Kaluzan-Kleinin -teoriat ja pimeä fotoni

Pro Gradu
Turun yliopisto
Teoreettinen fysiikka
2024
LuK Daniel Alvarez
Tarkastajat:
Dos. Iiro Vilja
Dos. Juha-Pekka Pellonpää

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan laitos

Alvarez, Daniel Kaluzan-Kleinin -teoriat ja pimeä fotoni

Pro Gradu, 81 sivua., 3 liites.
Teoreettinen fysiikka
Kesäkuu 2024

Työssä tarkastellaan Kaluzan-Kleinin teorioita (KK-teorioita), joissa nelidimensioinen aika- paikka-avaruusuus laajennetaan 4+D -dimensioiseksi avaruudeksi (monistoksi), mikä sisältää nelidimensioisen aika-paikka-avaruuden lisäksi d-dimensioisen kompaktin maksimaalisesti symmetrisen alimoniston.

KK-teorioille esitetään yleinen muotoilu ja tapa, miten 4+D-dimensioisesta gravitaatio teoriasta päästään nelidimensioisen avaruuden kenttäteoriaan, joka yhdistää yleisen suhteellisuusteorian ja Yangin-Millsin mittakenttäteoriat hyödyntäen (spontaania) kompaktifikaatiota. Erityisesti tarkastellaan KK-mallia $S^2 \times S^1 \times S'^1$, joka tuottaa mittaryhmän $SU(2)_W \times U(1)_Y \times U(1)_X$, joka voi antaa mahdollisuuden myonin anomaalisen magneettisen momentin ongelman ratkaisuun.

Asiasanat: Ylimääräiset ulottuvuudet, Kaluzan-Kleinin teoriat, Kompaktit monistot, Kompaktifikaatio, Pimeä fotoni, Myonin g-2 ongelma.

Sisällys

Yksiköt ja merkinnät

Tutkielmassa käytetään luonnollisia yksiköitä $\hbar = c = 1$, ellei toisin mainita. Metriikan signatuurina käytetään $(+, -, \ldots, -)$, jossa ajanluonteinen koordinaatti vastaa metriikan positiivista ominaisarvoa ja paikanluonteinen osa negatiivisia. Erityisesti tutkielmassa avaruuden laajennuksen kompaktit monistot ovat paikanluonteisia, jotka vastaavat metriikan signatuurin loppupään negatiivisia arvoja.

Einsteinin summaussääntö on voimassa, Neliulotteisen avaruusajan koordinaatteja merkitään käyttäen kreikkalaisia indeksejä μ, ν, ρ, ylimääräisten ulottuvuuksien koordinaatit indeksoidaan käyttäen indeksejä α, β ja teorian generaattorit indeksoidaan käyttäen indeksejä a, b, c, ellei toisin mainita.

Käyrän $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ derivaatalle käyräparametrin λ suhteen käytetään merkintää

$$\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \equiv \dot{x}^\mu(\lambda).$$

Tutkielmassa mittaustulokset ja niihin liittyvä epävarmuus esitetään käyttäen notaatiota

$$249(48) \times 10^{-11} = (249 \pm 48) \cdot 10^{-11},$$

jossa epävarmuuden mittana toimii 1 keskihajonta.

Kompleksikonjugaatti	$*$
Hermiittinen konjugaatti	$\dagger$
Määritelmän mukaan yhtäsuuri	$\equiv$
Osittaisderivaatta	$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ tai ∂_μ
Kovariantti derivaatta	∇_μ
d'Alembertin operaattori	$\Box$
Kommutaattori	$[A, B] = AB - BA$
Antikommutaattori	$\{A, B\} = AB + BA$
Christoffelin symboli	$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$
Riemannin tensori	$R^\lambda{}_{\tau\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\tau\mu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\tau\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\nu}$
Riccin tensori	$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$
Riccin skalaari	$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
Energiaimpulssitensori	$T_{\mu\nu}$
Weinbergin kulma	$\theta_W = \tan^{-1} \frac{g'}{g}$
Metriikan liittotensori	$g^{\mu\nu}$
Newtonin gravitaatiovakio	G_N
Sähkömagneettinen nelipotentiaali	A_μ
Sähkömagneettinen jännitystensori	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
Tyypin X-kentän virrantiheys	$\mathcal{J}^\mu_X$
Lorentzin voimalaki	$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{q}{m} F^\alpha_{\ \beta} \frac{dx^\beta}{ds}$

Johdanto

Kaluzan-Kleinin teoriat, jotka tunnetaan myös nimellä KK-teoriat, ovat kiehtovia lähestymistapoja maailmankaikkeuden laajempien ulottuvuuksien tutkimuksessa. Näiden teorioiden keskeinen ajatus on, että nelidimensioinen aika-avaruus voidaan laajentaa useampaan ulottuvuuteen, tarkemmin sanottuna 4+D-ulotteiseksi avaruudeksi. Tämä avaruuden laajennusosa, joka tunnetaan myös *ylimääräisenä ulottuvuutena* tai *ylimääräisenä monistona*, on neliulotteiseen teoriaan lisätty D-ulotteinen kompakti maksimaalisesti symmetrinen alimonisto. KK-teoriat tarjoavat ainutlaatuisen näkökulman gravitaation ja kenttäteorioiden yhdistämiseen, ja ne ovat merkittävässä asemassa sekä hiukkasfysiikassa että kosmologiassa.

Tutkielmassa esitellään yleinen muotoilu KK-teorioille ja kuvaillaan menetelmä, jolla 4+D-dimensioisesta gravitaatioteoriasta voidaan johdattaa nelidimensioisen avaruuden kenttäteoria. Tämä lähestymistapa yhdistää yleisen suhteellisuusteorian ja Yangin-Millsin mittakenttäteoriat hyödyntäen spontaania kompaktifikaatiota, jossa korkeampien ulottuvuuksien tilat "kompaktifioituvat" tai "kutistuvat" havaittaviin ulottuvuuksiin.

Erityistä huomiota kiinnitetään malliin $S^2 \times S^1 \times S'^1$, joka tuottaa mittaryhmän $SU(2)_W \times U(1)_Y \times U(1)_X$. Tämä malli on erityisen kiinnostava, koska se tarjoaa potentiaalisen ratkaisun myonin anomaalisen magneettisen momentin ongelmaan. Myonin magneettinen momentti on ollut yksi modernin fysiikan keskeisistä haasteista, ja KK-teorioiden tuomat uudet näkökulmat voivat olla avain tämän ongelman ratkaisemiseen.

1 Yangin-Millsin mittakenttäteoriat ja yleinen suhteellisuusteoria

Tämän luvun tarkoituksena on ensin tutustua klassisen kenttäteorian ja yleisen suhteellisuusteorian yleisiin periaatteisiin, jotta Kaluzan-Kleinin teorioiden tuoma uusi näkökulma olisi ymmärrettävissä. Aluksi tutustutaan Yangin-Millsin kenttäteorioiden muotoiluun ja esitetään standardimalli lyhyesti. Tämän jälkeen tutustutaan kaarevien avaruuksien geometriaan ja miten sitä sovelletaan yleisessä suhteellisuusteoriassa.

1.1 Lagrangen formalismi ja kentän liikeyhtälöt

Kenttä (merk. ϕ) on funktio, joka riippuu Minkowskin avaruuden pisteistä x^μ, eli $\phi = \phi(x)$. Kentällä ϕ voi olla useampi komponentti $\phi_a = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$, jolloin kyse on vektorikentästä (tai spinorista) ja mikäli komponentteja on vain yksi, on kyse skalaarikentästä. Esimerkkejä kentistä:

1. Sähkömagneettinen nelipotentiaali $A_\mu(x)$ (vektorikenttä)
2. Lämpötila $T = T(x)$ (skalaarikenttä)
3. Fluidin virtauskenttä $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$ (vektorikenttä)
4. Diracin kenttä $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ (spinorikenttä).

Kentän liikeyhtälöt muodostetaan diskreetin mekaniikan (pistemäisten kappaleiden) kanssa analogisella tavalla hyödyntämällä niin kutsuttua *pienimmän vaikutuksen periaatetta* [1].

Fysiikan muotoilu siis lähtee liikkeelle vaikutusfunktionaalista

$$S[\phi] = \int_V \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x)\, d^4x, \tag{1.1}$$

missä $\mathcal{L}$ on Lagrangen tiheys.

Kentän liikeyhtälöt saadaan etsimällä vaikutusfunktionaalin stationäärinen rata ts. kenttä ϕ, jolla funktionaalinen derivaatta häviää

$$\left.\frac{\delta S}{\delta \phi}\right|_{\phi} = 0, \tag{1.2}$$

alueen V sisällä, pitäen kentän ϕ arvon paikallaan alueen V reunalla ∂V. Olettaen, että vaikutusfunktionaali (1.1) ollaan annettu, voidaan varioida kentän liikeyhtälöt käyttäen ehtoa (3).

$$\begin{aligned}
0 = \delta S = \int_V \delta \mathcal{L}\, d^4x &= \int_V \sum_a \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a}\delta\phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a}\delta(\partial_\mu \phi_a) \right\} d^4x \\
&= \int_V \sum_a \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a}\delta\phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a}\delta\phi_a \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) \delta\phi_a \right\} d^4x \\
&= \int_V \sum_a \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) \right\} \delta\phi_a d^4x + \sum_a \int_V \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a}\delta\phi_a \right) d^4x,
\end{aligned}$$

jossa käyttämällä viimeiseen termiin divergenssilausetta saadaan [4]

$$\int_V \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a}\delta\phi_a \right) d^4x = \int_{\partial V} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a}\delta\phi_a dS_\mu^{(3)}.$$

Koska kenttä ϕ pidetään reunalla ∂V paikallaan eli $\delta\phi_a(x) = 0$, kun $x \in \partial V$ on tämä jälkimmäinen integraali $= 0$ ja jäljelle jää

$$0 = \int_V \sum_a \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) \right\} \delta\phi_a d^4x.$$

Koska variaatio alueen V sisällä on mielivaltainen, on integraali $=$ 0 silloin ja vain silloin kun

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) = 0. \tag{1.3}$$

Yhtälöitä (1.3) kutsutaan Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöiksi.

Yleisemmin vaikutus voi koostua useammasta eri kentästä esimerkiksi ϕ_a ja ψ_a. Tällöin kenttien Lagrangen tiheydet yhdistetään summana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\psi$, jolloin liikeyhtälöitä (1.3) voidaan soveltaa kummallekin kentälle erikseen. Mikäli kentät vuorovaikuttavat keskenään, tulee Lagrangen tiheyteen lisätä vuorovaikutustermi

$\mathcal{L}_{\phi\psi}$, jolloin Lagrangen tiheys on kokonaisuudessaan $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{\phi\psi}$. Tällöin varioiduissa liikeyhtälöissä esiintyy molemmat kentät. Myöhemmin esitetään periaate, jonka avulla vuorovaikutustermit "ilmestyvät" mukaan teoriaan.

1.2 Symmetrioista säilyviä suureita, Noetherin teoreema

Kun fysiikan teorioita lähdetään konstruoimaan, niin kiinnittyy huomio erityisesti teorian säilymislakeihin. Empiirisesti voitaisiin havaita että jokin asia systeemin sisällä säilyy ajassa ja tämän päälle voitaisiin rakentaa matemaattinen malli joka kuvaa systeemin fysiikkaa. Ongelmaksi kuitenkin muodostuu tilanne, jossa systeemin "rakenneosia" ei voi suoraan "nähdä". Tätä varten olisi teorian rakentamisen kannalta mukavaa löytää jokin fundamentaali periaate, johon kaikki säilymislait perustuisivat. Noetherin teoreema (Emmy Noether, 1915) [7] on teoria, joka tarjoaa kyseisen periaatteen. Noetherin teoreeman mukaan jokaista jatkuvaa symmetriaa kohden löytyy sitä vastaava säilyvä suure. Jotta teorian sisältö olisi ymmärrettävissä tulee ensin määritellä, mitä tarkoitetaan jatkuvalla symmetrialla.

Jatkuvalla symmetrialla tarkoitetaan Lagrangen formalismin yhteydessä infinitesimaalista muunnosta (koordinaatteihin ja/tai kenttään), joka jättää vaikutusfunktionaalin invariantiksi, ts. muunnoksissa [4]

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x), \tag{1.4}$$

$$\phi_a \to \bar{\phi}_a(x) = \phi_a(x) + \Delta\phi_a(x) \tag{1.5}$$

on $\delta S = S[\bar{\phi}] - S[\phi] = 0$. Oletetaan integroimisalueen reunan ∂V olevan kahden paikanluonteisen pinnan (ts. pinnan, jonka mielivaltaiselle kahdelle pisteelle x ja y, missä $x \neq y$ pätee $x \cdot y < 0$) unioni $\partial V = \tau_1 \cup \tau_2$, jolloin fysikaalinen kappale (joka liikkuu pitkin ajanluonteista käyrää) leikkaa pinnan kahdessa eri pisteessä kahtena eri ajanhetkenä. Vaatimalla, että kenttä ϕ toteuttaa liikeyhtälöt (1.3) saadaan suoralla laskulla

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= \delta \left(\int_V \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x) d^4x \right) \\
&= \int_V \left\{ d^4x \delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\delta(d^4x) \right\}.
\end{aligned}
$$

Tilavuuselementin variaatio on

$$
\delta(d^4x) = d^4\bar{x} - d^4x = Jd^4x - d^4x = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4x - d^4x = (\partial_\mu \delta x^\mu) d^4x.
$$

Sijoittamalla tämä edelliseen lausekkeeseen saadaan

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= \int_V \left\{ d^4x \delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(\partial_\mu \delta x^\mu) d^4x \right\} \\
&= \int_V d^4x \left\{ \sum_a \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \delta\left(\partial_\mu\phi_a\right) \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right\} + \mathcal{L}(\partial_\mu \delta x^\mu) d^4x
\end{aligned}
$$

Koska kentän ϕ oletetaan toteuttavan Lagrangen liikeyhtälöt (1.3) on

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \right),
$$

joka sijoittamalla edelliseen antaa

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_V d^4x \left\{ \sum_a \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \right) \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \delta\left(\partial_\mu\phi_a\right) \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \mathcal{L}(\partial_\mu \delta x^\mu) \right\} d^4x \\
&= \int_V d^4x \left\{ \partial_\mu \left(\sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \delta\phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \right) \right\} \equiv \int_V d^4x \left(\partial_\mu \mathcal{J}^\mu\right),
\end{aligned}
$$

johon soveltamalla divergenssilausetta saadaan

$$
\int_V d^4x \left(\partial_\mu \mathcal{J}^\mu\right) = \int_{\tau_1 \cup \tau_2} dS^{(3)}_\mu \ \mathcal{J}^\mu = \int_{\tau_1} dS^{(3)}_\mu \ \mathcal{J}^\mu - \int_{\tau_2} dS^{(3)}_\mu \ \mathcal{J}^\mu,
$$

jolloin erityisesti vakioajan pinnoille

$$
\int_{t_1} d^3x \ \mathcal{J}^0 - \int_{t_2} d^3x \ \mathcal{J}^0 = 0
$$

$$
\Longleftrightarrow
$$

$$
\frac{d}{dt} \left(\int_V d^3x \ \mathcal{J}^0 \right) = 0.
$$

On siis saatu symmetriamuunnosta $x \to x + \delta x$ ja $\phi \to \phi + \Delta\phi$ vastaava säilyvä suure, *Noetherin varaus*

$$J(t) = \int_V d^3x\ \mathcal{J}^0 \tag{1.6}$$

missä $\mathcal{J}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \delta\phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu$ on nk. säilyvä virta (Huomaa summaus yli indeksin a).

Noetherin teoreeman merkitystä ei voi riittävästi korostaa. Teorian vaikutusfunktionaalin ollessa annettuna, on teoreeman soveltamiseksi etsittävä symmetriamuunnokset, jotka pitävät vaikutusfunktionaalin invarianttina ja näin löytää teorian säilyvät suureet.

Lähestymisen voi kuitenkin suorittaa myös toiseesta suunnasta: Empiirisesti voidaan olla havaittu esimerkiksi liikemäärän ja energian säilyvän systeemissä. Tällöin konstruoidessa systeemiä kuvaavaa Lagrangen tiheyttä, voidaan suoraan rajata mahdollisten Lagrangen tiheyksien joukkoa (Lagrangen tiheydessä ei eksplisiittistä riippuvuutta aika -ja paikkakoordinaateista kuten edellä nähtiin).

Mutta entä jos empiirisesti oltaisiin havaittu, että systeemi sisältää hiukkasia, joista jotkut vuorovaikuttavat keskenään ja jotkut eivät? Tällaista käyttäytymistä tunnetusti mallinnetaan siten, että niillä hiukkasilla, jotka vuorovaikuttavat keskenään, on vuorovaikutuksen "tunteva" varaus, ja tämän varauksen määrä systeemissä ei muutu. Noetherin teoreema sanoo, että jatkuvasta symmetriasta seuraa säilyvä suure. Tämän johdosta herää kysymys, millainen vaikutusfunktionaalin symmetria saa aikaan varauksen säilymislain? Tätä varten tulee perehtyä tarkemmin Lien ryhmiin ja Lien algebroihin.

1.3 Symmetriat, Lien ryhmät ja Lien algebrat

Seuraavaksi tarkoituksena on tarkemmin luokitella mahdollisia symmetriamuunnoksia, joita koordinaateille x^μ ja kentälle ϕ voidaan tehdä.

1.3.1 Poincarén ryhmä

Olkoon $\mathcal{M}$ 4-dimensioinen Minkowskin avaruus ja olkoon x^μ ja $\bar{x}^\mu$ sen kaksi koordinatisointia. Suppean suhteellisuusteorian eräänä postulaattina on valonnopeuden riippumattomuus koordinaatistosta [2]. Tällöin sekä koordinaateissa x^μ että $\bar{x}^\mu$ Minkowskin avaruuden pisteitä P_1 ja P_2 yhdistävälle valosignaalille pätee

$$\eta_{\mu\nu}(x_2 - x_1)^\mu (x_2 - x_1)^\nu = 0, \tag{1.7}$$

$$\eta_{\mu\nu}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^\mu (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^\nu = 0, \tag{1.8}$$

missä $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ on *Minkowskin metriikka.*

Koska suppea suhteellisuusteoria käsittelee toistensa suhteen vakionopeudella liikkuvia fysikaalisia kappaleita, on koordinaatistojen x^μ ja $\bar{x}^\mu$ oltava toisistaan affiinin muunnoksen päässä, ts.

$$\bar{x}_i{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x_i^\nu + a^\mu, \qquad i = 1, 2. \tag{1.9}$$

Sijoittamalla (1.9) yhtälöön (1.8) ja vertailemalla saatua yhtälöön (1.7) nähdään, että muunnosmatriisin Λ tulee toteuttaa ehto:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta},$$

joka matriisimuodossa

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{1.10}$$

Näin ollaan päädytään joukkoon muunnosmatriiseja Λ, jotka muodostavat ryhmän matriisitulon suhteen.

$$O(1,3) = \{\Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}. \tag{1.11}$$

Joukkoa (1.11) varustettuna matriisitulolla kutsutaan Lorentzin ryhmäksi ja Lorentzin ryhmän ja translaatioiden yhdistettä (Puolisuoraa tuloa $\mathcal{P} = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1,3)$)

Poincarén ryhmäksi. Käytännössä ryhmä siis koostuu muunnoksista, jotka pitävät viivaelementin $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ paikallaan.

Lorentzin ryhmän sisältää kolmiavaruuden rotaatioista, paikan peilauksista, ajan peilauksesta ja akselien suuntaisista boosteista (aika -ja paikka-akselin "rotaatioista"). Kuitenkin ajan ja paikan peilaukset eivät ole jatkuvia symmetrioita vaan diskreettejä. Ottamalla ehdosta (1.10) puolittain determinantti saadaan

$$\mathrm{Det}\ \Lambda = \pm 1,$$

Koska identiteettimuunnoksen determinantti on 1, niin niillä muunnosmatriiseilla, jotka poikkeavat infinitesimaalisen vähän identiteettimuunnoksesta on oltava myös determinantti 1. Näin ollen diskreeteistä symmetrioista päästään eroon rajoittumalla niihin muunnosmatriiseihin, joiden determinantti on 1. Päädytään erityiseen Lorentzin ryhmään

$$SO(1,3) = \{\Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta,\ \mathrm{Det}\ \Lambda = 1\}. \tag{1.12}$$

1.3.2 Ortogonaaliryhmä ja erityinen ortogonaaliryhmä

Aivan analogisin askelin kuin suoritettiin päätyäksemme Lorentzin ryhmään, päädytään myös ortogonaaliryhmään ja erityiseen ortogonaaliryhmään. Ortogonaaliryhmä [1] koostuu niistä muunnoksista, jotka pitävät n-ulotteisen (Euklidisen-)avaruuden vektorin pituuden invarianttina eli säilyttävät neliömuodon:

$$s^2 = \delta_{ij}(x_1 - x_2)^i (x_1 - x_2)^j \qquad\qquad i, j = 1, 2, \ldots n.$$

Olkoon kahta koordinaatistoa $\bar{x}^\mu$ ja x^μ yhdistävän affiinin muunnoksen muunnosmatriisi M. Tällöin suorittamalla samat vaiheet mitä Lorentzin ryhmän kanssa, päädytään symmetriaryhmiin

$$O(n) = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid M^T M = I\}, \tag{1.13}$$

$$SO(n) = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid M^T M = I,\ \det M = 1\}. \tag{1.14}$$

1.3.3 Unitaariryhmä ja erityinen unitaariryhmä

Edellä esitettyjen symmetriaryhmien määrittelemiseen käytettyjen vektoriavaruuksien skalaarikuntana on ollut reaaliluvut. Kun skalaarikuntana on kompleksiluvut, vektoriavaruuden normiksi ei käy enää aikaisemmin esitetty $\sqrt{\mathbf{r}^T\mathbf{r}}$, vaan $\sqrt{(\mathbf{r}^T)^*\mathbf{r}}$, jonka neliö Diracin notaatiota käyttäen [1] on muotoa $|\langle\psi|\psi\rangle|^2$.

Kvanttimekaniikan systeemin tilanvektori on kompleksisen vektoriavaruuden vektori ψ, jonka normi on $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Systeemin tilan aikakehityksen (välillä $t \in (0, \epsilon)$) välittää lineaarioperaattori U, joka operoi systeemin tilaan luonnolliseen tapaan

$$\psi \to |\bar{\psi}\rangle = U(\epsilon)|\psi\rangle.$$

Tilan normi oltava kaikkina ajanhetkinä $= 1$, jolloin

$$1 = \langle\bar{\psi}|\bar{\psi}\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$U^\dagger U = I.$$

Näin ollen voidaan määritellä Unitaariryhmä, sekä erityinen unitaariryhmä

$$U(n) = \{U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I\}, \tag{1.15}$$

$$SU(n) = \{U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I,\ \det U = 1\}, \tag{1.16}$$

jotka siis koostuvat symmetriamuunnoksista, jotka pitävät tilanvektorin normin ykkösenä.

1.3.4 Lien Ryhmät ja Lien algebrat

Kun symmetriamunnosten määrittelyyn käytettävien vektoriavaruuksien dimensio n on ≥ 2, sisältyy symmetrioihin muunnoksia, jotka eivät ole jatkuvia. Näistä muunnoksista päästiin eroon rajoittumalla muunnoksiin, joiden determinantti oli $= 1$ (kuten Poincarén muunnosten yhteydessä nähtiin). Seuraavaksi perehdytään tarkemmin jatkuvien muunnosten rakenteeseen.

