause on todistettu. □

Lause 3.11. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin sarja

$$\sum_\rho \frac{1}{|\rho - 1/2|^{1+\varepsilon}}$$

suppenee.

Todistus. Olkoon $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots\}$ kaikkien epätriviaalien nollakohtien joukko, jossa kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on voimassa ehto $|\rho_k - 1/2| \leq |\rho_{k+1} - 1/2|$. Tässä joukossa jokainen nollakohta esiintyy jälleen astelukuaan vastaavan monta kertaa. Olkoon $\{R_1, R_2, R_3, \dots\}$ vastaavasti joukko positiivisia reaalilukuja, joille on voimassa $4R_k \log R_k = k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Lauseen 3.10 mukaan on olemassa sellainen luonnollinen luku n_0, että kaikilla $n \geq n_0$ on voimassa

$$N(R_n) \leq \frac{3n}{4} < n$$

eli nollakohta ρ_n ei ole kiekossa $|s - 1/2| < R_n$, joten $|\rho_n - 1/2| \geq R_n$. Tällöin millä tahansa luonnollisella luvulla $M > n_0$ on voimassa

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{M} \frac{1}{|\rho_k - 1/2|^{1+\varepsilon}} \leq \sum_{k=n_0}^{M} \frac{1}{R_k^{1+\varepsilon}} &= \sum_{k=n_0}^{M} \frac{(4\log R_k)^{1+\varepsilon}}{k^{1+\varepsilon}} \\ &= \sum_{k=n_0}^{M} \frac{1}{k^{1+\varepsilon/2}} \cdot \frac{(4\log R_k)^{1+\varepsilon}}{k^{\varepsilon/2}}.\end{aligned}$$

Nyt $\log k = \log R_k + \log 4 + \log\log R_k > \log R_k$ kaikilla isoilla luvuilla k. Siten $(4\log R_k)^{1+\varepsilon} < (4\log k)^{1+\varepsilon} < k^{\varepsilon/2}$, kun k on riittävän suuri. Eli

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{|\rho_k - 1/2|^{1+\varepsilon}} \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon/2}} < \infty$$

ja väite seuraa tästä. □

Lause 3.12. Ehdon $T \leq \mathrm{Im}(\rho) \leq T+1$ toteuttavien nollakohtien lukumäärä on pienempi kuin $2\log T$, kun $T > 0$ on riittävän suuri.

Todistus. Tarkastellaan ensin yhtälöä

$$\frac{d}{ds}(\log \xi(s)) = \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \sum_{\rho}^{\#} \frac{1}{s-\rho}, \tag{18}$$

mikä on voimassa, jos sarja nollakohtien ρ yli suppenee tasaisesti muuttujan s suhteen. Oletetaan, että ehdot $\delta > 0$ ja $\mathrm{Re}(s) \geq 1+\delta$ ovat voimassa, milloin muuttujaa s ei voi valita nollakohdan ρ lähiympäristöstä. Nyt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\rho}^{\#}\frac{1}{s-\rho}\right| &\leq \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left|\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{s-1+\rho}\right| \\ &= \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left|\frac{1}{(s-1/2)-(\rho-1/2)}+\frac{1}{(s-1/2)+(\rho-1/2)}\right| \\ &= \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left|\frac{2(s-1/2)}{(s-1/2)^2-(\rho-1/2)^2}\right| \leq \sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}\left|\frac{K}{(\rho-1/2)^2}\right| + c,\end{aligned}$$

kun K ja c ovat reaalisia vakioita. Edellinen epäyhtälö on voimassa termeittäin silloin, kun $|\rho|$ kasvaa riittävän suureksi ja s on mielivaltainen. Näin ollen yhtälö (18) on lauseen 3.11 mukaan perusteltu.

Nyt siis

$$\int_{2+iT}^{2+i(T+1)}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds = \sum_{\rho}^{\#}\int_{2+iT}^{2+i(T+1)}\frac{1}{s-\rho}ds.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\int_{2+iT}^{2+i(T+1)}\frac{1}{s-\rho}ds\right) &= \mathrm{Im}\left(\log\left(2+i(T+1)-\rho\right)-\log\left(2+iT-\rho\right)\right) \\ &= \arg\left(2+i(T+1)-\rho\right)-\arg\left(2+iT-\rho\right),\end{aligned}$$

mikä on siis janan $[2+iT, 2+i(T+1)]$ määräämä kulma nollakohdan ρ suhteen katsottuna (Kuva 4).

Tällöin jos $T \leq \mathrm{Im}(\rho) \leq T+1$ ja $0 \leq \mathrm{Re}(\rho) \leq 1$, niin

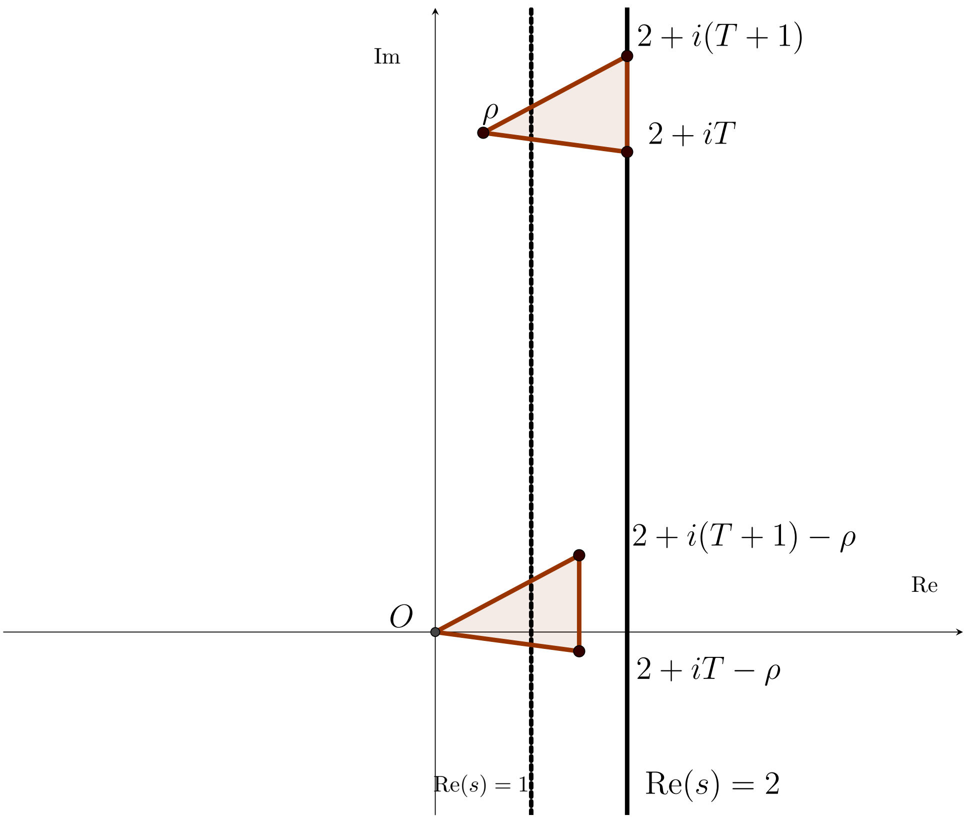
$$\arctan\frac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\left(\int_{2+iT}^{2+i(T+1)}\frac{1}{s-\rho}ds\right).$$

Olkoon n ehdon $T \leq \mathrm{Im}(\rho) \leq T+1$ toteuttavien nollakohtien ρ lukumäärä. Kaikkien nollakohtien määräämät kulmat ovat positiivisia, mistä seuraa, että

$$n \cdot \arctan\frac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\left(\int_{2+iT}^{2+i(T+1)}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds\right). \tag{19}$$

Analyysin peruslauseen mukaisesti tämän integraalin arvon voi laskea jatkuvalla funktiolla $\log\xi(s)$, jolle on määritelmän 3.1 ja Γ-funkton identiteetin (3) sovelluksen $(s/2)\Gamma(s/2) = \Gamma(s/2+1)$ mukaan voimassa

$$\log\xi(s) = -\frac{s}{2}\log\pi + \log(s-1) + \log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \log\zeta(s).$$



Kuva 4: Kuvan kolmiot ovat yhdenmuotoisia, milloin kärjet origossa ja pisteessä ρ voidaan rinnastaa toisiinsa.

Käytetään Γ-funktion logaritmin arvioimiseen *Stieltjesin* versiota *Stirlingin kaavasta*: (ks. [4]: pykälä 6.3)

$$\log\Gamma(s+1) = (s+\frac{1}{2})\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right), \text{ kun } \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{20}$$

Tällöin

$$\log\xi(s) = \frac{s+1}{2}\log s - \frac{s}{2}\log 2\pi - \frac{s}{2} + \log(s-1) + \log\zeta(s) + O\left(1+\frac{1}{|s|}\right).$$

Koska tarkasteltavassa tilanteessa $\mathrm{Re}(s) = 2$ ja $|\zeta(2+it)-1| \le \zeta(2)-1 < 1$, niin arvo $\log\zeta(2+it)$ on rajoitettu. Nyt, kun $T\to\infty$, niin

$$\mathrm{Im}(\log\xi(2+iT)) = \frac{1}{2}T\log|2+iT| - T\frac{\log 2\pi + 1}{2} + O(1),$$

joten

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}(\log \xi(2+i(T+1))) - \operatorname{Im}(\log \xi(2+iT)) \\
&= \frac{T \log \left|\frac{2+i(T+1)}{2+iT}\right| + \log|2+i(T+1)|}{2} + O(1) = \frac{1}{2}\log T + O(1),
\end{aligned}$$

koska

$$\lim_{T\to\infty} T \log \left|\frac{2+i(T+1)}{2+iT}\right| = \lim_{T\to\infty} T \log \frac{\sqrt{2^2+(T+1)^2}}{\sqrt{2^2+T^2}} = 1.$$

Eli

$$\operatorname{Im}\left(\int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds\right) = \frac{1}{2}\log T + O(1), \tag{21}$$

kun T on riittävän suuri. Tällöin kaavan (19) mukaan jollakin $C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
n \cdot \arctan\frac{1}{2} &\leq \frac{1}{2}\log T + C, \qquad \text{eli} \\
n &\leq \frac{(1/2)\log T + C}{\arctan(1/2)} < 2\log T,
\end{aligned}$$

mikä todistaa lauseen. □

Nollakohtien lukumäärälle voidaan antaa vielä tarkempikin arvio, joka esitetään seuraavassa lauseissa, mutta se ei ole tämän tutkielman tavoitteiden kannalta ensisijaisen tärkeä, joten sitä ei todisteta.

Lause 3.13. Seuraava arvio on voimassa:

$$N(T) = \frac{T}{\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + O(\log T).$$

Todistus. (ks. [8]: pykälä 1.4) □

4 ψ-funktion von Mangoldtin kaava

Tässä tutkielmassa on tähän asti osoitettu, että Riemannin ζ-funktiolla on ainakin jonkinlainen yhteys alkulukuihin ja että ζ-funktioon liittyy hyvin olennaisesti sen epätriviaalit nollakohdat algebran peruslauseen mukaisessa hengessä. Tämän luvun tavoitteena on johtaa eräälle alkuluvuista riippuvalle funktiolle elegantti laskentakaava, jonka arvon laskeminen ei vaadi tietoa alkuluvuista vaan ζ-funktion epätriviaaleista nollakohdista ja koska näiden nollakohtien ominaisuuksista ja jakautumisesta tiedetään jo jotain, niin tämä luo merkittävällä tavalla mahdollisuuksia tutkia alkulukujen jakautumista. Kaava on nimetty saksalaisen Hans von Mangoldtin mukaan.

