

JOHDATUSTA PELITEORIAAN

Satu Adel

Pro gradu -tutkielma
Heinäkuu 2019

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

ADEL, SATU: Johdatusta peliteoriaan
Pro gradu -tutkielma, 46 s.
Sovellettu matematiikka
Heinäkuu 2019

Ihminen pyrkii toimimaan ja tekemään päätöksiä rationaalisesti. Jokainen pyrkii tavoittelemaan omaa etuaan. Vastaan voi tulla kimurantteja tilanteita, joissa toisen osapuolen tekemällä päätöksellä on valtava vaikutus omaan päätöksentekoon varsinkin, jos toisen tekemät ratkaisut eivät ole tiedossa. Tällaisten tilanteiden ratkaisemisen avuksi on kehitetty peliteoria, joka on kiehtova matematiikan sovelluskohde. Peliteorian avulla voidaan mallintaa päätöksentekotilanteita ja saada näin optimaalisin toimintamalli selville.

Tässä pro gradu -tutkielmassa käsitellään päätöksentekotilanteiden esittämistä normaali- ja ekstensiivimuotoisina peleinä, esitellään eri pelityyppejä ja pohditaan pelityypin vaikutusta pelin ratkaisutavan valintaan. Pelit voivat olla tyypiltään symmetrisiä tai epäsymmetrisiä, jossa molempien pelaajien samoilla valinnoilla saavutetaan sama tai vastaavasti eri tuotto. Pelitilanteessa kommunikointi ja sopimusten teko voi olla sallittua tai kiellettyä, eli peli voi olla tyypiltään kilpailu- tai yhteistyö-peli. Pelaajilla voi olla yksi tai useita päätöksiä, jotka tehdään samanaikaisesti tai peräkkäisinä päätöksinä joko siten, että toinen pelaaja tietää, mitä toinen valitsi tai sitten ei. Lisäksi pelit voivat olla nollasummapelejä, jolloin toinen pelaaja voittaa sen, minkä toinen häviää.

Pelin ratkaisemisella tarkoitetaan yleensä Nashin tasapainon etsimistä. Nashin tasapaino on sellainen tasapainotila, jossa kaikki pelaajat ovat valinneet strategiansa siten, ettei yksipuolisesti omaa strategiaa vaihtamalla voi omaa lopputulosta parantaa. Jokaisella äärellisellä pelillä on olemassa Nashin tasapaino, johon pelin ratkaisemisella pyritään. Tasapainotila voidaan saavuttaa joko puhtailla strategioilla tai sekastrategioilla, jolloin pelaaja valitsee strategiansa todennäköisyysjakauman mukaan. Tässä tutkielmassa käsitellään erilaisia ratkaisumenetelmiä, jotka soveltuvat yksinkertaisiin ongelmiin kuin myös isompienkin ongelmien ratkaisemiseksi.

Asiasanat: peliteoria, Nashin tasapaino, lineaarinen optimointi

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Mitä peliteoria on?	3
3	Pelin esittäminen	5
3.1	Normaalimuotoinen peli	5
3.2	Ekstensiivimuotoinen peli	6
3.2.1	Täydellisen informaation peli	6
3.2.2	Epätäydellisen informaation peli	8
4	Pelityypit	10
4.1	Samanaikainen ja peräkkäinen peli	10
4.2	Kilpailu tai yhteistyö	11
4.3	Symmetrinen ja epäsymmetrinen peli	11
4.4	Nollasummapeli	12
4.5	Äärellinen ja ääretön peli	13
5	Pelin ratkaiseminen	14
5.1	Aidosti dominoitujen strategioiden iteratiivinen eliminointi . .	14
5.2	Nashin tasapaino	15
5.3	Sekastrategia	18
5.4	Paras vastastrategia	23
5.5	Minimax-menetelmä	28
5.6	Graafinen kirjekuorimetodi	31
5.7	Lineaarinen optimointi LP	36
5.8	Ekstensiivimuotoisten pelien ratkaiseminen	41
6	Johtopäätökset	45
	Kirjallisuus	46

1 Johdanto

Peliteoria on mielenkiintoinen matematiikan sovelluskohde. Peliteorian avulla voidaan mallintaa päätöksentekotilanteita ja pyrkiä selvittämään, miten päätöksiä ja erilaisia inhimillisiä tilanteita ratkotaan. Tilanteita mallinnetaan rakentamalla niistä matemaattinen peli ja pelit pyritään ratkaisemaan etsimällä kaikkia pelaajia miellyttävä tasapainotila.

Peliteorialla on useita hyödyllisiä sovelluskohteita monilla eri tieteenaloilla. Se siis muuntuu moneksi. Perinteisesti sitä on hyödynnetty yhteiskuntatieteissä ja politiikassa päätöksenteon tukena sellaisissa tilanteissa, joissa pelaajan tekemä päätös riippuu muiden pelaajien tekemistä päätöksistä. Sodankäyntitilanteissa on tehty peliteorian mukaisia päätöksiä. Sitä on sovellettu myös eläinten käyttäytymisen mallintamiseen ja evoluutioteoriaan. Tekoälyn kehittämisessä on sovellettu peliteoriaa, mikä tuo peliteorian myös tietotekniikan maailmaan. Bisnes on myös yksi suurimmista sovelluskohteista.

Peliteoriaa on käytetty hyödyksi myös taloustieteellisessä analyysissä. Tästä hyvänä esimerkkinä voidaan mainita duopoli, joka on oligopolin erikoistapaus. Oligopolissa markkinoilla on vain muutama saman tuotteen tai palvelun tarjoaja ja kilpailu on tällöin epätäydellistä. Duopolissa palvelun tai tuotteen tarjoajia on ainoastaan kaksi. Kilpailun vähäisyydestä johtuen tuotteella tai palvelulla voi olla erityisen korkea tai matala hinta ja toisen palveluntarjoajan tekemiä päätöksiä täytyy seurata tarkasti, koska sillä on merkittävä vaikutus saavutettavaan tulokseen. Yritykset pyrkivät siis omalta osaltaan mahdollisimman hyvään tulokseen, vaikkeivat yritykset välttämättä ole missään kontaktissa toisiinsa. Tällaista hiljaisen kartellin tilannetta on helppo mallintaa peliteorian keinoin.

Yleisimmät duopoli-tilanteet ovat Bertrand-, Cournot- ja Stackelberg-kilpailu. Bertrandissa molemmat yritykset päättävät kiinteät hintansa samanaikaisesti. Tällöin yritykset voivat muuttaa omaa tulostaan tuotantomääriä muuttamalla ja tilanne on sama kuin täydellisen kilpailun vallitessa. Muodostamalla kartellin, eli liittoutumalla keskenään, on mahdollista saavuttaa sama tulos kuin monopolitilanteessa, jossa olisi vain yksi yritys tarjoamassa kyseistä palvelua tai tuotetta. Useimmissa maissa kartellin muodostaminen on kuitenkin laitonta ja siitä voi seurata jopa vankeusrangaistus. Cournot-kilpailussa puolestaan tuotantomäärät päätetään samanaikaisesti, mutta hintoja voidaan vaihtaa jälkepäin. Tällöin tuotetaan suurempi määrä kuin monopoli-tilanteessa hinnan ollessa edullisempi, mutta tuotetaan kuitenkin pienempi määrä kuin täydellisen kilpailun tilanteessa, jolloin hintakin määräytyy korkeammaksi. Kolmas duopolin muoto on Stackelberg-kilpailu, jossa toinen yritys määrää ensin tuotantomäärän ja toinen seuraa perässä ensimmäisen yrityksen valinnat huomioon ottaen. Ensimmäiseksi päättävä

saa tällöin huomattavan edun. Stackelberg-kilpailussa tuotetaan enemmän, kuin äsken esitellyssä Cournot-kilpailussa, jolloin hinta määräytyy edullisemmaksi. Tuotantomäärä on kuitenkin pienempi kuin täydellisen kilpailun tilanteessa, ja tällöin tuotteen tai palvelun hinta voidaan pitää korkeammalla. Peliteoriaa sovelletaan myös monissa muissa taloustieteellisissä tilanteissa. [11]

Päätöstilanteiden mallintaminen pelimuotoon tuo päätöksenteon avuksi uuden näkökulman. Ilman peliteoriaa olisi vaikea mallintaa sellaisia optimointiongelmia, joissa on mukana rationaalisia päätöksiä sisältäviä oikean elämän tilanteita, jossa tehdyn päätöksen saavutettu hyöty muuttuu sen mukaan, mitä strategioita toiset pelaajat valitsevat. Vastaan voi tulla haasteellinen ongelma, josta ei välttämättä löydy optimaalisinta keinoa tavallisilla optimointimenetelmillä. Optimaalisin strategiavalinta voi myös löytyä yllättävästä strategiavalinnasta, sillä pelin kaikkien osanottajien pitää saavuttaa mahdollisimman suuri hyöty. Tällaisetkin reaali maailman tilanteet ratkeavat usein helposti peliteoreettisin menetelmin.

Tämän työn toisessa luvussa orientoidutaan peliteorian maailmaan ja pohditaan, mitä peliteoria on, mitä sovelluksia sillä on ja miten se on kehittänyt nykypäivänä käytettävään muotoonsa.

Kolmannessa luvussa käsitellään pelien esittämistä eli miten reaali maailman tilanteita voidaan formalisoida matemaattiseen muotoon. Pelit voidaan esittää kahdessa muodossa, strategisessa normaalimuodossa ja ekstensiivimuodossa, joilla kummallakin on omat etunsa. Mietinnän kohteena onkin, kumpaa esitystapaa kannattaa käyttää missäkin tilanteessa.

Neljännessä luvussa pohditaan pelin tyyppiin ja rakenteeseen vaikuttavia seikkoja. Jokaiselta peliltä vaaditaan tyypistä huolimatta vähintään tieto pelaajista, käytössä olevista strategioista, ja utiliteeteista, jotka pelaajat saavat valitessaan haluamansa strategiat.

Viidennessä luvussa keskitytään pelien ratkaisemiseen. Ratkaisemisella tarkoitetaan sellaisen tasapainotilan löytämistä, jolla kaikki pelin pelaajat saavuttavat mahdollisimman hyvän tuloksen, eikä kenenkään kannata yksin lähteä strategiaansa muuttamaan. Mahdollisimman hyvän tasapainotilan löytämiseen on useita eri keinoja, jotka valitaan pelin tyyppin mukaisesti. Osa ratkaisutavoista sopii useamman tyyppisen ongelman ratkaisemiseen, ja osa ongelmista ratkeaa helpoiten, kun ratkaisutapa valitaan oikein.