Erityisen tärkeäksi osoittautuu nk. yhtenäiset Lien ryhmät. Nämä ryhmät koostuvat symmetriamuunnoksista, jotka yhdistyvät identiteettialkioon äärellisen monen jatkuvan parametrin avulla, jotka parametrisoivat ryhmän alkion ja identiteettialkion välisen polun [3]. Matemaattisesti yhtenäinen Lien ryhmä G koostuu alkioista g, jotka riippuvat äärellisen monesta jatkuvasta parametrista $\mathcal{X}_a \in \mathbb{R},\ \forall a = 1, 2, \ldots d$, toteuttaen ehdot:

- $g(0) = I$ (i)
- $g(\mathcal{X}_a)$ on äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituva parametrien $\mathcal{X}_a$ suhteen, missä $\mathcal{X}_a \in \mathbb{R}^d$. (ii)

Näin ollen voidaan mielivaltainen ryhmän G alkio g kehittää sarjaksi

$$\begin{aligned} g(\mathcal{X}) &= I + \frac{\partial g}{\partial \mathcal{X}_a}\mathcal{X}_a + \frac{\partial^2 g}{\partial \mathcal{X}_b \partial \mathcal{X}_c}\mathcal{X}_b\mathcal{X}_c + \mathcal{O}(\mathcal{X}^3) \\ &\equiv I + it^a\mathcal{X}_a + t^{bc}\mathcal{X}_b\mathcal{X}_c + \mathcal{O}(\mathcal{X}^3). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Sarjakehitelmä voidaan tehdä kaikille yhtenäisten Lien ryhmien alkioille, mutta mikä tekijä sarjakehitelmässä määrää eri Lien ryhmien rakenteen?

Helpoin tapa vastata kysymykseen on lähestyä sitä johdattelevalla esimerkillä, tason rotaatioilla. Tason rotaation määräävä parametri on rotaatiokulma ja ryhmäoperaationa on rotaatioiden yhdistäminen eli kulmien summaaminen

$$g(\alpha)g(\beta) = g(\alpha + \beta). \tag{1.18}$$

Tämä määrittelee tason rotaation rakenteen. Yleisemmin vastaavanlainen rakenne voidaan määrätä Lien ryhmätulolle

$$g(\mathcal{X})g(\bar{\mathcal{X}}) = g(f(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}})), \tag{1.19}$$

missä $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Ehdon (i) nojalla on oltava $f(0, \bar{\mathcal{X}}) = \bar{\mathcal{X}}$ ja $f(\mathcal{X}, 0) = \mathcal{X}$, jolloin $f(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}})$:n sarjakehitelmä on oltava muotoa

$$f_a(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}) = \mathcal{X}_a + \bar{\mathcal{X}}_a + \frac{1}{2}C_a^{bc}\mathcal{X}_b\bar{\mathcal{X}}_c + \ldots \tag{1.20}$$

Suorittamalla (1.17) mukainen sarjakehitelmä puolittain yhtälön (1.19) kuhunkin ryhmän alkioon ja sijoittamalla parametrin f tilalle (1.20) ja vertaamalla termejä nähdään, että nollannen ja ensimmäisen kertaluvun termien kertoimet ovat samat, mutta toisen kertaluvun termien $(\mathcal{X}_b \bar{\mathcal{X}}_c)$ kertoimista saadaan

$$t^{bc} = -t^b t^c - iC_a^{bc} t^a.$$

Toisaalta koska $t^{bc} = t^{cb}$ saadaan

$$[t^b, t^c] = i f_a^{bc} t^a, \tag{1.21}$$

missä $f_a^{bc} \equiv C_a^{cb} - C_a^{bc}$. Yhtälöä (1.21) kutsutaan rakenneyhtälöksi ja se määrittelee Lien ryhmän nk. Lien algebran.

Yhtälö (1.21) antaa kommutointisäännön sarjakehitelmän ensimmäisen kertaluvun derivaatoille. Koska nämä termit riittävät määräämään korkeampien kertalukujen termit, kutsutaan niitä *generaattoreiksi*. Se miten generaattorit generoivat ryhmän mielivaltaisen alkion nähdään esimerkiksi abelisessa tapauksessa seuraavasti:

Palataan taas tason rotaation rakenneyhtälöön (1.18) ja valitaan $\alpha = \beta = x$, jolloin saadaan

$$g(x)g(x) = g(2x).$$

Derivoimalla puolittain x:n suhteen kahdesti $x = 0$ ympäristössä saadaan

$$g''(0) = g'(0)^2$$

ja aivan samaan tapaan voidaan osoittaa korkeamman kertalukujen derivaatoille pätevän

$$g^{(n)}(0) = g'(0)^n.$$

Näin ollen tason rotaatioita kuvaavan symmetriaryhmän alkio $g(x)$ voidaan esittää Taylorin sarjana

$$g(x) = \sum_n \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_n \frac{g'(0)^n}{n!} x^n = \sum_n \frac{(-g'(0)i \cdot ix)^n}{n!} = e^{itx},$$

missä $t \equiv -g'(0) \cdot i$.

Saatu Lien ryhmän alkion esitysmuoto tuo esille Lien ryhmien todellisen voiman. Voidaan osoittaa, että minkä tahanasa Lien ryhmän G alkio g voidaan esittää muodossa [3]

$$g = e^{i\mathcal{X}_a t^a}, \tag{1.22}$$

missä ryhmän generaattorit ovat t^a ja kertoimet $\mathcal{X}_a$ ovat reaalisia parametreja.

Tähän mennessä on esitetty symmetriaryhmät niiden abstrakteissa muodoissaan, mutta todellisuudessa ryhmien alkiot *operoivat* jossakin joukossa, joka koostuu *geometrisista* objekteista. Tämän takia ryhmän alkiot *esitetään* käyttäen matriiseja, jotka operoivat luonnollisella tavalla joukon objekteihin (skalaareihin, vektoreihin, spinoreihin).

Ryhmän alkioiden esittäminen matriiseilla edellyttää matriiseilta ryhmän rakenteen toteuttamista. Edellä kuitenkin nähtiin, että ryhmän rakenteen määrää generaattorien Lien algebra (1.21). Näin ollen ryhmän (d-dimensioinen) esitys on lineaarikuvaus $R : G \to \mathcal{M}_{d\times d}$, jossa ryhmän G generaattorien t^a kuvat T^a toteuttavat ehdon (1.21).

Mielivaltaisen Lien ryhmän alkion g d-dimensioinen esitysmatriisi $U(g)$ saadaan eksponenttifunktion avulla

$$U(g) = e^{i\mathcal{X}_i T^i}, \tag{1.23}$$

missä matriisit iT^i ovat esityksen generaattorit.

Edellä esitettyjen symmetriaryhmien $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ Lien algebrat ovat [4]

$$\begin{aligned} o(n) &= \{it^a \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid t^T = -t\}, \\ so(n) &= \{it^a \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid t^T = -t, \mathrm{tr}\ t = 0\}, \\ u(n) &= \{it^a \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid t^\dagger = t\}, \\ su(n) &= \{it^a \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid t^\dagger = t, \mathrm{tr}\ t = 0\}. \end{aligned}$$

Helposti nähdään käyttämällä hyväksi eksponenttifunktiota koskevaa kaavaa [4]

$$\det\ e^M = e^{\mathrm{tr}\ M}$$

että eksponoimalla algebrojen ehdot päädytään vastaaviin Lien ryhmän ehtoihin.

1.4 Yangin-Millsin mittakenttäteoria ja standardimalli

Tässä alaluvussa tarkastellaan lyhyesti kuinka Yangin-Millsin mittakenttäteorioihin päädytään ja esitetään pintapuoleisesti standardimalli. Tutkielman tarkoituksena ei ole paneutua syvällisesti standardimallin rakenteeseen, mutta oleellista on ymmärtää kuinka symmetriaryhmät $SU(3)$, $SU(2)$ ja $U(1)$ siihen liittyvät.

1.4.1 Diracin yhtälö ja $U(1)$-invarianssi

Etsiessä Lorentz-invarianttia kvanttimekaanista teoriaa elektronille (ts. spin-$\frac{1}{2}$ hiukkaselle), päätyi Paul Dirac vuonna 1928 [6] johtamaan hänen mukaansa nimetyn Diracin yhtälön

$$i\partial\!\!\!/\psi - m\psi = 0, \tag{1.24}$$

missä $\psi = (\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4)^{\mathrm{T}}$ ja $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$ jossa γ^μ ovat niin kutsuttuja Diracin matriiseja, jotka toteuttavat antikommutaattoriehdon

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\ . \tag{1.25}$$

Lagrangen tiheys, josta kyseinen yhtälö saadaan johdettua käyttämällä Euler-Lagrangen yhtälöitä on

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{1.26}$$

missä $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ on *Diracin konjugaattispinori.*

Diracin yhtälöä kuvaavalla Lagrangen tiheydellä on $U(1)$-symmetria

$$\psi \to \psi' = e^{iq}\psi, \tag{1.27}$$

missä $q \in \mathbb{R}$ on vakio. Tämä vastaa muunnosta, jossa kaikissa avaruusajan pisteissä x^μ tehtäisiin sama vaihemuunnos, ts. kyseessä on *globaali* symmetria. Halutaan kuitenkin, että teorialla olisi vastaava *lokaali* symmetria, jolloin muunnokselta vaaditaan riippuvuutta avaruusajan pisteestä x^μ. Tällöin muunnos voidaan esittää muodossa

$$\psi \to \psi' = e^{iq\mathcal{X}(x)}\psi. \tag{1.28}$$

Tällöin kuitenkaan Lagrangen tiheys (1.26) ei ole enää invariantti. Ongelma ilmenee derivaatta-termeistä, koska perinteinen derivaattaoperaattori ei kommutoi muunnoksen $e^{iq\mathcal{X}(x)}$ kanssa. Ongelma saadaan korjatuksi korvaamalla perinteinen derivaatta ns. *kovariantilla derivaatalla*

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu, \tag{1.29}$$

missä A_μ on teoriaan mukaan otettu uusi (toistaiseksi määrittelemätön) vektorikenttä. Nyt voidaan vapaasti vaatia, että näin määritelty operaattori kommutoi $e^{i\mathcal{X}(x)}$ kanssa jolloin tehtäväksi tulee ratkaista, kuinka vektorikentän A_μ tulee muuntua, jotta kommutointiehto toteutuu.

$$D'_\mu(e^{iq\mathcal{X}(x)}\psi) = e^{iq\mathcal{X}(x)}D_\mu\psi$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\partial_\mu - iqA'_\mu)(e^{iq\mathcal{X}(x)}\psi) = e^{iq\mathcal{X}(x)}(\partial_\mu - iqA_\mu)\psi,$$

josta muutaman välivaiheen jälkeen saadaan ratkaistua

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\mathcal{X}. \tag{1.30}$$

Saatu muuntumissääntö on sähködynamiikasta tuttu *2. lajin mittamuunnos*, jonka suhteen sähkömagneettinen kenttätensori $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ on invariantti. Näin ollen lokaalin teorian vaatimus pakottaa sisällyttämään teoriaan sähkömagneettisen kentän A_μ, joka toimii sähköisen vuorovaikutuksen (voiman) välittäjänä. Tämä nähdään uudesta lokaalista Lagrangen tiheydestä

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\bar{\psi}\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi,\end{aligned}$$

mihin on nyt vapaan kentän lisäksi ilmestynyt vuorovaikutustermi, jonka edessä oleva kerroin q kuvaa kuinka voimakkaasti kentät vuorovaikuttavat keskenään, ts. *varaus*. Hyödyntämällä Noetherin teoreemaa voidaan osoittaa, että todellakin kyseinen varaus on symmetriamuunnosta (1.28) vastaava säilyvä suure.

Koska halutaan, että myös sähkömagneettinen kenttä olisi dynaaminen, on Lagrangen tiheyteen lisättävä myös sitä kuvaava dynaaminen termi. Vaihtoehtona olisi käyttää spin-1 hiukkasen Lagrangen tiheyttä (Procan yhtälö)

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \tag{1.31}$$

ja mikäli halutaan pitää kiinni *lokaalin mittainvarianssin* vaatimuksesta, on massatermin oltava $= 0$. Tällöin Lagrangen tiheys kokonaisuudessaan saa muodon

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &= i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + q\mathcal{J}^\mu A_\mu,\end{aligned} \tag{1.32}$$

missä $\mathcal{J}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ on (spinori)virran tiheys. Näin on johdettu materian ja sähkömagneettisen kentän vuorovaikutusta kuvaava teoria.

1.4.2 Yangin-Millsin mittakenttäteoria

Edellä esitettiin *lokaalin mittainvarianssin* vaatimus $U(1)$-muunnoksessa, jonka seurauksena teoriaan oli lisättävä *massaton* vektorikenttä (spin-1 hiukkanen) kovariantin derivaatan yhteydessä. Tämän seurauksena saatiin teoriaan vuorovaikutustermi mittakentänkentän ja Diracin spinorin välille. Näin pystyttiin luomaan Noetherin teoreeman kanssa sovussa oleva (sähkö-)varauksen säilymislaki. Chen Ning Yang ja

Robert Mills yleistivät lokaalin mittainvarianssin ideaa epäkommutatiiviselle ryhmille $SU(n)$, joiden avulla saatiin luotua myös useamman eri lajin varauksen säilymislait.

Yleistys lähtee liikkeelle oletuksesta, että (edellisestä poiketen) yhden Diracin kentän ψ sijaan teoriaan otetaan mukaan d Diracin kenttää $\{\psi_j\}$, missä $j = 1, \ldots, d$ ja missä kullakin kentällä on 4 komponenttia. Tällöin systeemiä kuvaava Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = i \sum_j \left(\bar{\psi}_j \partial\!\!\!/ \psi_j - m_j \bar{\psi}_j \psi_j \right). \tag{1.33}$$

Merkitään Diracin kenttien joukkoa kollektiivisesti pystyvektorina $\psi = (\psi_1, \ \ldots, \psi_d)^\intercal$. Näin määriteltynä Lagrangen tiheys saadaan kirjoitettua $U(1)$ tilanteen kanssa saman näköiseen muotoon

$$\mathcal{L} = i \left(\bar{\psi} \partial\!\!\!/ \psi - m \bar{\psi} \psi \right), \tag{1.34}$$

missä $m = diag(m_1, \ldots, m_d)$. Nyt Lagrangen tiheys (1.34) on invariantti globaalin $SU(n)$-mittamuunnoksen alla.

$SU(n)$:n alkio g operoi näin määriteltyyn pystyvektoriin ψ

$$\begin{aligned} \psi \to \psi' &= e^{i\mathcal{X}_a T^a} \psi \\ &\equiv U(g)\psi, \end{aligned} \tag{1.35}$$

missä matriisit iT^a ovat $SU(n)$:n d-dimensioisen esityksen generaattorit. Kentän ψ sanotaan kuuluvan symmetriaryhmän $SU(n)$ d-dimensioiseen esitykseen.

Näin määritelty Lagrangen tiheys ei ole kuitenkaan invariantti lokaalissa mittamuunnoksessa

$$\begin{aligned} \psi \to \psi' &= e^{i\mathcal{X}_a(x) T^a} \psi \\ &= U(g(x))\psi \equiv U(x)\psi. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Korvaamalla perinteisen derivaattaoperaattorin kovariantilla derivaatalla

$$
\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu - igA^i_\mu T^i \\
&\equiv \partial_\mu - igA_\mu,
\end{aligned}
$$

ja vaatimalla vektorikenttien A^i_μ muuntuvan siten, että $D_\mu\psi$ kuuluu samaan esitykseen, kuin kenttä ψ itse, ts.

$$
\begin{gathered}
D'_\mu\psi' = U(x)D_\mu\psi \\
\Longleftrightarrow \\
(\partial_\mu - igA'_\mu)U(x)\psi = U(x)(\partial_\mu - igA_\mu)\psi,
\end{gathered}
$$

saadaan muutaman rivin laskun jälkeen mittakentän A_μ muuntumissääntö

$$
A'_\mu = U(x)A_\mu U(x)^{-1} + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U(x)^{-1} \tag{1.37}
$$

$$
\Longleftrightarrow
$$

$$
A^i_\mu{}' T^i = U(x)A^i_\mu T^i U(x)^{-1} + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U(x)^{-1}.
$$

Mittakentille dynaaminen termi määritellään mittakenttätensorien avulla. Mittakenttätensori määritellään analogisesti Riemannin kaarevuustensorin kanssa kovarianttien derivaattojen kommutaattorina

$$
\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \left(\partial_{[\mu}A_{\nu]} - ig[A_\mu, A_\nu]\right) \equiv F_{\mu\nu},
$$

missä $\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)T^i$ sekä $[A_\mu, A_\nu] = A^i_\mu A^j_\nu[T^i, T^j]$ $= A^i_\mu A^j_\nu f^{ijk}T^k$, jolloin kenttätensori voidaan kirjoittaa muodossa

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \left(\partial_{[\mu}A^k_{\nu]} - igA^i_\mu A^j_\nu f^{ijk}\right) T^k \\
&= F^k_{\mu\nu}T^k,
\end{aligned}
$$

jossa f^{ijk} ovat rakennevakioita yläindeksimuodossa kirjoitettuna. Abelilaisessa tapauksessa rakennevakiot ovat $= 0$, jolloin mittakenttätensori redusoituu sähkömagneettiseksi kenttätensoriksi.

Mittakenttien dynaaminen termi määritellään analogisella tavalla Proca-Lagrangen tiheyden dynaamisen termin kanssa

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}].$$

Mikäli halutaan pitää kiinni lokaalin mittainvarianssin vaatimuksesta, niin massatermin, joka on muotoa $\frac{1}{2}m^2\mathrm{tr}[V_\mu V^\mu]$, sisällyttäminen Lagrangen tiheyteen ei ole mahdollista. Kuitenkin esimerkiksi heikon vuorovaikutuksen välittäjähiukkasten $\mathrm{W}^\pm$ ja Z^0 tiedetään olevan massiivisia. Teoriasta nimittäin puuttuu vielä eräs vapausaste, jota käsitellään seuraavaksi.

1.4.3 Higgsin mekanismi ja spontaani symmetriarikko

Spontaani symmetriarikko perustuu käytännössä siihen että systeemin perustilat eivät jaa yhtä laajaa symmetriaa, kuin varsinaisen teorian matemaattinen rakenne. Higgsin mekanismi on spontaanin symmetriarikon idean soveltamista mittakenttäteoriaan. Tämän seurauksena kentän dynamiikka perustilan ympärillä voi muistuttaa harmonisen oskillaattorin dynamiikkaa ts. kuin sillä olisi efektiivinen massa. Mekanismin aikaansaaminen matemaattisesti perustuu sopivan potentiaalitermin valintaan [1, 4, 5].

Olkoon ϕ skalaarikenttä ja A_μ mittakenttä. Tällöin lokaalin invarianssiehdon toteuttava Lagrangen tiheys on muotoa

$$\mathcal{L} = [D^\mu\phi]^\dagger D_\mu\phi - V(\phi^\dagger\phi) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]. \tag{1.38}$$

Lagrangen liikeyhtälöiksi saadaan kentille ϕ ja A_μ

$$D^\mu D_\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi^\dagger} = 0, \tag{1.39}$$

$$D_\nu F^{i\nu\mu} - ig\left[\phi^\dagger T^i D^\mu\phi - (D^\mu\phi)^\dagger T^i\phi\right] = 0. \tag{1.40}$$

Oletetaan, että on olemassa vakioratkaisu $\phi_0 \neq 0$, jolle

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\phi^\dagger}\right|_{\phi=\phi_0} = 0. \tag{1.41}$$

Tällöin $\phi = \phi_0$ ja $A_\mu = 0$ ratkaisee liikeyhtälöt.

Fysikaalisesti mielenkiintoinen ilmiö syntyy, kun $\exists g \in G$, jolle

$$g\phi_0 \neq \phi_0 \tag{1.42}$$

Sanotaan, että on tapahtunut spontaani symmetriarikko.

Ryhmässä on kuitenkin alkioita, jotka säilyttävät symmetrian, esimerkiksi identiteettialkio I, mutta niitä voi olla useampi. Alkiot, joille $g \cdot \phi_0 = \phi_0$, muodostavat ryhmän G aliryhmän, ns. *stabiliteettiryhmän*

$$H = \{g \in G \mid g \cdot \phi_0 = \phi_0\}, \tag{1.43}$$

ja sanotaan ryhmän G hajonneen spontaantisti stabiliteettiryhmäksi H, merkitään $G \to_{\phi_0} H$. Stabiliteettiryhmä sisältää aina vähintään identiteettialkion I.

Koska standardimallissa käytettävät ryhmät ovat jatkuvia, on käytännön kannalta mahdotonta ratkaista stabiliteettiryhmän H alkioita käymällä läpi kaikki ryhmän G alkiot ja tarkastamalla toteuttavatko ne stabiliteettiryhmän ehdon. Kuitenkin, koska G on Lien ryhmä, on sen alkioilla esitys muodossa (1.23). Tällöin stabiliteettiryhmän ehdosta saadaan

$$\begin{aligned} e^{i\mathcal{X}_a T^a}\phi_0 &= \phi_0 \\ &\Longleftrightarrow \\ (I + (iX_a T^a) + \dots)\,\phi_0 &= \phi_0 \\ &\Longleftrightarrow \\ T^a\phi_0 &= 0 \quad \forall a = 1, \dots, n_H \end{aligned} \tag{1.44}$$

Näin saadaan stabiliteettiryhmä ratkaistua äärettömän monen alkion läpikäynnin sijaan tutkimalla ryhmän G äärellisen monen generaattorin operointia systeemin perustilaan, ns. *vakuumiin.*

Ehdon (1.44) toteuttavien generaattoreiden sanotaan *annihiloivan* vakuumin ja kyseisiä generaattoreita kutsutaan *rikkoutumattomiksi* (Unbroken) ja niitä generaattoreita, joille $T^i\phi_0 \neq 0, \quad i = n_H + 1, \dots n_G$ kutsutaan *rikkoutuneiksi* (Broken).

Kun tarkastellaan dynamiikkaa perustilan ympäristössä, havaitaan mikä seuraus symmetrian rikkoutumisella on. Tätä varten tarkastellaan siirrettyä kenttää φ (shifted field), jossa $\phi = \phi_0 + \varphi$. Tutkimalla skalaarikentän kineettistä termiä ja sijoittamalla siirretty kenttä skalaarikentän tilalle saadaan muutaman välivaiheen jälkeen termi muotoon

$$[D^\mu \phi]^\dagger D_\mu \phi = D^\mu \varphi^\dagger D_\mu \varphi + \frac{1}{2} g^2 A^i_\mu A^{j\mu} \phi_0^\dagger \{T^i, T^j\} \phi_0 + \dots \tag{1.45}$$

missä $i, j = 1, \dots, n_G$. Kuitenkin osa generaattoreista annihiloi vakuumin, jolloin jäljelle jää vain rikkinäisten generaattorien antikommutaattoritermit $\frac{1}{2} g^2 A^a_\mu A^{b\mu} \phi_0^\dagger \{T^a, T^b\} \phi_0$, missä $a, b = n_H + 1, \dots, n_G$.

Merkitään $(\mathbf{m}^2)^{ab} = g^2 \phi_0^\dagger \{T^a, T^b\} \phi_0$, joka on symmetrinen matriisi. Reaalisena symmetrisenä matriisina se voidaan diagonalisoida, jolloin uudelleen määrittelemällä mittakentät A_μ saadaan aikaiseksi $n_G - n_H$ kappaletta massallisia mittakenttiä. Näin ollen kytkemällä skalaarikenttä mittakenttien kanssa samaan teoriaan saadaan tuotettua mittabosoneille massat.

Goldstonen teoreeman mukaan potentiaalitermistä saadaan vastaavasti yhtämonta massatonta Goldstonen bosonia (skalaarikenttää).