4.1 ψ-funktio ja sen yhteys ζ-funktioon

Määritellään ψ-funktio ja esitetään tavoiteltava *von Mangoldtin kaava.*

Määritelmä 4.1. Olkoon $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jonka määrittelee kaava

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{p^n<x} \log p + \sum_{p^n\leq x} \log p\right].$$

Lause 4.2. Seuraava yhtälö, jota kutsutaan von Mangoldtin kaavaksi, on voimassa:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho}^{\#} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) - \log 2\pi. \tag{22}$$

Lause todistetaan tässä tutkielman luvussa.

Kaavan johtamista varten ψ-funktio on ensin saatava liittymään ζ-funktioon. Määritellään tarkasteluja varten uusia apufunktioita.

Määritelmä 4.3. Olkoon $u : \mathbb{R} \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ *Heavisiden funktio*, jonka määrittelee kaava

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Määritelmä 4.4. Olkoon Λ *von Mangoldtin funktio*, jonka määrittelee kaava

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \log p, & m = p^n \quad \text{jollain } p \in \mathbb{P} \text{ ja } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Näin määritelty Λ-funktio on siis ψ-funktion täyden askeleen arvo kohdassa $x = m$. Tällöin on voimassa

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m) u(x-m). \tag{23}$$

Lauseen 2.7 mukaan

$$\frac{d}{ds}(\log \zeta(s)) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ns}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

ja koska tämä sarja suppenee itseisesti, niin sen termit voidaan järjestää uuteen järjestykseen eli

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{24}$$

Tavoitteena on johtaa yhtälön (24) avulla ζ-funktion ja ψ-funktion välinen yhteys. Se voidaan tehdä käyttämällä eräitä funktioteorian aputuloksia.

Lemma 4.5. Olkoot $t > 0$ ja $a > 0$. Tällöin

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} t^s \frac{ds}{s} = u(t-1)$$

sekä silloin, kun $t \neq 1$ on voimassa ehto

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} t^s \frac{ds}{s} - u(t-1) \right| \leq \frac{t^a}{\pi h |\log t|}.$$

Todistus. (ks. liite D) $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön (24) mukaista integraaliyhtälöä

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m) \frac{x^s}{m^s} \right) \frac{ds}{s}, \qquad a > 1.$$

Termeittäin integrointi on perusteltua äärellisellä välillä, sillä sarja suppenee tasaisesti silloin, kun $\mathrm{Re}(s) = a > 1$, koska $\Lambda(m) \leq \log m$ ja x on vakio. Siten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m) \frac{x^s}{m^s} \right) \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\Lambda(m) \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{m^s} \frac{ds}{s} \right).$$

Valitaan lemman 4.5 tilanteessa $t = x/m$, jolloin $u(x/m - 1) = u(x - m)$

$$\Lambda(m)\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{m^s}\frac{ds}{s} - u(x-m)\right| \leq \frac{(x/m)^a \log m}{\pi h|\log x - \log m|}, \qquad \text{kun } x \neq m.$$

Summataan m kaikkien luonnollisten lukujen yli. Tämä sarja suppenee, sillä $(x/m)^a$ on summattavissa, koska $a > 1$, x on vakio ja termin $(\log m)/|\log x - \log m|$ arvo lähestyy kohti lukua 1, kun $m \to \infty$.

Näin ollen

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Lambda(m)\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{m^s}\frac{ds}{s} - u(x-m)\right| \leq \frac{K}{h},$$

missä K on jokin vakio. Tämä ehto toteutuu myös tapauksessa $x = m$ ja se osoitetaan liitteessä D. Nyt $K/h \to 0$, kun $h \to \infty$. Tällöin

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\Lambda(m)\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{m^s}\frac{ds}{s} = \sum_{m=1}^{\infty}\Lambda(m)u(x-m),$$

joten (23):n ja (24):n mukaan, kun summan ja integraalin järjestys vaihdetaan, on voimassa

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}x^s\frac{ds}{s} = \psi(x), \qquad \text{kun } a > 1. \tag{25}$$

Näin ζ-funktiolla on ψ-funktioon selkeä yhteys, joka muistuttaa eräänlaista Fourier'n muunnosta. Tällaista muunnosta kutsutaan Mellin muunnokseksi, joka on nimetty suomalaisen matemaatikon Hjalmar Mellin mukaan.

4.2 Kaavan johtaminen

Tämän pykälän tavoitteena on johtaa *von Mangoldtin kaava* ψ-funktiolle. Se onnistuu määräämällä integraalille

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}x^s\frac{ds}{s}$$

toinen muoto, jolloin yhteys ψ-funktioon on selvä yhtälön (25) mukaan. Oletus $\mathrm{Re}(s) = a \geq 1 + \delta$, missä $\delta > 0$, on voimassa koko pykälän ajan. Käyttämällä ξ-funktion määritelmää 3.1 sekä sen tulokaavaa eli lausetta 3.7 saadaan

$$\log\zeta(s) = \frac{s}{2}\log\pi - \log s - \log(s-1) - \log\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \sum_{\rho}^{\#}\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right).$$

Kun tämä lauseke derivoidaan termeittäin muuttujan s suhteen, saadaan

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{d}{ds}\left(\log\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right) + \sum_{\rho}^{\#}\frac{1}{s-\rho}. \tag{26}$$

Käytetään Γ-funktion identiteettiä (4)

$$\frac{d}{ds}\left(\log\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right) = \frac{d}{ds}\left[\log\left(\frac{2}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{s}{2n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s/2}\right]\right)\right]$$

seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\log\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right) =& \frac{d}{ds}\left(\log\left(\frac{2}{s}\right)\right)\\ &+ \frac{d}{ds}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)+\frac{s}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\ =& -\frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{s+2n}+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\ =& -\frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2kn^k}\right)-\left(\frac{1}{s+2n}\right)\right],\end{aligned}$$

kun käytetään log-funktion Maclaurinin sarjaa. Oletetaan että s kuuluu johonkin kompleksitason kompaktiin osajoukkoon. Sarjan suppenevuuden kannalta riittää tutkia tapaus $k = 1$, jolloin on olemassa riittävän suuri n_0, että kaikilla $n > n_0$ on voimassa

$$\left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{s+2n}\right| \leq \frac{c}{n^2}, \qquad \text{jollain vakiolla } c \in \mathbb{R}.$$

Täten Γ-funktiosta johdettu sarja suppenee tasaisesti kompleksitason kompakteissa osajoukossa ja voidaan todeta, että

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2kn^k}\right)-\left(\frac{1}{s+2n}\right)\right] - \sum_{\rho}^{\#}\frac{1}{\rho-s}. \tag{27}$$

Yhtälö (27) on voimassa, jos jokainen sarja suppenee siinä tasaisesti kompleksitason kompakteissa osajoukoissa (ks. liite A: (∗)). Sarja, jossa esiintyy ζ-funktion epätriviaalit nollakohdat perusteltiin jo lauseen 3.12 todistuksessa yhtälön (18) tarkastelussa eli yhtälön (27) voimassaolo on siten perusteltu. Laskua $\zeta'(0)/\zeta(0) - \zeta'(s)/\zeta(s)$ hyödyntämällä päädytään tulokseen

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} - \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}. \tag{28}$$

Nyt tavoitteena on siis onnistua perustelemaan yhtälön (25) mukaan, että

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{s}{s-1} x^s \frac{ds}{s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)} x^s \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} x^s \frac{ds}{s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} x^s \frac{ds}{s}\end{aligned}$$

jotta ψ-funktio saa uuden muodon. Kuten tälläkin hetkellä nähdään, yhtälössä (28) mielivaltaisesti valitun arvon s tapauksessa ainoastaan ζ-funktion epätriviaalien nollakohtien joukko ja sen ominaisuudet vaikuttavat arvon $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ laskemisessa ei-triviaalilla tavalla, sillä kaavassa vain nollakohtien joukko ei ole täysin tunnettu. Termeittäin integroinnin perustelua ja arvojen laskemista varten tarvitaan muutamia funktioteorian aputuloksia.

Lemma 4.6. Olkoot $a > 1$, $\mathrm{Re}(a-\beta) > 0$ ja $x > 1$. Tällöin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s-\beta} x^s ds = x^{\beta}.$$

Todistus. (ks. liite D) □

Lemma 4.7. Olkoot $t > 1$, $a > 0$ ja $d > c \geq 0$. Tällöin

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a+ic}^{a+id} \frac{t^s}{s} ds\right| \leq \frac{t^a}{(a+c)|\log t|}.$$

Todistus. (ks. liite D) □

Tarkastellaan yhtälön (28):n integrointia termi kerrallaan. Lemman 4.6 välitön seuraus on, että

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{s}{s-1} x^s \frac{ds}{s} = x, \qquad \text{kun } x > 1 \tag{29}$$

ja

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}x^s\frac{ds}{s}=-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},\qquad \text{kun } x>1. \tag{30}$$

Integraalin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s}{2n(s+2n)}\right)x^s\frac{ds}{s}$$

termeittäin integrointi on perusteltua, sillä sarja suppenee tasaisesti alueen $\mathrm{Re}(s)>1$ kompakteissa osajoukoissa (ks. liite A: $(**)$). Tarkastellaan siis raja-arvoa

$$\lim_{h\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2n}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s+2n}ds.$$

Aloitetaan integraalista, jolle on voimassa

$$\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s+2n}ds=x^{-2n}\int_{a+2n-ih}^{a+2n+ih}\frac{x^s}{s}ds=2x^{-2n}\int_{a+2n}^{a+2n+ih}\frac{x^s}{s}ds.$$

Lemman 4.7 mukaan, kun x on vakio

$$\left|\frac{2x^{-2n}}{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{a+2n}^{a+2n+ih}\frac{x^s}{s}ds\right|\le\frac{2x^{-2n}}{n}\frac{Kx^{a+2n}}{(a+2n)\log x}\le\frac{K'}{n^2},$$

mikä tarkoittaa siis sitä, että integraalien termien summa suppenee, joten lemman 4.6 mukaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s+2n}ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{2n},$$

joka selvästi on tasaisesti suppeneva sarja, kun $x\ge 1+\delta$, mistä seuraa, että

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s}{2n(s+2n)}\right)x^s\frac{ds}{s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{2n},\qquad \text{kun } x\ge 1+\delta. \tag{31}$$

Viimeiseksi tarkasteltavaksi termiksi jää siis

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sum_{\rho}\frac{s}{\rho(s-\rho)}x^s\frac{ds}{s},$$

jonka jo valmiiksi tiedetään suppenevan koska yhtälön (28) kaikki muut termit on pystytty integroimaan. Tarkasteltavaksi jää siis se, että millaisen muodon tämä integraali saa. Lauseen 3.12 todistuksessa olleen yhtälön (18) tarkastelun mukaan integraalin (ks. liite A: $(***)$)

$$\lim_{h\to\infty}\sum_{\rho}^{\#}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\rho}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s-\rho}ds$$

sarja nollakohtien ρ yli suppenee tasaisesti. Lemman 4.6 mukaan

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s-\rho}ds=\frac{x^\rho}{\rho},$$

milloin on tutkittava, että suppeneeko sarja $\sum_\rho^{\#}\frac{x^\rho}{\rho}$ ja että onko se haettu raja-arvo. Tämän sarjan suppenevuuden todistaminen aloitetaan näyttämällä, että

$$\lim_{h\to\infty}\left(\sum_{\rho}^{\#}\frac{x^\rho}{\rho}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s-\rho}}{s-\rho}ds-\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le h}\frac{x^\rho}{\rho}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s-\rho}}{s-\rho}ds\right)=0. \tag{32}$$

Olkoon $\rho=\beta+i\gamma$. Tällöin

$$\sum_{|\gamma|>h}\left|\frac{x^\rho}{\rho}\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s-\rho}}{s-\rho}ds\right|\le 2\sum_{\gamma>h}\frac{x^\beta}{\gamma}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\beta+i(-\gamma-h)}^{a-\beta+i(-\gamma+h)}\frac{x^t}{t}dt\right|,$$

ja lemman 4.7 mukaan

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma>h}\frac{x^\beta}{\gamma}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\beta+i(-\gamma-h)}^{a-\beta+i(-\gamma+h)}\frac{x^t}{t}dt\right|&\le\sum_{\gamma>h}\frac{x^\beta}{\gamma}\frac{Kx^{a-\beta}}{(a-\beta+\gamma-h)\log x}\\&\le K\frac{x^a}{\log x}\sum_{\gamma>h}\frac{1}{\gamma(\gamma-h+c)},\end{aligned}$$

missä $c=a-1$, jolloin $0\le c\le a-\beta$.