2 Mitä peliteoria on?

Useimmilla tieteenaloilla asiantuntijat pystyvät ennustamaan melko tarkasti tulevaisuuden tapahtumia. Kun kemisti sekoittaa kemikaaleja, hän tietää, miten ne reagoivat ja tähtitieteilijä tietää, milloin on seuraava auringonpimennys ja pystyy kertomaan, missä paikassa sen näkee parhaiten. [1]

Kun taas ihmiset ja raha kohtaavat, voi tapahtua oikeastaan mitä tahansa. Yhdelläkään taloustieteilijällä ei ole käsitystä, milloin tapahtuu seuraava pörssiromahdus. Taloustiede on yksi suurimmista sovelluskohteista peliteorialle. Taloustieteessä ei ole ollut ennen peliteoriaa täsmällisiä käsitteitä sille, miten verrataan keskenään eri vaihtoehtoja. Peliteoria toi käsitteen utiliteetti, joka on saavutettavan hyödyn mittari. Utiliteetti pyritään maksimoimaan, oli kyseessä rahallinen saavutus tai tehtävä päätös. Peliteorian avulla pystytään tutkimaan, miten määritetään strategiat, jotka johtavat maksimaaliseen utiliteettiin eli hyötyyn. Nämä asiat ovat olleet käytössä luultavasti jo tuhansien vuosien ajan, mutta vasta 1900-luvulla ne yhdistettiin matemaattisesti toisiinsa. Yhtenä peliteorian kehittäjistä pidetään 1900-luvun nerokkaimpiin ajattelijoihin lukeutuvaa matemaatikko John Von Neumannia. [1].

Peliteoria on sosiaalista optimointia, jossa pyritään esittämään reaali maailman tilanne pelinä, ja löytämään strategia, joka maksimoi saavutettavan hyödyn eli utiliteetin. Pelissä voi olla useampia pelaajia, mutta tässä työssä keskitytään vain kahden pelaajan peleihin. Koska kaikki pelin osanottajat pyrkivät maksimoimaan utiliteettinsa, löydetään usein tasapainotilanne, joka miellyttää kaikkia, eli tilanne, jossa kenenkään pelaajan ei kannata vaihtaa strategiaansa, vaan utiliteetti on jo maksimoitu. Taloustieteen ohella peliteorian sovelluksia löytyy normaaleista elämäntilanteista, kuten esimerkiksi pelatessa pokeria tai shakkia. Pokerissa halutaan voittaa potti ja shakissa saada shakkimatti. Peliteorian tehtävänä on määritellä siis parhaat mahdolliset strategiavalinnat pelaajille. [1]

Kun viime vuosisadan puolivälissä kuvaan astui John Forbes Nash, laajeni peliteorian soveltamismahdollisuudet huomasti. Nash valitsi toisen lähestymistavan peliteoriaan, ja nosti peliteorian päiväperhosta sosiaalitieteiden perustaksi. Onkin sanottu, että Nashin matematiikka on nykyisen luonnon koodin perusta. Nash yhdisti matematiikan ja taloustieteen vielä opiskellessaan ja kirjoitti esseen kaupankäynnin ongelmasta. Tämä oli mullistava peliteoreettinen oivallus. Peliteoriassa on erityyppisiä ongelmia. Kahden pelaajan nollasummapelissä toinen voittaa sen, minkä toinen häviää, kun taas kaupankäynnin ongelmassa pelaajilla voi olla yhteisiä voittoja ja häviöitä. Etuja voi siis tulla molemmille osapuolille. Tässä ideana on se, että pelaajat voivat tehdä valintoja, joista on heille hyötyä, muttei välttämättä toisen pelaajan kustannuksella. Tällöin peliteorian ongelmana on löytää se ratkaisu,

joka tuo molemmille pelaajille parhaimman hyödyn. Reaalimaailman tilanne tästä voisi olla esimerkiksi ammattiliiton ja yhtiön väliset neuvottelut. [1]

Nashin tasapainoksi kutsutaan tilannetta, jossa asiat ovat stabiilissa eli vakaassa tilassa. Nash lähestyi tasapainoa kemiallisten ilmiöiden kautta. Kun sokeria liuotetaan veteen, jossain kohtaa sokeri ei enää liukene, vaan kasaantuu mukin pohjalle. Tällöin sokerivesiseos on saavuttanut tasapainotilan, jonka makeus on vakio. Sama idea pätee myös sosiaalisissa tilanteissa. Pelissä on tällöin tehty sellaiset valinnat, että kellekään ei ole kannustinta vaihtaa valintaansa. [1]

Pelin ratkaiseminen eli tasapainopisteen etsiminen voidaan tehdä kahden pelaajan nollasummapelissä käyttämällä Von Neumannin minimax -menetelmää. Tällöin voidaan käyttää sekä puhdasta että sekastrategiaa. Nashin tapa ratkaista peli oli löytää Nashin tasapainoksi nimetty tila. Tässä oletetaan, etteivät pelaajat tee yhteistyötä. Kukin pelaaja pyrkii siis tavoittelemaan omaa parastaan. Nash osoitti kiintopistelauseen avulla, että jokaisessa monen pelaajan pelissä on olemassa tasapainopiste, kunhan peli on äärellinen. Von Neumann väheksyi aluksi Nashin uutta lähestymistapaa, sillä se käänsi peliteorian aivan uuteen suuntaan. Von Neumannin pelit olivat yhteistoiminnallisia, eli pelaajat olivat vuorovaikutuksessa keskenään. Nashin ei-yhteistoiminnallinen lähestymistapa kuvaa suurinta osaa pelitilanteista, sillä yleensä toisten tekemiin päätöksiin ei voi vaikuttaa. Pitää vain keskittyä oman hyödyn maksimoimiseen. [1]

Peliteoreetikoiden kehittämistä peleistä ehkäpä kuuluisin on hankala sosiaalinen päätöksentekotilanne, jota kutsutaan vangin dilemmaksi. Nashin työtä Princetonissa ohjannut Albert W. Tucker esitti vangin dilemman peliteoriassa ensimmäisenä vuonna 1950. Vangin dilemmassa poliisilla on riittävät todisteet tuomita yhteistyössä toimineet rikolliset vähäisemmästä rikoksesta. Kuitenkin, jotta tuomio voidaan antaa aseellisesta ryöstöstä, pitää toinen saada lavertelemaan rikostoveristaan. Jos molemmat vaikenevat, joutuvat molemmat vuodeksi vankilaan. Jos molemmat lavertelevat, molemmat joutuvat kolmeksi vuodeksi vankilaan. Tällöin siis molemmat saavat kaksi tuomiovuotta anteeksi yhteistyöhalukkuudella. Jos vain toinen lavertelee, pääsee lavertelija vapauteen ja rikostoveri saa viiden vuoden tuomion. Yhteistyö on tässä pelissä kielletty ja päätökset tehdään toisilta salassa, joten peliteoreettinen tarkastelu tällekin tilanteelle on hyvä olla olemassa. Sen tuloksen tuntemisella saattaa säästyä monelta vankilavuodelta. [1]

3 Pelin esittäminen

Peleille on muodostunut uniformaalit muotoilutavat. Riippuen siitä, millaisesta tilanteesta on kyse, valitaan joko normaalimuotoinen tai ekstensiivimuotoinen esitys pelille. Jokainen peli voidaan kuitenkin mallintaa molemmilla tavoilla. Tavallisesti staattiset pelit mallinnetaan normaalimuotoon ja dynaamiset pelit ekstensiivimuotoon. Staattinen peli tarkoittaa peliä, jossa pelin vuorot pelataan samanaikaisesti tai ainakin toisten strategiavalintoja tietämättä. Dynaaminen peli on peli, jossa pelaajat tekevät valinnat yksi kerrallaan, joko siten, että tieto muiden pelaajien valinnoista on tiedossa tai sitten ei. Ekstensiivimuotoisella pelillä saadaan mallinnettua päätöspuun muodossa tehtävien valintojen aikajärjestykset ja tiedon täydellisyys, eli mitä pelaajat tietävät kullakin hetkellä aiemmin tehdyistä päätöksistä. [4]

Pohditaan seuraavaksi pelin yleistä muotoa. Se sisältää tiedon pelaajista, kullekin pelaajalle mahdollisista pelistrategioista ja kullakin strategiavalinnalla saavutettavan utiliteetin. Yleensä on kyseessä n pelaajan peli ja näissä merkitään pelaajat luvusta 1 lukuun n , ja heistä käytetään merkintää pelaaja i . Pelaajan i mahdollisten strategioiden s_i joukkoa merkitään symbolilla S_i . Strategia s_i on joukon S_i jäsen eli $s_i \in S_i$. Symboli u_i on pelaajan i utiliteetti, jos pelaaja valitsee strategiat s_1, \dots, s_n . [2]

Määritelmä 1. Esitys n pelaajan pelille on $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, missä S_1, \dots, S_n on pelaajien strategiajoukot ja u_1, \dots, u_n niitä vastaavat utiliteetit.

3.1 Normaalimuotoinen peli

Normaalimuotoista peliä mallinnetaan matriisilla, joka sisältää pelaajien strategiat ja niiden utiliteetit. Kahden pelaajan pelissä toisen pelaajan strategiat merkitään sarakkeisiin ja toisen riveihin. Utiliteetti luetaan tällöin matriisista, jossa pelaajan 1 utiliteetti on u_1 ja pelaajan 2 utiliteetti u_2 kullakin eri valittua strategiaa vastaavalla matriisin ruudulla. [2]

Taulukossa 1 on esitetty esimerkkinä kahden pelaajan peli, jossa molemmilla pelaajilla on kaksi strategiaa s_1 ja s_2 .

Otetaan esimerkkinä jo aiemmassa luvussa esitelty vangin dilemma. Peli on esitetty normaalimuodossa matriisiesityksenä taulukossa 2. Matriisista voidaan lukea utiliteetit kummallekin pelaajalle, kun pelaajat ovat tehneet strategiavalintansa. Normaalimuotoisesta matriisiesityksestä on helppo lähteä etsimään pelin ratkaisua. Pelien ratkaisemista käsitellään myöhemmin.