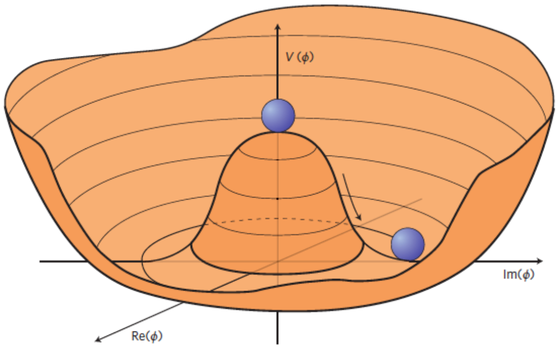
Skalaarikenttä voidaan esittää muodossa [4, 5]

$$\phi = e^{i\theta_a T^a} (\phi_0 + \varphi), \tag{1.46}$$

missä kentät θ_a ovat Goldstonen bosoneja, ts. kentän vapausasteet säilyvän symmetrian suuntaan ja taas φ on kentän vapausaste suuntaan, jossa symmetria ei säily, joka on siis kohtisuorassa Goldstonen bosonien värähtelyn suuntaa, (ks. kuva 1). Suorittamalla mittamuunnos

$$\phi \to e^{-i\theta_a T^a} \phi, \tag{1.47}$$

saadaan kierrettyä pois epäfysikaaliset Goldstonen bosonit.



Kuva 1. Meksikolainen hattupotentiaali. Kuvassa massattomat kentät vastaavat värähtelyjä hatun pohjan ympäri ja massalliset vapausasteet vastaavat "kiipeämistä" potentiaalissa [Kuvan lähdesivu: https://cds.cern.ch/record/2012465/plots (6.4.2024).

1.4.4 Standardimalli pähkinänkuoressa

Tähän mennessä on esitetty kaikki tarvittavat työkalut *Standardimallin* esittämiseen klassisella tasolla. Standardimalli on lokaali Yangin-Millsin kenttäteoria ja se koostuu värisektorista $SU(3)_c$ ja sähköheikosta sektorista $SU(2) \times U(1)_Y$. Taulukkoon I. on ryhmitelty hiukkaset, niitä kuvaavat kentät ja niiden esityksen dimensio mittaryhmien $SU(3)$ ja $SU(2)_L$ alla. $U(1)$ sarakkeen alle on listattu kunkin hiukkastyypin kantaman hypervaraus.

Taulukko I. Taulukko standardimallin kentistä ja niiden esityksistä kunkin symmetriaryhmän suhteen [4]. Lihavoitu fontti ryhmien $SU(3)_c$ ja $SU(2)_L$ alla tarkoittaa kenttien esitystä kyseisen ryhmän suhteen. Sarakkeen $U(1)_Y$ alle on listattu kunkin kentän kantaman hypervarauksen suuruus.

Hiukkanen	Kenttä	SU(3)$_c$	SU(2)$_L$	U(1)$_Y$
Vasenkätiset leptonit	l^i_L	**1**	**2**	-1
Oikeakätiset leptonit	r^i_R	**1**	**1**	-2
Vasenkätiset kvarkit	q^{ia}_L	**3**	**2**	$\frac{1}{3}$
oikeakätiset kvarkit (u)	q^{ia}_{uR}	**3**	**1**	$\frac{4}{3}$
oikeakätiset kvarkit (d)	q^{ia}_{dR}	**3**	**1**	$-\frac{2}{3}$
Higgsin kenttä (Skalaari)	Φ	**1**	**2**	1

1.5 Yleinen suhteellisuusteoria ja sen matemaattinen rakenne

Edellä on esitetty matemaattinen rakenne, jolla kuvataan kolmea fundamentaalista voimaa: vahvaa, heikkoa ja sähkömagneettista vuorovaikutusta. Tässä alaluvussa perehdytään neljännen voiman kuvaamiseen käytettävään matemaattiseen rakenteeseen ja esitetään kentän vaikutus, ns. Einstein-Hilbertin vaikutus.

1.5.1 Metriikka ja Geodeettisen viivan yhtälö

Aikaisemmassa alaluvussa kuvattiin matemaattisesti heikko, vahva ja sähkömagneettinen vuorovaikutus. Matemaattinen malli perustuu yksinkertaistetusti kenttiin, joilla on paikka -ja aikariippuvuus ja joiden Lagrangen tiheydet rakennettiin säilyttämään $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ symmetria lokaalisti valitsemalla sopivat esitykset kullekin hiukkaselle näiden ryhmien alla, kuten taulukossa I.

Gravitaatio on voimana erilainen kuin kolme edellistä. Gravitaatio on aika-avaruuden kaarevuutta ja siis itse aika-avaruuden ominaisuus. Materia (aine ja energia) kertoo aika-avaruudelle, kuinka kaareutua, ja avaruuden kaarevuus kertoo materialle, kuinka liikkua.

Gravitaatioyhtälöiden muodostaminen perustuu yleisen kovarianssin periaatteelle, jonka mukaan fysiikkaa kuvaavien yhtälöiden muoto tulee olla riippumaton käytettävästä koordinaattijärjestelmästä. Tämän takia gravitaatioyhtälöt muodostetaan tensoriyhtälöinä.

Suuretta $T(x)$ sanotaan tyypin (m, n) (koordinaatti)tensoriksi, jos sen komponentit muuttuvat koordinaattimuunnoksessa $x \to \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x)$ kuten

$$\bar{T}^{\nu_1 \ldots \nu_m}{}_{\mu_1 \ldots \mu_n}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^{\nu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{\nu_m}}{\partial x^{\alpha_m}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial \bar{x}^{\mu_n}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n}(x(\bar{x})) \tag{1.48}$$

Aika-avaruus on monisto, jolla on invariantti viivaelementti ds, joka määritellään

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{1.49}$$

Viivaelementin kertoimet saadaan laskettua pistetulona $g_{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}_\mu(x) \cdot \mathbf{e}_\nu(x)$, jossa vektorit $\mathbf{e}_\mu(x)$, $\mu = 0, \ldots 3$ ovat neliavaruuden kantavektorit neliavaruuden pisteessä x. Ne ovat toisen kertaluvun kovariantin tensorin komponentteja, jota kutsutaan *metriseksi tensoriksi.* Erikoistapauksena on litteää avaruutta kuvaava Minkowskin metriikka $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$.

Viivaelementin avulla voidaan määrittää kahden aika-avaruuden pisteen väliset ekstremaaliset käyrät. Tämä saadaan varioimalla vaikutusfunktionaalia

$$S\left[x^\mu(\lambda)\right] = m \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} ds = m \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x(\lambda))\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda, \tag{1.50}$$

johon soveltamalla Euler-Lagrangen yhtälöitä

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}, \tag{1.51}$$

jossa $L = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x(\lambda))\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$, saadaan johdettua *geodeettisen viivan yhtälö*

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = f(\lambda)\dot{x}^\mu, \tag{1.52}$$

jossa suureita

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}\left(\partial_\alpha g_{\kappa\beta} + \partial_\beta g_{\kappa\alpha} - \partial_\kappa g_{\alpha\beta}\right) \tag{1.53}$$

kutsutaan *Cristoffelin symboleiksi.* Yhtälön oikeanpuolen termi on $f(\lambda) = \frac{d^2 s}{d\lambda^2} / \frac{ds}{d\lambda}$, jolloin käyttämällä sopivaa parametrin valintaa $s = a\lambda + b$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, saadaan hävitettyä $f(\lambda)$ ja yhtälö saadaan muotoon

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0. \tag{1.54}$$

Tällaista parametrin valintaa kutsutaan *affiiniksi parametriksi.* Geodeettisen viivan yhtälöstä saadaan ratkaistua vapaasti putoavan hiukkasen liike metriikan $g_{\mu\nu}$ määräämässä geometriassa.

1.5.2 Kovariantti derivaatta, Riemannin- ja Riccin kaarevuustensori

Edellä käsiteltiin kuinka materia liikkuu kaarevassa avaruudessa. Tämän jälkeen nousee esiin kysymys siitä, miten materia kaareuttaa aika-avaruutta. Se, että metriikan komponentit poikkeavat litteän avaruuden komponenteista eli Minkowskin metriikasta, ei yksinään riitä kertomaan, onko geometria kaareva, sillä sen muoto riippuu koordinaatiston valinnasta. Tätä varten tarvitaan jokin yleisen kovarianssiperiaatteen mukainen suure mittaamaan kaarevuutta [9–11].

Yang-Millsin kenttäteorioiden yhteydessä määriteltiin mittakenttien dynaaminen termi kovariantin derivaattojen kommutaattorin avulla. Analogisesti määritellään Riemannin kaarevuustensori. Kuitenkin Yang-Millsin teorioiden yhteydessä kovariantti derivaatta konstruoitiin siten, että kentän kovariantti derivaatta kuului samaan esitykseen R, kuin kenttä itse. Kaarevien avaruuksien tapauksessa tätä analogiaa soveltaen pitää vaatia, että kovariantin derivaatan operoidessa kontravarianttiin vektoriin muuntuu se kuten toisen kertaluvun (1,1) tensori. Tämän avulla saadaan määriteltyä kovariantin derivaatan operointi mielivaltaiseen tensoriin.

Kovariantilta derivaatalta vaaditaan perinteisen derivaatan kanssa analogiset ominaisuudet [9, 11]

- $\nabla_\mu(V^\alpha + W^\alpha) = \nabla_\mu V^\alpha + \nabla_\mu W^\alpha$ (Lineaarisuus)
- $\nabla_\mu(W_\beta V^\alpha) = (\partial_\mu W_\beta)V^\alpha + W_\beta(\nabla_\mu V^\alpha)$ (Leibnizin sääntö)

ja lisäksi (1,1) tensorin muuntumissääntö

- $\bar{\nabla}_\mu \bar{V}^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta}\nabla_\alpha V^\beta$,

sekä kovariantin derivaatan operoiminen skalaariin

- $D_\alpha Z = \partial_\alpha Z$.

Tällöin eräs ehdot täyttävä kontravariantin vektorin kovariantti derivaatta on muotoa

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} V^\alpha, \tag{1.55}$$

missä $\Gamma^\nu_{\mu\alpha}$ ovat geodeettisen viivan yhtälössä esiintyvät Cristoffelin symbolit.

Kovariantin derivaatan operoiminen kovarianttiin vektoriin saadaan kontraktoimalla kovariantti vektori V_μ kontravariantin vektorin W^μ kanssa skalaariksi $Z = V_\mu W^\mu$ ja käyttämällä hyväksi Leibnizin sääntöä ja kovariantin derivaatan operoimista skalaariin, saadaan ratkaistua

$$\nabla_\alpha V_\mu = \partial_\alpha V_\mu - \Gamma^\kappa_{\alpha\mu} V_\kappa. \tag{1.56}$$

Nyt mielivaltaisen kertaluvun tensorin kovariantin derivaatan kaava saataisiin ratkaistua iteroimalla prosessia, jossa kontraktoimalla alennettaisiin tensorin kertalukua ja sovellettaisiin Leibnizin sääntöä ja alemman kertaluvun tensorin kovariantin derivaatan kaavaa. Näin saataisiin ratkaistua yleinen kovariantin derivaatan operointi (m,n) tensoriin [11]

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} = \partial_\alpha T^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} + \Gamma^{\mu_1}_{\kappa\alpha} T^{\kappa\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} + \cdots + \Gamma^{\mu_m}_{\alpha\kappa} T^{\mu_1\ldots\kappa}{}_{\nu_1\ldots\nu_n} \\ - \Gamma^\kappa_{\nu_1\alpha} T^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\kappa\ldots\nu_n} - \cdots - \Gamma^\kappa_{\nu_n\alpha} T^{\mu_1\ldots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\kappa}.\end{aligned} \tag{1.57}$$

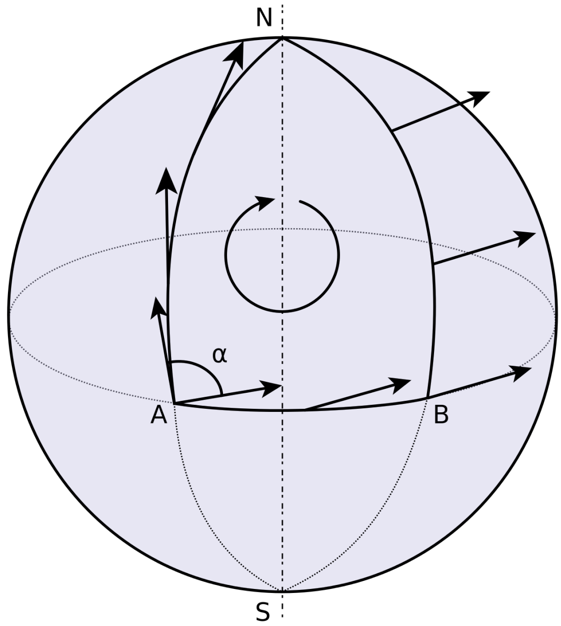
Erityisesti kovariantin derivaatan operointi metriseen tensoriin häviää

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \tag{1.58}$$

Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että metriikka kommutoi kovariantin derivaatan kanssa, jolloin metriikan avulla voidaan nostaa tai laskea indeksejä kovariantin derivaatan läpi.

Näin analogisesti mittakenttätensorin kanssa määritellään *Riemannin kaarevuustensori* [11]

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu{}_{\kappa\alpha\beta} V^\kappa, \tag{1.59}$$



Kuva 2. Vektorin yhdensuuntaissiirto pallopinnalla pitkin suljettua polkua. Yhdensuuntaissiirrossa siirrettävän vektorin ja polun tangenttivektorin välinen kulma pysyy muuttumattomana. [Kuvan lähdesivu: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=35124171 (6.4.2024).

jolloin Riemannin kaarevuustensorin komponentit saadaan kaavasta [11]

$$R^{\mu}{}_{\kappa\alpha\beta} = \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\alpha\kappa} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\beta\kappa} + \Gamma^{\mu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\kappa} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\kappa}. \tag{1.60}$$

Riemannin tensori siis käytännössä mittaa, kuinka paljon vektori on muuttunut kun se on yhdensuuntaissiirretty pitkin suljettua polkua (ks. kuva 2).

Riemannin tensorista saadaan kontraktoimalla *Riccin kaarevuustensori*

$$R_{\mu\nu} = R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu}, \tag{1.61}$$

ja yhä kontraktoimalla liittotensorin kanssa saadaan *Riccin kaarevuusskalaari*

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{1.62}$$

Huomion arvoista on todeta, että Riccin kaarevuustensori on merkkiä vaille yksikäsitteinen tensori, joka voidaan muodostaa Riemannin kaarevuustensoria kontraktoimalla. Vastaavasti Riccin skalaari on merkkiä vaille yksikäsitteinen skalaari, joka voidaan muodostaa Riemannin tensorin jäljestä.

1.5.3 Einsteinin-Hilbertin vaikutus

Klassiset kenttäteoriat muotoillaan vaikutusfunktionaalien avulla. Gravitaatiokentät voidaan yhdistää helpommin muiden klassisten kenttäteorioiden kanssa, kun gravitaatio esitetään myös vaikutusfunktionaalin avulla. Gravitaation vaikutus tunnetaan nimellä Einsteinin-Hilbertin vaikutus.

Gravitaatiokentän vaikutus on muotoa [9]

$$S_g = -\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\,(a\mathcal{R} + C)\,, \tag{1.63}$$

jossa $\mathcal{R}$ on Riccin kaarevuusskalaari ja a ja C vakioita. Vaikutuksen muoto perustuu tavoitteeseen luoda liikeyhtälöt, jotka ovat toista kertalukua ja jotka paikallisesti Minkowskilaisen koordinaatiston valinnan myötä ei johtaisi Lagrangen tiheyteen, jossa $\mathcal{L} =$ vakio [9, 10]. Perinteisen avaruuden mitan d^4x tilalle on sijoitettu $d^4x\sqrt{-g}$ yleisen kovarianssiperiaatteen mukaisesti. Varioimalla vaikutusta liittotensorin $g^{\mu\nu}$ suhteen, ts. $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ ja vaatimalla $\delta S_g = 0$ saadaan

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_g &= -\int_{\mathcal{M}} d^4x\delta\left[\right]\sqrt{-g}(a\mathcal{R} + C)\big] \\ &= -\int_{\mathcal{M}} d^4x\left(\delta(\sqrt{-g})(a\mathcal{R} + C) + a\sqrt{-g}(\delta\mathcal{R})\right). \end{aligned}$$

Metriikan determinantin variaatio saadaan käyttämällä hyväksi Jacobin kaavaa [10]

$$\delta(\det M) = (\det M)\mathrm{tr}(M^{-1}\delta M), \tag{1.64}$$

missä M on neliömatriisi, jolloin metriikalle saadaan

$$\delta g = g\ g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g\ g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

jossa ollaan käytetty kaavaa $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, joka saadaan metrisen tensorin liittotensorin määritelmästä $g^{\mu\nu}g_{\nu\kappa} = \delta^{\mu}_{\kappa}$ varioimalla puolittain ja asettamalla $\kappa = \mu$.

Näin saadaan

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Riccin kaarevuusskalaarin variaatioksi saadaan

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R} &= \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \\ &= \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

josta suoraviivaisesti laskemalla [9] voidaan näyttää jälkimmäisen termin olevan nelidivergenssimuotoa

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha I^\alpha,$$

missä

$$I^\alpha = \sqrt{-g}\,\left(g^{\beta\alpha}\delta\Gamma^\kappa_{\beta\kappa} - g^{\beta\kappa}\delta\Gamma^\alpha_{\kappa\beta}\right),$$

jolloin sillä ei ole vaikutusta liikeyhtälöihin.

Näin ollen sijoittamalla edellä johdetut kaavat yhtälöön (1.63) saadaan

$$0 = \delta S_g = -\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(a(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}C\right)\delta g^{\mu\nu}.$$

Koska variaatio $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ on mielivaltainen, on oltava

$$\begin{aligned} a(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}C = 0 \\ &\Longleftrightarrow \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{1}{2a}g_{\mu\nu}C \\ &\Longleftrightarrow \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -\Lambda g_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.65}$$

jossa vakio $\Lambda \equiv -\frac{C}{2a}$ on *kosmologinen vakio.*

1.5.4 Aineen vaikutus, minimaalisen kytkennän periaate ja energiaimpulssitensori

Gravitaation (metriikan) liikeyhtälöt johdettiin edellä tyhjässä avaruudessa. Nyt tarkoituksena on kytkeä aineen vaikutus mukaan liikeyhtälöihin.

Kaarevissa avaruuksissa muodostettujen liikeyhtälöiden tulisi olla yleistyksiä Minkowskilaisessa avaruudessa muodostettujen yhtälöiden kanssa. Toisin sanoen, jos liikeyhtälöihin sijoittaisi Minkowskin metriikan, tulisi yhtälöiden redusoitua tuttuun muotoon.

Tällaisia yleistyksiä on käytännössä ääretön määrä, koska tuttuihin Minkowskin avaruudessa muodostettuihin yhtälöihin voisi lisätä esimerkiksi Riccin skalaarin, joka häviää Minkowskin avaruudessa. *Minimaalisen kytkennän periaatteena* (Engl. Minimal Coupling principle) [11] tunnetun periaatten mukaan Minkowskin avaruudessa muodostettujen liikeyhtälöiden kaarevien avaruuksien yleistykset saadaan tekemällä seuraavat muutokset:

- $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$
- $\partial_\mu \to \nabla_\mu$
- $\int d^4x \to \int d^4x\sqrt{-g}$.

Esimerkiksi sähkömagneettiselle kentälle

$$\hat{S}_m = -\frac{1}{4}\int d^4x \left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right),$$

jossa $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ saa kaarevassa avaruudessa muodon

$$S_m = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right), \tag{1.66}$$

jossa $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$.

Yleisen kovarianssiperiaatteen täyttäväksi muunnettu ainekentän vaikutus voidaan nyt liittää gravitaation vaikutukseen yksinkertaisesti summana

$$S = S_g + S_m.$$

Gravitaatiokentän liikeyhtälöt saadaan taas varioimalla vaikutusta metriikan $g^{\mu\nu}$ suhteen ja vaatimalla $\delta S = 0$

$$0 = \delta S = \delta S_g + \delta S_m.$$

Edellä laskettiin jo δS_g, jolloin riittää tarkastella ainekentän vaikutuksen variointia δS_m. Yleisen ainekentän ϕ vaikutus on muotoa

$$S_m = \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}_m(g, \partial g, \phi, \partial\phi), \tag{1.67}$$

jolloin

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta\mathcal{L}_m \\ &\Longleftrightarrow \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu})\right].\end{aligned} \tag{1.68}$$

Koska

$$\partial_\alpha g^{\mu\nu} \to \partial_\alpha(g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}) = \partial_\alpha g^{\mu\nu} + \partial_\alpha \delta g^{\mu\nu},$$

niin on

$$\delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) = \partial_\alpha \delta g^{\mu\nu},$$

jolloin saadaan (1.68) kirjoitettua muotoon

$$\delta S_m = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\right)\delta g^{\mu\nu} + \partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\delta g^{\mu\nu}\right)\right].$$

Jälkimmäinen termi häviää, sillä alueen reunalla variaatio $\delta g^{\mu\nu} = 0$, jolloin jäljelle jää

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\right)\right]\delta g^{\mu\nu} \\ &\Longleftrightarrow \\ &\equiv \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g}\; T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{1.69}$$

jossa $T_{\mu\nu}$ on *energiaimpulssitensori.*

Näin kokonaisvaikutuksen variaatio saa muodon

$$0 = \delta S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[-a(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}C + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}.$$

Koska variaatio $\delta g^{\mu\nu}$ on mielivaltainen on sulkeissa olevan termin hävittävä

$$-a(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}C + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{1}{2a}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{1.70}$$

missä yhä $\Lambda = -\frac{C}{2a}$.

Newtonin gravitaation mukainen *Poissonin yhtälö* [9]

$$\nabla^2\phi = 4\pi G_N\rho \tag{1.71}$$

voidaan saavuttaa 00-komponentista rajatapauksena sopivalla energiaimpulssitensorin valinnalla ja asettamalla $a = \frac{1}{16\pi G_N}$ (jolloin olisi myös valittava $\Lambda = 0$), jolloin saadaan yhtälö tuttuun muotoon

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{1.72}$$

Tämä yhtälö tunnetaan *Einsteinin gravitaatioyhtälönä.*

Nyt esimerkiksi sähkömagneettisen kentän tapauksessa gravitaatioyhtälöiksi saadaan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi G_N\left(F_\mu{}^\kappa F_{\nu\kappa} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) - \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{1.73}$$

missä sähkömagneettisen kentän energiaimpulssitensori on

$$T_{\mu\nu} = F_\mu{}^\kappa F_{\nu\kappa} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{1.74}$$

2 Kaluzan-Kleinin teoriat

Einstein kehitti suppean suhteellisuusteorian vuonna 1905 [8], jolloin ainoat tunnetut voimat olivat gravitaatio ja sähkömagneettinen voima. Näistä voimista jälkimmäinen kuitenkin tunnettiin vielä 1800-luvun puolivälissä [12] kahtena eri voimana, sähköisenä ja magneettisena voimana, joiden kuitenkin havaittiin olevan peräisin samasta sähkömagneettisesta ilmiöstä.