Oletetaan sitten, että h on riittävän suuri, jotta lausetta 3.12 voidaan soveltaa aina kun $T\ge h$. Jaetaan summassa nollakohdat joukkoihin, joissa on voimassa $h+j\le\gamma\le h+j+1$ ja j käy läpi ei-negatiiviset kokonaisluvut. Lukua j vastaavassa joukossa on enintään $2\log(h+j)$ alkiota. Tällöin on voimassa

$$K\frac{x^a}{\log x}\sum_{\gamma>h}\frac{1}{\gamma(\gamma-h+c)}\le A\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\log(h+j)}{(h+j)(j+c)},$$

kun A on riittävän suuri vakio. Olkoon h riittävän suuri, jotta $\log(h+j) \le (h+j)^{1/2}$ ja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\log(h+j)}{(h+j)(j+c)} \le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(h+j)^{1/4}(j+c)^{1/4}(j+c)} \le \frac{B}{h^{1/4}},$$

kun B on riittävän suuri vakio. Täten raja-arvoyhtälö (32) toteutuu, sillä $h^{-1/4} \to 0$, kun $h \to \infty$.

Osoitetaan sitten, että seuraava yhtälö on voimassa:

$$\lim_{h\to\infty} \left(\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le h} \frac{x^\rho}{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s-\rho}}{s-\rho} ds - \sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le h} \frac{x^\rho}{\rho} \right) = 0. \tag{33}$$

Samalla tavalla kuten aiemmin arvioitiin, niin nyt integraalipolkujen additiivisuuden ja kolmioepäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le h} \frac{x^\rho}{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s-\rho}}{s-\rho} - \sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le h} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \\
&\le \sum_{0<\gamma\le h} \left| \frac{x^\rho}{\rho} \right| \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\beta-i(-\gamma+h)}^{a-\beta+i(-\gamma+h)} \frac{x^t}{t} dt - 1 \right| \\
&\le \sum_{0<\gamma\le h} \left| \frac{x^\rho}{\rho} \right| \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\beta-i(-\gamma+h)}^{a-\beta+i(\gamma+h)} \frac{x^t}{t} dt - 1 \right| + \sum_{0<\gamma\le h} \left| \frac{x^\rho}{\rho} \right| \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\beta+i(\gamma+h)}^{a-\beta+i(-\gamma+h)} \frac{x^t}{t} dt \right|.
\end{aligned}$$

Lemmojen 4.5 ja 4.7 mukaan viimeisintä lauseketta voidaan arvioida ylöspäin seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{0<\gamma\le h} \frac{x^\beta}{\gamma} \frac{x^{a-\beta}}{\pi(h+\gamma)\log x} + \sum_{0<\gamma\le h} \frac{x^\beta}{\gamma} \frac{K x^{a-\beta}}{(a-\beta+h-\gamma)} \\
&\le \frac{x^a}{\pi \log x} \sum_{0<\gamma\le h} \frac{1}{\gamma(h+\gamma)} + \frac{K x^a}{\log x} \sum_{0<\gamma\le h} \frac{1}{\gamma(c+h-\gamma)},
\end{aligned}$$

missä $c = a - 1$. Olkoon h_0 niin suuri, että lausetta 3.12 voidaan soveltaa kun $T > h_0$. Oletetaan, että $10h_0 < h$. Tällöin summan termit, joissa $0 < \gamma \le h_0 < h$ tuottavat suuruusluokkaa $O(1/h)$ olevan kontribuution summaan. Jaetaan termit, joissa $h_0 < \gamma \le h$ kuten aiemmin raja-arvoyhtälön (32) osoituksessa väleihin, joissa on voimassa $h_0 + j \le \gamma < h_0 + j + 1$, missä j käy läpi kaikki ei-negatiiviset kokonaisluvut. Tällöin viimeisintä lauseketta voidaan arvioida vielä ylöspäin kuten tehtiin aiemmankin raja-arvon tapauksessa:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^a}{\pi \log x} \sum_{\gamma > h_0} \frac{1}{\gamma(h+\gamma)} + \frac{Kx^a}{\log x} \sum_{\gamma > h_0} \frac{1}{\gamma(c+h-\gamma)} \\
&\leq A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\log(h_0+j)}{(h_0+j)(h+h_0+j)} + B \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\log(h_0+j)}{(h_0+j)(c+h-h_0-j-1)},
\end{aligned}
$$

kun A ja B ovat vakioita. Samanlaisella tarkastelulla kuin raja-arvoyhtälön (32) voimassaolon osoittamisessa, voidaan todeta että molempien sarjojen arvo suppenee kohti lukua 0, kun $h \to \infty$. Tällöin on osoitettu, että (32):n mukaan

$$
-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)} x^s \frac{ds}{s} = -\lim_{h \to \infty} \sum_{|\mathrm{Im}(\rho)| \leq h} \frac{x^\rho}{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s-\rho}}{s-\rho} ds
$$

ja (33):n mukaan

$$
-\lim_{h \to \infty} \sum_{|\mathrm{Im}(\rho)| \leq h} \frac{x^\rho}{\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s-\rho}}{s-\rho} ds = -\lim_{h \to \infty} \sum_{|\mathrm{Im}(\rho)| \leq h} \frac{x^\rho}{\rho} = -\sum_{\rho}^{\#} \frac{x^\rho}{\rho}
$$

eli

$$
-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)} x^s \frac{ds}{s} = -\sum_{\rho}^{\#} \frac{x^\rho}{\rho}, \qquad \text{kun } x > 1. \tag{34}
$$

Yhdistämällä identiteetit (25), (28), (29), (30), (31) sekä (34) on johdettu ψ-funktion von Mangoldtin kaava:

$$
\psi(x) = x - \sum_{\rho}^{\#} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}, \qquad \text{kun } x > 1. \tag{35}
$$

Vakion $\zeta'(0)/\zeta(0)$ tarkkaa arvoa ei tässä tutkielmassa johdeta, mutta se on $\log 2\pi$ (ks .[4]: pykälä 3.8). Voidaan havaita myös, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{-2n}/2n)$ on funktion $-\log(1-x^{-2})/2$ Maclaurinin sarja.

4.3 Graafinen esitys

Hahmotellaan ψ-funktion ja sen von Mangoldtin kaavan mukaista esitystä graafisesti hyödyntämällä valmiiksi laskettuja Riemannin ζ-funktion nollakohtia. Muutetaan ensin kaava helpommin laskettavaan muotoon. Olkoon

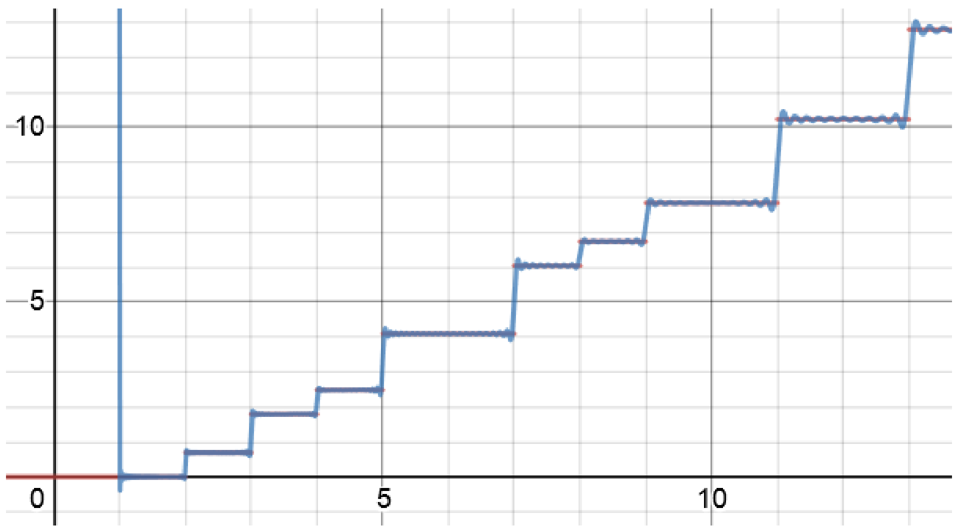
$\rho = \beta + i\gamma$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{x^\rho}{\rho} = \frac{e^{(\beta+i\gamma)\log x}}{\beta+i\gamma} &= \frac{\beta - i\gamma}{\beta^2+\gamma^2} e^{(\beta+i\gamma)\log x} \\ &= x^\beta \left(\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} (\cos(\log x \cdot \gamma) + i \sin(\log x \cdot \gamma)) \right) \\ &+ x^\beta \left(\frac{-\gamma}{\beta^2+\gamma^2} (i\cos(\log x \cdot \gamma) - \sin(\log x \cdot \gamma)) \right).\end{aligned}$$

Imaginääriosat kumoutuvat sarjassa yli kaikkien nollakohtien, sillä lauseen 2.18 mukaan ζ-funktion nollakohdan liittoluku on myös nollakohta. Samoin koska kaikilla tiedetyillä nollakohdilla on Riemannin hypoteesin mukainen reaaliosa, voidaan olettaa $\beta = 1/2$. Kuvassa 5 on esitetty ψ-funktion approksimaationa funktion

$$f(x) = x - \sum_{|\gamma|<405} \frac{x^{1/2+i\gamma}}{1/2+i\gamma} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) - \log 2\pi,$$

kuvaaja. Tämä määritelmä arvolle $f(x)$ on voimassa vain tässä pykälässä. Ehto $|\gamma| < 405$ toteutuu 205:llä nollakohtaparilla.



Kuva 5: Käyrän $y = f(x)$ kuvaaja.

Tarkempaa tietoa kuvaajasta ja nollakohdista löytyy liitteessä A.