Taulukko 1: Normaalimuotoinen peli

		Pelaaja 2	
		s_1	s_2
Pelaaja 1	s_1	(u_1, u_2)	(u_1, u_2)
	s_2	(u_1, u_2)	(u_1, u_2)

Taulukko 2: Vangin dilemma

		Pelaaja 2	
		vaikenee	vasikoi
Pelaaja 1	vaikenee	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
	vasikoi	$(0, -5)$	$(-3, -3)$

3.2 Ekstensiivimuotoinen peli

Ekstensiivimuotoista peliä mallinnetaan päätöspuulla, josta ilmenee pelin pelaajat, milloin kullakin pelaajalla on pelivuoro, mitä pelimahdollisuuksia pelivuorolla on, mitä kukin pelaaja tietää ja jokaisen strategian antamat utiliteetit. Ekstensiivimuotoon mallinnetun pelin etu on se, että saadaan näytettyä, vallitseeko pelissä täydellinen vai epätäydellinen informaatio, ja missä järjestyksessä ja milloin pelaajat saavat tehdä siirtonsa. Lisäksi pelin rakenne, eli mitä valintoja pelaajat voivat kussakin kohdassa tehdä ja mitä kukin pelaaja tietää, on helposti havaittavissa päätöspuusta. [4]

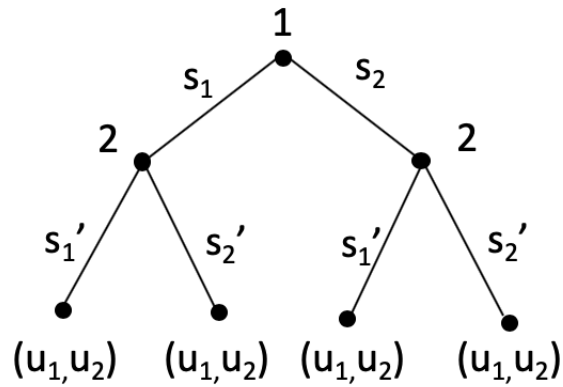
3.2.1 Täydellisen informaation peli

Peliä sanotaan täydellisen informaation peliksi, jos kaikki pelaajat tietävät omalla päätöksentekovuorollaan, mitä päätöksiä on aiemmilla päätöskierroksilla tehty.

Kuvassa 1 on päätöspuu, jota käytetään mallintamaan kahden pelaajan peliä, jossa ensin pelaaja 1 tekee valinnan ja sen jälkeen pelaaja 2 tekee valinnan. Tässä pelissä pelaaja 2 tietää, minkä strategian pelaaja 1 on valinnut, eli peli on täydellisen informaation peli.

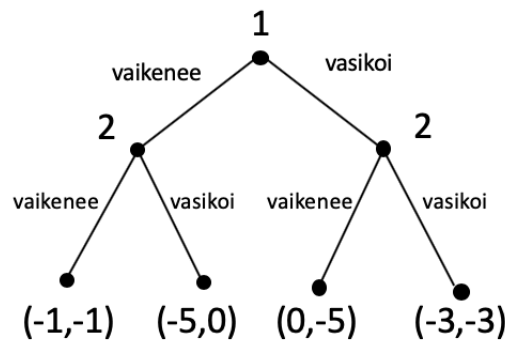
Pelaaja 1:n strategiavalinnat ovat tässä pelissä s_1 ja s_2 . Pelaaja 2 tekee oman strategiavalintansa s'_1 tai s'_2 , kun pelaaja 1 on tehnyt päätöksensä. Utiliteetit (u_1, u_2) ovat luettavissa kunkin päätöspuun reitin viimeisen solmun alta. Tämän tyyppistä peliä, missä pelivuorot ovat peräkkäisiä ja missä pelaaja 2 tietää pelaaja 1:n päätöksen, on kätevä mallintaa ekstensiivimallisella

päätöspuulla, sillä pelaajien pelivuorojen järjestys on helppo saada näkyviin.



Kuva 1: Täydellisen informaation ekstensiivimuotoisen pelin mallintaminen puun avulla

Kaikki pelit ovat muunnettavissa normaalimuotoon ja ekstensiivimuotoon. Seuraavaksi muunnetaan vangin dilemma ekstensiivimuotoiseksi. Ensimmäisenä käsittelyssä on täydellisen informaation pelit, joten peli muuttuu siten, että nyt pelaaja 1 tekee valinnan ensin, jonka jälkeen pelaaja 2 tekee valinnan. Tämä ei tosin vastaa enää alkuperäistä peliä tiedossa olevan informaation kannalta. Vangin dilemman täydellisen informaation versio on mallinnettu kuvassa 2. Muunnetaan vangin dilemma seuraavassa luvussa epätäydellisen informaation ekstensiivimuotoiseksi päätöspuuksi, jolloin se vastaa täysin alkuperäistä peliä.

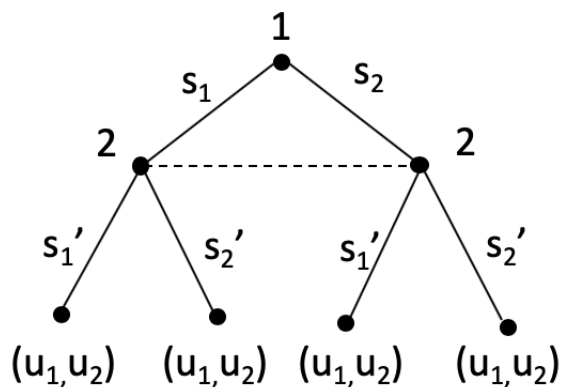


Kuva 2: Vangin dilemma täydellisen informaation tapauksessa

3.2.2 Epätäydellisen informaation peli

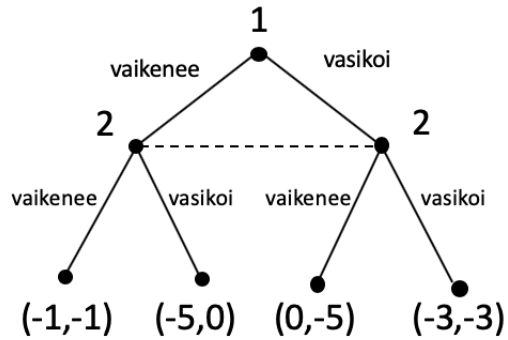
Peliä, jossa valintavuorossa olevalla pelaajalla ei ole tietoa, mitä strategioita jokaisella edeltävällä valintakierroksella on valittu, kutsutaan epätäydellisen informaation peliksi. Päätäspuuhun epätäydellinen informaatio merkitään piirtämällä katkoviiva solmujen väliin. Tällöin vuorossa oleva pelaaja voi olla kummassa solmussa tahansa.

Kuvassa 3 on yleinen muoto epätäydellisen informaation pelille. Pelaaja 2 ei tiedä, minkä strategian pelaaja 1 on valinnut tai valinnat on tehty yhtä aikaa, joten pelaaja 2:n solmujen välille on vedetty katkoviiva, koska pelaaja 2:n tietojen mukaan päätös voi tapahtua kummassa solmussa tahansa. Muuten merkinnät ovat samat kuin kuvassa 1.



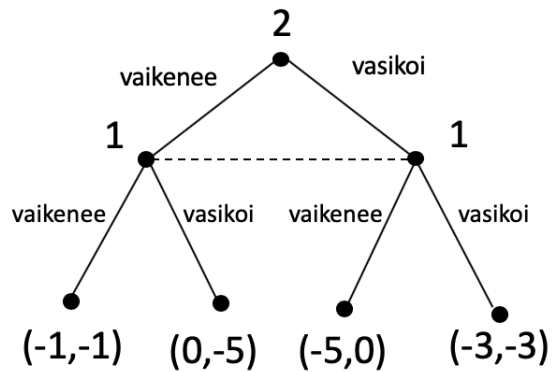
Kuva 3: Ekstensiivimuotoinen epätäydellisen informaation pelipuu.

Kuvassa 4 on päätöspuu vangin dilemma-pelistä epätäydellisen informaation tapauksessa. Tämä vastaa täysin alkuperäistä normaalimuodossakin esitettyä ongelmaa. Nyt siis pelaaja 1 tekee päätöksen ”*vaikenee*” tai ”*vasikoi*”, jota pelaaja 2 ei saa tietää. Tämän jälkeen tai samanaikaisesti pelaaja 2 tekee päätöksen ”*vaikenee*” tai ”*vasikoi*”, jonka jälkeen valittujen strategioiden mukaiset utiliteetit voidaan lukea kunkin strategiareitin alimmasta solmusta.



Kuva 4: Ekstensiivimuotoon mallinnettu vangin dilemma

Kuvassa 5 on päätöspuu esitettyä toisella tavalla. Tilanne on tässä täysin sama. Tässä päätöspuussa pelaaja 2 pelaa nyt vuoronsa ensin. Todellisuudessa tilanne voi olla yhtä hyvin se, että pelaajat pelaavat vuoronsa samanaikaisesti.



Kuva 5: Ekstensiivimuotoon mallinnettu vangin dilemma

4 Pelityypit

Kun peliä aletaan mallintaa ja se halutaan ratkaista, on hyvä pohtia muutamia seikkoja pelin luonteesta. Näiden tietojen perusteella pystytään helpommin päättämään, miten peli kannattaa mallintaa ja millä keinolla se on helpoiten ratkaistavissa.

Peliteoreettisissa tarkasteluissa pelissä pitää olla vähintään kaksi pelaajaa. Vaikka tosimaailman peliä, rulettipeliä voi pelata yksin, se ei ole peliteorian näkökulmasta peli. Tällä pelillä voitaisiin kuvitella olevan toinen osapuoli, kasino, jota ei kuitenkaan voida laskea toiseksi pelaajaksi, sillä se ei tee päätöksiä, vaan sen "strategia" on satunnainen. Pelin kaikkien osallistujien pitää olla kykeneväisiä rationaaliseen päätöksentekoon, eikä vain satunnaiseen strategian valintaan, koska peliteoria perustuu siihen olettamukseen, että pelaajat tekevät rationaalisia päätöksiä.

Pelin tyyppin määrittelee seuraavat seikat: [4]

- Onko peli samanaikainen vai peräkkäinen?
- Onko peli täydellisen informaation vai epätäydellisen informaation peli?
- Onko pelaajilla täydellinen tieto pelin rakenteesta?
- Onko kommunikointi pelaajien välillä rajoitettua?
- Onko peli kilpailu- vai yhteistyöpeli?
- Onko peli symmetrinen vai epäsymmetrinen?
- Onko peli nollasummapeli?
- Onko peli äärellinen vai ääretön?

4.1 Samanaikainen ja peräkkäinen peli

Samanaikaisessa pelissä jokaisella pelaajalla on vain yksi peliliike ja kaikki pelaajat pelaavat siirtonsa samanaikaisesti. Peräkkäisessä pelissä siirrot tehdään vuorotellen ja niitä saattaa olla useampia. Peräkkäisiin peleihin liittyy myös informaation kulku. Pelit voivat olla täydellisen informaation pelejä, jolloin pelaajat tietävät omalla vuorollaan kaikki pelissä tapahtuneet siirrot ja epätäydellisen informaation pelejä, jos pelaajalla ei ole tietoa jokaisesta aiemmin tehdystä strategiavalinnasta.