Tämä idea voimien yhdistämisestä saman matemaattisen rakenteen alle motivoi 1900-luvun fyysikoita viemään ajatuksen yhä pidemmälle. Tarkoituksena oli löytää teoria, jonka matemaattiseen rakenteeseen sisältyisi kaikki tunnetut voimat. Tällaista teoriaa kutsuttaisiin nykyään *kaiken teoriaksi.*

Jo hieman ennen yleisen suhteellisuusteorian syntymistä vuonna 1914 suomalainen fyysikko Gunnar Nordström [12] kehitti oman teoriansa, joka yhdisti Newtonilaisen gravitaation ja sähkömagnetismin saman rakenteen alle, mutta kyseinen teoria sai hyvin vähän huomiota. Kuitenkin neljä vuotta yleisen suhteellisuusteorian syntymisen jälkeen vuonna 1919, Theodor Kaluza [13, 15], Einsteinin teorian innoittamana, julkaisi paperin, jossa hän esitti periaatteen, kuinka yhdistää gravitaatio ja sähkömagnetismi hyödyntäen Riemannin geometriaa. Kuitenkin vasta 1921 Einstein auttoi paperin julkaisemisessa.

Kaluzan teorian metriikka osoittautui kuitenkin olevan laskennan kannalta ongelmallinen, jonka takia vuonna 1926 Oskar Klein [16, 17] loi oman versionsa Kaluzan teorian metriikasta, joka oli laskennallisesti käyttökelpoisemmassa muodossa. Erityisesti Kleinin esittämän metrisen tensorin liittotensori on yksinkertaista muotoa.

2.1 Kaluzan-Kleinin alkuperäinen teoria

2.1.1 Kaluzan-Kleinin teorian metriikka

Vuonna 1919 Kaluza [15] esitti ajatuksen tavasta, jonka avulla voitaisiin yhdistää sähkömagnetismi ja Einsteinin gravitaatioteoria saman matemaattisen rakenteen alle.

Kaluzan ideana oli löytää metriikka G_{AB}, jonka geodeettisen viivan yhtälöstä saataisiin hiukkasen liikeyhtälöt, joka liikkuisi sekä gravitaation, että sähkömagneettisen kentän vaikutuksessa. Koska 1919 ainoat tunnetut voimat olivat sähkömagneettinen voima ja gravitaatio voima [12], oli yleisempään metriseen tensoriin sisällytettävä perinteinen yleisessä suhteellisuusteoriassa esiintyvä metriikka $g_{\mu\nu}$ ja sähkömagneettinen nelipotentiaali A_μ.

Kaluzan tavoitteena oli sisällyttää yleisemmän metriikan avulla laskettuihin Cristoffelin symboleihin sähkömagneettisen jännitystensorin komponentit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.1}$$

Ongelmaksi osoittautui kuitenkin avaruuden ulottuvuuksien määrä. Jos indeksit juoksevat perinteiset neljä indeksiä $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$ läpi, niin ei ole mahdollista sisällyttää sähkömagneettisen jännitystensorin komponentteja Cristoffelin symboleihin, jonka avulla saataisiin geodeettisen viivan yhtälöstä oikea lopputulos.

Kuitenkin lisäämällä viides ulottuvuus metriikkaan G_{AB}, $(A, B = 0, \ldots 3, 5)$ tämä osoittautui olevan mahdollista. Metriikan ollessa muotoa

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} & A_0 \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} & A_2 \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} & A_3 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

geodeettisen viivan yhtälöt redusoituisivat haluttuun muotoon. Koska viidettä ulottuvuutta ei kuitenkaan ole havaittu, niin Kaluza esitti oletuksen, jonka mukaan mikään fysikaalinen suure F ei riipu viidennestä koordinaatista x^5. Tätä oletusta hän kutsui *sylinteriehdoksi* (Cylinder Condition).

Kaluzan esittämä metriikka toi mukanaan kuitenkin ongelmia. Laskennallisesti olisi oleellista, että metriikan liittotensorin ja determinantin laskeminen olisi yksinkertaista muotoa. Tämän lisäksi sylinteriehto sellaisenaan oli täysin ad hoc -oletus, joka ei fysikaalisesti ollut tyydyttävä. Tämän (ja tuolloin kehittyneen kvanttimekaniikan) takia Oskar Klein (1926) [16] esitti oman versionsa Kaluzan ideasta.

Olkoon $\{\vec{\mathbf{e}}_\mu, \vec{\mathbf{e}}_5\}$, jossa $(\mu = 0, \ldots, 3)$ 5-ulotteisen avaruuden kanta. Kantavektorit $\vec{\mathbf{e}}_\mu$ voidaan esittää viidennen ulottuvuuden kanssa transversaalisen ja longituudisen vektorin summana

$$\vec{\mathbf{e}}_\mu = \vec{\mathbf{e}}_{\mu||} + \vec{\mathbf{e}}_{\mu\perp}, \tag{2.3}$$

jolloin siis

$$\vec{\mathbf{e}}_{\mu||} = C_\mu \vec{\mathbf{e}}_5, \tag{2.4}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\mu\perp} \cdot \vec{\mathbf{e}}_5 = 0. \tag{2.5}$$

Tällöin viisiulotteisen avaruuden metriikan G_{AB} $\mu\nu$ -komponentit saadaan

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \vec{\mathbf{e}}_\mu \cdot \vec{\mathbf{e}}_\nu \\ &= (\vec{\mathbf{e}}_{\mu||} + \vec{\mathbf{e}}_{\mu\perp}) \cdot (\vec{\mathbf{e}}_{\nu||} + \vec{\mathbf{e}}_{\nu\perp}) \\ &= \vec{\mathbf{e}}_{\mu\perp} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\nu\perp} + \vec{\mathbf{e}}_{\mu||} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\nu||} \\ &= \vec{\mathbf{e}}_{\mu\perp} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\nu\perp} + C_\mu C_\nu G_{55}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ottamalla pistetulo puolittain vektorin $\vec{\mathbf{e}}_5$ kanssa yhtälössä (2.4) saadaan

$$\vec{\mathbf{e}}_{\mu||} \cdot \vec{\mathbf{e}}_5 = C_\mu G_{55}. \tag{2.7}$$

Toisaalta ottamalla vektorin $\vec{\mathbf{e}}_5$ kanssa pistetulon puolittain yhtälössä (2.3) saadaan

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_\mu \cdot \vec{\mathbf{e}}_5 &= \vec{\mathbf{e}}_{\mu||} \cdot \vec{\mathbf{e}}_5 \\ &= C_\mu \vec{\mathbf{e}}_5 \cdot \vec{\mathbf{e}}_5 \\ &\iff \\ G_{\mu 5} &= C_\mu G_{55}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ratkaisemalla yhtälöstä (2.8) kerroin C_μ ja sijoittamalla se yhtälöön (2.6) saadaan

$$G_{\mu\nu} = \vec{\mathbf{e}}_{\mu\perp} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\nu\perp} + \frac{G_{\mu 5} G_{\nu 5}}{G_{55}}. \tag{2.9}$$

Määrittelemällä $\tilde{A}_\mu \equiv \frac{G_{\mu 5}}{G_{55}}$ ja $G_{55} \equiv \phi$, sekä määrittelemällä, että tavallinen neliavaruus osa on viidennettä ulottuvuutta vasten kohtisuorassa olevien kantavektorien pistetulo, ts. $g_{\mu\nu} = \vec{\mathbf{e}}_{\mu\perp} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\nu\perp}$, saadaan lopulliseksi metriikaksi

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \phi \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu, \tag{2.10}$$

$$G_{\mu 5} = \phi \tilde{A}_\mu, \tag{2.11}$$

$$G_{55} = \phi, \tag{2.12}$$

eli auki kirjoitettuna

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{00} + \phi\tilde{A}_0\tilde{A}_0 & g_{01} + \phi\tilde{A}_0\tilde{A}_1 & g_{02} + \phi\tilde{A}_0\tilde{A}_2 & g_{03} + \phi\tilde{A}_0\tilde{A}_3 & \tilde{A}_0\phi \\ g_{10} + \phi\tilde{A}_1\tilde{A}_0 & g_{11} + \phi\tilde{A}_1\tilde{A}_1 & g_{12} + \phi\tilde{A}_1\tilde{A}_2 & g_{13} + \phi\tilde{A}_1\tilde{A}_3 & \tilde{A}_1\phi \\ g_{20} + \phi\tilde{A}_2\tilde{A}_0 & g_{21} + \phi\tilde{A}_2\tilde{A}_1 & g_{22} + \phi\tilde{A}_2\tilde{A}_2 & g_{23} + \phi\tilde{A}_2\tilde{A}_3 & \tilde{A}_2\phi \\ g_{30} + \phi\tilde{A}_3\tilde{A}_0 & g_{31} + \phi\tilde{A}_3\tilde{A}_1 & g_{32} + \phi\tilde{A}_3\tilde{A}_2 & g_{33} + \phi\tilde{A}_3\tilde{A}_3 & \tilde{A}_3\phi \\ \tilde{A}_0\phi & \tilde{A}_1\phi & \tilde{A}_2\phi & \tilde{A}_3\phi & \phi \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Kaluzan-Kleinin esittämissä versioissa oltiin suoritettu koordinaattiskaalaus $\phi = -1$ (koska metriikan signatuuri on (1, -1, -1, -1, -1). Metriikka (2.13) on laskennallisesti käyttökelpoisempi, nimittäin käänteismetriikka on yksinkertaista muotoa

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} & -\tilde{A}^0 \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} & -\tilde{A}^1 \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} & -\tilde{A}^2 \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} & -\tilde{A}^3 \\ -\tilde{A}^0 & -\tilde{A}^1 & -\tilde{A}^2 & -\tilde{A}^3 & \phi^{-1} + \tilde{A}^\mu \tilde{A}_\mu \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

joka tietenkin nähtäisiin suoraan laskemalla $G^{AC}G_{CB} = \delta^A_B$.

Tämän lisäksi suoralla laskulla nähtäisiin myös, että

$$\det\,(G_{AB}) \equiv G = -g \equiv -\det\, g_{\mu\nu}. \tag{2.15}$$

2.1.2 KK-metriikan geodeettisen viivan yhtälö

Geodeettisen viivan vaikutusfunktionaali käyrälle $x^A(\tilde{s})$ viidessä ulottuvuudessa yleistyy suoraviivaisesti

$$S[x^A(\tilde{s})] = m\int_0^{\tilde{s}_1} d\tilde{s} = m\int_0^{\tilde{s}_1} \sqrt{-G_{AB}(x(\tilde{s}))\dot{x}^A\dot{x}^B}d\tilde{s}, \tag{2.16}$$

josta saadaan analogisesti geodeettisen viivan yhtälöksi

$$\frac{d^2x^A}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}^A_{BC}\frac{dx^B}{d\tilde{s}}\frac{dx^C}{d\tilde{s}} = 0, \tag{2.17}$$

jossa $A = 0, \dots 3,\ 5$ ja B ja C myös summataan yli samojen indeksien ja $\tilde{\Gamma}^A_{BC}$ ovat 5-ulotteiset Cristoffelin symbolit

$$\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \frac{1}{2}G^{AK}\left(\partial_B G_{KC} + \partial_C G_{KB} - \partial_K G_{BC}\right). \tag{2.18}$$

Ensiksi rajoitutaan tarkastelemaan neliavaruuden osan yhtälöitä. Ensimmäiset neljä yhtälöä ovat muotoa

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{BC}\frac{dx^B}{d\tilde{s}}\frac{dx^C}{d\tilde{s}} = 0, \tag{2.19}$$

missä $\alpha = 0, \dots, 3$. Huomion arvoista kuitenkin on, että summa otetaan yli kaikkien indeksien. Näin ollen avaamalla summa, lauseke voidaan kirjoittaa muotoon [18]

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}} + 2\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta 5}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^5}{d\tilde{s}} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{55}\frac{dx^5}{d\tilde{s}}\frac{dx^5}{d\tilde{s}} = 0, \tag{2.20}$$

missä kolmannen termin kerroin 2 johtuu Cristoffelin symbolien alaindeksien symmetriasta.

Cristoffelin symbolit $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$, $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta 5}$ ja $\tilde{\Gamma}^\alpha_{55}$ saadaan kirjoitettua perinteisen Cristoffelin symbolin ja nelipotentiaalin komponenttien avulla [18]

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} &= \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}(\tilde{A}_\beta \tilde{F}^\alpha{}_\gamma + \tilde{A}_\gamma \tilde{F}^\alpha{}_\beta) \\
\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta 5} &= \frac{1}{2}\tilde{F}^\alpha{}_\beta \\
\tilde{\Gamma}^\alpha_{55} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

missä $\tilde{F}_\gamma{}^\alpha$ on määritelty analogisesti $\tilde{A}_\mu$:den avulla, kuten kohdassa (2.1), jossa vain toinen indeksi nostettu. Sijoittamalla yhtälöt (2.21) yhtälöön (2.20) saadaan

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}} = \tilde{F}^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\left(\frac{dx^5}{d\tilde{s}} + \tilde{A}_\gamma \frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}}\right) \tag{2.22}$$

Tämän jälkeen viides yhtälö saadaan avattua kuten (2.20)

$$\frac{d^2x^5}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}^5_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}} + 2\tilde{\Gamma}^5_{\beta 5}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^5}{d\tilde{s}} + \tilde{\Gamma}^5_{55}\frac{dx^5}{d\tilde{s}}\frac{dx^5}{d\tilde{s}} = 0. \tag{2.23}$$

Nyt viisiulotteiset Cristoffelin symbolit saadaan esitettyä perinteisten Cristoffelin symbolien ja nelipotentiaalin avulla [18]

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^5_{\beta\gamma} &= -\tilde{A}_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\tilde{A}^\alpha(\tilde{A}_\beta \tilde{F}_{\alpha\gamma} + \tilde{A}_\gamma \tilde{F}_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(\partial_\beta \tilde{A}_\gamma + \partial_\gamma \tilde{A}_\beta), \\
\tilde{\Gamma}^5_{\beta 5} &= -\frac{1}{2}\tilde{A}^\alpha \tilde{F}_{\alpha\beta}, \\
\tilde{\Gamma}^5_{55} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (2.23) saadaan muutaman välivaiheen jälkeen [18]

$$\frac{d^2x^5}{d\tilde{s}^2} - \tilde{A}_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}} = -\tilde{A}^\alpha \tilde{F}_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}(\frac{dx^5}{d\tilde{s}} + \tilde{A}_\gamma \frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}}) - (\partial_\beta \tilde{A}_\alpha)\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}}, \tag{2.25}$$

jolloin ollaan kaikkiaan saatu geodeettisen viivan yhtälöstä (2.19) differentiaaliyhtälöryhmä

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}} = \tilde{F}^\alpha{}_\beta\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\left(\frac{dx^5}{d\tilde{s}} + \tilde{A}_\gamma\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}}\right), \tag{2.26}$$

$$\frac{d^2x^5}{d\tilde{s}^2} - \tilde{A}_\alpha\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}} = -\tilde{A}^\alpha\tilde{F}_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}(\frac{dx^5}{d\tilde{s}} + \tilde{A}_\gamma\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}}) - (\partial_\beta\tilde{A}_\alpha)\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}}. \tag{2.27}$$

Kertomalla ylempi yhtälö $\tilde{A}_\alpha$:lla ja summaamalla yhtälöt (2.26) ja (2.27) saadaan

$$\tilde{A}_\alpha\frac{d^2x^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \frac{d^2x^5}{d\tilde{s}^2} + \left[(\partial_\beta\tilde{A}_\alpha)\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\right]\frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{d}{d\tilde{s}}\left(\tilde{A}_\alpha\frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} + \frac{dx^5}{d\tilde{s}}\right) = 0. \tag{2.28}$$

Tällöin

$$\tilde{A}_\alpha\frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} + \frac{dx^5}{d\tilde{s}} \equiv \mathcal{X} \tag{2.29}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{dx^5}{d\tilde{s}} = \mathcal{X} - \tilde{A}_\alpha\frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}}. \tag{2.30}$$

Sijoittamalla (2.30) yhtälöön (2.26) saadaan

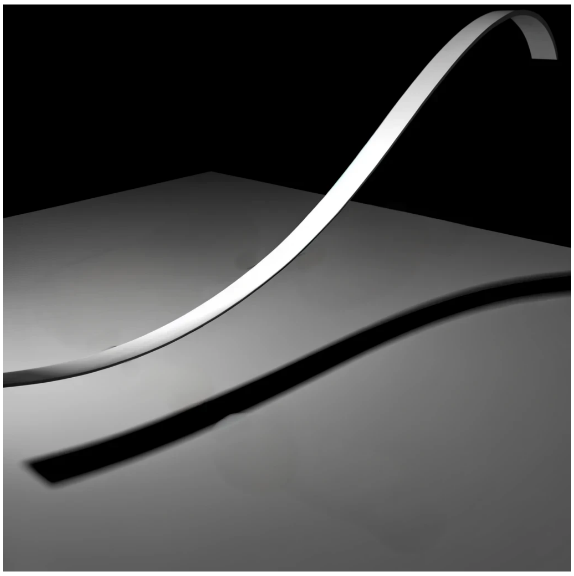
$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}\frac{dx^\gamma}{d\tilde{s}} = \mathcal{X}\tilde{F}^\alpha{}_\beta\frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}. \tag{2.31}$$

Yhtälö (2.31) muistuttaa jo Lorenzin voimalakia, mutta geodeettisen viivan yhtälö on muodostettu tarkastelemalla muutosta viisiulotteisen käyrän kaarenpituus parametrin suhteen. Kuitenkin verrataksemme yhtälöä (2.31) Lorentzin voimalakiin, tulee ratkaista koordinaattien muuntuminen viisiulotteisen avaruuden käyrän neliulotteiselle avaruudelle muodostetun projektiokäyrän pituusparametrin s suhteen (ks. kuva 3). Tämä saadaan ratkaistua kirjoittamalla viisiulotteinen metriikka auki

$$d\tilde{s}^2 = G_{AB}dx^Adx^B = ds^2 + \tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu dx^\mu dx^\nu + 2\tilde{A}_\mu dx^\mu dx^5 + (dx^5)^2 \tag{2.32}$$

ja ratkaisemalla dx^5 yhtälöstä (2.29)

$$dx^5 = \mathcal{X}d\tilde{s} - \tilde{A}_\alpha dx^\alpha \tag{2.33}$$



Kuva 3. Kuva havainnollistaa viidessä ulottuvuudessa olevaa käyrää ja varjo sen projektiota neliulotteisessa aika-avaruudessa. [Kuvan lähdesivu: https://gitlab.utu.fi/jjlind/ai-generated-content/-/blob/main/Pictures/CurveCastingShadowOnPlane.png (15.4.2024).

ja sijoittamalla (2.33) metriikkaan (2.32) saadaan

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= ds^2 + \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu dx^\mu dx^\nu + 2\tilde{A}_\mu dx^\mu (\mathcal{X} d\tilde{s} - \tilde{A}_\alpha dx^\alpha) + (\mathcal{X} d\tilde{s} - \tilde{A}_\alpha dx^\alpha)^2 \\ &= ds^2 + \mathcal{X} d\tilde{s}^2, \end{aligned}$$

jolloin saadaan ratkaistua

$$\frac{ds}{d\tilde{s}} = \sqrt{1-\mathcal{X}^2} = \text{vakio}. \tag{2.34}$$

Näin saadaan (2.31) kirjoitettua

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{1-\mathcal{X}^2}}\tilde{F}^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{ds}. \tag{2.35}$$

Valitsemalla $\mathcal{X} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{m}{\tilde{q}})^2}}$, missä $\tilde{q}$ on toistaiseksi määrittelemätön vakio, saadaan (2.35) kirjoitettua muotoon

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{\tilde{q}}{m}\tilde{F}^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{ds}, \tag{2.36}$$

joka on juuri Lorentzin voimalain muotoa ($c = 1$). Tämä kuitenkaan ei ole vielä lopullinen versio, koska $\tilde{F_{\mu\nu}}$ ei ole sellaisenaan vielä sähkömagneettinen jännitystensori, eikä $\tilde{q}$ sähkövaraus. Tämä asia ilmenee kentän vaikutusta tarkastellessa.

2.1.3 5D Einsteinin-Hilbertin vaikutus

Edellä havaittiin, että lähtemällä liikkeelle viisiulotteisen geodeettisen viivan yhtälöstä tyhjiössä, päädyttiin neliulotteisen geodeettisen viivan yhtälöön sähkömagneettisen kentän vaikutuksessa. Kuitenkaan ei riitä pelkästään se, että ollaan löydetty metriikka, jonka geodeettisen viivan yhtälöstä saadaan Lorentzin voimalaki, vaan tarvitaan myös kentän liikeyhtälöt.

Suoraviivainen yleistys vaikutuksesta (1.63) on muotoa

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{|G|}\tilde{R}, \tag{2.37}$$

missä G_5 on viisiulotteinen Newtonin gravitaatiovakio, $G = \det G_{AB}$ ja $\tilde{R} = G^{AB}\tilde{R}_{AB}$, missä

$$\tilde{R}_{AB} = (\partial_C\tilde{\Gamma}^C_{AB} + \tilde{\Gamma}^C_{CD}\tilde{\Gamma}^D_{AB}) - (\partial_B\tilde{\Gamma}^C_{AC} + \tilde{\Gamma}^C_{BD}\tilde{\Gamma}^D_{AC}). \tag{2.38}$$

Koska det G = -det g, niin vaikutuksen (2.37) kovariantti mittatermi $d^5x\sqrt{|G|} = d^5x\sqrt{-g}$ ja saa siis muodon

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{-g}\; G^{AB}\tilde{R}_{AB}. \tag{2.39}$$

Tämä kuvaa siis 5-ulotteisesta gravitaatiota ilman ainekenttiä.

Kuten geodeettisen viivan tapauksessa tehtiin, Riccin kaarevuustensori tulee esittää tavallisen neljäulotteisen aika-avaruuden suureilla. $G^{AB}\tilde{R}_{AB}$ voidaan avata muotoon

$$G^{AB}\tilde{R}_{AB} = G^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} + 2G^{\mu 5}\tilde{R}_{\mu 5} + G^{55}\tilde{R}_{55}, \tag{2.40}$$

missä ollaan käytetty hyväksi Riccin kaarevuustensorin indeksien symmetrisyyttä. Suoraviivaisesti, mutta pitkien laskujen jälkeen saadaan (2.40):ssä esiintyvät 5D

Riccin kaarevuustensorit kirjoitettua muotoon [18]

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\tilde{A}_\mu \nabla_\alpha \tilde{F}^\alpha{}_\nu + \tilde{A}_\nu \nabla_\alpha \tilde{F}^\alpha{}_\mu) - \frac{1}{2}\tilde{A}_\alpha \tilde{F}^\beta{}_\nu (\tilde{A}_\mu \tilde{F}^\alpha{}_\beta + \tilde{A}_\beta \tilde{F}^\alpha{}_\mu), \\
&\quad + \frac{1}{4}(F^\alpha_\mu \tilde{F}_{\alpha\nu} + \tilde{F}^\alpha{}_\nu \tilde{F}_{\alpha\mu}) + \frac{1}{4}\tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}, \\
\tilde{R}_{\mu 5} &= \frac{1}{2}\nabla_\alpha \tilde{F}^\alpha{}_\mu + \frac{1}{4}\tilde{A}_\mu \tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \\
\tilde{R}_{55} &= \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Sijoittamalla Riccin kaarevuustensorin komponentit (2.41) ja 5D käänteismetriikan (2.14) komponentit yhtälöön (2.40) ja sieventämällä saadaan

$$
G^{AB}R_{AB} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}, \tag{2.42}
$$

jolloin vaikutus on muotoa

$$
\begin{aligned}
S_5 &= -\frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{-g}\left(\mathcal{R} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}\right) \\
&= -\frac{1}{16\pi G_5}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{R} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}\right)\int dx^5,
\end{aligned} \tag{2.43}
$$

missä on käytetty sylinteriehtoa, ts. oletetaan ettei integroitavat suureet riipu viidennestä koordinaatista. Tavoitteena on määrätä koordinaatti x^5 siten, että integraali ei hajaannu, jolloin $S_5 \propto S_g + S_{EM}$. Vaatimalla viidennen ulottuvuuden olevan *kompakti* on $\int dx^5$ äärellinen. Valitsemalla esimerkiksi $x^5 \in [0, L]$, saadaan $\int dx^5 = L$

Tällöin (2.43) saadaan muotoon

$$
S_5 = -\frac{1}{16\pi G_N}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{R} + \frac{1}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}\right), \tag{2.44}
$$

missä $G_N = \frac{G_5}{L}$. Nyt määrittelemällä $\tilde{A}_\mu = 4\sqrt{\pi G_N}A_\mu$, jolloin siis $\tilde{F}_{\mu\nu} = 4\sqrt{\pi G_N}F_{\mu\nu}$ saavutetaan sähkömagnetismin ja gravitaation yhteisvaikutuksen korrekti muoto

$$
\begin{aligned}
S_5 &= -\frac{1}{16\pi G_N}\int d^4x\sqrt{-g}\;\mathcal{R} - \int d^4x\sqrt{-g}\;\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\
&= S_g + S_{EM}.
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

Tätä kutsutaan *Kaluzan-Kleinin ihmeeksi* (Kaluza-Klein Miracle). Määrittelemällä $\tilde{q} = \frac{q}{4\sqrt{\pi G_N}}$, saadaan myös geodeettisen viivan yhtälö (2.36) oikeaan muotoon

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{q}{m}F^\alpha_{\ \beta}\frac{dx^\beta}{ds}. \tag{2.46}$$

On siis nähty, että Kaluzan-Kleinin muotoilulla, 5-ulotteinen gravitaatio näyttäytyy neljässä ulottuvuudessa perinteisenä neliulotteisena gravitaationa ja sähkömagnetismina.