5 Alkulukulause

Tutkielmassa on päästy siihen vaiheeseen, että aiemmin hyvin satunnaisen alkulukujen jakautumisen tutkimukselle onkin löydetty lähestymistapa, joka mahdollistaa tämän jakautumisen kuvaamisen uudella tavalla. Aiempien tuloksien valossa voidaan todeta, että jokainen Riemannin ζ-funktion epätriviaali nollakohta liittyy koko alkulukujen jakautumiseen, mikä on merkittävä edistysaskel alkulukufunktion tavoitellun kaavan löytämisen kannalta. Vaikka täydellisen kaavan kuvaaminen on hyvin hankalaa, niin tämän luvun tarkoituksena on käsitellä *alkulukulause*, jolla tarkoitetaan siis alkulukufunktion asymptoottisen arvion

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x} \tag{36}$$

toteutumista.

Taulukko 1: Alkulukufunktion ja sen alkulukulauseen mukaisten asymptoottien pyöristettyjen arvojen vertailua kun virhe on suhteessa alkulukufunktion todelliseen arvoon.

x	$\pi(x)$	$\int_2^x (dt/\log t)$	$\to$virhe	$x/\log x$	$\to$virhe
100	25	29	16 %	22	−12 %
500	95	101	6,3 %	80	−16 %
1 000	168	177	5,4 %	145	−14 %
5 000	669	683	2,1 %	587	−12 %
10 000	1 229	1 245	1,3 %	1 086	−12 %
50 000	5 133	5 166	0,64 %	4 621	−10 %
100 000	9 592	9 629	0,39 %	8 686	−9,4 %
500 000	41 538	41 605	0,16 %	38 103	−8,3 %
1 000 000	78 498	78 627	0,16 %	72 382	−7,8 %
5 000 000	348 513	348 637	0,036 %	324 150	−7,0 %
10 000 000	664 579	664 917	0,051 %	620 421	−6,6 %

Alkulukulause todistetaan tässä luvussa osoittamalla ensin, että Riemannin ζ-funktion epätriviaaleja nollakohtia ei ole suoralla $\mathrm{Re}(s) = 1$. Tästä seuraa von Mangoldtin kaavan avulla arvio $\psi(x) \sim x$, jota käytetään alkulukulauseen todistamisessa. Alkulukulauseen ovat ensimmäisenä todistaneet Jacques Hadamard sekä Charles Jean de la Vallée Poussin vuonna 1896.

5.1 Re(ρ) $\neq 1$

Ehto Re(ρ) $\neq 1$ osoitetaan oikeaksi vastaoletuksen avulla. Vastaoletuksesta seuraava ristiriita voidaan johtaa tutkimalla sarjaa $\log\zeta(s)$ lähellä suoraa $\mathrm{Re}(s) = 1$, kun $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Määritelmä 5.1. Olkoon sarja $B(s)$ määritelty kaavalla

$$B(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}, \qquad \mathrm{Re}(s) \geq 1.$$

Tämä sarja siis suppenee myös silloin, kun $\mathrm{Re}(s) = 1$ kuten lauseen 2.8 todistuksesta nähdään.

Nyt siis

$$\log\zeta(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + B(s), \qquad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{37}$$

Tällöin ζ-funktion logaritmin reaaliosaa voidaan arvioida seuraavasti:

$$\mathrm{Re}(\log\zeta(\sigma + it)) = \mathrm{Re}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^{\sigma+it}}\right) + O(B(1)) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\cos(t\log p)}{p^\sigma} + O(1). \tag{38}$$

Tehdään vastaoletus, jonka mukaan on olemassa ζ-funktion epätriviaali nollakohta muotoa $\rho_v = 1 + ik$. Symbolit ρ_v ja k liittyvät koko pykälän ajan tähän nollakohtaan.

Tällaisen nollakohdan tapauksessa $\lim_{\sigma\to 1^+} \mathrm{Re}(\log\zeta(\sigma + ki)) = -\infty$ eli

$$\lim_{\sigma\to 1^+} \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\cos(k\log p)}{p^\sigma} = -\infty. \tag{39}$$

Käyttämällä ξ-funktion määritelmää saadaan

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{\xi(s)\pi^{s/2}}{(s/2)\Gamma(s/2)} = \frac{\xi(s)\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2+1)}$$

eli

$$\lim_{\sigma\to 1^+} (\sigma - 1)\zeta(\sigma) = \frac{\xi(1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(3/2)} = 1,$$

koska $\xi(1) = \dfrac{1}{2}$ ja $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. (ks. lause 3.3 ja liite B)

Tästä seuraa, että

$$\lim_{\sigma \to 1^+} [\mathrm{Re}(\log \zeta(\sigma)) + \log (\sigma - 1)] = 0, \tag{40}$$

joten yhtälön (37) mukaan

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma} = -\log (\sigma - 1) + O(1) \to \infty, \qquad \sigma \to 1^+. \tag{41}$$

Koska

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \left| \frac{\zeta(\sigma + ki)}{\sigma + ki - \rho_v} \right| = \lim_{\sigma \to 1^+} \left| \frac{\zeta(\sigma + ki)}{\sigma - 1} \right| < \infty,$$

niin $\mathrm{Re}[\log \zeta(\sigma + ki) - \log (\sigma - 1)]$ on ylhäältä rajoitettu pisteen $s = \rho_v$ lähiympäristössä. Tällöin ehdon (38) mukaan samassa tilanteessa kuin (41) on lähellä pistettä ρ_v voimassa:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\cos (k \log p)}{p^\sigma} = \log (\sigma - 1) + O(1) \to -\infty, \qquad \sigma \to 1^+. \tag{42}$$

Ehtojen (41) ja (42) olisi siis toteuduttava samanaikaisesti, jos olisi olemassa nollakohta ρ_v. Näissä ehdoissa esiintyvät hajaantuvat sarjat siis tavallaan hajaantuvat samaa tahtia, mutta eri suuntiin. Ehdossa (42) tämä tarkoittaisi, että lähes jokaisella alkuluvulla olisi voimassa $\cos (k \log p) \approx -1$, mikä kertoisi hyvin säännöllisestä alkulukujen jakautumisesta, ja mikä ei vaikuta intuition mukaiselta lopputulokselta. Koska ehto (41) tiedetään varmuudella oikeaksi, niin tavoitteena on nyt osoittaa, että ehtoa (42) toteuttavaa lukua k ei ole olemassa. Olkoon $\delta > 0$ pieni reaaliluku. Olkoon P' sellaisten alkulukujen p joukko, jossa toteutuu ehto

$$|(2n + 1)\pi - k \log p| < \delta \qquad \text{jollakin } n \in \mathbb{Z}. \tag{43}$$

Tällöin yhtälön (41) sarja voidaan esittää muodossa

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^\sigma} = S' + S'',$$

kun

$$S' = \sum_{p \in P'} \frac{1}{p^\sigma} \qquad \text{ja} \qquad S'' = \sum_{p \in \mathbb{P} \setminus P'} \frac{1}{p^\sigma}.$$

Kaikilla $p \in \mathbb{P} \setminus P'$ on voimassa $\cos(k \log p) > -\cos\delta$. Ehdon (42) mukaan

$$-S' - \cos\delta \cdot S'' < \log(\sigma - 1) + O(1).$$

Yhtälöstä (41) saadaan ehto $\log(\sigma - 1) = -S' - S'' + O(1)$, milloin

$$\begin{aligned} & -S' - \cos\delta \cdot S'' < -S' - S'' + O(1), \\ \iff \quad & (1 - \cos\delta) S'' < O(1). \end{aligned}$$

Tällöin sarja S'' siis suppenisi, kun taas $S' + S''$ hajaantuu eli suurin osa alkuluvuista olisi ehdon (43) toteuttavia ja siten saadaan seuraava ehto:

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{S''}{S' + S''} = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{S'}{S' + S''} = 1. \tag{44}$$

Ehdosta (42) voidaan intuitiivisesti arvioida, että koska $\cos(k \log p) \approx -1$ suurimmalle osalle alkuluvuista, niin $\cos(2k \log p) \approx 1$ myös suurimmalle osalle alkuluvuista ja

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\cos(2k \log p)}{p^\sigma} \to +\infty, \qquad \sigma \to 1^+$$

eli $\mathrm{Re}(\log\zeta(\sigma + 2ki)) \to +\infty$. Kuitenkin, koska ζ-funktiolla ei voi olla napaa tällaisessa pisteessä, niin pisteen $s = 1 + 2ki$ lähiympäristössä $\mathrm{Re}(\log\zeta(s))$ on ylhäältä rajoitettu ja seuraava täsmällinen, mutta ehdosta (42) johdetun intuitiivisen päättelyn kanssa ristiriitainen ehto on voimassa:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\cos(2k \log p)}{p^\sigma} = O(1). \tag{45}$$

Ristiriita täsmällisellä tarkastelulla voidaan johtaa siitä, että koska jokaisella $p \in P'$ on voimassa $0 < \cos(2\delta) < \cos(2k \log p) \leq 1$ ja sarjassa S'' kaikilla p on voimassa $\cos(2k \log p) \geq -1$ eli ehdon (45) mukaan

$$S' \cos(2\delta) - S'' < O(1),$$

josta seuraa, että

$$\frac{S''}{S' + S''} > \cos(2\delta) \frac{S'}{S' + S''} - \frac{O(1)}{S' + S''},$$

mikä on ristiriita ehdon (44) kanssa. Täten nollakohtaa ρ_v ei voi olla olemassa ja näin ollen on todistettu seuraava lause:

Lause 5.2. ζ-funktion epätriviaaleille nollakohdille on voimassa $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$.

5.2 $\psi(x) \sim x$

Tämän pykälän tavoitteena on osoittaa, että $\psi(x) \sim x$. Ensimmäinen vaihe on osoittaa, että

$$\int_0^x \psi(t)dt \sim \frac{x^2}{2}. \tag{46}$$

Muistetaan von Mangoldtin kaava (35) sekä identiteetti (25):

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} = x - \sum_\rho^{\#} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} - \log 2\pi,\ a > 1.$$

Tarkastellaan integraalia

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} x^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{s+1} \frac{ds}{m^s s(s+1)}
\end{aligned}$$

Käyttämällä osamurtohajotelmaa $1/(s(s+1)) = 1/s - 1/(s+1)$ saadaan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{s+1} \frac{ds}{m^s s(s+1)} = \frac{x}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{m^s}\frac{ds}{s} - \frac{m}{2\pi i}\int_{a+1-i\infty}^{a+1+i\infty} \frac{x^u}{m^u}\frac{du}{u},$$

joka lemman 4.5 mukaan saa arvon 0, jos $x \leq m$ sekä muussa tapauksessa arvon $x-m$. Osamurtohajotelmassa alkuperäinen summa käsitellään kahtena summana, mutta molemmat suppenevat tasaisesti, joten se on perusteltua. Siten

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)} = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)(x-n) = \int_0^x (x-t)d\psi(t),$$

eli

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)} = \int_0^x \psi(t)dt. \tag{47}$$

Yhtälön (47) vasemman puolen integraalin laskemiseksi hyödynnetään yhtälöä (28):

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} - \sum_\rho \frac{s}{\rho(s-\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Tämän perusteella

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} = \frac{s}{s-1} - \frac{-1}{-1-1} - \sum_{\rho}\left(\frac{s}{\rho(s-\rho)} - \frac{-1}{\rho(-1-1)}\right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{-1}{2n(-1+2n)}\right),$$

eli

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s+1}{2(s-1)} - \sum_{\rho}\frac{s+1}{(\rho+1)(s-\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s+1}{(2n-1)(s+2n)} - \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}. \tag{48}$$

Tällöin (47):n vasemmanpuoleiselle integrandille on yhtälöiden (28) ja (48) mukaan voimassa

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}x^{s+1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{x^{s+1}}{s-1} - \sum_{\rho}\frac{x^{s+1}}{\rho(s-\rho)}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{s+1}}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\frac{x^{s+1}}{s} - \frac{x^{s+1}}{2(s-1)}$$
$$+ \sum_{\rho}\frac{x^{s+1}}{(\rho+1)(s-\rho)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{s+1}}{(2n-1)(s+2n)}$$
$$+ \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}\frac{x^{s+1}}{s+1}.$$

Jokainen sarja suppenee tasaisesti kompleksitason kompakteissa osajoukoissa, kuten pykälässä 4.1 todettiin yhtälöä (28) vastaavien termien tapauksessa. Osassa sarjoista termien nimittäjä poikkeaa vain hieman, kun tuloissa toinen luku eroaa itseisarvoltaan luvun 1 verran. Nämä muutokset eivät vaikuta suppenevuuteen. Kun jokainen termi integroidaan nyt erikseen kuten pykälässä 4.1, niin saadaan tulokseksi

$$\int_0^x \psi(t)dt = \frac{x^2}{2} - \sum_{\rho}\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n+1}}{2n(2n-1)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}x + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}, \tag{49}$$

kun $x > 1$.