Samanaikaisia pelejä mallinnetaan yleensä normaalimuodossa ja peräkkäisiä pelejä ekstensiivimuodossa päätöspuun avulla, jolloin pelaajien vuorot

saadaan aikajärjestyksessä näkyviin ja lisäksi päätöspuuhun voidaan merkitä, onko pelissä täydellinen vai epätäydellinen informaatio.

Pelin rakenne voi olla selvillä täydellisesti tai vain osittain kullekin pelaajalle. Pelistä voi selvittää, missä järjestyksessä siirrot pelataan, mitä strategiavaihtoehtoja kullakin pelaajalla on ja kaikkien vaihtoehtojen utiliteetit. Tosielämän pelit eivät yleensä ole täydellisen rakennetiedon pelejä. Jos kaikki pelaajat tietävät kaikki mahdolliset käytettävissä olevat strategiat, on peli täydellisesti tiedossa. Voi kuitenkin olla, ettei kaikki pelaajat koskaan saa tietää jostakin strategiasta, joka oli käytettävissä, mutta jäi valitsematta.

4.2 Kilpailu tai yhteistyö

Peli voidaan luokitella yhteistyöpeliksi, jos siinä on mahdollista tehdä pelin osapuolien kesken sitovia sopimuksia ja kilpailulliseksi, jos sitovia sopimuksia ei tehdä. Suurin osa peleistä on kilpailutyypin pelejä ja tämä monimutkaistaa päätöksentekoa huomattavasti, koska ei voida tietää varmasti toisen pelaajan aikeita. Vaikka pelaajat neuvottelisivat, on epävarmaa, toteutuuko neuvottelussa päätetyt strategiat, sillä valinta on jokaisen oma.

Yhteistyöpelissä pelaajilla on yhteinen tavoite, jonka eteen kaikkien pitää olla valmiita tekemään päätöksiä. Tällöin sopimukset kirjataan ylös ja niitä pitää noudattaa. Hyödyn jakoon pitää olla myös mahdollisuus puuttua, eli pelillä saavutettu hyöty voidaan jakaa pelaajien kesken päätösten mukaisesti.

Usein kilpailutyypin peleissä kommunikointi pelaajien kesken ennen peliä tai kesken pelin on rajoitettua tai kiellettyä. Yhteistyöpelissä taas kommunikointi sallitaan joko ennen peliä tai myös sen aikana.

4.3 Symmetrinen ja epäsymmetrinen peli

Peli on symmetrinen, jos sen utiliteetit riippuvat vain valituista strategioista. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että pelaajien roolit voidaan vaihtaa keskenään pelin strategioiden ja niistä saatavien utiliteettien pysyessä samana. Harvempi peli on symmetrinen, mutta monet tunnetuista yleisimmin esitellyistä peliteoreettisista 2×2 matriisin peleistä ovat symmetrisiä, kuten esimerkiksi vangin dilemma. Symmetrisillä peleillä on myös ratkaisuna symmetrinen Nashin tasapaino, joka on siis myös pelaajariippumaton. Vastaavasti epäsymmetrisen pelin pelaajien roolia ei voida vaihtaa ilman, että peli muuttuu.

Otetaan esimerkkinä peli "haukka ja kyyhky", jossa kaksi eläintä kilpaillee saaliista. Kummankin eläimen on mahdollista käyttäytyä aggressiivisesti, eli kuin haukka tai passiivisemmin kuin kyyhky. Parhaan tuloksen voi saavuttaa pelissä, jos pelaajat valitsevat eri strategian. Tällöin aggressiivisesti

käyttäytyvä saa parhaimman mahdollisen hyödyn. Jos molemmat päättävät käyttäytyä aggressiivisesti, molemmat saavat hyvän, muttei parhaan hyödyn ja jos molemmat käyttäytyvät passiivisesti, hyöty on puolestaan molemmille 0. Peli on esitettyä taulukossa 3. [7]

Jos tämän pelin pelaajien roolit vaihdettaisiin keskenään, säilyisi peli täysin samanlaisena. Täten peli on symmetrinen.

Taulukko 3: Haukka ja kyyhky-peli
Eläin 2

		Haukka	Kyyhky
		Haukka	(3, 3)
Eläin 1	Kyyhky	(4, 1)	(0, 0)

4.4 Nollasummapeli

Nollasummapelit ovat pelejä, joissa toisen pelaajan hyöty on toisen pelaajan häviö. Ainoa keino päästä nollasummapelissä voitolle, on aiheuttaa toiselle pelaajalle tappio. Kun peli päättyy, on pelaajien utiliteettien summa 0. Pelaaja voi saada positiivisen utiliteetin vain, jos vastustajan utiliteetti on itseisarvoltaan yhtä suuri, mutta negatiivinen. Nollasummapeleillä on varsinkin taloustieteessä paljon sovelluksia. Jos molempien pelaajien on mahdollista hyötyä, peli ei ole nollasummapeli. Tällöin voi olla mahdollista, että pelissä on useampia voittajia tai häviäjiä. Esimerkkinä nollasummapelistä on kakun leikkaaminen. Jos yksi pelaaja leikkaa isomman palan, jää muille vähemmän kakkua. Myös pokeri ja shakki ovat esimerkkejä nollasummapeleistä. Päätöksentekotilanteissa harvemmin nähdään nollasummapelejä, sillä usein yhden hyöty on myös toisen hyöty.

Esimerkkinä nollasummapelistä esitellään kivi-paperi-sakset -peli. Pelissä on kaksi pelaajaa, joilla molemmilla on kolme strategiaa. Kivi, paperi ja sakset. Pelaajat valitsevat strategiansa ja ne paljastetaan yhtä aikaa. Paperi voittaa kiven ja häviää saksille. Sakset voittaa paperin ja häviää kivelle. Kivi voittaa sakset ja häviää paperille. Jos pelaajat valitsevat saman strategian, tulee tasapeli ja molempien hyöty on tällöin nolla. Peli on esitettyä taulukossa 4. [4]

Huolimatta valituista strategioista, pelin pelaajien yhteenlaskettu utiliteettien summa on aina 0. Nollasummapelit voidaan ratkaista minimaximoinnilla siten, että etsitään matriisin jokaiselta riviltä minimi ja jokaiselta sarakkeelta maksimi ja sen jälkeen riviminimien maksimi ja sarakemaksimien

Taulukko 4: Kivi-paperi-sakset

		Pelaaja 2		
		Kivi	Paperi	Sakset
Pelaaja 1	Kivi	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	Paperi	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	Sakset	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

minimi. Jos riviminimien maksimi on yhtä suuri kuin sarakemaksimien minimi, on se pelin satulapiste, joka on myös pelin Nashin tasapaino ja samalla myös pelin arvo.

Kaikilla peleillä ei ole olemassa satulapistettä ja peli täytyy tällöin ratkaista muilla keinoilla. Esimerkiksi kivi-paperi-sakset -pelille ei löydy satulapistettä, mutta se saadaan ratkaistua lineaarisella optimoinnilla (LP), mikä on myös yleinen nollasummapelien ratkaisutapa. LP-menetelmällä ratkaistussa pelissä jokainen strategia pelataan todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$. Ratkaisu esitetään myöhemmin tässä tutkielmassa.

4.5 Äärellinen ja ääretön peli

Peli voi olla äärellinen tai ääretön. Peli on äärellinen, jos strategiavalintoja on äärellinen määrä, eli peli päättyy tiettyyn pisteeseen. Peli on ääretön, jos tehtäviä strategiavalintoja on ääretön määrä ja pelaajien utiliteetit selviävät vasta pelatun pelin jälkeen.

Käytännön elämässä pelit ovat yleensä äärellisiä, eli pelaajia, strategioita ja vuoroja on äärellinen määrä. Äärettömiä pelejä käytetään esimerkiksi teoreettisissa peliteorian tutkimuksissa, mutta näissä yleensä etsitään voittoastrategiaa varsinaisen saavutettavan utiliteetin tutkimisen sijaan.

5 Pelin ratkaiseminen

Pelin ratkaisemisella tarkoitetaan pelaajien sellaisten strategioiden valitsemista, joilla saavutetaan pelin tasapainotila, eli tilanne, jossa kukaan pelaajista ei voi parantaa omaa utiliteettiaan vaihtamalla yksin omaa strategiaansa. Pelien ratkaisemiseksi on monia keinoja riippuen pelin tyypistä.

5.1 Aidosti dominoitujen strategioiden iteratiivinen eliminointi

Yksi tapa ratkaista peliteoreettinen ongelma on aidosti dominoitujen strategioiden iteratiivinen eliminointi (adsie), jossa verrataan omien strategioiden utiliteetteja ja eliminoidaan näistä huonompia eli dominoituja strategioita sillä perusteella, että niitä ei kannata koskaan pelata, vaikka toinen pelaaja tekisi minkä strategialinnan. Periaatteena tälle menetelmälle voi pitää lausahdusta: rationaalinen pelaaja ei pelaa koskaan sitä strategiaa, jota jokin toinen strategia dominoi aidosti.

Strategia on aidosti dominoitu, kun löytyy jokin aidosti paremman utiliteetin antava strategiovaihtoehto riippumatta muiden pelaajien strategiavalinnoista.

Määritelmä 2. [2] Olkoon peli $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ normaalimuotoinen. Kahdesta pelaajan i strategiasta $s'_i, s''_i \in S_i$, strategia s'_i dominoi aidosti strategiaa s''_i , jos jokaiselle mahdolliselle muiden pelaajien strategiajoukolle strategialla s'_i saavutettava utiliteetti, on aidosti pienempi kuin strategiasta s''_i utiliteetti, eli on voimassa

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad (1)$$

jokaiselle strategiajoukolle $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, joka voidaan muodostaa muiden pelaajien strategiajoukoista $S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n$.

Otetaan esimerkiksi vangin dilemma. Oletetaan, että pelaaja 1 valitsee strategiakseen ”vaikenee”. Tällöin pelaajan 2 kannattaa valita strategiakseen ”vasikoi”. Jos pelaaja 1 valitsee strategiakseen ”vasikoi”, pelaajan 2 kannattaa valita ”vasikoi”. Tällöin huolimatta pelaaja 1:n valinnasta, pelaaja 2:n kannattaa aina valita strategia ”vasikoi” maksimoidakseen oma hyötynsä. Pelaaja 2 voi eliminoida strategian ”vaikenee”, sillä hänen ei koskaan kannata valita tätä. Peli on symmetrinen, eli jos pelaaja 2 tekee samat valinnat, pelaajan 1 kannattaa myös aina valita strategia ”vasikoi”, joten voidaan eliminoida pelaajan 1 strategia ”vaikenee”. Tällöin jäljelle jää molemmilta pelaajilta ainoastaan strategiat ”vasikoi” ja ”vasikoi”. Nämä stra-

tegiavalinnat ovat siis eliminointimenetelmällä saatu pelin ratkaisu. Pelin ratkaisun eteneminen on esitetty taulukossa 5. Voidaan myös osoittaa, että jos adsie-menetelmän ratkaistuna saadaan vain yksi strategiavektori, se on Nashin tasapaino. Aina kuitenkin tilanne ei ole näin suoraviivainen, vaan voi olla tilanteita, jossa useampia strategiamahdollisuuksia jää jäljelle, koska ne eivät aidosti dominoi vastustajan strategiaa ja tällöin ei saada eliminoitua strategioita riittävästi.