2.1.4 Kaluzan-Kleinin teorian seurauksia ja ongelmia

Edellä nähtiin, että ylimääräisen ulottuvuuden avulla on mahdollista kuvata sähkömagnetismi ja neljäulotteinen gravitaatio viisiulotteisena gravitaatioteoriana. Kuitenkin klassisessa mittakenttäteoriassa jokainen voima perustui mittainvarianssille symmetriaryhmän G alla. Erityisesti sähkömagnetismi perustui $U(1)$-invarianssille.

Mittakenttäteorian symmetriat eivät ole geometrisia, vaan ovat *varausavaruuden* symmetrioita. Kaluzan-Kleinin teoriat kuitenkin mahdollistavat näiden symmetrioiden geometrisoinnin. Yhtälössä (2.43) määrättiin viidennen koordinaatin arvot kompaktille välille $[0, L]$, jotta integraali suppenisi. $U(1)$:n alkiot ovat muotoa $e^{i\theta}$, missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja näiden pisteiden joukko on ympyrä kompleksitasolla ja koska kompleksitason ympyrän pisteiden joukko on homeomorfinen reaalisen ympyrän S^1 kanssa, voidaan ajatella viidennen ulottuvuuden olevan geometrialtaan ympyrä, joka sekin on kompakti.

Näin ollen toisen lajin mittamuunnosten voidaan ajatella olevan seurausta translaatioista viidennessä ulottuvuudessa, nimittäin jos koordinaattimuunnos on muotoa

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu, \\ x'^5 &= x^5 - \tilde{\mathcal{X}}(x), \end{aligned} \tag{2.47}$$

missä $\mathcal{X}$ on koordinaatista x^5 riippumaton funktio, saadaan metrisen tensorin komponenttien $G_{5\mu}$ muuntumissäännöstä

$$\begin{aligned}\tilde{A}'_\mu = \hat{G}_{5\mu} &= \frac{\partial x^M}{\partial x'^5}\frac{\partial x^N}{\partial x'^\mu}G_{MN} \\ &= \delta_5^M \frac{\partial x^N}{\partial x'^\mu}G_{MN} \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}G_{5\alpha} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\mu}G_{55} \\ &= \delta_\mu^\alpha G_{5\alpha} + \partial'_\mu \tilde{\mathcal{X}}(x') \\ &= G_{5\mu} + \partial_\mu \mathcal{X}(x) = \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \tilde{\mathcal{X}}(x),\end{aligned} \tag{2.48}$$

jolloin valitsemalla $\tilde{\mathcal{X}}(x) = 4\sqrt{\pi G_N}\mathcal{X}(x)$ ja $\tilde{A}_\mu = 4\sqrt{\pi G_N}A_\mu$ saadaan

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \mathcal{X}(x), \tag{2.49}$$

mikä on juuri toisen lajin mittamuunnos.

Kaluzan esittämä sylinteriehto on matemaattisesti helppo esittää, mutta fysikaalisesti vaikea hyväksyä. Kuitenkin oletus viidennen ulottuvuuden geometriasta yksiulotteisena (hyvin pienenä) ympyränä S^1 tuottaa empiirisesti havaittuja tuttuja ominaisuuksia, kuten varauksen kvantittuminen [18].

Merkitään nyt viidettä koordinaattia $x^5 = y$. Oletetaan koordinaatin $y \in \mathbb{R}$ peittävän ylimääräisen ulottuvuuden S^1. Tällöin mille tahansa fysikaaliselle suureelle on voimassa periodisuusehto

$$F(x^\mu, y) = F(x^\mu, y + 2\pi r), \tag{2.50}$$

missä r on ympyrän kaaren S^1 säde. Periodisuusehdosta seuraa, että suure F voidaan kirjoittaa Fourierin sarjaksi

$$F(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^{(n)}(x^\mu) e^{-in\frac{y}{r}}. \tag{2.51}$$

Soveltamalla sarjakehitelmää reaaliselle skalaarikentälle ϕ saadaan skalaarikenttä kirjoitettua muotoon

$$\phi(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{-in\frac{y}{r}}, \tag{2.52}$$

missä Fourier kertoimet $\phi^{(n)}(x^\mu)$ ovat tavallisia neliulotteisia skalaarikenttiä, joita on ääretön määrä. Määritelmästä (2.52) nähdään suoraan, että $\phi^{(n)}(x)^\dagger = \phi^{(-n)}(x)$.

Edellä nähtiin, että toisen lajin mittamuunnos saatiin aikaiseksi koordinaattimuunnoksella (2.47). Soveltamalla samaa muunnosta yhtälöön (2.52), missä nyt $x^5 = y$, saadaan

$$\begin{aligned}\phi' = \phi(x^\mu, y') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{-in\frac{y'}{r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{in\frac{-y+\tilde{\mathcal{X}}}{r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\frac{y}{r}} \left(\phi^{(n)}(x^\mu) e^{in\frac{\tilde{\mathcal{X}}}{r}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\frac{y}{r}} \phi'^{(n)}(x^\mu), \end{aligned} \tag{2.53}$$

jolloin siis

$$\begin{aligned}\phi'^{(n)}(x^\mu) &= e^{in\frac{\tilde{\mathcal{X}}(x)}{r}} \phi^{(n)}(x^\mu) \\ &= e^{in\frac{4\sqrt{\pi G_N}}{r}\mathcal{X}(x)} \phi^{(n)}(x^\mu). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Sähkövarauksen säilymislaki perustuu invarianssiin symmetriamuunnoksessa, joka on muotoa

$$\phi'(x) = e^{iq\mathcal{X}(x)}\phi, \tag{2.55}$$

jolloin vertaamalla yhtälöitä (2.54) ja (2.55) nähdään, että

$$\begin{aligned} q &= n\frac{4\sqrt{\pi G_N}}{r} \\ &\equiv ne, \end{aligned} \tag{2.56}$$

missä e on *varauskvantti* tai *alkeisvaraus*. Näin ollen S^1 säteen r on oltava suuruusluokkaa $\approx 10^{-33}$ m. Tämä antaisi fysikaalisen selityksen sille miksi viidettä ulottuvuutta ei ole havaittu.

Tähän asti teoria on vaikuttanut lupaavalta, mutta ongelmiakin löytyy. Nimittäin tutkimalla viisiulotteista massatonta Klein-Gordonin yhtälöä

$$\Box^{(5)}\phi = \partial_M \partial^M \phi = 0. \tag{2.57}$$

Sijoittamalla Fourier kehitelmä (2.52) saadaan

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_5 \partial^5\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{-in\frac{y}{r}} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Box^{(4)} + \frac{n^2}{r^2} \right) \phi^{(n)}(x) = 0, \tag{2.58}$$

jolloin saadaan äärettömän monta massallista Klein-Gordonin yhtälöä ($n \neq 0$) ja yksi massaton kenttä ($n = 0$). Yhtälön (2.58) sarjakehitelmää kutsutaan *Kaluzan-Kleinin torniksi* (engl. Kaluza-Klein Tower).

Yhtälöstä (2.56) havaittiin, että $r \approx 10^{-33}$ m ja jotta hiukkasella voisi olla varaus, on oltava $n > 0$. Nyt taas yhtälöstä (2.58) havaitaan, että tällöin hiukkasella on oltava massa $m^2_{(n)} = \frac{n^2}{r^2}$, jolloin kaikkien hiukkasten massa olisi oltava suuruusluokaltaan $\approx 10^{19}$ GeV. Kuitenkin varatut hiukkaset, joita ollaan kokeellisesti havaittu ovat huomattavasti kevyempiä, esimerkiksi elektronin (joka on fermioni) varaus on suuruusluokkaa 0,511 MeV. Soveltamalla spinorikentälle samaa hajotelmaa päädytään samaan johtopäätökseen.

2.1.5 Spontaani kompaktifikaatio

Klassisten kenttäteorioiden yhteydessä esiteltiin spontaanin symmetriarikon idea, jossa siis fysiikka systeemin perustilan ympärillä ei jaa yhtä laajaa symmetriaa, mitä koko systeemiä kuvaava teoria. Spontaanin kompaktifikaation ideaa sovellettiin tietyssä mielessä jo, kun päädyttiin yhtälöstä (2.57) yhtälöön (2.58).

5-ulotteisen gravitaatioteorian perustilana voisi olettaa olevan 5-ulotteinen Minkowskin metriikka $\mathbb{M}^5 = diag(1, -1, -1, -1, -1)$. Se on eräs 5-ulotteisen Einsteinin yhtälön $\tilde{R}_{AB} = 0$ ratkaisu ja se on muotoinvariantti 5-ulotteisen Poincarén ryhmän P_5 suhteen. Kuitenkin edellä nähtiin, että sähkömagnetismin ja neliulotteisen gravitaation yhdistäminen edellytti viidennen koordinaatin kuuluvan ympyrän kaarelle S^1, koska tällöin koordinaattimuunnos $y \to y + \theta$ vastaisi kompleksitason alkion kertomista ryhmän $U(1)$ alkiolla $e^{i\theta}$.

Näin ollen voitaisiin ajatella, että 5-ulotteisen avaruuden symmetria P_5 olisi spontaanisti hajonnut symmetriaryhmäksi $P_4 \times U(1)$, ts.

$$\mathbb{M}^5 \to \mathbb{M}^4 \times S^1. \tag{2.59}$$

Tätä kutsutaan *spontaaniksi kompaktifikaatioksi* (engl. Spontaneous Compactification), koska ylimääräinen ulottuvuus on "spontaanisti muuttunut" kompaktiksi.

Spontaanin kompaktifikaation ideaa voidaan soveltaa esimerkiksi massattoman 5-ulotteiseen reaalisen skalaarikentän vaikutusfunktionaaliin

$$S = \int d^5x \; \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi, \tag{2.60}$$

joka säilyttää P_5 symmetrian. Spontaanin kompaktifikaation $\mathbb{M}^5 \to \mathbb{M}^4 \times S^1$ seurauksena kenttä ϕ voidaan kehittää Fourier sarjaksi (2.52), joka sijoittamalla yhtälöön (2.60) antaa muodon

$$S = \frac{1}{2\pi r} \int d^4x \frac{1}{2} \left[\sum_{mn} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^{(n)} \partial_\nu \phi^{(m)} + \frac{mn}{r^2} \phi^{(n)}(x) \phi^{(m)}(x) \right) \left(\int_0^{2\pi r} dy \; e^{-i\frac{(n+m)}{r} y} \right) \right], \tag{2.61}$$

jossa

$$\int_0^{2\pi r} dy \; e^{-i\frac{(n+m)}{r} y} = 2\pi r \delta_{-mn},$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \; \frac{1}{2} \left\{ \sum_n \partial_\mu \phi^{(n)} \partial^\mu \phi^{(-n)} - \frac{n^2}{r^2} \phi^{(n)} \phi^{(-n)} \right\} \\ &= \int d^4x \left(\sum_n \mathcal{L}^{(n)} \right), \end{aligned} \tag{2.62}$$

missä

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(n)} &= \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^{(n)}\partial^\mu \phi^{(-n)} - \frac{1}{2}\frac{n^2}{r^2}\phi^{(n)}\phi^{(-n)} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^{(n)}\partial^\mu \phi^{(n)\dagger} - \frac{1}{2}\frac{n^2}{r^2}\phi^{(n)}\phi^{(n)\dagger}\end{aligned} \tag{2.63}$$

on massallisen skalaarikentän Lagrangen tiheys, jonka massa $m^2 = \frac{n^2}{r^2}$. Saatu Lagrangen tiheys ei jaa enää yhtä laajaa symmetriaa, kuin alkuperäinen Lagrangen tiheys. Symmetria on spontaanisti rikkoutunut $P^5 \to P^4 \times U(1)$, jonka seurauksena generoitunut ääretön määrä massallisia ja yksi massaton neliulotteinen skalaarikenttä (Kaluzan-Kleinin torni). Soveltamalla Euler-Lagrangen liikeyhtälöitä päädyttäisiin yhtälöön (2.58).

2.2 Yleistetyt Kaluzan-Kleinin teoriat

Alkuperäinen Kaluzan-Kleinin teoria tarjoaa kätevän tavan yhdistää gravitaatio ja sähkömagnetismi yhtenäisen geometrisen rakenteen alle ottamalla käyttöön viides (kompaktin) ulottuvuus perinteisen neljän ulottuvuuden lisäksi. Nyt yleistetään ajatusta muiden tunnettujen voimien kuvaamiseksi.

Yleistetyt Kaluzan-Kleinin teoriat nimensä mukaisesti yleistävät ylimääräisten ulottuvuuksien ideaa. Tarkoituksena on mahdollistaa epäkommutatiivisten mittakenttäteorioiden aikaansaanti spontaanin kompaktifikaation avulla. Teorioita, joiden tarkoituksena on hyödyntää ylimääräisiä ulottuvuuksia voimien yhdistämiseksi, kutsutaan myös yleisesti Kaluzan-Kleinin teorioiksi (KK-teorioiksi) [18, 19].

2.2.1 Yleinen rakenne

Olkoon $\mathcal{M}$ d-dimensioinen Riemannin monisto, joka on kartoitettu koordinaatein $z^M = (x^\mu, y^\alpha)$, missä koordinaatit x^μ, $\mu = 0, \ldots, 3$ parametrisoivat tavallisen neliulotteisen aika-avaruuden (pseudo-Riemannin moniston) $\mathcal{M}^4$ ja koordinaatit y^α, $\alpha = 5, \ldots, D+4$, parametrisoivat ylimääräisen D-ulotteisen alimoniston B^D. Olkoon moniston $\mathcal{M}$ metriikka G_{AB} ja oletetaan metriikan signatuurin olevan $(1, -1, -1, \ldots, -1)$, ts ylimääräiset ulottuvuudet ovat paikanluonteisia. Metriikan dynamiikan tyhjässä avaruudessa määrää yleistetty Einsteinin-Hilbertin vaikutus

$$S_d = -\frac{1}{2\tilde{k}} \int d^d z \sqrt{|G|}\ (\tilde{\mathcal{R}} + \Lambda), \tag{2.64}$$

missä $\tilde{\mathcal{R}} = G^{AB}\tilde{R}_{AB}$, Λ kosmologinen vakio ja $\tilde{k}$ toistaseksi määrittelemätön vakio.

Varioimalla vaikutusta (2.64) saadaan d-ulotteiset Einsteinin yhtälöt

$$\tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}(\tilde{\mathcal{R}} + \Lambda) = 0. \tag{2.65}$$

Viisiulotteisen Kaluzan-Kleinin teorian yhteydessä oletettiin viisiulotteisen gravitaation perustilan (kompaktifioinnin jälkeen) olevan muotoa $\mathbb{M}^4 \times S^1$, joten voidaan olettaa d-ulotteisen KK-teorian perustilan olevan muotoa

$$\mathcal{M}^4 \times B^D, \tag{2.66}$$

missä $\mathcal{M}^4$ ja B^D ovat kuten edellä. Oletetaan, että metriikka G_{AB} on kirjoitettavissa muotoon

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & \mathbf{0}_{4\times D} \\ \mathbf{0}_{D\times 4} & g_{\alpha\beta}(y) \end{pmatrix}, \tag{2.67}$$

missä analogisesti viisiulotteisen KK-teorian kanssa, aika-avaruusosa ei riipu koordinaateista y. Kompaktit monistot B^D, joille $D \geq 2$, eivät yleisesti ole litteitä, jonka seurauksena on oletettu tämän metriikan osan riippuvan vähintään moniston B^D parametrisoivista koordinaateista y.

Einsteinin yhtälöt tyhjiössä (2.65) voidaan eritellä yhtälöryhmäksi

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(\tilde{\mathcal{R}} + \Lambda) = 0, \\
\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}G_{\alpha\beta}(\tilde{\mathcal{R}} + \Lambda) = 0, \\
\tilde{R}_{\mu\beta} - \frac{1}{2}G_{\mu\beta}(\tilde{\mathcal{R}} + \Lambda) = 0,
\end{aligned}$$

missä μ, ν ovat tavallisia Lorentzin indeksejä ja α, β ovat ylimääräisten ulottuvuuksien indeksejä. Koska $\tilde{R}_{\mu\nu} = R^4_{\mu\nu}$ ja $\tilde{R}_{\alpha\beta} = R^D_{\alpha\beta}$ (ks. liite A), voidaan Riccin skalaari kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}} &= G^{AB}\tilde{R}_{AB} \\
&= G^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} + 2G^{\mu\alpha}\tilde{R}_{\mu\alpha} + G^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta} \\
&= G^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} + G^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta} \\
&= g^{\mu\nu}R^4_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}R^D_{\alpha\beta} \\
&\equiv \mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^D,
\end{aligned}$$

missä on käytetty hyväksi metriikan blokkimuotoa $G^{\mu\alpha} = 0$, $G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, $G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ ja määritelty $\mathcal{R}^4 = \mathcal{R}(\mathcal{M}^4)$ ja $\mathcal{R}^D = \mathcal{R}(B^D)$.

Koska $\tilde{R}_{\mu\beta} = 0$ ja $G_{\mu\beta} = 0$, niin on viimeinen yhtälö triviaali. Näin päädytään 4+D-ulotteisiin Einsteinin yhtälöihin tyhjiössä, jotka ovat muotoa

$$\begin{aligned}
R^4_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^D + \Lambda) &= 0 \\
R^D_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^D + \Lambda) &= 0. \qquad (2.68)
\end{aligned}$$

Yhtälöistä (2.68) nähdään, että tapauksessa, jossa $D \geq 2$ yleisesti ei perustilan aika-avaruusosana voi olla neliulotteinen Minkowskin avaruus $\mathbb{M}^4$, koska tällöin $R^4_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{R}^4 = 0$. Tällöin ylemmästä yhtälöstä saadaan $\mathcal{R}^D = -\Lambda$, jolloin alempi yhtälö antaa $R^D_{\alpha\beta} = 0$, jolloin useita tärkeitä kompakteja monistoja B^D rajautuisi pois.

Standardimallin mukaisten mittakenttäteorioiden aikaansaamiseksi tärkeimmät kompaktit monistot B^D aikaansaadaan rajoittumalla neliulotteisen aika-avaruuden osalta *maksimaalisesti symmetrisiin aika-avaruuksiin.* Maksimaalisesti symmetristen avaruuksien Riccin kaarevuustensorit ovat suoraan verrannollisia metriikkaan, ts. $R^4_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$. Tällöin Einsteinin yhtälöistä (2.68) nähdään suoraan, että myös $R^D_{\alpha\beta} \propto g_{\alpha\beta}$. Tämä tarkoittaa siis sitä, että aineeton avaruus ei voisi olla litteä.

2.2.2 Killing-vektorit ja maksimaalisesti symmetriset avaruudet

Rajoitutaan tarkastelemaan mahdollisia kompaktien monistojen valintaa B^D. Mittakenttäteorioissa kenttien Lagrangen tiheydet on konstruoitu siten, että ne säilyttävät halutun symmetrian jonkin Lien ryhmän alla, kuten standardimallin tapauksessa $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Lien ryhmille ominaista on se, että ne määritellään niiden generaattorien välisen *rakenneyhtälön* (1.21) avulla. Kaluzan-Kleinin teorioissa tavoitteena on kääntää varausavaruuden symmetriat ylimääräisten ulottuvuuksien *geometrisiksi symmetrioiksi*, joita kutsutaan *isometrioiksi* [9, 18].

Olkoon tarkasteltavan Riemannin moniston B^D dimensio D. Rajoitutaan tarkastelemaan yhden parametrin perhettä muunnoksia, jotka ovat muotoa

$$y'^{\mu} = y^{\mu} + \epsilon K^{\mu}, \tag{2.69}$$

missä K^{μ} on toistaiseksi mielivaltainen kontravariantti vektori ja $|\epsilon| \ll 1$.

Koordinaattimuunnosta (2.69) kutsutaan *isometriaksi*, jos se jättää metriikan muotoinvariantiksi, ts.

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y). \tag{2.70}$$

Metriikan muuntumissääntöön (2. kertaluvun kovariantin tensorin) soveltamalla muunnosta (2.69) ja vaatimalla sen säilyvän muotoinvarianttina päädytään yhtälöön

$$\nabla_{\mu} K_{\nu} + \nabla_{\nu} K_{\mu} = 0. \tag{2.71}$$

Yhtälöä (2.71) kutsutaan *Killing-yhtälöksi*. Ongelma kaikkien avaruuden isometrioiden etsimisestä on muuntunut osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi.

Olkoon $\mathcal{K} \equiv \{K_a^{\alpha},\ a = 1, \ldots n\}$ joukko lineaarisesti riippumattomia Killing-vektoreita, ts. joukko yhtälön (2.71) ratkaisuja. Monistoa, jolla $n = |\mathcal{K}| = \frac{D(D+1)}{2}$ kutsutaan *maksimaalisesti symmetriseksi monistoksi*. Koska yhtälö (2.71) on lineaarinen, niin myös näiden summa on eräs ratkaisu. Tällöin isometria muunnos (2.69) voidaan kirjoittaa vielä yleisempään muotoon

$$y'^{\alpha} = y^{\alpha} + \epsilon^{a} K_{a}^{\alpha}, \tag{2.72}$$

missä kertoimet ϵ^a ovat infinitesimaalisia parametreja. Tämä voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$\delta y^{\alpha} = \epsilon^{a} \mathbf{k}_{a}\, y^{\alpha}, \tag{2.73}$$

missä differentiaalioperaattorit $\mathbf{k}_a = K_a^{\beta}\partial_{\beta}$ ovat *isometrian generaattorit.*

Killing-vektorien kommutaattori määritellään generaattorien (2.73) avulla

$$[\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b]^{\beta} = K_a^{\alpha}\partial_{\alpha}K_b^{\beta} - K_b^{\alpha}\partial_{\alpha}K_a^{\beta}. \tag{2.74}$$

On suoraviivaista osoittaa, että kahden Killing-vektorin kommutaattori on myös Killing-vektori. Näin ollen kahden Killing-vektorin kommutaattori voidaan kirjoittaa lineaarisesti riippumattomien Killing-vektorien lineaarikombinaationa

$$[\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b] = f_{ab}^{c}(y)\mathbf{k}_c, \tag{2.75}$$

joka muistuttaa Yangin-Millsin kenttäteorioissa käytettyjen ryhmien generaattorien välistä *rakenneyhtälöä.* Rakennevakiot $f_{ab}^{c}(y)$ määräävät avaruuden B^D isometriaryhmän G moniston pisteessä y.