Todistetaan sitten väite (46) näyttämällä, että

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \psi(t)dt - x^2/2}{x^2/2} = 0$$

Nyt

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^x \psi(t)dt - x^2/2}{x^2/2} &= -2\sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} - 2x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{2n(2n-1)} \\ &- 2\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}x^{-1} + 2\frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}x^{-2},\end{aligned}$$

milloin kaikki muut termit paitsi sarja nollakohtien ρ yli suppenevat triviaalisti kohti nollaa kun $x \to \infty$. Lauseen 3.11 mukaan sarja $\sum_\rho \rho^{-1}(\rho+1)^{-1}$ suppenee itseisesti. Lauseen 5.2 mukaan $|x^{\rho-1}| < 1$, koska $\mathrm{Re}(\rho) < 1$. Tällöin sarja

$$\sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}$$

suppenee tasaisesti ja kohti nollaa, kun $x \to \infty$. Tämä voidaan todeta tarkastelemalla epäyhtälöä

$$\left|\sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}\right| \le \left|\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le h} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}\right| + \left|\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|>h} \frac{1}{\rho(\rho+1)}\right|.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan hyvin suuri luku h siten, että

$$\left|\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|>h} \frac{1}{\rho(\rho+1)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon sitten luku $c \in [1/2, 1)$ ehdon $\mathrm{Im}(\rho) \le h$ toteuttavien nollakohtien reaaliosien maksimi sekä luku x niin suuri, että ehto

$$\left|\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le h} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}\right| \le \left|\sum_{|\mathrm{Im}(\rho)|\le h} \frac{1}{\rho(\rho+1)}\right| x^{c-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

on voimassa. Tällöin

$$\left|\sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}\right| < \varepsilon.$$

Tämä todistaa väitteen (46).

Seuraavaksi osoitetaan tämän avulla, että $\psi(x) \sim x$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja x_0 riittävän suuri, että kaikilla $x > x_0$ on voimassa

$$(1-\varepsilon)\frac{x^2}{2} - (1+\varepsilon)\frac{x_0^2}{2} < \int_{x_0}^{x} \psi(t)dt < (1+\varepsilon)\frac{x^2}{2} - (1-\varepsilon)\frac{x_0^2}{2}.$$

Olkoon $y > x$. Koska ψ on kasvava funktio, niin tällöin

$$(y-x)\psi(x) \leq \int_{x}^{y} \psi(t)dt < (1+\varepsilon)\frac{y^2}{2} - (1-\varepsilon)\frac{x^2}{2}.$$

Tehdään sijoitus $y = \beta x$, kun $\beta = 1 + \varepsilon^{1/2}$. Tällöin on voimassa

$$\frac{\psi(x)}{x} < (1+\varepsilon)\frac{\beta+1}{2} + \frac{\varepsilon}{\beta-1} = 1 + \frac{\varepsilon^{3/2} + 2\varepsilon + 3\varepsilon^{1/2}}{2} \to 1, \text{ kun } \varepsilon \to 0^+$$

Arvon $\psi(x)/x$ alarajaa voidaan arvioida vastaavalla menetelmällä ja tästä seuraa, että

$$\psi(x) \sim x, \tag{50}$$

jonka osoittaminen oli tämän pykälän tavoite.

5.3 Alkulukulauseen todistus

Tämän pykälän tavoitteena on johtaa pykälän 5.2 tuloksen $\psi(x) \sim x$ avulla alkulukulause eli väittämä (36).

Määritelmä 5.3. Logaritminen integraalifunktio eli Li-funktio määritellään kaavalla

$$\mathrm{Li}(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\log t}, \quad x \geq 2.$$

Määritelmä 5.4. Määritellään *Chebyshevin* θ-funktio kaavalla

$$\theta(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{p<x} \log p + \sum_{p \leq x} \log p\right],$$

kun $x \in \mathbb{R}$ ja p käy läpi kaikki alkuluvut.

Chebyshevin θ-funktiolla ja ψ-funktiolla on seuraava yhteys:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x^{1/n}) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \dots. \tag{51}$$

Mikäli $x^{1/k} < 2$, niin sarjan (51) kaikki termit, joissa $n \geq k$, ovat nollia. Olkoon tällainen luku $k = \log x / \log 2$. Tällöin

$$\theta(x) < \psi(x) < \theta(x) + \theta(x^{1/2}) \frac{\log x}{\log 2},$$

eli

$$\psi(x) - \theta(x^{1/2}) \frac{\log x}{\log 2} < \theta(x) < \psi(x). \tag{52}$$

Koska

$$\frac{\theta(x^{1/2}) \log x}{x} \to 0, \qquad x \to \infty,$$

niin ominaisuuden (50) mukaan

$$\theta(x) \sim x. \tag{53}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$ sellainen, että epäyhtälö

$$(1 - \varepsilon) y \leq \theta(y) \leq (1 + \varepsilon) y$$

on voimassa aina, kun $y \geq x_0$. Tällöin

$$\pi(y) - \pi(x_0) = \int_{x_0}^{y} \frac{d\theta(t)}{\log t} = \Big|_{t=x_0}^{y} \frac{\theta(t)}{\log t} + \int_{x_0}^{y} \frac{\theta(t)}{(\log t)^2 t} dt. \tag{54}$$

Tällöin termiä $\pi(y) - \pi(x_0)$ voidaan arvioida ylärajalla

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+\varepsilon)y}{\log y} - \frac{(1-\varepsilon)x_0}{\log x_0} + \int_{x_0}^{y} \frac{(1+\varepsilon)t}{(\log t)^2 t} dt \\
&= 2\varepsilon \frac{x_0}{\log x_0} + (1+\varepsilon) \left(\Big|_{t=x_0}^{y} \frac{t}{\log t} + \int_{x_0}^{y} \frac{t}{(\log t)^2 t} dt \right) \\
&= 2\varepsilon \frac{x_0}{\log x_0} + (1+\varepsilon) \int_{x_0}^{y} \frac{1}{\log t} dt \\
&= 2\varepsilon \frac{x_0}{\log x_0} + (1+\varepsilon)(\mathrm{Li}(y) - \mathrm{Li}(x_0)).
\end{aligned}$$

Koska x_0 on kiinnitetty, niin tällöin

$$\frac{\pi(y)}{\mathrm{Li}(y)} \leq 2\varepsilon \frac{x_0}{\log x_0} \cdot \frac{1}{\mathrm{Li}(y)} + (1+\varepsilon) - (1+\varepsilon) \frac{\mathrm{Li}(x_0)}{\mathrm{Li}(y)} + \frac{\pi(x_0)}{\mathrm{Li}(y)} \leq 1 + 2\varepsilon,$$

kun y kasvaa riittävän suureksi. Toisaalta samanlaisilla menetelmillä voidaan arvioida, että

$$-2\varepsilon\frac{x_0}{\log x_0} + (1-\varepsilon)(\mathrm{Li}(y) - \mathrm{Li}(x_0)) \leq \pi(y) - \pi(x_0)$$

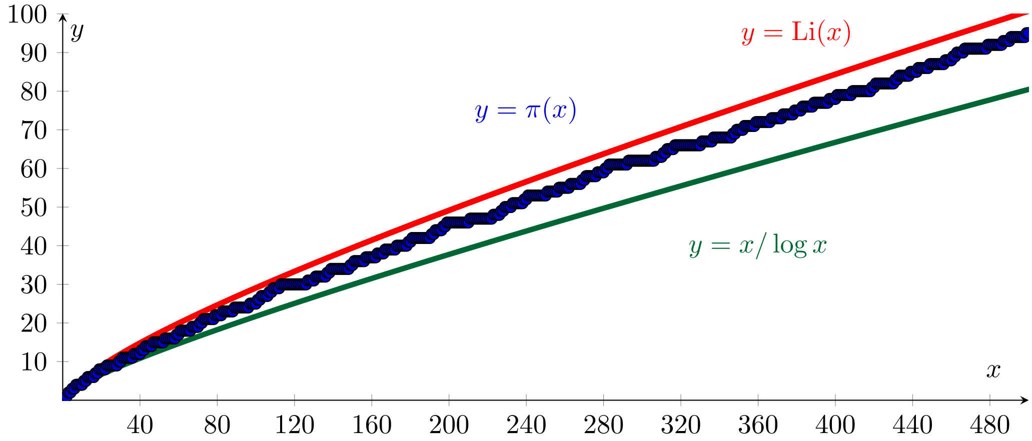
ja tästä saadaan, että riittävän suurella y

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{\pi(y)}{\mathrm{Li}(y)}.$$

Koska jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa riittävän suuri x_0, niin $\pi(y)/\mathrm{Li}(y) \to 1$, kun $y \to \infty$ ja $\varepsilon \to 0$. Tämä todistaa alkulukulauseen eli

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x). \tag{55}$$

Osittaisintegroimalla voidaan johtaa myös, että $\pi(x) \sim x/\log x$.



Kuva 6: Alkulukulauseen tarkastelua graafisesti.

6 Arvioiden tarkkuuksista ja Riemannin hypoteesista

Alkulukulauseen todistaminen on ollut merkittävä saavutus alkulukujen jakautumisen tutkimisen kannalta. Alkulukufunktion asymptoottinen arvio on nyt ratkaistu ja alkulukufunktio voidaan esittää muodossa

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + o(\mathrm{Li}(x)). \tag{56}$$

Seuraava luonnollisesti kiinnostava ongelma on virhetermi $\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = o(\mathrm{Li}(x))$ ja sen tutkiminen. Tähän kysymykseen liittyy vielä tänäkin päivänä ratkaisemattomia olettamuksia, sillä *Riemannin hypoteesin* seuraus olisi, että tämä virhetermi olisi mahdollisimman hitaasti kasvava.

Tämän luvun tavoite on tarkastella alkulukulauseen mukaisen alkulukufunktion arvioinnin virherajoja sekä siihen liittyvää Riemannin hypoteesia kirjallisuuslähteiden pohjalta ilman täsmällistä matemaattista todistamista.