Taulukko 5: Vangin dilemman ratkaisun etsiminen eliminoimalla

		Pelaaja 2	
		vaikenee	vasikoi
Pelaaja 1	vaikenee	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
	vasikoi	$(0, -5)$	$(-3, -3)$

		Pelaaja 2	
		vaikenee	vasikoi
Pelaaja 1	vaikenee	$(-1, -1)$	$(-5, 0)$
	vasikoi	$(0, -5)$	$(-3, -3)$

Toinen yleisesti käytetty esimerkkipeli on sukupuolten taistelu. Pelissä pariskunta yrittää pohtia, mitä ilta-aktiviteettia he tekisivät. Nainen haluaisi mennä oopperaan ja mies painiotteluun. Molemmat kuitenkin arvostavat yhteisen tekemisen korkeammalle kuin eri paikkaan menemisen. Peli on esitetty taulukossa 6. Oletetaan naisen valitsevan strategian ”ooppera”. Tällöin miehen kannattaa valita strategia ”ooppera”. Jos taas nainen valitsee strategian ”paini”, miehen kannattaa valita myös strategia ”paini”. Kumpikaan strategia ei siis aidosti dominoi toista, eli kumpaakaan ei voida sulkea pois. Peli on symmetrinen, eli naisen kannattaa valita strategia ”ooppera”, kun mies on valinnut strategian ”ooppera” ja strategia ”paini”, kun mies on valinnut strategian ”paini”. Eliminointimenetelmä ei siis tuottanut tulosta tämän pelin tapauksessa, vaikka Nashin tasapainoja pitää äärellisellä pelillä olla vähintään yksi. Pelille löydetään Nashin tasapaino käyttämällä esimerkiksi seuraavan kappaleen menetelmää.

5.2 Nashin tasapaino

Pelin osapuolien valitessa strategioita Nashin tasapaino saavutetaan, kun osapuolet ovat valinneet strategiansa siten, ettei kukaan pysty nostamaan utiliteettiaan muuttamalla yksipuolisesti omaa strategiavalintaansa. Kaikki ovat

Taulukko 6: Sukupuolten taistelu

		Mies	
		ooppera	paini
Nainen	ooppera	(2, 1)	(0, 0)
	paini	(0, 0)	(1, 2)

siis toisiinsa nähden maksimiutiliteetissa, eli kenenkään ei kannata vaihtaa strategiaansa. [2]

Nashin tasapaino saavutetaan, kun jokaisen pelaajan strategiakombinaatio tuottaa parhaimman mahdollisen utiliteetin, kun käydään muiden pelaajien kaikki mahdolliset strategiat läpi.

Määritelmä 3. [2] Normaalimuodon pelille $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ strategiat $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ ovat *Nashin tasapainossa*, jos jokaisella pelaajalla i on valittuna paras strategia verrattuna muiden $n - 1$ pelaajan käytettävissä oleviin strategioihin $\{s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*\}$. Nashin tasapainossa on voimassa

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \quad (2)$$

jokaiselle mahdolliselle strategialle $s_i \in S_i$, eli s_i^* on optimointiongelman

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \quad (3)$$

ratkaisu.

John Nash on osoittanut, että pelin ollessa äärellinen, pelillä on vähintään yksi Nashin tasapaino. Se ei välttämättä löydy pelistä puhtaista strategioista, vaan saattaa vaatia sekastrategioiden käyttöä, jolloin pelaaja pelaa puhtaita strategioitaan todennäköisyysjakauman mukaisesti.

Lause 1. [2] Normaalimuotoisessa n pelaajan pelissä $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, kun n on äärellinen ja S_i on äärellinen jokaisella i :n arvolla, on olemassa aina *vähintään yksi Nashin tasapaino*, joka mahdollisesti sisältää sekastrategioita.

Mitä Nashin tasapaino tarkoittaa siis käytännössä ja miten tätä voidaan hyödyntää? Tutkitaan jo edellä esitettyä vingin dilemmaa. Kahden pelaajan pelissä Nashin tasapainon etsiminen voidaan aloittaa tutkimalla utiliteettimatriisia ja alleviivaamalla pelaajan 1 paras strategia, kun pelaaja 2 on

valinnut strategian s_i . Jos molemmat utiliteetit samassa matriisin ruudussa päätyvät alleviivatuksi, kyseinen ruutu on Nashin tasapaino. Taulukossa 7 on alleviivattuna parhaimmat strategiat. Vangin dilemma -pelissä alleviivattuna on molempien pelaajien strategia ”*vasikoi*”. Nashin tasapainoksi siis saadaan tilanne, jossa molemmat pelaajat vasikoivat. [10]

Taulukko 7: Vangin dilemman Nashin tasapainon etsiminen

		Pelaaja 2	
		vaikenee	vasikoi
Pelaaja 1	vaikenee	$(-1, -1)$	$(-5, \underline{0})$
	vasikoi	$(\underline{0}, -5)$	$(-3, \underline{-3})$

Toisena esimerkkinä etsitään sukupuolten taistelu -pelin Nashin tasapaino. Peliin, joka on esitetty taulukossa 8, on alleviivattu Nashin tasapainon etsimiseksi kunkin pelaajan parhaimmat utiliteetit. Tässä pelissä on nyt kaksi Nashin tasapainoa, jotka ovat ”yhtä hyviä”. Tämä ei kuitenkaan tuo suoraviivaista vastausta siihen, mitä pariskunnan pitäisi loppujen lopuksi tehdä. Nashin tasapaino saavutetaan strategiavalinnoilla (”*ooppera*”, ”*ooppera*”) ja (”*paini*”, ”*paini*”), sillä molempien pelaajien utiliteetit on alleviivattu näillä valinnoilla.

Taulukko 8: Sukupuolten taistelun Nashin tasapainon etsiminen

		Mies	
		ooppera	paini
Nainen	ooppera	$(\underline{2}, \underline{1})$	$(0, 0)$
	paini	$(0, 0)$	$(\underline{1}, \underline{2})$

5.3 Sekastrategia

Kuten edellä todettiin, John Nash on osoittanut, että jokaisella pelillä on vähintään yksi Nashin tasapaino. Jos sitä ei löydetä puhtaiden strategioiden avulla, voi se löytyä käyttämällä sekastrategioita. [2]

Pelaajalla i on K puhdasta strategiaa valittavissa. Merkitään käytettävissä olevien strategioiden joukkoa merkinnällä $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK}\}$. Tällöin sekastrategia pelaajalle i on todennäköisyysjakauma (p_{i1}, \dots, p_{iK}) , missä p_{ik} on todennäköisyys sille, että pelaaja i pelaa strategian s_{ik} , $k = 1, \dots, K$ ja $p_{i1} + \dots + p_{iK} = 1$. [2]

Määritelmä 4. Normaalimuotoisessa pelissä $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, jossa $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK}\}$, sekastrategia pelaajalle i on todennäköisyysjakauma $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{iK})$, missä $0 \leq p_{ik} \leq 1$, $k = 1, \dots, K$, $\sum_{k=1}^K p_{ik} = 1$ kaikilla i .

Otetaan esimerkkinä kolikonheittopeli. Pelissä on kaksi pelaajaa ja kummallakin on kolikko, jossa on kaksi puolta, kruuna ja klaava. Kumpikin pelaaja päättää, kumman puolen kääntää ylöspäin ja peittää sen kädellään. Jos kolikot ovat sama puoli ylöspäin, pelaaja 1 saa pitää molemmat kolikot, eli pelaaja 1 saa pelaajalta 2 yhden kolikon. Jos kolikot ovat eri puoli ylöspäin, tapahtuu sama toisinpäin. Peli on esitetty taulukossa 9.

Taulukko 9: Kolikonheittopeli

		Pelaaja 2	
		Kruuna	Klaava
Pelaaja 1	Kruuna	(1, -1)	(-1, 1)
	Klaava	(-1, 1)	(1, -1)

Tälle pelille ei löydy puhtaiden strategioiden ratkaisua kahdella aiemmin esiteltyllä ratkaisukeinolla. Otetaan siis avuksi sekastrategiat. Kolikonheittopelissä molempien pelaajien i strategiajoukko koostuu kahdesta puhtaasta strategiasta, kruunasta ja klaavasta, eli $S_i = \{kruuna, klaava\}$. Sekastrategia pelaajalle 2 on siis todennäköisyysjakauma $(q, 1 - q)$, missä q on todennäköisyys strategialle ”kruuna” ja $1 - q$ todennäköisyys strategialle ”klaava”, missä $0 \leq q \leq 1$. Jos pelattaisiin sekastrategia $(0, 1)$, pelattaisiinkin puhdas strategia ”klaava”, sillä strategian ”kruunan” todennäköisyys on 0. Merkitään pelaajan 1 todennäköisyysjakaumaa merkinnällä $(r, 1 - r)$, jossa r on strategian ”kruuna” todennäköisyys.