Näin ollen rakenneyhtälön (2.75) avulla voidaan määrätä ylimääräisten ulottuvuuksien geometria. Geometria tulee valita siten, että sen Killing-yhtälöstä ratkaistut lineaarisesti riippumattomat Killing-vektorit noudattavat samaa rakenneyhtälöä, kuin mittakenttäteorioissa käytettyjen Lien ryhmien generaattorit.

Esimerkki: Yksikköpallon metriikka on muotoa

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\; d\phi,$$

missä $\theta \neq 0, \pi$. Killing-yhtälöt saadaan muotoon [18]

$$\begin{aligned} \partial_\phi K_\phi + \sin\theta\cos\theta K_\theta &= 0, \\ \partial_\phi K_\theta + \partial_\theta K_\phi - 2\cot\theta K_\phi &= 0, \end{aligned}$$

jonka ratkaisu on muotoa

$$\begin{cases} K^\theta = A\sin\phi + B\cos\phi \\ K^\phi = (A\cos\phi - B\sin\phi)\cot\theta + C \end{cases}.$$

Koska vakioita on kolme, niin saadaan myös kolme lineaarisesti riippumatonta ratkaisua, nimittäin

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= K^\theta\partial_\theta + K^\phi\partial_\phi \\ &= (A\ \sin\phi + B\ \cos\phi)\,\partial_\theta + (A\ \cos\phi\cot\theta - B\ \sin\phi\cot\theta + C)\,\partial_\phi \\ &= A\,(\sin\phi\ \partial_\theta + \cos\phi\cot\theta\ \partial_\phi) + B\,(\cos\phi\ \partial_\theta - \sin\phi\cot\theta\ \partial_\phi) + C\ \partial_\phi, \end{aligned}$$

jolloin isometrian generaattoreiksi saadaan

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \sin\phi\ \partial_\theta + \cos\phi\cot\theta\ \partial_\phi \\ \mathbf{k}_2 = \cos\phi\ \partial_\theta - \sin\phi\cot\theta\ \partial_\phi \\ \mathbf{k}_3 = \partial_\phi \end{cases}.$$

Generaattorien kommutaattori on

$$[\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b] = \varepsilon_{abc}\mathbf{k}_c,$$

jolloin yksikköpallon isometriaryhmä on $SO(3) \sim SU(2)$.

2.2.3 4+D Metriikka

Viisiulotteista Kaluzan-Kleinin metriikkaa johdettaessa oletettiin viidennen ulottuvuuden olevan jokaisessa neliulotteisen aika-avaruuden pisteessä sitä vastaan (lokaalisti) kohtisuorassa, jonka seurauksena metriikalle saatiin muoto (2.13). Analogisesti oletetaan korkeampi ulotteisen kompaktin avaruuden kanssa.

Olkoon avaruus $\mathcal{M}$ muotoa $\mathcal{M}^4 \times B^D$, missä $\mathcal{M}^4$ on neliulotteinen aika-avaruus ja B^D kompakti d-ulotteinen monisto. Oletetaan, että jokaisessa moniston $\mathcal{M}^4$ pisteessä x^μ on B^D lokaalisti kohtisuorassa sitä vastaan ja B^D parametrisoidaan koordinaatein y^α.

Olkoon $\mathbf{e}_A = (\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\alpha)$ avaruuden $\mathcal{M}$ mielivaltainen kanta, jossa $\{\mathbf{e}_\mu\}_{\mu=0}^{3}$ määrää koordinaatiston neliulotteisessa aika-avaruudessa $\mathcal{M}^4$ ja vastaavasti $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha=5}^{D+4}$ määrää koordinaatiston monistolla B^D. Vastaavasti olkoon $\mathbf{e}_I = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_a)$ lokaalisti *Minkowskilainen kanta*, jossa $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^{3}$ määrää lokaalisti Minkowskilaisen kannan monistolla $\mathcal{M}^4$ ja $\{\mathbf{e}_a\}_{a=5}^{D+4}$ monistolla B^D.

Mielivaltainen kantavektori $\mathbf{e}_A$, missä $A = 0, \ldots, 3, 5, \ldots, D$ voidaan lokaalisti kirjoittaa Minkowskilaisessa kannassa muodossa

$$\mathbf{e}_A = b^i{}_A \mathbf{e}_i + b^a{}_A \mathbf{e}_a. \tag{2.76}$$

Koska B^D on lokaalisti kohtisuorassa monistoa $\mathcal{M}^4$ vasten, on mielivaltaisen B^D:n kantavektorin riiputtava ainoastaan kantavektoreista $\mathbf{e}_a$, ts. $b^i{}_\alpha = 0$, jolloin

$$\mathbf{e}_\alpha = b^a{}_\alpha \mathbf{e}_a.$$

Tällöin metriikka monistolla B^D on

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \\ &= b^a{}_\alpha b^b{}_\beta \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b \\ &= b^a{}_\alpha b^b{}_\beta \delta_{ab} \equiv \phi_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Vastaavasti lasketaan loput metriikan komponentit

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \\
&= ({b^i}_\mu \mathbf{e}_i + {b^a}_\mu \mathbf{e}_a) \cdot ({b^j}_\nu \mathbf{e}_j + {b^b}_\nu \mathbf{e}_b) \\
&= {b^i}_\mu {b^j}_\nu \eta_{ij} + {b^a}_\mu {b^b}_\nu \delta_{ab} \\
&\equiv g_{\mu\nu} + B^\alpha_\mu {b^a}_\alpha B^\beta_\nu {b^b}_\beta \delta_{ab} \\
&= g_{\mu\nu} + B^\alpha_\mu B^\beta_\nu \phi_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\alpha} &= \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\alpha \\
&= ({b^i}_\mu \mathbf{e}_i + {b^a}_\mu \mathbf{e}_a) \cdot {b^b}_\alpha \mathbf{e}_b \\
&= {b^a}_\mu {b^b}_\alpha \delta_{ab} \\
&= B^\beta_\mu {b^a}_\beta {b^b}_\alpha \delta_{ab} \\
&= \phi_{\alpha\beta} B^\beta_\mu,
\end{aligned}
$$

jolloin lopullinen metriikka on muotoa

$$
\begin{aligned}
G_{AB} &= \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} & G_{\mu\beta} \\ G_{\alpha\nu} & G_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + B^\alpha_\mu B^\beta_\nu \phi_{\alpha\beta} & B^\alpha_\mu \phi_{\alpha\beta} \\ B^\beta_\nu \phi_{\alpha\beta} & \phi_{\alpha\beta} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

missä on määritelty ${b^a}_\mu = B^\alpha_\mu {b^a}_\alpha$. Suoralla laskulla voidaan osoittaa, että

$$
|G| = |\det\, G_{AB}| = |\det\, g_{\mu\nu}|\; |\det\, \phi_{\alpha\beta}| = |g|\; |\phi|
$$

Metriikan (2.77) liittotensori on muotoa

$$
G^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\kappa} B^\alpha_\kappa \\ -g^{\nu\kappa} B^\alpha_\kappa & \phi^{\alpha\beta} + g^{\kappa\lambda} B^\alpha_\kappa B^\beta_\lambda \end{pmatrix}, \tag{2.78}
$$

missä $\phi^{\alpha\beta}$ on metriikan $\phi_{\alpha\beta}$ liittotensori monistolla B^D. Suoralla laskulla nähdään (2.78) todella olevan metriikan (2.77) liittotensori, nimittäin suoralla laskulla nähdään, että $G_{MN}G^{NK} = G_{M\mu}G^{\mu K} + G_{M\alpha}G^{\alpha K} = \delta_M^K$ käymällä läpi jokaisen tyypin indeksiparit (M, K) erikseen. Esimerkiksi kun molemmat indeksit ovat neljäulotteisen aika-avaruuden indeksejä $M = \rho,\ N = \kappa$ saadaan

$$\begin{aligned} G_{\rho N}G^{N\kappa} &= G_{\rho\mu}G^{\mu\kappa} + G_{\rho\alpha}G^{\alpha\kappa} \\ &= (g_{\rho\mu} + \phi_{\beta\gamma}B_\rho^\beta B_\mu^\gamma)g^{\mu\kappa} + B_\rho^\gamma\phi_{\alpha\gamma}(-g^{\lambda\kappa}B_\lambda^\alpha) \\ &= g_{\rho\mu}g^{\mu\kappa} = \delta_\rho^\kappa. \end{aligned}$$

Muut saataisiin vastaavalla tavalla (ks. liite B).

Mikäli metriikan muodosta (2.77) halutaan pitää kiinni, niin mielivaltainen $4 + D$ ulotteinen koordinaattimuunnos ei ole enää mahdollinen. Koska $g_{\mu\nu}$ ajatellaan neljäulotteisen aika-avaruuden metriikkana, tulee sen muuntua kuin $\mathcal{M}^4$:n tensori, ts.

$$\hat{g}_{\lambda\kappa} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\kappa}g_{\mu\nu},$$

ja vastaavasti vaaditaan kompaktin alimoniston B^D metriikan muuntuvan kuten

$$\hat{\phi}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial \hat{y}^{\hat{\alpha}}}\frac{\partial y^\beta}{\partial \hat{y}^{\hat{\beta}}}\phi_{\alpha\beta}.$$

Tällöin B_μ^α muuntuu kuten [18]

$$\hat{B}_\mu^{\hat{\alpha}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu}\left(\frac{\partial \hat{y}^{\hat{\alpha}}}{\partial y^\alpha}B_\nu^\alpha - \frac{\partial \hat{y}^{\hat{\alpha}}}{\partial x^\nu}\right), \tag{2.79}$$

jolloin esimerkiksi nähdään, että

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\gamma\kappa} &= \hat{g}_{\gamma\kappa} + \hat{\phi}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\hat{B}_\gamma^{\hat{\alpha}}\hat{B}_\kappa^{\hat{\beta}} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\kappa}\left(g_{\mu\nu} + \phi_{\alpha\beta}B_\mu^\alpha B_\nu^\beta\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\kappa}G_{\mu\nu} \end{aligned}$$

ja näin ollen koordinaattimuunnokset, jotka säilyttävät muodon (2.77) ovat muotoa

$$\hat{x}^\mu = \hat{x}^\mu(x), \qquad \hat{y}^\alpha = \hat{y}^\alpha(x, y). \tag{2.80}$$

2.2.4 Yhteys Yangin-Millsin mittakenttäteorioihin

Viisiulotteista Kaluzan-Kleinin teoriaa johdettaessa nähtiin viidennen ulottuvuuden translaation seurauksena nelipotentiaalin muuntuvan kuten $\delta A_\mu = \partial_\mu \mathcal{X}(x)$. Seuraavaksi esitetään sen epäkommutatiivinen vastine [18, 19].

Mittakenttäteorioita tarkastellessa mittakentät esitettiin ryhmän G generaattoreiden avulla muodossa $B_\mu = B_\mu^i T^i$, missä T^i:t ovat symmetriaryhmän (Lien ryhmän) G generaattorit, jotka noudattavat rakenneyhtälöä $[T^a, T^b] = i f_c^{ab} T^c$.

Edellä nähtiin monsiston B^D metriikan avulla laskettujen Killing-vektorien muodostavan saman Lien ryhmien rakenteen, ts. ryhmä G voidaan tuottaa moniston B^D isometriaryhmänä, jolloin sen Killing-vektorit toteuttavat analogisen rakenteen $[\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b] = f_{ab}^c(y)\mathbf{k}_c$.

Näin siis mahdollistetaan tapa esittää epäkommutatiivinen mittakenttäteoria $4 + D$ ulotteisena gravitaatioteoriana, hyödyntäen monistoa, joka on muotoa $\mathcal{M} = \mathcal{M}^4 \times B^D$, missä B^D on kompakti maksimaalisesti symmetrinen alimonisto, jonka metriikka on muotoa (2.77).

Mittakenttäteorian generaattoreiden roolia pelaavat nyt geometrian Killing-vektorit. Maksimaalisesti symmetrisellä monistolla B^D on $\frac{1}{2}D(D+1)$ kappaletta lineaarisesti riippumatonta Killing-vektoria, jonka takia mittakentät voidaan esittää B^D:n Killing-vektorien avulla muodossa

$$B_\mu^\alpha(x, y) = B_\mu^a(x) K_a^\alpha(y), \tag{2.81}$$

missä $a = 5, \ldots, D + 4$.

Tarkastellaan tämän jälkeen koordinaattimuunnosta, joka on muotoa

$$\begin{aligned} \hat{x}^\mu &= x^\mu \\ \hat{y}^\alpha &= y^\alpha + \mathcal{X}^a(x) K_a^\alpha(y). \end{aligned} \tag{2.82}$$

Koordinaattimuunnos (2.82) jättää moniston $\mathcal{M}^4$ metriikan $g_{\mu\nu}$ ja moniston B^D metriikan $\phi_{\alpha\beta}$ muotoinvariantiksi.

Esitetään B_μ^α muunnoskaavan (2.79) molemmat puolet Killing-vektorien kannassa

$$\hat{B}_\mu^a \hat{K}_a^\alpha = \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu} \left(\frac{\partial \hat{y}^\alpha}{\partial y^\beta} B_\nu^a K_a^\beta - \frac{\partial \hat{y}^\alpha}{\partial x^\nu} \right) \tag{2.83}$$

Sijoittamalla koordinaattimuunnos (2.83) mittakentän muunnoskaavaan, käyttämällä Lien ryhmän rakenneyhtälöä (2.75) ja käyttämällä kontravariantin vektorin muunnoskaavaa Killing-vektoriin $\hat{K}_\mu^\alpha$ saadaan

$$(\delta B_\mu^a) K_a^\alpha = \left(-\partial_\mu \mathcal{X}^a(x) + f_{bc}{}^a B_\mu^b(x) \mathcal{X}^c(x) \right) K_a^\alpha, \tag{2.84}$$

josta siis

$$\delta B_\mu^a = -\partial_\mu \mathcal{X}^a(x) + f_{bc}{}^a B_\mu^b(x) \mathcal{X}^c(x). \tag{2.85}$$

Ensisilmäyksellä muuntumissääntö (2.85) ei näytä vastaavan mittakentän muuntumissääntöä (1.37), mutta kuitenkin laskemalla infinitesimaalisella rajalla muunnoksen muoto, kun $U(x) = \mathbb{I} + ig\mathcal{X}_a T^a$ ja siis $U(x)^{-1} = \mathbb{I} - ig\mathcal{X}_a T^a$, missä $|\mathcal{X}| \ll 1$, saadaan muuntumissääntö (1.37) muotoon

$$(\delta A_\mu^a) T^a = \left(-\partial_\mu \mathcal{X}_a(x) + g f^{bc}{}_a A_\mu^b(x) \mathcal{X}_c(x) \right) T^a + \mathcal{O}(\mathcal{X}^2), \tag{2.86}$$

jolloin (2.85) vastaa muuntumissääntöä (2.86), kun $g = 1$.

Vastaavuus mittakentän muuntumissäännön lisäksi saavutetaan tarkastelemalla $4 + D$ ulotteista Riccin skalaaria $\tilde{\mathcal{R}}$. Kirjoittamalla $4 + D$ metriikka G_{AB} muodossa (2.77) ja esittämällä mittakentät Killing-kannassa $B_\mu^\alpha(x, y) = B_\mu^a(x) K_a^\alpha(y)$ saadaan Riccin skalaari kirjotettua muotoon [19]

$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^D - \frac{1}{4} \phi_{\alpha\beta} K_a^\alpha K_b^\beta F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}, \tag{2.87}$$

missä $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a - f_{bc}{}^a B_\mu^b B_\nu^c$ ja $F^{b\mu\nu} = g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{\kappa\lambda}^b$.

Sijoittamalla Riccin skalaari yleistettyyn Einsteinin-Hilbertin vaikutukseen (2.64) ja hyödyntämällä metriikan (2.77) determinantin ominaisuutta $|G| = |g|\,|\phi|$ saadaan vaikutus muotoon

$$\begin{aligned} S_{4+D} &= -\frac{1}{2\tilde{k}}\int d^4x d^D y\sqrt{|g|}\sqrt{|\phi|}\left(\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^D - \frac{1}{4}\phi_{\alpha\beta}K_a^\alpha K_b^\beta F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}\right) \\ &= -\frac{1}{2\tilde{k}}\int d^4x\left(R^4+\Lambda\right)\left(\int d^D y\sqrt{|\phi|}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2\tilde{k}}\int d^4x d^D y\sqrt{|g|}\sqrt{|\phi|}\left(R^D - \frac{1}{4}\phi_{\alpha\beta}K_a^\alpha K_b^\beta F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}\right). \end{aligned}$$

Nyt tarkoituksena on saada aikaiseksi perinteinen neliulotteinen $S_g + S_{YM}$ vaikutusfunktionaali sopivien vakioiden $\tilde{k}$ ja Λ valinnoilla.

Ensimmäinen termi saadaan perinteiseen neliulotteisen gravitaation vaikutusfunktionaalimuotoon valitsemalla

$$\tilde{k} = k\int d^D y\sqrt{|\phi|}, \tag{2.88}$$

missä $k = 8\pi G_N$.

Vaikutusfunktionaalin jälkimmäinen termi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\tilde{k}}\int d^4x\sqrt{|g|}\left(\int d^D y\sqrt{|\phi|}R^D\right) \\ &-\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{|g|}\left(-\frac{1}{2\tilde{k}}\int d^D y\sqrt{|\phi|}\phi_{\alpha\beta}K_a^\alpha K_b^\beta\right)F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}. \end{aligned}$$

Ensimmäisestä termistä päästään eroon valitsemalla kosmologiseksi vakioksi

$$\Lambda = -\frac{\int d^D y'\sqrt{|\phi(y')|}R^D(y')}{\int d^D y\sqrt{|\phi(y)|}}. \tag{2.89}$$

Oletetaan, että alimoniston B^D Killing-vektorit voidaan normalisoida niin, että

$$-\frac{1}{2\tilde{k}}\int d^D y\sqrt{|\phi|}\phi_{\alpha\beta}K_a^\alpha K_b^\beta = \delta_{ab} \tag{2.90}$$

saadaan lopputulokseksi toivottu muoto

$$\begin{aligned} S_{4+D} &= -\frac{1}{2k}\int d^4x\sqrt{|g|}\mathcal{R}^4 - \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{|g|}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ &= S_g + S_{YM}. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Mittakentän muuntumissäännössä (2.86) esiintyy kytkentävakio g, mutta koordinaattimuunnoksen (2.82) avulla laskettu muuntumissääntö (2.85) ei sisältänyt kytkentävakiota. Kytkentävakion suuruuden määrää normalisaatiosääntö (2.90), nimittäin normalisoinnin seurauksena

$$K_b^\beta \to gK_b^\beta \Rightarrow f_{bc}{}^a \to gf_{bc}{}^a,$$

jolloin yhtälöstä (2.85) saadaan

$$\delta B_\mu^a = -\partial_\mu \mathcal{X}^a(x) + gf_{bc}{}^a B_\mu^b(x)\mathcal{X}^c(x). \tag{2.92}$$

2.2.5 4+D-ulotteinen spontaani kompaktifikaatio

Spontaani kompaktifikaatio $\mathbb{M}^5 \to \mathbb{M}^4 \times S^1$ on mahdollinen ottamatta teoriaan mukaan materiakenttiä. Yleisempi tapaus $\mathbb{M}^{4+D} \to \mathbb{M}^4 \times B^D$ edellyttää kuitenkin ainekenttien huomioimisen, kuten Einsteinin yhtälöiden muodon (2.68) avulla nähtiin.

Materian sisältävän KK-teorian vaikutusfunktionaali on muotoa [18]

$$S = S_{4+D} + S_m = \frac{1}{2\tilde{k}} \int d^{4+D}z\sqrt{|G|}\ \left(\tilde{R} + \Lambda\right) + \int d^{4+D}z\ \mathcal{L}_m. \tag{2.93}$$

Tavoitteena on luoda suotuisat ehdot spontaanille kompaktifikaatiolle, jossa teorian perustilan aika-avaruusosana voidaan saada litteä Minkowskin avaruus, ts. $\mathbb{M}^{4+D} \to \mathbb{M}^4 \times B^D$.

Oletetaan metriikan olevan muotoa

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & \mathbf{0}_{4\times D} \\ \mathbf{0}_{D\times 4} & \phi_{\alpha\beta}(y) \end{pmatrix}, \tag{2.94}$$

jolloin $4 + D$ ulotteiset Einsteinin yhtälöt saadaan muotoon

$$\begin{cases} R^4_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}(\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^D + \Lambda) = \tilde{k}T_{\mu\nu} \\ R^D_{\alpha\beta} - \dfrac{1}{2}\phi_{\alpha\beta}(\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^D + \Lambda) = \tilde{k}T_{\alpha\beta}, \end{cases} \tag{2.95}$$

missä $T_{\mu\nu}$ ja $T_{\alpha\beta}$ on määritelty kuten yhtälössä (1.69).

Vaatimalla geometrian, joka on muotoa $\mathbb{M}^4 \times B^D$, olevan Einsteinin yhtälöiden (2.95) ratkaisu, voidaan määrätä vakio Λ ja kompakti maksimaalisesti symmetrinen monisto B^D, joilla se on mahdollista. Tällöin ensimmäinen yhtälö antaa energiaimpulssitensoriksi

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\tilde{k}}(\mathcal{R}^D + \Lambda)\eta_{\mu\nu} \equiv \frac{C^4}{\tilde{k}}\eta_{\mu\nu}, \tag{2.96}$$

missä $C^4 = -\frac{1}{2}(\mathcal{R}^D + \Lambda) =$ vakio, koska B^D on maksimaalisesti symmetrinen alimonisto.

Koska alimoniston B^D oletetaan olevan maksimaalisesti symmetrinen avaruus, on sen Riccin kaarevuustensori muotoa $R^D_{\alpha\beta} = \lambda\phi_{\alpha\beta}$. Tällöin (2.95) alemmasta yhtälöstä saadaan

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\tilde{k}}(\lambda - \frac{1}{2}(\mathcal{R}^D + \Lambda)) \equiv \frac{C^D}{\tilde{k}}\phi_{\alpha\beta}, \tag{2.97}$$

missä $C^D = \lambda - \frac{1}{2}(\mathcal{R}^D + \Lambda)$.

Näin ollen alempi yhtälöistä (2.95) voidaan kirjoittaa muotoon

$$R^D_{\alpha\beta} = (C^D - C^4)\phi_{\alpha\beta}, \tag{2.98}$$

jolloin moniston B^D Riccin skalaariksi saadaan.

$$\mathcal{R}^D = D(C^D - C^4). \tag{2.99}$$

Sijoittamalla (2.97), (2.98), (2,99) alempaan Einsteinin yhtälöön (2.95) saadaan vielä vakiolle Λ ehto

$$\Lambda = (D-2)C^4 - DC^D. \tag{2.100}$$

Standardimallin kenttien symmetriaryhmät G ovat jatkuvia. Esittääksemme standardimallin mukaisen kenttäteorian KK-teoriana, kompaktiksi monistoksi B^D tulee valita sellainen maksimaalisesti symmetrinen monisto, jonka isometriaryhmä on G. Kuitenkin tämä asettaa rajoituksen mahdollisille maksimaalisesti symmetrisille kompakteille monistoille.