6.1 Arvioinnin virherajoista

Alkulukujen jakautumista voi kuvata eksplisiittisesti von Mangoldtin kaavalla (22):

$$\psi(x) = x - {\sum_{\rho}}^{\#} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log\left(1 - x^{-2}\right) - \log 2\pi.$$

Kaavasta voidaan havaita, että ζ-funktion epätriviaalien nollakohtien reaaliosilla on oleellinen vaikutus siihen, että kuinka nopeasti sarja nollakohtien yli kasvaa arvoltaan, kun x kasvaa. Tämän voi todeta esimerkiksi siitä, että $|x^\rho| = x^{\mathrm{Re}(\rho)}$. Alkulukulauseen todistuksessa riitti osoittaa, että $\mathrm{Re}(\rho) < 1$, jotta pystyttiin toteamaan kyseisen sarjan arvon kasvavan riittävän hitaasti, jolloin $\psi(x) \sim x$.

Alkulukulauseen todistamisen jälkeen de la Vallée Poussin osoitti, että nollakohtien reaaliosaa voidaan rajata paremmin ja tällä on merkittävä seuraus virherajojen arvioinnissa.

Lause 6.1. On olemassa sellaiset vakiot $c > 0$ ja $K > 1$, että ehto

$$\mathrm{Re}(\rho) < 1 - \frac{c}{\log\left(\mathrm{Im}(\rho)\right)}$$

on voimassa kaikilla epätriviaaleilla nollakohdilla, jotka toteuttavat ehdon $\mathrm{Im}(\rho) > K$.

Todistus. (ks.[4]: Pykälä 5.2) □

Lause 6.1 on vahvempi tulos kuin lause 5.2 vaikka edelleen mielivaltaisen nollakohdan reaaliosalle ei tiedetä ylärajaa alueella $[1/2, 1)$ sillä $c/\log(\mathrm{Im}(\rho)) \to 0$, kun $|\mathrm{Im}(\rho)| \to \infty$. Tämän lauseen ansiosta voidaan kuitenkin havaita, että epätriviaalien nollakohtien reaaliosat ovat riittävän monen nollakohdan tapauksessa riittävän rajattuja, jotta sen avulla voidaan tämän tutkielman pykälän 5.2 tapaisilla menetelmillä osoittaa seuraava lause:

Lause 6.2. On olemassa sellainen vakio $c > 0$, että ehto

$$\left|\frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{\mathrm{Li}(x)}\right| < e^{-\sqrt{c\log x}}$$

on voimassa.

Todistus. (ks. [4]: Pykälät 5.1 ja 5.3). □

Erityisesti mahdollisimman pieni luku nollakohtien reaaliosien ylärajaksi olisi optimaalisinta sen kannalta, että arvioiden virherajat olisivat mahdollisimman pieniä. Tätä käsitellään seuraavassa pykälässä.

6.2 Riemannin hypoteesi

Riemannin hypoteesi on epätriviaalien nollakohtien reaaliosaa koskeva oletus, jonka mukaan ehto $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$ on voimassa kaikilla epätriviaaleilla nollakohdilla. Tätä oletusta ei ole onnistuttu todistamaan oikeaksi, mutta miljardeista etsityistä nollakohdista huolimatta sitä ei ole osoitettu vääräksikään. Yleinen uskomus onkin, että hypoteesi on oikein ja sen seuraukset ovat yksi lukuteorian tutkimuksen kohde. Riemannin hypoteesin *oikeaksi* osoittaminen on yksi *Clay-instituutin* miljoonan dollarin *Millenium-ongelmista* [1].

Riemannin hypoteesin seuraus olisi, että tässä luvussa tutkittu alkulukufunktion ja logaritmisen integraalin välinen erotus kasvaisi mahdollisimman hitaasti [6]. Tällöin olisi voimassa

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log x, \qquad \text{kun } x \geq 2657.\ [13] \tag{57}$$

6.3 Nollakohdat kriittisellä suoralla

Riemannin hypoteesin toteuttavien nollakohtien sanotaan sijaitseman *kriittisellä suoralla* eli suoralla $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Riemannin hypoteesin todistaminen on osoittautunut hyvin vaikeaksi ongelmaksi, mutta asiaa voidaan silti lähestyä esimerkiksi todennäköisyyksien kannalta tutkimalla kriittisellä suoralla olevien nollakohtien suhteellista osuutta verrattuna kaikkiin kriittisen kaistan nollakohtiin.

Vuonna 1914 G. H. Hardy osoitti, että ζ-funktiolla on äärettömän monta nollakohtaa kriittisellä suoralla. Atle Selberg osoitti vuonna 1942, että suoralla olevien nollakohtien lukumäärän suhde kaikkien epätriviaalien nollakohtien lukumäärään on positiivinen (ks. [4]: Pykälä 11.1).

Nykyään tiedetään, että vähintään reilu $2/5$ kaikista epätriviaaleista nollakohdista sijaitsee kriittisellä suoralla [3]. Tämän hetkisessä tutkimuksessa tulosta pyritään parantamaan, mutta vaikka osoitettaisiin, että Riemannin hypoteesin ehdon toteuttavien nollakohtien suhteellinen osuus kaikista epätriviaaleista nollakohdista olisi 1, niin se ei silti riittäisi todistamaan Riemannin hypoteesia. Epätriviaaleja nollakohtia, jotka eivät sijaitse kriittisellä suoralla, voisi silti olla äärettömänkin monta. Ne olisivat vain hyvin paljon harvemmassa kuin kriittisellä suoralla olevat nollakohdat.

Muita kysymyksiä on myös epätriviaalien nollakohtien asteluvut. Toistaiseksi kaikki tiedetyt epätriviaalit nollakohdat ovat olleet yksinkertaisia, ja myös näiden suhteellinen osuus on hyvin lähellä tiedettyä Riemannin hypoteesin toteuttavien nollakohtien suhteellista osuutta.

7 Johtopäätöksiä

Tutkielmassa on käsitelty niitä kysymyksiä, joita johdantoluvussa pohdittiin. Tässä viimeisessä luvussa on tarkoitus tarkastella saavutettuja tuloksia ja pohtia niiden merkitystä.

7.1 Yhteenveto

Alkuperäinen motivaatio tämän aihepiirin kannalta oli selvittää alkulukujen jakautumista ja etsiä mahdollisesti laskennallisesti helppoa muotoa alkulukufunktiolle. Diskreetissä lähtökohdassa hyvin hankala kysymys alkulukujen jakautumisesta on saanut täysin uuden perspektiivin analyysin kautta. Alkulukujen yhteys ζ-funktioon on selvä Eulerin tulokaavan

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

kautta ja ζ-funktion logaritmilla saatiin Maclaurinin sarjoilla sarjaesitys, jossa alkuluvut esiintyvät:

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Derivoimalla saatiin määritelmän 4.4 mukaisella von Mangoldtin Λ-funktiolla

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

samalla kun

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{p^n \le x} \log p + \sum_{p^n < x} \log p\right] = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m) u(x-m),$$

jossa u on määritelmän 4.3 mukainen Heavisiden funktio. Lopulta saatiin tulokseksi

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} = \psi(x), \qquad a > 1, x > 1.$$

Analyyttisen jatkamisen avulla ζ-funktion määrittelyaluetta laajennettiin alueelle $\mathrm{Re}(s) \le 1$. Alueella $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ ζ-funktiolla on epätriviaaleja nollakohtia ρ, joiden avulla ζ-funktio voidaan määritellä uudelleen siten, että

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{2} \prod_{\mathrm{Im}(\rho) < h} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) = \frac{1}{2} \prod_{\rho}^{\#} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) = \frac{1}{2} \pi^{-s/2} s(s-1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \zeta(s),$$

milloin ottamalla logaritmin ja derivoimalla saadaan

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} - \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

ja lopulta saadaan von Mangoldtin kaava

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} = x - \sum_{\rho}^{\#} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} \log\left(1 - x^{-2}\right) - \log 2\pi,$$

mikä oli se tavoiteltu laskentafunktion esitysmuoto, joka oli johdantoluvun pykälässä 1.2.2 mainittu. Pykälässä 4.3 voi tarkastella graafista esitystä ja todeta tämän muodon muistuttavan pykälän 1.2.1 laskentafunktion esitysmuotoa sekä graafista approksimaatiota.

Koska $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$, niin on mahdollista johtaa tulos $\psi(x) \sim x$. Tästä seuraa, että Chebyshevin funktiolla

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p < x} \log p \right]$$

on myös voimassa $\theta(x) \sim x$. Koska alkulukufunktion arvo on

$$\pi(x) = \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta(t)}{\log t},$$

niin tällöin

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Osittaisintegrointia hyödyntämällä alkulukulauseella voidaan tarkoittaa myös arviota

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Graafinen havainnollistus on esitetty pykälän 5.3 kuvassa 6.

Lopputuloksena voidaan todeta, että Riemannin ζ-funktio muutti alkulukujen jakautumisen perspektiiviä merkittävästi. Asian tarkastelu nollakohtien kautta on asian tutkimisen kannalta parempi kuin diskreetti ajattelutapa. Alkulukujen jakautumisen mysteerit liittyvät nyt suoraan nollakohtien jakauman mysteeriin. Vaikka von Mangoldtin kaava on erittäin elegantti tulos, niin se sisältää silti tuntemattomana tekijänä nollakohtien jakautumisen. Lattiafunktion Fourier'n sarjassa ei ole vastaavaa ongelmaa, sillä luonnollisten lukujen jakautuminen on triviaalia. Onneksi nollakohtien reaaliosa on todistetusti kuitenkin niin rajattu, että alkulukulause on voimassa ja vaikealta tuntuvaan ongelmaan on saatu nyt jonkinlainen ratkaisu.

7.2 Merkitys lukuteoriassa

Riemannin ζ-funktiolla ja alkulukulauseella on hyvin suuri merkitys lukuteoriassa. Alkulukulause tarjoaa erilaisia sovelluksia lukuteorian tutkimusta varten, Riemannin hypoteesin seurauksia tutkitaan paljon ja teoriaa voi yleistää esimerkiksi aritmeettisten lukujonojen alkulukujen jakautumisen tutkimisessa.

Lukuteoriassa kokonaisluvun tekijöihinjaolla on suuri merkitys ja alkulukulauseen sovellukset mahdollistavat tietyin edellytyksin halutut ehdot täyttävien luonnollisten lukujen jakautumisen tutkimisen. Erityisesti *sileys-* ja *karkeusehtojen* määrääminen onnistuu asymptoottisesti.

Määritelmä 7.1. Luonnollinen luku n on *m-sileä*, jos jokainen luvun n jakava alkuluku p toteuttaa ehdon $p \leq m$. Vastaavasti luku n on *k-karkea*, jos jokainen luvun n jakava alkuluku q toteuttaa ehdon $k \leq q$.

Määritelmä 7.2. Olkoon ρ *Dickmanin funktio*, joka määritellään rekursiivisesti kaikilla $u \geq 0$ seuraavasti:

$$\begin{cases} \rho(u) = 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ \\ \frac{d}{du}(\rho(u)) = -\rho(u-1)/u, & u > 1. \end{cases}$$

Lause 7.3. Sileiden lukujen jakautumiselle on voimassa ehto

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ p|m \Longrightarrow p \leq x^{1/u}}} 1 \sim x\,\rho(u).$$

Todistus. (ks. [11]: pykälä 7.1, Theorem 7.2) □

Määritelmä 7.4. Olkoon ω *Buchstabin funktio*, joka määritellään rekursiivisesti kaikilla $u \geq 1$ seuraavasti:

$$\begin{cases} \omega(u) = 1/u, & 1 \leq u \leq 2 \\ \\ \frac{d}{du}(u\omega(u)) = \omega(u-1), & u > 2. \end{cases}$$

Lause 7.5. Karkeiden lukujen jakautumiselle on voimassa ehto

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ p|m \Longrightarrow p \geq x^{1/u}}} 1 \sim \frac{x}{\log x^{1/u}}\omega(u).$$

Todistus. (ks. [11]: pykälä 7.2, Theorem 7.11) □

7.2.1 Dirichlet'n L-funktioista

Aritmeettisissa lukujonoissa olevia alkulukuja voidaan tutkia ζ-funktiota yleistävillä L-funktioilla.