Sekastrategian utiliteetti saadaan laskettua painotettuna summana, jossa utiliteettien painokertoimina on strategioiden valintatodennäköisyydet. Tau-

lukossa 10 on merkitty kolikonheittopeliin strategioiden todennäköisyydet kullekin pelaajalle. [2]

Taulukko 10: Kolikonheitto

		Pelaaja 2	
		Kruuna q	Klaava $1 - q$
Pelaaja 1	Kruuna r	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	Klaava $1 - r$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Kolikonheitossa pelaajan 1 sekastrategian odotetut utiliteetit eri strategioille ovat

$$u_1(kruuna) = 1 \cdot q + (-1 \cdot (1 - q)) = 2q - 1$$

$$u_1(klaava) = -1 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 2q$$

Vertailemalla eri strategioiden utiliteetteja voidaan tutkia, kumpi strategioista kannattaa valita.

$$u_1(kruuna) < u_1(klaava)$$

$$\Leftrightarrow 2q - 1 < 1 - 2q$$

$$\Leftrightarrow 2q + 2q < 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow 4q < 2$$

$$\Leftrightarrow q < \frac{1}{2}$$

Pelaajan 1 kannattaa valita strategia ”klaava”, kun vastapelaajan todennäköisyys valita strategia ”kruuna” on alle puolet eli $q < \frac{1}{2}$. Jos $q = \frac{1}{2}$, pelaaja 1 voi valita kumman tahansa strategioistaan, sillä utiliteetin odotusarvo on molemmilla strategioilla täysin sama. [2]

Pelaajalle 2 odotetut utiliteetit voidaan laskea vastaavasti. Nyt r kuvastaa todennäköisyyttä valita strategia ”kruuna” ja $0 \leq r \leq 1$.

$$u_2(kruuna) = -1 \cdot r + 1 \cdot (1 - r) = 1 - 2r$$

$$u_2(klaava) = +1 \cdot r - 1 \cdot (1 - r) = 2r - 1$$

$$\begin{aligned}
& u_2(kruuna) < u_2(klaava) \\
\Leftrightarrow & 1 - 2r < 2r - 1 \\
\Leftrightarrow & 4r > 2 \\
\Leftrightarrow & r > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pelaajan 2 kannattaa valita strategia ”klaava”, kun $u_2(kruuna) < u_2(klaava)$, eli kun $r > \frac{1}{2}$, eli kun pelaaja 1 valitsee todennäköisemmin strategian ”kruuna”. Kun $r = \frac{1}{2}$, kumpi tahansa strategia on paras vastaus ja tuo parhaan utiliteetin.

Tällöin siis Nashin tasapainoksi saadaan sekastrategiat $(q, 1 - q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ja $(r, 1 - r) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Tämä tulkitaan siten, että pelaaja 1 pelaa strategian ”kruuna” todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja ”klaava” todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Pelaajan 2 strategiavalinnat ovat vastaavat.

Otetaan toisena esimerkkinä peli, joka on esitettyinä taulukossa 11. Pelaajalla 1 on tässä pelissä kaksi puhdasta strategiaa, ja pelaajalla 2 on 3 mahdollista puhdasta strategiaa. Sekastrategia merkitään tässä tapauksessa hieman eri tavalla. Pelaaja 2:n sekastrategia on $(q, r, 1 - q - r)$, missä q on pelaajan 2 todennäköisyys pelata strategia ”vasen”, r on todennäköisyys pelata strategia ”keski” ja strategian ”oikea” todennäköisyydeksi jää tällöin $1 - q - r$, sillä todennäköisyyksien pitää summautua yhteen. Nyt q ja r ehdot ovat myös hieman erilaiset. Täytyy olla $0 \leq q \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$ ja $0 \leq q + r \leq 1$. Jos pelaaja 2 pelaisi sekastrategian $(1/3, 1/3, 1/3)$, kaikki strategiat olisivat yhtä todennäköisiä. Jos taas pelattaisiin sekastrategia $(1/2, 1/2, 0)$, strategiat ”keski” ja ”vasen” olisivat yhtä todennäköisiä strategian ”oikea” ollessa mahdoton. Tällaisia pelejä, missä matriisi on suurempi kuin 2×2 , voidaan helposti ratkaista esimerkiksi lineaarisella optimoinnilla, johon palaamme myöhemmin tässä tutkielmassa.

Taulukko 11: Peli
Pelaaja 2

		Pelaaja 2		
		Vasen	Keski	Oikea
Pelaaja 1	Ylös	(1, 0)	(1, 2)	(0, 1)
	Alas	(0, 3)	(0, 1)	(2, 0)

Yleisesti johtaaksemme pelaajan i parhaan vastauksen pelaajan j sekastrategiaan ja muodolliseen määritelmään pääsemiseksi, keskitytään sel-

keyden vuoksi kahden pelaajan peleihin. Merkitään J :llä puhtaiden strategioiden määrää S_1 :ssä ja K :lla S_2 :ssa. Merkitään $S_1 = \{s_{11}, \dots, s_{1J}\}$ ja $S_2 = \{s_{21}, \dots, s_{2K}\}$ ja käytetään merkintöjä s_{ij} ja s_{ik} satunnaisesta puhtaasta strategiasta joukoista S_1 ja S_2 . [2]

Jos pelaaja 1 olettaa pelaajan 2 pelaavan strategiansa (s_{21}, \dots, s_{2k}) todennäköisyydellä p_{21}, \dots, p_{2k} , pelaajan 1 odotettu utiliteetti pelatessa strategiaa s_{1j} on [2]

$$\sum_{k=1}^K p_{2k} u_1(s_{1j}, s_{2k}) \quad (4)$$

ja pelaajan 1 odotettu utiliteetti sekastrategialle $p_1 = (p_{11}, \dots, p_{1J})$ on

$$v_1(p_1, p_2) = \sum_{j=1}^J p_{1j} \left[\sum_{k=1}^K p_{2k} u_1(s_{1j}, s_{2k}) \right] = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K p_{1j} p_{2k} u_1(s_{1j}, s_{2k}). \quad (5)$$

Tässä siis $p_{1j} p_{2k}$ on todennäköisyys sille, että pelaaja 1 pelaa strategian s_{1j} ja pelaaja 2 strategian s_{2k} ja $u_1(s_{1j}, s_{2k})$ on pelaajan 1 hyöty näiden strategioiden pelaamisesta. Näin saatu utiliteetti on siis kunkin strategian utiliteetin painotettu summa, missä painokertoimina toimivat strategian valitsemistodennäköisyydet. Jotta pelaaja 1:n sekastrategia olisi paras vastaus pelaajan 2 sekastrategiaan, pitää olla $p_{1j} > 0$ vain, jos

$$\sum_{k=1}^K p_{2k} u_1(s_{1j}, s_{2k}) \geq \sum_{k=1}^K p_{2k} u_1(s_{1j'}, s_{2k}) \quad (6)$$

kaikilla $s_{1j'} \in S_1$. [2]

Vastaavasti pelaajan 2 odotettu utiliteetti, kun pelaaja 1 pelaa sekastrategian, on

$$v_2(p_1, p_2) = \sum_{k=1}^K p_{2k} \left[\sum_{j=1}^J p_{1j} u_2(s_{1j}, s_{2k}) \right] = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K p_{1j} p_{2k} u_2(s_{1j}, s_{2k}). \quad (7)$$

Nyt, kun pelaajan 1 ja 2 odotetut utiliteetit on määritelty kaavoilla (5) ja (7), pohditaan Nashin tasapainoa kahden pelaajan sekastrategioiden avulla ratkaistuna. Nashin tasapaino saavutetaan, jos p_1^* toteuttaa

$$v_1(p_1^*, p_2^*) \geq v_1(p_1, p_2^*) \quad (8)$$

jokaisella todennäköisyysjakaumalle p_1 yli joukon S_1 ja p_2^* toteuttaa

$$v_2(p_1^*, p_2^*) \geq v_2(p_1^*, p_2) \quad (9)$$

jokaisella todennäköisyysjakaumalla p_2 yli joukon S_1 . [2]

Sekastrategioiden Nashin tasapaino määritellään seuraavasti.

Määritelmä 5. [2] Kahden pelaajan normaalimuotoisessa pelissä $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, *sekastrategia* (p_1^*, p_2^*) on *Nashin tasapaino*, jos jokaisen pelaajan sekastrategia on paras vastaus vastapelaajan sekastrategialle, eli pitää olla voimassa edellä esitetyt ehdot (8) ja (9).

Pohditaan sukupuolten taistelu -peliä, joka on esitetty aiemmin taulukossa 6. Tässä nainen pelaa strategian ”ooppera” todennäköisyydellä q ja ”painin” todennäköisyydellä $1 - q$. Miehen sekastrategia on $(r, 1 - r)$, missä r on todennäköisyys strategialle ”ooppera”. [5] Jos nainen pelaa sekastrategian $(q, 1 - q)$, miehen odotetut utiliteetit ovat

$$\begin{aligned} u_2(ooppera) &= q \cdot 2 + (1 - q) \cdot 0 = 2q \\ u_2(paini) &= q \cdot 0 + (1 - q) \cdot 1 = 1 - q. \end{aligned}$$

Tällöin miehen kannattaa valita strategia ”ooppera”, jos $u_2(ooppera) > u_2(paini)$, eli

$$\begin{aligned} &u_2(ooppera) > u_2(paini) \\ \Leftrightarrow &2q > 1 - q \\ \Leftrightarrow &3q > 1 \\ \Leftrightarrow &q > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Kun $q > \frac{1}{3}$, eli nainen valitsee strategian ”ooppera” suuremmalla todennäköisyydellä kuin $\frac{1}{3}$, miehen kannattaa valita strategia ”ooppera”. Jos $q < \frac{1}{3}$, miehen kannattaa valita strategia ”painin”. Jos todennäköisyys on $q = \frac{1}{3}$, kumpi tahansa strategia on paras mahdollinen vastaus vastapuolen valintaan.

Jos mies pelaa sekastrategian $(r, 1 - r)$, naisen odotetut utiliteetit ovat

$$\begin{aligned} u_1(ooppera) &= r \cdot 1 + (1 - r) \cdot 0 = r \\ u_1(paini) &= r \cdot 0 + (1 - r) \cdot 2 = 2(1 - r). \end{aligned}$$

Naisen kannattaa siis pelata ennemmin strategia ”ooppera”, jos $u_1(ooppera) > u_1(paini)$, eli

$$\begin{aligned} & r > 2(1 - r) \\ \Leftrightarrow & r > 2 - 2r \\ \Leftrightarrow & r > \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Kun siis $r > \frac{2}{3}$, naisen kannattaa valita strategia ”ooppera” ja toisinpäin. Kun $r = \frac{2}{3}$, kumpi tahansa strategia on paras valinta.

Tällöin siis naisen sekastrategia $(q, 1 - q) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ja miehen sekastrategia $(r, 1 - r) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ovat Nashin tasapaino puhtaiden strategioiden $(q, r) = (0, 0)$ ja $(q, r) = (1, 1)$ lisäksi. [5]

5.4 Paras vastastrategia

Kun pelataan peliä, jokainen pelaaja yrittää maksimoida oman hyötynsä ottaen huomioon, mitä vaihtoehtoja vastapelaajilla on käytettävissään. Oletetaan jokaisen pelaajan toimivan rationaalisesti ja valitsevan omaksi parhaaksi olevia strategioita. Ellei näin toimita, peliteoreettiset tulokset eivät voi olla voimassa, sillä ne perustuvat oletukseen siitä, että pelaajat pyrkivät toimimaan rationaalisesti.