Kompaktin maksimaalisesti symmetrisen avaruuden, jonka metriikan signatuuri on $diag(-1, \ldots, -1)$ isometriaryhmä G ei voi olla jatkuva, jos sen Riccin kaarevuustensori on muotoa $R_{\alpha\beta} = \lambda\phi_{\alpha\beta}$, missä $\lambda > 0$ [18]. Näin ollen yhtälöistä (2.98) nähdään, että on oltava $C^D < C^4$ [18].

Maksimaalisesti symmetrinen kompakti monisto B^D mahdollistaa nyt siirtymisen neliulotteiseksi teoriaksi. Esimerkiksi reaalisen skalaarikentän tapauksessa voidaan osoittaa, että $4 + D$ -ulotteisen d'Alembertin operaattorin voi kirjoittaa muodossa [18]

$$\Box_{4+D} = (\partial_\mu - B_\mu^\alpha \partial_\alpha)(\partial_\nu - B_\nu^\beta \partial_\beta) + \Box_y, \tag{2.101}$$

missä differentiaalioperaattori $\Box_y$ on muotoa

$$\Box_y = (\sqrt{|\phi|})^{-1}\partial_\alpha(\sqrt{|\phi|}\phi^{\alpha\beta}\partial_\beta),$$

ja jossa koordinaatit y parametrisoi kompaktin maksimaalisesti symmetrisen moniston B^D. Operaattorille $\Box_y$ löytyy täydellinen ortonormaali joukko ominaisfunktiota $Y_{[n]}$, joiden avulla $4 + D$ -ulotteisessa avaruudessa määritellyt funktiot $f(x, y)$ pystytään kehittämään sarjaksi [18]

$$f(x, y) = \sum_{[n]} f_{[n]}(x) Y_{[n]}(y). \tag{2.102}$$

Tätä kutsutaan *harmoniseksi sarjakehitelmäksi* B^D:llä ja se on perinteisen Fourierin sarjan yleistys. Perinteinen Fourierin sarjakehitelmä vastaa harmonista sarjakehitelmää S^1:llä.

Esimerkiksi S^2:n metriikka voidaan esittää muodossa

$$ds^2 = -r^2 \, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2, \tag{2.103}$$

jolloin differentiaalioperaattori (2.101) saa muodon

$$\Box_y = -\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right], \tag{2.104}$$

jonka ominaisfunktioita ovat nk. *palloharmoniset funktiot* $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$, jotka voidaan esittää muodossa

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = (-1)^{\frac{(m+|m|)}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_{l|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \qquad (2.105)$$

missä $P_{l|m|}$ ovat *Legendren funktioita.* Differentiaalioperaattorin (2.104) ominaisarvoyhtälö on muotoa

$$\Box_y Y_{l,m} = \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{l,m} \qquad (l = 0, 1, \ldots;\ m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l) \qquad (2.106)$$

Tällöin harmoninen sarjakehitelmä S^2:lla on muotoa [18]

$$f(x,\theta,\varphi) = \sum_{l,m} f_{l,m}(x) Y_{l,m}(\theta,\varphi), \qquad (2.107)$$

jonka avulla voidaan $4+2$-ulotteinen teoria redusoida 4-ulotteiseksi *efektiiviseksi teoriaksi.* Kuten 5-ulotteisessa tapauksessa nähtiin, tämä redusointi generoi äärettömän määrän massallisia ja äärellisen määrän massattomia kenttiä. Tämän takia spontaani kompaktifikaatio voidaan nähdä analogisena spontaanin symmetriarikon kanssa.

Taulukkoon II on listattu yksinkertaisimmat monistot B^D, joiden isometriaryhmänä saadaan standardimallissa käytetyt ryhmät $SU(3)$, $SU(2)$ ja $U(1)$.

Taulukko II. Monistot ja niiden isometriaryhmät [18]. Huomaa, että vastaavuus ei ole yksikäsitteinen.

Ryhmä (G)	Monisto (B^D)
$U(1)$	S^1
$SU(2)$	S^2
$SU(3)$	CP^2

Erityisesti siis standardimallin symmetriaryhmä $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ saataisiin yksinkertaisimmillaan kompaktin moniston $B^D = CP^2\times S^2\times S^1$ isometriaryhmänä. Tämä vastaa $4+2+1=7$-ulotteista avaruutta, jolloin realistisen Kaluzan-Kleinin tapaisen gravitaatioteorian pitäisi olla vähintään $4+7=11$-ulotteinen.

Ongelmia yleistetyissä Kaluzan-Kleinin teorioissa kuitenkin ilmenee. Esimerkiksi kaksiulotteisen pallopinnan S^2 isometriaryhmä on $SO(3) \sim SU(2) \neq SU(2)_W$. Näin ollen KK-teorioina saadaan vain sellaisia teorioita, joissa heikko vuorovaikutus vuorovaikuttaa samalla tavalla vasen- ja oikeakätisiin fermioneihin [18].

Monista KK-teorioiden ongelmista huolimatta fyysikot yhä tänä päivänä jatkavat niiden tutkimista, koska olisi vaikea uskoa, että aikaisemmin nähdyt yhtäläisyydet olisivat täyttä sattumaa. Vielä ei vain ole selvinnyt koko totuus.

3 Pimeä fotoni Kaluzan-Kleinin teoriana

Syvemmän luonnon ymmärryksen tavoittelussa on joskus tarpeen laajentaa perinteisiä näkökulmia ja hypätä tuntemattomaan, erityisesti silloin kun havaitaan kokeellisesti jotain teorian kanssa ristiriitaista/poikkeavaa. Tämä voi tarkoittaa kokonaan uudenlaisen matemaattisen rakenteen hyödyntämistä tai jo olemassa olevan rakenteen yleistämistä, lisäten uusia vapausasteita, kuten hiukkasia (kenttiä). Tässä luvussa tutustutaan nk. *pimeään fotoniin*, joka voi mahdollisesti toimia myonin anomaalisen magneettisen momentin ongelman selittäjänä [23].

3.1 Myonin $g-2$ ongelma

Eräs standardimallia uhmaava moderni ongelma tunnetaan ns. *myonin $g-2$ ongelmana*. Avainsuureena on nk. myonin *g-tekijä*, joka käytännössä mittaa myonin magneettisen voimakkuuden (magneettisen momentin) suhdetta sen spiniin ja se määritellään klassisesti [20]

$$\boldsymbol{\mu} = g\gamma\mathbf{S}, \tag{3.1}$$

missä $\gamma = \frac{q}{2m}$ on nk, gyromagneettinen suhde. Paul Dirac [24] ennusti vuonna 1928 elektronin g-tekijäksi $g = 2$, hyödyntämällä johtamaansa Diracin yhtälöä. Koska muutkin spin-$\frac{1}{2}$ hiukkaset noudattavat Diracin yhtälöä, pätee tämä myös erityisesti myonille.

Kokeelliset tulokset elektronille poikkesivat $g = 2$ arvosta ja tämä poikkeavuus pystyttiin selittämään kvanttisähködynamiikan avulla. Kvanttisähködynamiikan valossa katsottuna sähkömagneettinen kenttä elektronin lähistöllä on niin voimakas, ts. sisältää niin paljon energiaa, että hiukkas-antihiukkasparien, ns. *virtuaalihiukkasten* syntyminen mahdollistuu ja näiden virtuaalihiukkasten vuorovaikutus elektronin kanssa poikkeuttaa g-tekijän arvoa.

Näitä virtuaalihiukkasten aiheuttamaa poikkeamaa mittaa nk. *anomaalinen magneettinen momentti* ja se määritellään

$$a \equiv \frac{g-2}{2}, \tag{3.2}$$

joka siis mittaa häiriöiden suhteellista vaikutusta g-tekijään.

Kvanttisähködynamiikan tuomat korjaustermit onnistuivat selittämään poikkeavuudet elektronille, mutta huomattavasti raskaamman hiukkasen, myonin tapauksessa teoreettinen arvo ja kokeellinen arvo poikkeavat merkittävästi. Teoreettiseksi arvoksi on laskettu [21]

$$a_t = 116\ 591\ 810(43) \cdot 10^{-11}, \tag{3.3}$$

jonka virhe pääasiallisesti johtuu hadronien välisten vuorovaikutusten datalähtöisestä tarkastelusta.

Tuoreimman kokeellisen mittaustuloksen (lokakuu 2023) jälkeinen maailmanlaajuinen keskiarvo on [22]

$$\langle a \rangle = 116\ 592\ 059(22) \cdot 10^{-11}, \tag{3.4}$$

joiden erotus on siis

$$\Delta a = \langle a \rangle - a_t = 249(48) \cdot 10^{-11}, \tag{3.5}$$

jolloin teoreettisen ja kokeellisen arvon välillä on 5,2 keskihajonnan tilastollinen ero.

Ongelma voi johtua käytännössä kahdesta syystä. Teoreettisesti laskettu arvo voi olla väärin, joka voisi johtua esimerkiksi puuttuvista vapausasteista, tai vaihtoehtoisesti kokeellinen tulos voisi olla väärin. Koska kokeelliset arvot ovat toistuvasti olleet keskenään hyvin samaa suuruusluokkaa, niin voisi olettaa ongelman pääasiallisena syynä olevan puutteellinen teoria.

Tämä voi avata portin uudelle fysiikalle, erityisesti uusien standardimallin ulkopuolisten hiukkasten etsinnälle. Seuraavaksi tarkastellaan erästä kandidaattia, jota ei ensisijaisesti keksitty selittämään $g-2$ ongelmaa, vaan nousi otsikoihin kosmologian ongelmien yhteydessä.

3.2 Pimeä sektori ja pimeä fotoni

Useiden vuosikymmenten ajan fyysikot ovat yrittäneet löytää uusia hiukkasia, joita ei ole nykyiseen standardimalliin lueteltu mukaan. Kun standardimallin hiukkaset eivät kykene selittämään havaittuja fysikaalisia ongelmia, on pohdittava sen ulkopuolisten hiukkasten olemassaolon mahdollisuutta. Erityisesti kosmologian saralla nämä ongelmat ovat olleet silmiinpistäviä [25, 27, 28].

3.2.1 Pimeä sektori

Nykyisen standardimallin hiukkaset eivät voi yksinään selittää poikkeavuutta, joka havaitaan galaksien liikkeessä. Tämän johdosta on syntynyt ajatus standardimallin ulkopuolisista hiukkasista, erityisesti sellaisista jotka eivät kanna standardimallin voimia tuntevaa varausta.

Näin päädytään luontaisesti nk. *pimeän sektorin* käsitteeseen. Pimeä sektori koostuu hiukkasista, jotka eivät kanna standardimallin voimia tuntevaa varausta. Esimerkiksi kosmologisten havaintojen mahdollisena selittäjänä tunnettu *pimeä aine* voisi mahdollisesti kuulua pimeään sektoriin.

Koska pimeän sektorin hiukkaset eivät kanna standardimallin mukaista varausta, olisi niiden havaitseminen laboratorio olosuhteissa hyvin haastavaa. Erityisesti jos pimeän sektorin hiukkaset vuorovaikuttaisivat näkyvän sektorin kanssa vain gravitaation välityksellä, olisi niiden havaitseminen laboratorio olosuhteissa melkeinpä mahdotonta.

Kuitenkin tutkimuksen jatkumon kannalta optimistisempi lähestymistapa olisi olettaa tavanomaisen "näkyvän" sektorin ja pimeän sektorin välille jonkinlainen "väylä", jonka kautta voitaisiin saada informaatiota pimeän sektorin hiukkasista. Tällaista "väylää" pimeän sektorin ja näkyvän sektorin (standardimallin hiukkasten ja voimien -sektori) välillä kutsutaan *portaaliksi.*

Näkyvän materiakentän ja näkyvän mittakentän välinen vuorovaikutus syntyy lokaalin mittainvarianssin vaatimuksesta, mutta portaalin käsite olisi vastaava periaate muodostaa vuorovaikutuksia kahden eri sektorin välille. Eräs yksinkertainen portaali saadaan aikaiseksi nk. *kineettisen sekoituksen* (eng. *Kinetic mixing*) avulla.

3.2.2 Pimeä fotoni

Myonin $g-2$ ongelma antaa mahdollisesti tilaa uudelle fysikaaliselle vapausasteelle, jossa $g-2$ ongelma antaisi rajoitteet tämän vapausasteen parametreille. Koska oletetusti yksikään standardimallin tarjoamista vapaustasteista, ei joko sovi, tai riitä selittämään ilmiötä, tarjoaa tämä erinomaisen väylän olettaa tarvittavan vapausasteen löytyvän pimeästä sektorista.

Portaali pimeän sektorin ja näkyvän sektorin välille tulisi luoda siten, että perinteisiä Yangin-Millsin mittakenttäteorioissa olevia periaatteita ei rikottaisi. Erityisesti pimeän sektorin hiukkasilta vaaditaan samat rakenteeliset ominaisuudet, kuin standardimallin hiukkasilta, ts. näkyvän sektorin hiukkasilta, eli

(E1) Teorian vuorovaikutukset perustuvat lokaalin mittainvarianssin periaatteelle

(E2) Hiukkasten kenttien (Skalaari, Spinori, jne.) Lagrangen tiheydet konstruoidaan siten, että ne ovat symmetrisiä jonkin määrätyn mittasymmetriaryhmän G suhteen.

(E3) Teorian tulee olla renormalisoituva.

Näiden periaatteiden valossa eräs yksinkertaisimmista portaaleista saadaan aikaiseksi lisäämällä standardimallin sähköheikkoon sektoriin $SU(2)_W \times U(1)_Y$ yksi ylimääräinen pimeän sektorin vektoribosoni $U(1)_X$, jota kutsutaan *pimeäksi fotoniksi*, jonka dynaaminen termi sekoittuu hypervarauksen kineettisen termin kanssa muodossa

$$\mathcal{L} \supset \frac{\varepsilon}{2\cos\theta_W} B_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

missä $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ on $U(1)_Y$ vektoribosonin dynaaminen termi, $F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$ on vastaavasti $U(1)_X$ vektoribosonin kineettinen termi, ε kineettisen sekoitteen kytkentäparametri ja θ_W on Weinbergin kulma.

Termi (3.6) on juurikin edellä mainittu kineettisen sekoituksen portaali ja se on invariantti mittamuunnosten

$$B_\mu \to B_\mu + \partial_\mu \mathcal{X}(x) \tag{3.7}$$

$$A'_\mu \to A'_\mu + \partial_\mu \mathcal{X}(x) \tag{3.8}$$

suhteen.

Oletetaan, että pimeällä sektorin bosonilla $U(1)_X$ on massa, jonka se on voinut saada esimerkiksi kytkeytymällä pimeän Higgsin kenttään, ts. pimeän sektorin skalaarikenttään, jolla on sopiva potentiaalitermi, johon kytkeytymällä se olisi saanut massan symmetriarikon yhteydessä. Tällöin kaikkein yleisin ehdot (E1-E3) toteuttava muoto (pois lukien pimeän sektorin materian virrantiheystermi) voidaan kirjoittaa muotoon [23, 25]

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + g_Y B_\mu \mathcal{J}_Y^\mu - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{\varepsilon}{2\cos\theta_W} B_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} \tag{3.9}$$

Sähköheikon sektorin symmetriarikon $SU(2)_W \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$ yhteydessä

$$B^\mu \to \cos\theta_W A^\mu + \sin\theta_W Z^\mu, \tag{3.10}$$

jossa A^μ on fotoni ($U(1)_{em}$ vektoribosoni) ja Z^μ heikon vuorovaikutuksen Z-bosoni.

Lagrangen tiheyden (3.9) kineettinen sekoitus termi saa tällöin muodon

$$\frac{\varepsilon}{2\cos\theta_W} B_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} \to \frac{\varepsilon}{2} F_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{\varepsilon}{2} \tan\theta_W Z_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

missä $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$. Termeistä ensimmäinen luo tarvittavan korjaustermin, joten jätetään Z-bosonin ja pimeän fotonin kineettisen sekoitteen termi huomiotta.

Määritellään fotonikenttä uusiksi niin, että ensimmäinen termi saadaan diagonalisoitua koskematta jälkimmäiseen. Määrittelemällä

$$A^\mu \equiv \bar{A}^\mu + \varepsilon A'^\mu \tag{3.12}$$

saadaan (3.9) lopulta muotoon

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int}, \tag{3.13}$$

missä

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{3.14}$$

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \tag{3.15}$$

$$\mathcal{L}_{int} = e A_\mu \mathcal{J}^\mu_{em} + e\varepsilon A'_\mu \mathcal{J}^\mu_{em}, \tag{3.16}$$

missä on heti pudotettu viiva mittakentän $\bar{A}^\mu$ päältä ja $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} \tan\theta_W$.

Näin ollaan johdettu minimaalinen pimeän fotonin teoria, jonka parametreina on $\{\varepsilon, m_{A'}\}$. Myonin $g-2$ ongelma voisi potentiaalisesti olla kokeellinen tulos, jonka avulla teorian parametrit voi määrätä. Erityisesti edellä johdettu kytkentätermi $e\varepsilon A'^\mu \mathcal{J}^\mu_{em}$ luo anomaaliselle g-tekijälle korjaustermin [26]

$$a^{A'}_{myoni} = \begin{cases} \dfrac{\alpha\varepsilon^2}{2\pi}, & \text{jos } m_{myoni} \gg m_{A'} \\ \dfrac{\alpha\varepsilon^2 m^2_{myoni}}{3\pi m^2_{A'}}, & \text{jos } m_{myoni} \ll m_{A'}. \end{cases} \tag{3.17}$$

ja jolloin riittävä kontribuutio saataisiin aikaiseksi valitsemalla parametrit niin, että seuraava epäyhtälö toteutuu [26]

$$\varepsilon^2 \cdot \left(\frac{100 \text{ MeV}}{m_{A'}} \right)^2 < 1,0 \cdot 10^{-3}. \tag{3.18}$$

Kineettisen sekoitteen kytkentäparametrin ε on oltava suuruudeltaan hyvin pieni antaakseen tarvittavan kontribuution.

3.3 Pimeän fotonin teoriaan johtava Kaluzan-Kleinin teoria

Kappaleessa 2 esitettiin, kuinka esittää Yangin-Millsin mukainen kenttäteoria $4 + D$-ulotteisena gravitaatioteoriana. Tässä luvussa esitetään kuinka päästään edellä esitettyyn $SU(2) \times U(1)_Y \times U(1)_X$ teoriaan spontaanin kompaktifikaation avulla.

Kaluzan-Kleinin teoriassa varausavaruuden symmetriaryhmä $SU(2) \times U(1)_Y \times U(1)_X$ tulisi esittää moniston isometriaryhmänä. Taulukon II mukaan symmetriaryhmä $SU(2) \times U(1)_Y \times U(1)_X$ olisi yksinkertaisimmillaan moniston $S^2 \times S^1 \times \bar{S}^1$ isometriaryhmä, jolloin kyseessä on $4 + 2 + 1 + 1 = 8$ ulotteinen avaruus.

3.3.1 Mittakenttien dynaamiset termit

Olkoon S^2:n koordinaatit (θ, φ), jossa $\theta \in [0, \pi),\ \varphi \in [0, 2\pi)$ ja säde R_{S^2}. Olkoon ympyröiden S^1 ja $\bar{S}^1$ säteet vastaavasti R_1 ja R_2 ja koordinaatit y^1 ja y^2, missä $y^j \in [0, 2\pi R_j),\ j = 1, 2$. Tällöin koko avaruuden koordinaatit ovat $(x^\mu, x^5, x^6, x^7, x^8) = (x^\mu, \theta, \phi, y^1, y^2)$.

Käytetään neliulotteisen osan koordinaattien indekseille merkintää $\mu, \nu, \rho, \xi = 0, 1, 2, 3$ ja pallopinnan koordinaattien indekseille merkintää $\alpha, \beta = 5, 6$ sekä ympyröiden koordinaattien indekseille merkintää $i, j = 7, 8$, jolloin koordinaatteja voidaan merkitä symbolisesti (x^μ, x^α, x^i). Tämän lisäksi käytetään indeksejä κ, λ, jotka indeksoivat koko ylimääräisen moniston $S^2 \times S^1 \times S^1$ koordinaatit $= 5, 6, 7, 8$.

Moniston metriikka kirjoitetaan lokaalisti ortogonaalisessa muodossa

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \mathcal{B}_\mu^\lambda \mathcal{B}_\nu^\kappa & \mathcal{B}_\mu^\kappa \Phi_{\kappa\lambda} \\ \mathcal{B}_\nu^\kappa \Phi_{\lambda\kappa} & \Phi_{\kappa\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

missä

$$\mathcal{B}_\mu^\kappa = (B_\mu^\alpha, A_\mu, A'_\mu)^T, \tag{3.20}$$

$$\Phi_{\kappa\lambda} = \begin{pmatrix} \phi_{\alpha\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

missä $\phi_{\alpha\beta}$ on pallopinnan S^2 metriikka ja identiteettimatriisi johtuu kahdesta ylimääräisestä litteästä monistosta S^1. Tällöin metriikan (3.20) käänteismetriikka on muotoa

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\rho}\mathcal{B}_\rho^\lambda \\ -g^{\rho\nu}\mathcal{B}_\rho^\lambda & \Phi^{\lambda\kappa} + g^{\xi\rho}\mathcal{B}_\xi^\lambda \mathcal{B}_\rho^\kappa \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

jossa

$$\Phi^{\kappa\lambda} = \begin{pmatrix} \phi^{\alpha\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

missä $\phi^{\alpha\beta}$ on moniston S^2 metriikan $\phi_{\alpha\beta}$ liittotensori.

Tällöin saadaan 8-ulotteisen avaruuden vaikutus muotoon

$$\begin{aligned} S_8 &= -\frac{1}{2k_8}\int d^8x\sqrt{|G|}\left(\mathcal{R}^8 + \Lambda\right) && (3.24)\\ &= -\frac{1}{2k_8}\int d^4x\ d^4y\sqrt{|g|}\sqrt{|\phi|}(\mathcal{R}^8 + \Lambda) && (3.25)\\ &= -\frac{1}{2k_8}\int d^4x\ \sqrt{|g|}\ d\theta\ d\varphi\ dy_1\ dy_2\ R_{S^2}^2 \sin\theta(\mathcal{R}^8 + \Lambda), && (3.26)\end{aligned}$$

missä

$$\mathcal{R}^8 = \left(\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^{S^2} - \frac{1}{4}\phi_{\alpha\beta}K_a^\alpha K_b^\beta \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{b\mu\nu} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}\right). \tag{3.27}$$

Kuten kappaleessa (2.2.4) valitsemalla sopivasti vakiot k_8 ja Λ päästään efektiiviseen neliulotteiseen teoriaan.

Yhtälöiden (2.88), (2.89) mukaisesti saadaan

$$\begin{aligned} k_8 &= k \int d\theta \; d\varphi \; dy_1 \; dy_2 \; R_{S^2}^2 \; \sin\theta \\ &= 16\pi^3 k R_{S^2}^2 R_1 R_2 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ja

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\frac{2(\int_0^\pi d\theta \; \sin\theta) \; (\int_0^{2\pi} d\varphi) \; (\int_0^{2\pi R_1} dy_1) \; (\int_0^{2\pi R_2} dy_2)}{16\pi^3 R_{S^2}^2} \\ &= -\frac{2}{R_{S^2}^2}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Seuraavaksi tulee diagonalisoida termi $-\frac{1}{4}\phi_{\alpha\beta} K_a^\alpha K_b^\beta \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{b\mu\nu}$ normalisoimalla moniston S^2 Killing-vektorit.