Määritelmä 7.6. Funktiota $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ kutsutaan *Dirichlet'n karakteriksi* modulo d, kun kaikilla $n \in \mathbb{N}$ se täyttää ehdot

$$\begin{array}{lrll} 1. & \chi(n) & = \chi(n+d), & \\ 2. & \chi(n) & = 0, & \text{kun } (n,d) > 1, \\ 3. & |\chi(n)| & = 1, & \text{kun } (n,d) = 1, \\ 4. & \chi(n)\chi(m) & = \chi(nm). & \end{array}$$

Määritelmä 7.7. *Dirichlet'n L-funktioksi* modulo d kutsutaan funktiota, jonka määrittelee kaava

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

kun χ on jokin Dirichlet'n karakteri modulo d.

L-funktioille voidaan yleistää useat tulokset, jotka on johdettu tässä tutkielmassa ζ-funktiolle. Niin sanottu *yleistetty Riemannin hypoteesi* tarkoittaa, että analyyttisesti jatketun L-funktion epätriviaaleilla nollakohdilla on aina sama reaaliosa. Dirichlet'n L-funktion tapauksessa se on hypoteesin mukaan aina $1/2$.

Analyyttisen lukuteorian ensimmäisiä saavutuksia 1800-luvulla oli lauseen 2.8 yleistys L-funktioilla. Tällä voitiin todistaa, että aritmeettisissa lukujonoissa, joissa on enemmän kuin yksi alkuku, on oltava äärettömän monta alkulukua. Tätä tulosta kutsutaan *Dirichlet'n alkulukulauseeksi* (ks. [11]: pykälä 4.3, Corollary 4.10). Lause voidaan siis todistaa osoittamalla, että tällaisten alkulukujen resiprookkisumma hajaantuu.

Erityisesti alkulukulause voidaan yleistää aritmeettisilla lukujonoilla määrittelemällä, että $\pi_{a,b}(x)$ on lukua x pienempien ja muotoa $b+an$ olevien alkulukujen lukumäärä, kun a ja b ovat kiinnitettyjä ja $(a,b) = 1$. Tällöin

$$\pi_{a,b}(x) \sim \frac{1}{\phi(a)} \mathrm{Li}(x),$$

missä ϕ on Eulerin ϕ-funktio (ks. [11]: pykälä 11.3).

A Tarkennukset

Tähän liitteessä on koottu tarkennuksia ja huomautuksia, joilla on tarkoitus selittää paremmin eräitä tutkielmassa olleita kohtia.

Pykälä 1.2.1

Fourier'n sarjat on yleisesti tunnettu tapa esittää jaksollisia funktioita trigonometristen sarjojen avulla. Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen ja tämän jakson pituus on T. Tällöin

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right),$$

missä

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \qquad \text{ja} \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \qquad \text{kun } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tällöin esimerkiksi desimaaliosan $\{x\}$ tapauksessa $T = 1$, $a_0 = 1$ ja

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x \cos(2\pi nx) dx = 0, \\ b_n &= 2 \int_0^1 x \sin(2\pi nx) dx = -\frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

eli silloin, kun $x \notin \mathbb{Z}$ on voimassa

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}.$$

Tapauksessa $x \in \mathbb{Z}$ edellä oleva kaava saa arvon $1/2$, koska $\sin(2\pi kx) = 0$ aina, kun $k, x \in \mathbb{Z}$.

Tasainen suppenevuus

Monisteen [7] todistukset tasaisesti suppeneville reaaliarvoisille funktioille voidaan yleistää myös kompakteissa osajoukoissa suppeneville kompleksisille funktioille, sillä itseisarvoepäyhtälöt pätevät niissäkin tapauksissa.

Lause A.1. Olkoon funktiojono (f_n) sellainen, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ tasaisesti. Tällöin f on jatkuva.

Todistus. (ks. [7]: Theorem 5.16) $\square$

Lause A.2. Olkoon derivoituvien funktioiden jono (f_n) sellainen, että $f_n \to f$ tasaisesti ja $f_n' \to g$ tasaisesti. Tällöin $f' = g$.

Todistus. (ks. [7]: Theorem 5.18) $\square$

Lauseesta A.2 seuraa, että jos tasaisesti suppenevan sarjan integroi termeittäin ja tämä sarja suppenee tasaisesti, niin tällöin alkuperäisen sarjan arvon integraali saa saman arvon kuin termeittäin integroinnissa.

Pykälä 4.2

$(*)$

Sarjojen tasaisesta suppenevuudesta seuraa, että johdettu esitysmuoto arvolle $\zeta'(s)/\zeta(s)$ on termeittäin derivoituva siten, että näiden derivaattafunktioiden summa on sarjan raja-arvofunktion derivaatta lauseen A.2 mukaan. Koska $\zeta'(s)/\zeta(s)$ on analyyttinen, niin tämä esitysmuoto on voimassa.

$(**)$

Sarjan tasaisesta suppenevuudesta seuraa, että se on termeittäin integroituva

$(***)$

Koska suppeneminen on tasaista, niin se voidaan integroida termeittäin, kuten kohdassa $(**)$.

Pykälä 4.3

Pykälän 4.3 kuvan 5 kuvaaja on piirretty sivulla www.desmos.com ja kuvaajaa voi tarkastella sivulla https://www.desmos.com/calculator/yixfqqoui3 (luotu 10.2.2020). Kuvaajan tarkastelussa komentorivillä parametri h on luku, jolla voi säätää huomioitavien nollakohtaparien lukumäärää 205:een pariin asti. Koordinaatiston pystyakseli on y-akseli ja vaaka-akseli x-akseli.

Kuvaajan piirtämisessä käytetyt ζ-funktion nollakohtien imaginääriosat on etsitty sivulta http://www.dtc.umn.edu/ odlyzko/zeta_tables/ [Andrew

Odlyzko: *Tables of zeros of the Riemann zeta function*: The first 100,000 zeros of the Riemann zeta function, accurate to within 3*10 ˆ (-9)] (luettu 10.2.2020).

B Γ-funktion identiteettien todistukset

Tässä liitteessä todistetaan Γ-funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

identiteetit (3), (4), (5) ja (6) sekä osoitetaan, että $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Todistuksien lähteenä on käytetty Jan-Hendrik Evertsen luentomonistetta [5].

Lause B.1. Seuraava identiteetti on voimassa:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Todistus. Oletetaan, että $\mathrm{Re}(s) > 0$. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x}dx &= \Big|_{x=0}^{\infty} -x^s e^{-x} + \int_0^\infty sx^{s-1}e^{-x}dx \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^s}{e^x} + s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \\ &= s\Gamma(s),\end{aligned}$$

mikä todistaa lauseen ja siten identiteetin (3). □

Identiteetin (4) osoittamista varten määritellään:

Määritelmä B.2. Olkoon Γ_n määritelty kaavalla

$$\Gamma_n(s) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}dx, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Tällöin erityisesti $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(s) = \Gamma(s)$.

Nyt osittaisintegroinnilla nähdään

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(s) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n-2)n^{n-1}} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right) x^{n+s-2}dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} n^s\end{aligned}$$

eli

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}, \tag{58}$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s} \frac{1\cdot 2\cdots n}{(s+1)\cdot(s+2)\cdots(s+n)} \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\right)^s \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s} \frac{1}{(1+s)\cdot(1+s/2)\cdots(1+s/n)} (1+1)^s \left(1+\frac{1}{2}\right)^s \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \\
&= \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa identiteetin (4) oikeaksi.

Seuraavaksi johdetaan (5) eli

$$\pi = \Gamma(1-s)\Gamma(s)\sin(\pi s), \qquad s \notin \mathbb{Z}$$

näyttämällä ominaisuutta (3) hyödyntämällä, että

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{\pi/2n}{\sin(\pi/2n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tämä riittää, koska edellisen yhtälön molemmat puolet ovat meroformisia, kun n korvataan kompleksisella muuttujalla, ja kummatkin puolet lähestyvät lukua 1, kun $n \to \infty$. Nyt

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(1+\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2n}\right) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{1/2n} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y} y^{-1/2n} dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} (x/y)^{1/2n} dx dy.
\end{aligned}$$

Tehdään sijoitus $u = x+y$ ja $v = x/y$. Tällöin $x = uv/(v+1)$ ja $y = u/(v+1)$. Laskemalla Jacobin determinantti

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v/(v+1) & u/(v+1)^2 \\ 1/(v+1) & -u/(v+1)^2 \end{vmatrix} = \frac{-u}{(v+1)^2}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(1+\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2n}\right) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} v^{1/2n} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du dv \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} v^{1/2n} \frac{u}{(v+1)^2} du dv \\
&= \int_0^\infty e^{-u} u du \int_0^\infty v^{1/2n} \frac{1}{(v+1)^2} dv \\
&= \int_0^\infty v^{1/2n} \frac{1}{(v+1)^2} dv.
\end{aligned}$$

Tehdään sijoitus $v = w^{2n}$, milloin osittaisintegroinnin mukaan

$$\int_0^\infty v^{1/2n} \frac{1}{(v+1)^2} dv = - \Big|_{v=0}^{\infty} \frac{v^{1/2n}}{v+1} + \int_0^\infty \frac{1}{2n} \frac{v^{1/2n-1}}{v+1} dv = \int_0^\infty \frac{dw}{w^{2n}+1}$$
$$= \frac{\pi/2n}{\sin(\pi/2n)},$$

mistä seuraa (5), josta puolestaan seuraa $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Lopuksi johdetaan identiteetti (6) eli ominaisuus

$$\Gamma(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

käyttämällä määritelmästä B.2 seurannutta ominaisuutta (58) seuraavasti:

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n!n^s}{2s(2s+2)\dots(2s+2n)}, \tag{59}$$

$$\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{s+1/2}}{(s+1/2)(s+3/2)\dots(s+n+1/2)}, \tag{60}$$

$$\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n!n^{s+1/2}}{(2s+1)(2s+3)\dots(2s+2n+1)}, \tag{61}$$

$$\Gamma(2s) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)! \cdot (2n+1)^{2s}}{2s(2s+1)\dots(2s+2n+1)}. \tag{62}$$

Nyt identiteettien (59), (61) ja (62) mukaan

$$\frac{2^{2s}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s)}$$
$$= 2^{2s} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{2n+2}(n!)^2 n^{2s+1/2}}{2s(2s+1)\dots(2s+2n+1)} \cdot \frac{2s(2s+1)\dots(2s+2n+1)}{(2n+1)! \cdot (2n+1)^{2s}} \right).$$

Koska

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2s}n^{2s}}{(2n+1)^{2s}} = \lim_{n\to\infty} e^{2s\log(2n/(2n+1))} = 1,$$

niin

$$\frac{2^{2s}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{2n+2}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!} \right) = C,$$

missä C on jokin vakio. Tällöin

$$C = \frac{2\Gamma(1/2)\Gamma(1)}{\Gamma(1)} = 2\sqrt{\pi} = \frac{2^{2s}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s)}$$

ja (6) seuraa, kun käytetään identiteettiä (3) ja tehdään sijoitus $s \to s/2$.