Lauseen 2 mukaan pelaajan kannattaa aina valita paras mahdollinen vastastrategia muiden pelaajien strategioihin nähden.

Lause 2. [9] Strategia $s_i \in S_i$ on pelaajan i paras vastastrategia vastapelaajan valitsemalle strategialle $s_{i'} \in S_{i'}$, jos

$$v_i(s_i, s_{i'}) \geq v_i(s_{i'}, s_{i'}), \forall s_{i'} \in S_{i'}.$$

Otetaan esimerkkinä taulukon 12 peli, jossa kahdella pelaajalla on molemmilla kolme strategiaa. Jos pelaaja 1 uskoo pelaajan 2 pelaavan strategian ”L”, parhaat vastastrategiat ovat ”M” ja ”D”. Jos pelaaja 2 pelaisi strategian ”C”, pelaajan 1 paras vastastrategia olisi ”D”, ja jos pelaaja 2 pelaisi strategian ”R”, parhaat vastastrategiat olisivat ”U” ja ”D”. Jos pelaaja 1 pelaisi strategian ”U”, pelaajan 2 paras vastastrategia olisi ”L”, jos hän pelaisi strategian ”M”, silloin paras vastastrategia olisi ”R” ja jos hän pelaisi strategian ”D”, paras vastastrategia olisi ”R”. Huomattiin, että joskus voi siis olla enemmän kuin yksi yhtä hyvä vastastrategia. [9]

Lihavoidaan pelin utiliteettimatriisiin parhaat strategiat kullekin pelaajalle taulukkoon 12. Pelin Nashin tasapaino on se strategiapari, jolla molemmilla pelaajilla on paras vastastrategia toisen pelaajan strategiaan nähden.

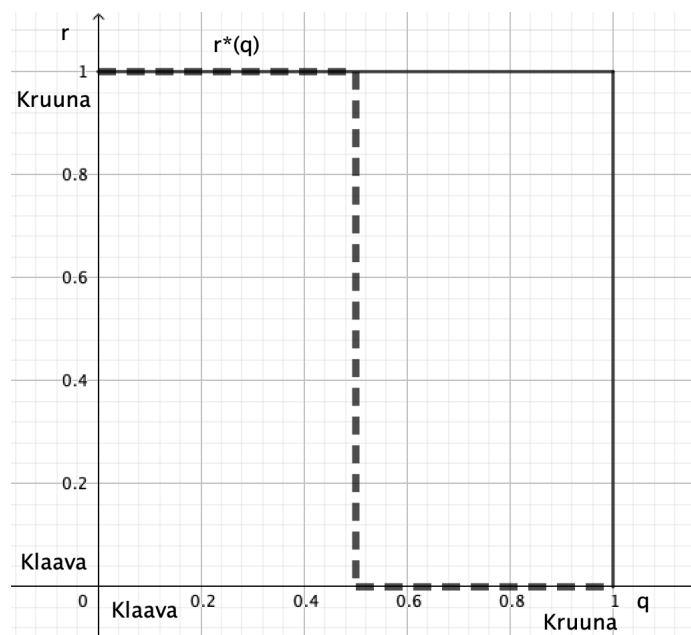
Taulukko 12: Peli
Pelaaja 2

		L	C	R
Pelaaja 1	U	(3,3)	(5,1)	(6,2)
	M	(4,1)	(8,4)	(3,6)
	D	(4,0)	(9,6)	(6,8)

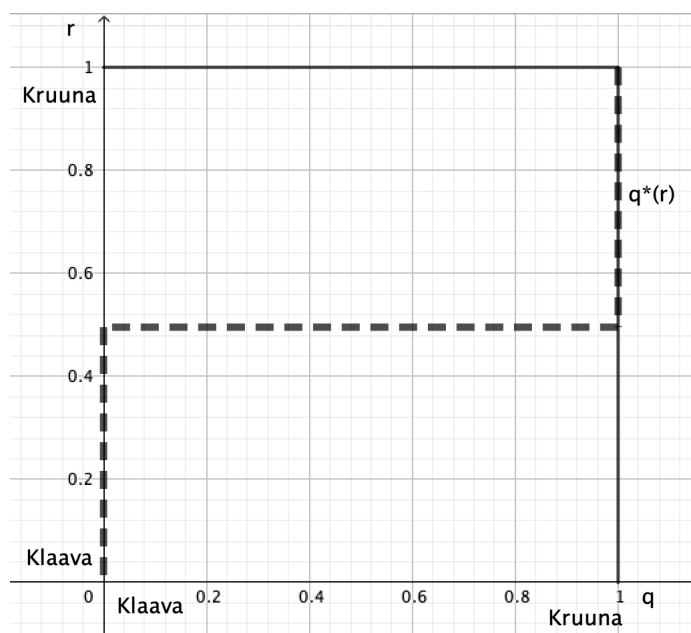
Tässä pelissä strategiapari ("D", "R") tuottaa yhtä aikaa molemmille pelaajille parhaan tuoton, eli se on Nashin tasapaino.

Paras vastastrategia voidaan mallintaa graafisesti kahden pelaajan tapauksessa. Kolikonheittopelissä, joka on esitetty aiemmin taulukossa 10, pelaaja 1 pelaa sekastrategian $(q, 1 - q)$ ja pelaaja 2 sekastrategian $(r, 1 - r)$. Kuvaaja voidaan rajata välille $[0, 1]$ vaaka- ja pystyakselin osalta, sillä sekä q :n, että r :n todennäköisyys täytyy olla tällä välillä. Nyt q :n arvo kuvaa pelaajan 2 todennäköisyyttä pelata strategia "kruuna". Jos siis q on lähempänä ykköstä kuin nolaa, hän todennäköisemmin pelaa strategian kruuna. Kuvassa 6 on piirrettynä katkoviivalla pelaajan 1 paras vastastrategia $r^*(q)$, kun $q \in [0, 1]$. Kun $q < \frac{1}{2}$, $r^*(q) = 1$, eli pelaajan kannattaa valita strategia "kruuna". Kun $q = \frac{1}{2}$, valitsee pelaaja 1 minkä tahansa strategian, on lopputulos yhtä todennäköinen. Kun $q > \frac{1}{2}$, $r^*(q) = 0$, eli pelaaja 1:n kannattaa valita strategia "klaava".

Pelaajan 2 parasta vastastrategiaa kuvataan kuvassa 7 $q^*(r)$:llä. Kuvaajan akselit on kuitenkin käännetty samoin päin, kuin kuvassa 6, jotta ne saadaan yhdistettyä. Nyt siis $q^*(r)$, $r \in [0, 1]$, kuvaa parhaan strategian muuttumista, kun r :n arvo muuttuu. Kuvaajan mukaan pelaajan 2 kannattaa valita strategia "klaava", kun $r < \frac{1}{2}$ ja strategia "kruuna", kun $r > \frac{1}{2}$. Kun taas $r = \frac{1}{2}$, strategian valinta ei vaikuta lopputulokseen, eli kaikilla strategiavalinnoilla saadaan paras lopputulos.

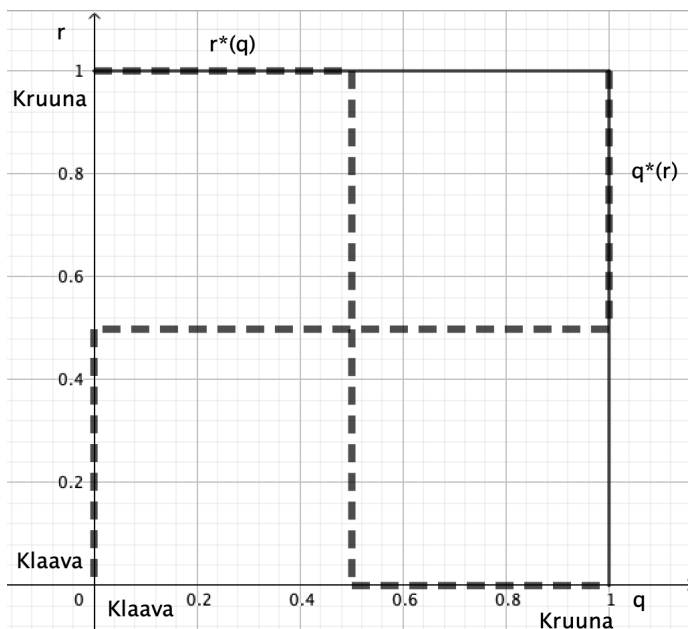


Kuva 6: Paras vastastrategia $r^*(q)$



Kuva 7: Paras vastastrategia $q^*(r)$

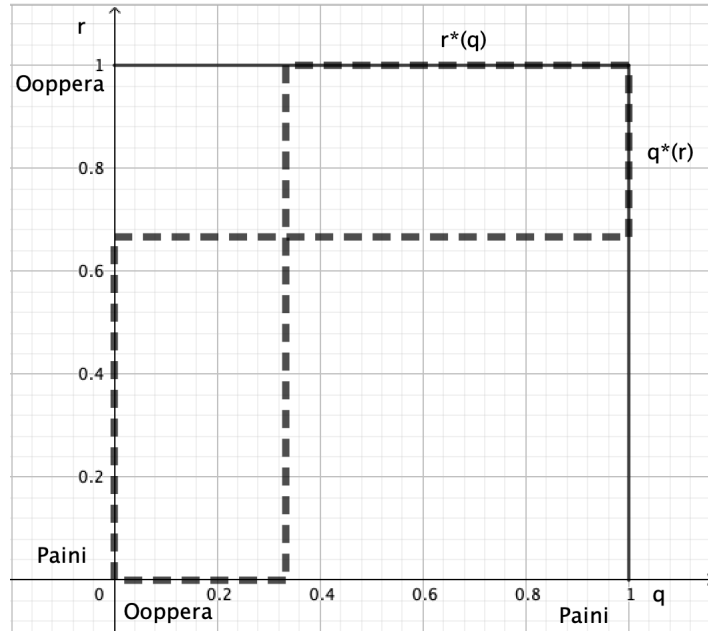
Kuvassa 8 on yhdistetty pelaajien parhaat vastastrategiat. Nyt näiden leikkauspisteessä, missä $r^*(q) = q^*(r)$, on pelin strateginen tasapainopiste, ja näin ollen myös Nashin tasapaino. [2]



Kuva 8: Parhaiden vastastrategioiden tasapaino

Tarkastellaan seuraavaksi sukupuolten taistelu -peliä, joka on esitetty taulukossa 6. Nainen pelaa sekastrategian $(q, 1 - q)$ ja mies sekastrategian $(r, 1 - r)$, missä q ja r kuvastavat strategian ”ooppera” valitsemisen todennäköisyyttä. Käytetään hyödyksi kappaleessa 5.3 laskettuja utiliteettien vertailuja. Jos $q > \frac{1}{3}$, miehen kannattaa valita strategia ”ooppera”. Jos $q < \frac{1}{3}$, miehen kannattaa valita ”paini”. Jos taas $q = \frac{1}{3}$, saavutetaan millä tahansa strategialla paras mahdollinen tulos. Jos $r > \frac{2}{3}$, naisen kannattaa valita strategia ”ooppera” ja jos $r < \frac{2}{3}$, kannattaa valita ”paini”. Huomataan, että tässä kuviossa parhaiden strategioiden leikkauspisteitä on kolme. Tässä tasapaino löydetään siis kolmella eri strategiavalinnalla, eli valitsemalla sekastrategia $(q, r) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tai puhtaat strategiat $(q, r) = (0, 0)$ ja $(q, r) = (1, 1)$.