Moniston S^2 metriikka on muotoa

$$\phi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -R_{S^2}^2 & 0 \\ 0 & -R_{S^2}^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

jonka isometrian generaattorit $\mathbf{k}_i = K_i^\theta \partial_\theta + K_i^\varphi \partial_\varphi$ ovat muotoa

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \sin\varphi \; \partial_\theta + \cot\theta \cos\varphi \; \partial_\varphi, \\ \mathbf{k}_2 &= \cos\varphi \; \partial_\theta - \cot\theta \sin\varphi \; \partial_\varphi, \\ \mathbf{k}_3 &= \partial_\varphi, \end{aligned} \tag{3.31}$$

jolloin sijoittamalla Killing-vektorit kaavaan (2.90) saadaan

$$-\frac{1}{2k_8} \int d\theta d\varphi dy_1 dy_2 \sin\theta \; \phi_{\alpha\beta} K_a^\alpha K_b^\beta = \frac{R_{S^2}^2}{3k} \delta_{ab}. \tag{3.32}$$

Uudelleenmäärittelemällä Killing-vektorit

$$K_a^\alpha \to \frac{R_{S^2}}{\sqrt{3k}} K_a^\alpha \tag{3.33}$$

saadaan vaikutus (3.24) lopulta muotoon

$$
\begin{aligned}
S_8 = &-\frac{1}{2k}\int d^4x\sqrt{|g|}\mathcal{R}^4 - \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{|g|}\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\mathcal{F}^{a\mu\nu} \\
&-\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{|g|}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{|g|}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
= &\ S_g + S_{SU(2)} + S_{U(1)_Y} + S_{U(1)_X}
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Näin on kyetty esittämään Yangin-Millsin $SU(2)\times U(1)_Y \times U(1)_X$ mukainen mittakenttäteoria 8-ulotteisena gravitaatioteoriana. Näin aikaansaadut mittakentät ovat kuitenkin massattomia. Mittakentille olisi mahdollista tuottaa massatermit kovariantin derivaatan sisältämien Cristoffelin symbolien avulla. Tätä laskuharjoitusta ei kuitenkaan tässä tutkielmassa suoriteta.

3.3.2 Skalaarikentän kytkeminen mukaan teoriaan

Lopuksi tarkastellaan esimerkkinä, millaisia seurauksia edellä johdetulla KK-teorialla olisi reaaliseen skalaarikenttään spontaanin kompaktifikaation seurauksena.

Fysikaaliset suureet voidaan esittää ylimääräisen moniston $S^2 \times S^1 \times S'^1$ kompaktisuuden johdosta harmonisena sarjakehitelmänä

$$
\phi(x^\mu, \theta, \varphi, y_1, y_2) = \sum_{l,m,n,u} \phi_{l,m,n,u}(x^\mu) Y_{l,m}(\theta,\varphi) X_n(y_1) \bar{X}_u(y_2), \tag{3.35}
$$

missä $Y_{l,m}$ ovat palloharmonisia funktiota (2.105) ja

$$
X_n(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_1}} e^{-in\frac{y_1}{R_1}} \tag{3.36}
$$

$$
\bar{X}_u(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_2}} e^{-iu\frac{y_2}{R_2}} \tag{3.37}
$$

Spontaanin kompaktifikaation laskemisessa hyödyllisiä relaatioita

$$
\int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta\ d\varphi\ \sin\theta\ Y_{l',m'}(\theta,\varphi) Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \delta_{l'l}\ \delta_{m'm} \tag{3.38}
$$

$$
\int_0^{2\pi R_j} dy_j X_{n'}(y_j) X_n(y_j) = \delta_{n'(-n)} \tag{3.39}
$$

Kuten dynaamisia termejä johdettaessa lähtötilanne on 8-ulotteinen skalaarikentän vaikutus

$$
\begin{aligned}
S_m &= \int d^8x\sqrt{|G|}\ \left(-\frac{1}{2}\phi\Box_8\phi\right) \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}d\theta\ d\varphi\ dy_1\ dy_2 R_{S^2}^2\sin\theta\ \left(-\frac{1}{2}\phi\Box_8\phi\right)
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Differentiaalioperaattori $\Box_8$ voidaan separoida, jolloin (3.40) integrandi voidaan kirjoittaa muotoon

$$
\phi\Box_8\phi = \phi\Box_M\phi + \phi\Box_{S^2}\phi + \phi\Box_{S^1}\phi + \phi\Box_{S'^1}\phi, \tag{3.41}
$$

missä $\Box_{S^2}$ on määritelty kohdassa (2.104), $\Box_{S^1} = -\partial^2_{y^1}$, $\Box_{S'^1} = -\partial^2_{y^2}$

$$
\Box_M = g^{\mu\nu}(\partial_\mu - B^a_\mu K^\alpha_a\partial_\alpha - A_\mu\partial_{y^1} - A'_\mu\partial_{y^2})(\partial_\nu - B^b_\nu K^\beta_b\partial_\beta - A_\nu\partial_{y^1} - A'_\nu\partial_{y^2}), \tag{3.42}
$$

joka saadaan yhtälöä (2.101) soveltamalla. Suoralla laskulla saadaan

$$
\phi\Box_{S^2}\phi = \sum_{l',m',n',u'}\sum_{l,m,n,u}\frac{l(l+1)}{R_{S^2}^2}\phi_{l'm'n'u'}\phi_{lmnu}Y_{l'm'}Y_{lm}X_{n'}X_n\bar{X}_{u'}\bar{X}_u, \tag{3.43}
$$

$$
\phi\Box_{S^1}\phi = \sum_{l',m',n',u'}\sum_{l,m,n,u}\frac{n^2}{R_1^2}\phi_{l'm'n'u'}\phi_{lmnu}Y_{l'm'}Y_{lm}X_{n'}X_n\bar{X}_{u'}\bar{X}_u, \tag{3.44}
$$

$$
\phi\Box_{S'^1}\phi = \sum_{l',m',n',u'}\sum_{l,m,n,u}\frac{u^2}{R_2^2}\phi_{l'm'n'u'}\phi_{lmnu}Y_{l'm'}Y_{lm}X_{n'}X_n\bar{X}_{u'}\bar{X}_u, \tag{3.45}
$$

jolloin integroimalla yli moniston $S^2\times S^1\times S'^1$ koordinaattien saadaan

$$
\int d\theta\ d\varphi\ dy_1\ dy_2 R_{S^2}^2\sin\theta\ \phi\Box_{S^2}\phi = \sum_{l,m,n,u} l(l+1)\ \phi_{lm(-n)(-u)}(x)\phi_{lmnu}(x), \tag{3.46}
$$

$$
\int d\theta\ d\varphi\ dy_1\ dy_2 R_{S^2}^2\sin\theta\ \phi\Box_{S^1}\phi = \sum_{l,m,n,u}\left(\frac{R_{S^2}}{R_1}\right)^2 n^2\ \phi_{lm(-n)(-u)}(x)\phi_{lmnu}(x), \tag{3.47}
$$

$$
\int d\theta\ d\varphi\ dy_1\ dy_2 R_{S^2}^2\sin\theta\ \phi\Box_{S'^1}\phi = \sum_{l,m,n,u}\left(\frac{R_{S^2}}{R_2}\right)^2 u^2\ \phi_{lm(-n)(-u)}(x)\phi_{lmnu}(x). \tag{3.48}
$$

Differentiaalioperaattorin (3.42) sisältää teorian neliulotteisen osan ja tämän lisäksi tuo mukaan materian vuorovaikutukset mittakenttien kanssa. Vuorovaikutukset generoi differentiaalioperaattori

$$\Box_{int} \equiv \Box_M - \Box_4, \tag{3.49}$$

missä $\Box_4 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Merkitsemällä kollektiivisesti indeksejä $(l, m, n, u) \equiv [N]$ ja $(l, m, -n, -u) \equiv [\tilde{N}]$ voidaan vaikutus (3.40) kirjoittaa muotoon

$$S_m = -\frac{1}{2}\sum_{[N]}\int d^4x\sqrt{|g|}\left\{\phi_{[\tilde{N}]}\Box_4\phi_{[(N]} + M_{[N]}\phi_{[\tilde{M}]}\phi_{[N]}\right\} + \sum_{[N]} S^{int}_{[N]}, \tag{3.50}$$

jossa vuorovaikutusosa on

$$S^{int}_{[N]} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{|g|}\left\{\phi_{[\tilde{N}]}\Box_{int}\phi_{[(N]}\right\}. \tag{3.51}$$

ja skalaarikenttien massat ovat

$$M_{[N]} = M_{l,m,n,u} = \left(l(l+1) + \left(\frac{R_{S^2}}{R_1}\right)^2 n^2 + \left(\frac{R_{S^2}}{R_2}\right)^2 u^2\right) \tag{3.52}$$

Havaitaan perinteisestä Kaluzan-Kleinin teoriasta poiketen, että mittaryhmään $SU(2) \times U(1)_Y \times U(1)_X$ johtavasta 8-ulotteisesta KK-teoriasta ei seuraa massatermejä, jotka olisivat $\propto \frac{1}{r}$. Erityisesti jos ylimääräisten ulottuvuuksien säteet ovat samaa suuruusluokkaa, olisi myös skalaarikenttien massojen suuruudet huomattavasti pienempiä, kuin mitä yhtälön (2.58) tuottamat skalaarikentän massat, jotka olivat suuruusluokaltaan $\approx 10^{19}$ GeV.

4 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa on käsitelty laajasti klassisen kenttäteorian ja yleisen suhteellisuusteorian perusteita, jotka muodostavat perustan Kaluzan-Kleinin teorioiden ymmärtämiselle. Luvussa 1 on syvennytty Yangin-Millsin mittakenttäteorioihin, erityisesti niiden matemaattiseen rakenteeseen, symmetrioihin sekä siihen miten symmetriat standardimalliin liittyvät. Erityisesti on tarkasteltu Noetherin teoreemaa ja sen keskeistä roolia ohjaavana tekijänä säilyvien suureiden määrittelyssä symmetrioita hyödyntäen.

Kaluzan-Kleinin teoriat ovat olleet keskeisessä roolissa luvussa 2, jossa on esitelty sekä alkuperäinen Kaluzan-Kleinin teoria että sen yleistetyt muodot. Kaluzan ja Kleinin ajatus yhdestä ylimääräisestä ulottuvuudesta ja sen kompaktifikaatiosta tarjoaa mielenkiintoisen näkökulman, jonka avulla voidaan yhtenäistää gravitaatio ja sähkömagnetismi. Tämän teorian matemaattinen rakenne, kuten 5-ulotteinen Einsteinin-Hilbertin vaikutus ja sen avulla lasketut geodeettisen viivan yhtälöt, on käsitelty yksityiskohtaisesti. Luvun 2 päätteeksi on tarkasteltu yleistettyjä KK-teorioita, joissa yhden ylimääräisen ulottuvuuden sijaan käytetään useampaa ulottuvuutta, jonka avulla mahdollistetaan gravitaatioteorian yhteys Yangin-Millsin mittakenttäteorioihin.

Tutkielman viimeisessä luvussa on perehdytty myonin $g-2$ ongelmaan ja esitetty kuinka tämä ongelma voi toimia porttina uudenlaisen fysiikan löytämiselle. Eräänä kandidaattina toimii pimeän sektorin $U(1)$-bosoni, joka kantaa nimeä *pimeä fotoni* ja jonka teoriaan perehdyttiin ensin tavanomaisen Yangin-Millsin teorian ja pimeän sektorin teorian välisen portaalin kautta, joka tunnetaan *kineettisenä sekoitteena*. Luvun lopuksi esitettiin, kuinka pimeän fotonin mittaryhmään päädytään 8-ulotteisena gravitaatioteoriana.

Yhteenvetona voidaan todeta, että Kaluzan-Kleinin teoriat tarjoavat syvällisen ja intuitiivisen tavan ymmärtää ja yhdistää erilaiset fysikaaliset vuorovaikutukset. Tutkimukset lisäulottuvuuksien ja niiden kompaktifikaation parissa eivät ainoastaan syvennä ymmärrystämme fysikaalisista ilmiöistä, vaan voivat myös mahdollisesti tarjota väylän uusien teorioiden löytämiseksi. Kuitenkin ongelmaton KK-teoriakehys ei ole, vaan se tarjoaa useita haasteita, joita ei vielä tänä päivänäkään ole kyetty ratkaisemaan ja jotka ovat myös saaneet useat fyysikot luopumaan Kaluzan-Kleinin teorioiden tutkimisesta.

Kuitenkin on syytä uskoa, että jatkuva tutkimus ja innovaatiot voivat vähitellen ratkaista nämä haasteet. Tieteellinen edistys tapahtuu usein askel askeleelta, ja juuri tämänkaltaiset teoriat voivat avata ovia kohti syvempää ymmärrystä maailmankaikkeudesta ja lopulta johdattaa meidät kohti yhtenäistä teoriaa, joka selittää kaikki tunnetut vuorovaikutukset. Näin ollen Kaluzan-Kleinin teorioiden tutkiminen on edelleen arvokasta ja inspiroivaa, tarjoten mahdollisuuden merkittäviin läpimurtoihin teoreettisessa fysiikassa.

Viitteet

[1] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, (J. Wiley & Sons Inc, 1987).

[2] M. Srednicki, *Quantum Field theory*, (Cambridge University Press, 2006).

[3] S. Weinberg, *Quantum Theory of Fields*, (Cambridge University Press, 1995).

[4] I. Vilja, *Quantum Field Theory 1 & 2*, (Turun yliopisto, Fysiikan laitos, 2023).

[5] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge theory of Elementary particle physics*, 1 ed. (Clarendon Press, 1984).

[6] P. Dirac, *The Quantum Theory of the Electron*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A **117**, No. 778, 610-624 (1928).

[7] N. Byers, *E. Noether's Discovery of the Deep Connection Between Symmetries and Conservation Laws* (Physics Department, UCLA, 1998).

[8] I. Vilja, *Suppea suhteellisuuteoria 1*, s.3 (Turun yliopisto, Fysiikan laitos, 2016).

[9] I. Vilja, *Yleinen suhteellisuusteoria*, (Turun yliopisto, Fysiikan laitos, 2023).

[10] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, 1972).

[11] S.M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (Addison-Wesley, 2003).

[12] T. Appelquist, A. Chodos, P.G.O. Freund, *Modern Kaluza-Klein theories*, 1 ed. (Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1987).

[13] J. M. Overduin, P. S. Wesson, *Kaluza-Klein Gravity*, (Elsevier Preprint, 2019).

[14] G. Nordström, *On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields*, (Societas Scientiarum Fennica, 1914).

[15] T. Kaluza, *On the Unification Problem of Physics*, (Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, vol. 96, 1921).

[16] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity*, (Zeitschrift für Physik **37**, 895-906, 1926).

[17] O. Klein, Nature - *The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law*, **118**, 516 (1926).

[18] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge symmetries*, (Institute of Physics Publishing, 2002).

[19] R. Kerner, *Generalization of the Kaluza-Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group*, (Annales de l'Institut Henri Poincaré, Section A 9, no. 2, 143-152, 1968).

[20] G. Benton *et al.*, Physical Review Letters **131**, 251803 (2023).

[21] T. Aoyama *et* al., Physics Reports - *The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model*, **887**, 3 (2020).

[22] A.P. Aguillard *et* al., Physical Review Letters - *Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm*, **131**, 16 (2023).

[23] M. He, X.-G. He, C.-K. Huang, *Dark Photon Search at A Circular e^+e^- Collider*, International Journal of Modern Physics A, vol. 32, no. 31, (2017).

[24] P. Dirac, Proceedings of the Royal Society of London. Series A **117**, 610 (1928).

[25] M. Fabbrichesi, E. Gabrielli, G. Lanfranchi, *The Dark Photon*, (SpringerBriefs in Physics, 2020).

[26] M. Pospelov, Physical Review D - *Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* **80**, (2009).

[27] M.-D. Diamond, P. Schuster, Physical Review Letter - *Searching for Light Dark Matter with the SLAC Millicharge Experiment* **111**, (2013).

[28] D. Feldman, Z. Liu, and P. Nath, - Phys. Rev. *he Stueckelberg Z-prime Extension with Kinetic Mixing and Milli-Charged Dark Matter From the Hidden Sector,* **75**, (2007).

A Diagonaaliblokkimuotoa olevan $4 + D$-ulotteisen metriikan Riccin kaarevuustensorin hajotelma

Olkoon metriikka muotoa

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & \mathbf{0}_{4\times D} \\ \mathbf{0}_{D\times 4} & g_{\alpha\beta}(y) \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Tavoitteena on osoittaa, että $4 + D$-ulotteiselle Riccin kaarevuustensorille $\tilde{R}_{AB}$ pätee

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} &= R^4_{\mu\nu} \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} &= R^D_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

missä $R^4_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(\mathcal{M}^4)$ ja $R^D_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}(B^D)$.
Riemannin kaarevuustensorille voidaan johtaa muoto

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{KACB} =& \frac{1}{2}\left[\partial_B\partial_A G_{KC} + \partial_K\partial_C G_{AB} - \partial_K\partial_B G_{AC} - \partial_C\partial_A G_{KB}\right] \\ &- G_{RS}\left(\tilde{\Gamma}^R_{KB}\tilde{\Gamma}^S_{AC} - \tilde{\Gamma}^R_{KC}\tilde{\Gamma}^S_{AB}\right), \end{aligned} \tag{A.3}$$

jolloin Riccin kaarevuustensori saadaan

$$\tilde{R}_{AB} = G^{CK}\tilde{R}_{KACB}. \tag{A.4}$$

Ensiksi tulee tarkastella Cristoffelin symboleita

$$\tilde{\Gamma}^C_{AB} = \frac{1}{2}G^{CK}\left(\partial_A G_{CB} + \partial_B G_{CA} - \partial_C G_{AB}\right). \tag{A.5}$$

Koska metriikka (A.1) on diagonaaliblokkimuotoa

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu},\ G_{\alpha\nu} = 0,\ G_{\nu\alpha} = 0 \text{ ja } G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta},$$

nähdään suoraan, että

$$\tilde{\Gamma}^C_{\mu\alpha} = \tilde{\Gamma}^C_{\alpha\mu} = 0. \tag{A.6}$$

Mikäli yläindeksinä C on Lorentzin indeksi $\kappa = 0, \ldots, 3$, niin ainoat nollasta poikkeavat Cristoffelin symbolit ovat niitä, joilla alaindeksit A ja B ovat myös Lorentzin indeksejä μ, ν. Aivan vastaavalla päättelyllä jos yläindeksi on ylimääräisen moniston indeksi $\gamma = 5, \ldots, D+4$ ovat ainoat nollasta poikkeavat termit sellaisia, joissa alaindeksit A ja B ovat ylimääräisen ulottuvuuden indeksejä α, β, ts. nollasta poikkeavat Cristoffelin symbolit ovat muotoa

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \text{ ja } \tilde{\Gamma}^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu}. \tag{A.7}$$

Riccin kaarevuustensori voidaan kirjoittaa auki

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{AB} &= G^{CK}\tilde{R}_{KACB} \\ &= G^{\mu\nu}\tilde{R}_{\nu A\mu B} + 2G^{\alpha\nu}\tilde{R}_{\nu A\alpha B} + G^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\beta A\alpha B} \\ &= g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\nu A\mu B} + g^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\beta A\alpha B}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Koska metriikka $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ ja $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(y)$, niin

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu}(x) = 0 \tag{A.9}$$

$$\partial_\mu g_{\alpha\beta}(y) = 0, \tag{A.10}$$

jolloin soveltamalla yhtälöitä (A.3), (A.6), (A.7), (A.9) ja (A.10) nähdään, että jos yhtälössä (A.8) $A = \hat{\mu}$ ja $B = \hat{\nu}$, niin

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\nu\hat{\mu}\mu\hat{\nu}} + g^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\beta\hat{\mu}\alpha\hat{\nu}} \\ &= g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\nu\hat{\mu}\mu\hat{\nu}} \\ &= g^{\mu\nu}R_{\nu\hat{\mu}\mu\hat{\nu}} \\ &= R^4_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Aivan vastaavasti nähtäisiin, että $\tilde{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = R^D_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ ja $\tilde{R}_{\hat{\mu}\hat{\beta}} = 0$.

B 4+D -ulotteinen liittotensori lokaalisti ortogonaalista muotoa olevalle metriikalle

Olkoon metriikka lokaalisti ortagonaalista muotoa

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + B_\mu^\alpha B_\nu^\beta \phi_{\alpha\beta} & B_\mu^\alpha \phi_{\alpha\beta} \\ B_\nu^\beta \phi_{\alpha\beta} & \phi_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Tarkoituksena on osoittaa, että metriikan (B.1) liittotensori on

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\kappa} B_\kappa^\alpha \\ -g^{\nu\kappa} B_\kappa^\beta & \phi^{\alpha\beta} + g^{\kappa\lambda} B_\kappa^\alpha B_\lambda^\beta \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Jotta G^{AB} olisi metriikan G_{AB} liittotensori on sen toteutettava relaatio

$$G_{MN} G^{NK} = G_{M\mu} G^{\mu K} + G_{M\alpha} G^{\alpha K} = \delta_M^K.$$

Käydään läpi indeksiparit (μ, ν), (μ, β) ja (α, β)

- Molemmat Lorenzin indeksejä (μ, ν)

$$\begin{aligned} G_{\mu N} G^{N\nu} &= G_{\mu\kappa} G^{\kappa\nu} + G_{\mu\bar{\alpha}} G^{\bar{\alpha}\nu} \\ &= (g_{\mu\kappa} + \phi_{\alpha\beta} B_\mu^\alpha B_\mu^\beta) g^{\kappa\nu} + B_\mu^\gamma \phi_{\bar{\alpha}\gamma} (-g^{\lambda\nu} B_\lambda^{\bar{\alpha}}) \\ &= g_{\mu\kappa} g^{\kappa\nu} = \delta_\mu^\nu. \end{aligned}$$

- Toinen Lorentzin indeksi ja toinen ylimääräisen moniston indeksi (μ, β).

$$\begin{aligned} G_{\mu N} G^{N\beta} &= G_{\mu\nu} G^{\nu\beta} + G_{\mu\alpha} G^{\alpha\beta} \\ &= (g_{\mu\nu} + B_\mu^{\bar{\alpha}} B_\nu^{\bar{\beta}} \phi_{\hat{\alpha}\hat{\beta}})(-g^{\nu\kappa} B_\kappa^\beta) + (B_\mu^{\bar{\alpha}} \phi_{\alpha\bar{\alpha}})(\phi^{\alpha\beta} + g^{\kappa\lambda} B_\kappa^\alpha B_\lambda^\beta) \\ &= -\delta_\mu^\kappa B_\kappa^\beta + B_\mu^{\hat{\alpha}} \delta_{\hat{\alpha}}^\beta \\ &= 0 \quad (= \delta_\mu^\beta) \end{aligned}$$

- Molemmat ylimääräisen moniston indeksejä (α, β)

$$\begin{aligned} G_{\alpha N} G^{N\beta} &= G_{\alpha\nu} G^{\nu\beta} + G_{\alpha\bar{\alpha}} G^{\bar{\alpha}\beta} \\ &= B_\nu^{\bar{\beta}} \phi_{\alpha\bar{\beta}} (-g^{\nu\kappa} B_\kappa^\beta) + \phi_{\alpha\bar{\alpha}} (\phi^{\bar{\alpha}\beta} + g^{\kappa\lambda} B_\kappa^{\bar{\alpha}} B_\lambda^\beta) \\ &= \phi_{\alpha\bar{\alpha}} \phi^{\bar{\alpha}\beta} \\ &= \delta_\alpha^\beta \end{aligned}$$