C Luvun 4 lemmojen todistuksia

Käydään tässä liitteessä von Mangoldtin kaavan johtamisessa käytettyjen integraaleihin liittyvien lemmojen 4.5, 4.6 ja 4.7 todistukset. Näissä todistuksissa alkuperäisissä lemmoissa esiintyvä integrandin muuttuja t on vaihdettu muuttujaksi x, koska t on varattu kompleksiluvun s imaginääriyksikölle. Tarkastellaan integraalia

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih} x^s \frac{ds}{s}, \qquad x>0, a>0.$$

Tapauksessa $0<x<1$ funktiolla x^s/s ei ole napaa alueella $\{a \le \mathrm{Re}(s) \le K, -h \le \mathrm{Im}(s) \le h\}$, kun K on suuri vakio. Tällöin Cauchyn integraalilauseen mukaan tämän funktion integroiminen kyseisen suorakulmion muotoisen alueen ympäri antaa tulokseksi nollan, joten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a+ih}^{K+ih} \frac{x^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{K-ih} \frac{x^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{K-ih}^{K+ih} \frac{x^s}{s} ds.$$

Yhtälön oikealla puolella viimeisimmän integraalin itseisarvon yläraja on $(2\pi)^{-1}(x^K/K)(2h)$. Kahden muun integraalin itseisarvon ylärajat ovat

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^K \frac{x^\sigma}{h} d\sigma = \frac{1}{2\pi}\Bigg|_{\sigma=a}^{K} \frac{x^\sigma}{h\log x},$$

milloin

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds\right| \le \frac{1}{\pi}\frac{|x^K - x^a|}{h|\log x|} + \frac{1}{2\pi}\frac{x^K}{K}2h.$$

Koska $0<x<1$ ja kun $K\to\infty$, niin epäyhtälön oikean puoleisin termi suppenee kohti nollaa. Lemman 4.5 tapaus $0<t<1$ on nyt todistettu.

Tapauksessa $x=1$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{ds}{s} &= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{h} \frac{dt}{a+it} \\
&= \lim_{h\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{h} \frac{a}{a^2+t^2}dt - i\frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{h}\frac{t}{a^2+t^2}dt\right) \\
&= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-h/a}^{h/a} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Koska

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{ds}{s}=\frac{1}{2\pi}\int_{-h/a}^{h/a}\frac{du}{1+u^2},$$

niin

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{ds}{s}-\frac{1}{2}\right|=O(1/h),$$

mikä oli käytetty ominaisuus pykälässä 4.1.

Seuraavaksi on vielä tutkittava vielä tapausta $x>1$, mikä on hyvin samanlainen kuin aiempi tapaus, jossa $0<x<1$. Tarkastellaan tasoa $\{-K\le \mathrm{Re}(s)\le a,\ -h\le \mathrm{Im}(s)\le h\}$, johon kuuluu piste $s=0$. Koska x^s/s on meroforminen tämän alueen sisällä ja sillä on napa kohdassa $s=0$, voidaan valitsemalla pieni $\delta>0$ integraalin laskemiseksi soveltaa Cauchyn integraalilausetta ja residylaskentaa:

$$\oint_{|s|=\delta}\frac{x^s}{s}ds=\oint_{|s|=\delta}\frac{e^{s\log x}}{s}ds=\oint_{|s|=\delta}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s\log x)^n}{n!}\right]ds=2\pi i,$$

eli integraalin arvoksi suorakulmion yli muodostuu 1. Siis

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{a+ih}^{-K+ih}\frac{x^s}{s}ds\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_{-K+ih}^{-K-ih}\frac{x^s}{s}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{-K-ih}^{a-ih}\frac{x^s}{s}ds=1,\end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}ds-1\right|&\le\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{a}\frac{x^\sigma}{h}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\frac{x^{-K}}{K}\cdot 2h+\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{a}\frac{x^\sigma}{h}d\sigma\\&=\frac{1}{\pi}\frac{x^a-x^{-K}}{h\log x}+\frac{1}{\pi}\frac{x^{-K}h}{K}.\end{aligned}$$

Siis kun $K\to\infty$, niin

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}ds-1\right|\le\frac{x^a}{\pi h\log x},\qquad a>0,x>1,$$

milloin lemman 4.5 kohdat ovat kaikki todistettuja. Lemman 4.6 todistus onnistuu käyttämällä lemmaa 4.5, sillä sijoittamalla $t=s-\beta$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{1}{s-\beta}x^s ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\beta-i\infty}^{a-\beta+i\infty}x^\beta x^t\frac{dt}{t}=\frac{x^\beta}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(a-\beta)-i\infty}^{\mathrm{Re}(a-\beta)+i\infty}x^t\frac{dt}{t}=x^\beta.$$

Vielä on siis todistettava lemmassa 4.7 käytetty arvio. Osittaisintegroinnin mukaan

$$\int \frac{x^s}{s} ds = \frac{x^s}{s \log x} + \int \frac{x^s}{s^2 \log x} ds,$$

milloin

$$\left| \int_{a+ic}^{a+id} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \left| \frac{x^{a+id}}{(a+id) \log x} \right| + \left| \frac{x^{a+ic}}{(a+ic) \log x} \right| + \frac{x^a}{\log x} \left| \int_c^d \frac{x^{it}}{(a+it)^2} dt \right|.$$

Koska $|a+id| \geq |a+ic| \geq (a+c)/\sqrt{2}$, niin epäyhtälön oikealla puolella olevien kahden ensimmäisen termin summan yläraja on $2\sqrt{2}x^a/((a+c) \log x)$. Kolmannen termin tapauksessa $|x^{it}| = 1$ ja siten

$$\begin{aligned}
\left| \int_c^d \frac{x^{it}}{(a+it)^2} dt \right| &< \int_c^\infty \frac{1}{a^2+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{1}{a^2+(c+t)^2} dt \\
&\leq \int_0^\infty \frac{1}{a^2+c^2+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{(a^2+c^2)^{1/2}}{a^2+c^2+[u(a^2+c^2)^{1/2}]^2} du \\
&= \frac{1}{(a^2+c^2)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} du \leq \frac{\sqrt{2}}{a+c} \cdot \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Eli

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a+ic}^{a+id} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(2\sqrt{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \frac{x^a}{(a+c) \log x},$$

milloin lemma 4.7 on todistettu.

D Bernoullin luvuista ja ζ-funktion arvoista kokonaislukupisteissä

Bernoullin luvuilla tarkoitetaan rationaalilukujen joukkoa, jolla on oleellinen yhteys esimerkiksi peräkkäisten luonnollisten lukujen potenssien summien laskemisessa. Tässä liitteessä näytetään kuinka Bernoullin luvut liittyvät ζ-funktion arvoihin sen kokonaislukupisteissä.

Määritelmä D.1. Bernoullin luvut generoi funktio

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!},$$

jossa B_n on järjestykseltään n. Bernoullin luku.

Tällöin esimerkiksi $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$ ja $B_4 = -1/30$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $B_{2n+1} = 0$. Bernoullin luvuilla voidaan muodostaa seuraava yhtälö:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \left[(-1)^j \binom{m+1}{j} B_j n^{m+1-j} \right],$$

kun $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$ (ks. [2]: pykälä 3.2, Theorem 3.2.4).

Yhteys ζ-funktion kokonaislukuarvoihin saadaan määritelmien D.1 ja 2.11 avulla kun lasketaan

$$\zeta(-n) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{-n}}{e^z - 1} \frac{dz}{z},$$

missä tie C kulkee äärettömyydestä aivan positiivisen reaaliakselin yläpuolella lähelle origoa, minkä jälkeen se pyörähtää vastapäivään origon ympäri ja palaa takaisin äärettömyyteen aivan positiivisen reaaliakselin alapuolella.

Koska n on kokonaisluku, niin tie C muuttuu δ-säteiseksi kiekoksi origon ympäri, sillä positiivisen reaaliakselin yläpuolen sekä alapuolen integraalit kumoavat toisensa. Tällöin

$$\zeta(-n) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m z^m}{m!} \right) \frac{(-z)^{-n}}{z} \frac{dz}{z}$$

Cauchyn integraalilauseen mukaan voidaan valita $\delta = 1$, milloin

$$\begin{aligned}\zeta(-n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[n! \frac{B_m}{m!} (-1)^n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^{m-n-1} d\theta \right] \\ &= n! \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

eli kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}. \tag{63}$$

Tällöin esimerkiksi

$$\zeta(-1) = -\frac{1/6}{2} = -\frac{1}{12} \tag{64}$$

ja tästä seuraa ζ-funktion funktionaaliyhtälön identiteetin (14) mukaan, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \zeta(-1)\pi^{3/2}\Gamma(-1/2) = \frac{\pi^2}{6}, \tag{65}$$

sillä identiteetin (3) mukaan $\Gamma(-1/2) = -2 \cdot \Gamma(1/2) = -2\pi^{1/2}$.

Lause D.2. Neliövapaiden luonnollisten lukujen osuus kaikista luonnollisista luvuista on $6/\pi^2$.

Todistus. Neliövapaiden luonnollisten lukujen suhteellinen osuus saadaan poistamalla ei-neliövapaiden lukujen osuus Eulerin tulokaavan ja arvon (65) avulla:

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

□

Kirjallisuutta

[1] Clay Mathematics Institute. *Millenium Problems* https://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis (luettu 6.8.2020)

[2] Coen Laura Elizabeth S. *Sums of Powers and the Bernoulli Numbers* Eastern Illinois University Masters Theses 1996.

[3] Conrey J. B. *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line* Journal für die reine und angewandte Mathematik. 399 (1989), 1-26

[4] Edwards H. M. *Riemann's Zeta Function* (1974) Dover ed 2001.

[5] Evertsen Jan-Hendrik. *Analytic Number Theory* Leiden University, Spring 2013, Chapter 8: Euler's Gamma function. http://www.math.leidenuniv.nl/∼evertse/ant13-8.pdf (moniste) (luettu 15.2.2020)

[6] Helge Niels & von Koch *Sur la distribution des nombres premiers* Acta Mathematica, Volume 24, s. 154-182, 1901.

[7] Hunter John K. *An Introduction to Real Analysis* Department of Mathematics, University of California at Davis 2012 https://www.math.ucdavis.edu/∼hunter/intro_analysis_pdf/ (moniste) (luettu 13.10.2020)

[8] Ivić Aleksandar *The Riemann Zeta-Function Theory and applications* Dover Publications inc. New York 2003.

[9] Jekel David *The Riemann Zeta Function* https://sites.math.washington.edu/∼morrow/336_13/papers/david.pdf. (moniste) (luettu 31.3.2018)

[10] Krantz Steven G. *Handbook of Complex Variables* Springer Science+Business Media 1999.

[11] Montgomery H. L & Vaughan R. C. *Multiplicative Number Theory 1. Classical Theory* Cambridge University Press 2007.

[12] Neuvonen Timo *Funktioteoria* Turun yliopisto 2015. (moniste)

[13] Schoenfeld Lowell *Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II* Mathematics of Computation, Volume 30, Number 134, s. 337-360, 1976.