Kuvassa 9 on piirrettyä parhaat vastastrategiat naiselle ja miehelle.



Kuva 9: Parhaiden vastastrategioiden tasapaino sukupuolten taistelu -pelissä

5.5 Minimax-menetelmä

Minimaksimointi on hyvä keino ratkaista peli, kun halutaan minimoida tappiota. Pelaaja ajattelee toisen pelaajan haluavan minimoida tämän utiliteetin. Näin ollen siis kaikki strategiavalinnat perustuvat siihen, miten voidaan maksimoida huonoin tulos. Nollasummapeleissä esimerkiksi tämä menetelmä on usein toimiva, sillä niissä pakosti toinen pelaaja häviää sen, minkä toinen voittaa, eli yritetään minimoida tappio. Keskeisessä osassa minimax-menetelmää on satulapiste. Jos sellainen löytyy, on se pelin tasapainopiste ja Nashin tasapaino.

Määritelmä 6. Matriisin $A \in Z^{m \times n}$ satulapiste on alkio a_{ij} , jos

1. a_{ij} on rivin i minimi
2. a_{ij} on sarakkeen j maksimi.

Otetaan esimerkkinä matriisi A :n satulapisteen määrittäminen.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Alleviivataan matriisin rivien minimit ja lihavoidaan sarakkeiden maksimit.

$$A = \begin{bmatrix} \underline{4} & \underline{1} & -3 \\ 3 & \underline{2} & 5 \\ \underline{0} & 1 & \underline{6} \end{bmatrix}$$

Satulapisteitä on siis yksi, matriisin keskellä oleva luku 2, sillä se toteuttaa molemmat ehdot.

Minimaksimointi toimii siten, että normaalimuotoisesta pelistä etsitään satulapiste, joka on siis pelin ratkaisu ja tasapainopiste. Satulapiste löytyy etsimällä normaalimuodossa esitetyn pelimatriisin jokaiselta riviltä minimi ja jokaiselta sarakkeelta maksimi. Sitten etsitään riviminimien maksimi ja sarakkemaksimien minimi. Jos nämä ovat yhtä suuret, on se pelin satulapiste ja samalla myös pelin arvo. [7]

Määritellään seuraavaksi maksiminimoijat pelaajille 1 ja 2.

Määritelmä 7. [8] Olkoon $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ kahden pelaajan normaali-muotoinen nollasummapeleli. Strategia $s_{1j}^* \in S_1$ on *maksiminimoija* pelaajalle 1, jos

$$\min_{s_{2k} \in S_2} u_1(s_{1j}^*, s_{2k}) \geq \min_{s_{2k} \in S_2} u_1(s_{1j}, s_{2k}),$$

jokaisella $s_{1j} \in S_1$. Strategia $s_{2k} \in S_2$ on *maksiminimoija* pelaajalle 2, jos

$$\min_{s_{1j} \in S_1} u_2(s_{1j}, s_{2k}^*) \geq \min_{s_{1j} \in S_1} u_2(s_{1j}, s_{2k}),$$

jokaisella $s_{2k} \in S_2$.

Pelaajan 1 *maksiminimoija* ratkaisee ongelman

$$\max_{s_{1j}} \min_{s_{2k}} u_1(s_{1j}, s_{2k})$$

ja pelaajan 2 *maksiminimoija* ratkaisee ongelman

$$\max_{s_{2k}} \min_{s_{1j}} u_2(s_{1j}, s_{2k})$$

Maksiminimoijien ja Nashin tasapainon välillä on lauseen 3 mukainen yhteys. Jos siis tiedetään kahden pelaajan nollasummapelin Nashin tasapaino, tiedetään myös pelaajien maksiminimoijat, satulapiste ja pelin tuotto. Sama toimii myös toisinpäin, eli jos tiedetään maksiminimoijat, ja ne ovat samat, määrittävät ne Nashin tasapainon.

Lause 3. [7] Olkoon $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ kahden pelaajan normaalimuotoinen nollasummapeli.

1. Jos (s_{1j}^*, s_{2k}^*) on G :n Nashin tasapaino, niin s_{1j}^* on *maksiminimoija* pelaajalle 1 ja s_{2k}^* on *maksiminimoija* pelaajalle 2. Lisäksi

$$\max_{s_{1j}} \min_{s_{2k}} u_1(s_{1j}, s_{2k}) = \min_{s_{2k}} \max_{s_{1j}} u_1(s_{1j}, s_{2k}) = u_1(s_{1j}^*, s_{2k}^*)$$

ja tällöin kaikki G :n Nashin tasapainot antavat saman tuoton.

2. Jos

$$\max_{s_{1j}} \min_{s_{2k}} u_1(s_{1j}, s_{2k}) = \min_{s_{2k}} \max_{s_{1j}} u_1(s_{1j}, s_{2k}),$$

ja s_{1j}^* on *maksiminimoija* pelaajalle 1 ja s_{2k}^* on *maksiminimoija* pelaajalle 2, niin (s_{1j}^*, s_{2k}^*) on Nashin tasapaino.

Kahden pelaajan nollasummapelissä peli voidaan kirjoittaa vain toisen pelaajan utiliteettien avulla. Tällöin oletetaan, että pelaaja 2:n utiliteetit ovat vastakkaismerkkiset pelaaja 1:n utiliteetteihin nähden. Otetaan esimerkkinä valitse käsi -peli, jossa pelaaja 2 piilottaa vasempaan käteen yhden tai oikeaan käteen kaksi kolikkoa. Pelaaja 1 valitsee jomman kumman käden

Taulukko 13: Valitse käsi-peli

		Pelaaja 2	
		vasen	oikea
Pelaaja 1	vasen	(1, -1)	(0, 0)
	oikea	(0, 0)	(2, -2)

ja saa pitää kolikot, jos niitä löytyy kädestä. Vastaavasti pelaaja 2 menettää yhtä monta kolikkoa, kuin pelaaja 1 voittaa. Peli on normaalimuodossa taulukossa 13. [8]

Pelaajan 1 voittomatriisi on $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Kahden pelaajan nollasummapelissä ongelmana on toisen osapuolen siirron arvaaminen ja siihen luottaminen. Kumpikin pelaaja tietää, paljonko tuottoa saa milläkin arvauksella. Tällöin, jos pelaaja 1 haluaisi mahdollisimman hyvän tuoton, hänen kannattaisi valita oikea käsi, sillä siellä voisi olla kaksi kolikkoa. Pelaaja 2 kuitenkin tietää, että pelaaja 1 havittelee tätä ja voi siksi laittaa yhden kolikon vasempaan käteen. Toisaalta pelaaja 1 voi ajatella pelaajan 2 tekevän näin, jolloin hän valitseekin vasemman käden, jolloin pelaajan 2 kannattaisikin laittaa kaksi kolikkoa oikeaan käteen. Peliteoria antaa onneksi tällekin ongelmalle ratkaisun.

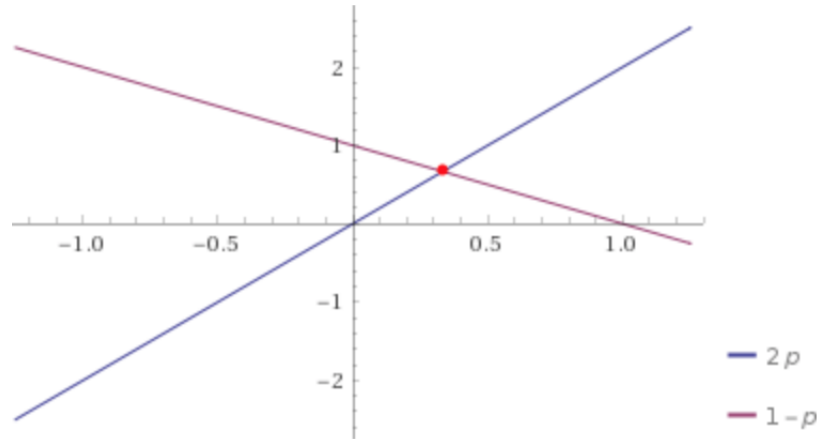
Oletetaan pelaajan 1 käyttävän sekastrategiaa $(1 - p, p)$, missä $p \in [0, 1]$ on todennäköisyys pelata strategia ”oikea”. Nyt, jos pelaaja 2 pelaa strategian ”vasen”, odotettu häviö on $u_2 = 1 - p$ ja jos pelaaja 2 pelaa strategian ”oikea”, odotettu häviö on $u_2 = 2p$. Jos pelaaja 2 tuntisi pelaajan 1 strategian, hän yrittäisi minimoida tappion valitsemalla strategiansa siten, että se on pienempi odotetuista tappioista $1 - p$ tai $2p$. Tällöin pelaajan 1 kannattaa maksimoida lukua $\min\{2p, 1 - p\}$.

Vertaillaan utiliteetteja eri p :n arvoilla.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 2p < 1 - p \\ p < \frac{1}{3}. \end{array}$$

Odotettu utiliteetti $u_2 = 2p$ on pienempi, kun $p < \frac{1}{3}$, ja kun $p > \frac{1}{3}$, on utiliteetti $u_2 = 1 - p$ pienempi. Kun taas $p = \frac{1}{3}$, on utiliteetti suurimmillaan, eli $\frac{2}{3}$, eli

$$\begin{cases} \min u_1(2p, 1-p) < \frac{2}{3}, p \neq \frac{1}{3} \\ \min u_1(2p, 1-p) = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{3}. \end{cases}$$



Kuva 10: Odotetut utiliteetit

Kuvassa 10 on esitetty graafisesti utiliteettien arvot eri p :n arvoilla. Kuvasta ja yhtälöryhmän ratkaisusta nähdään, että kyseisten minimien maksimi saavutetaan, kun $p = \frac{1}{3}$. Jos siis pelaaja 1 pelaa sekastrategian $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, hän voittaa jokaisella kierroksella odotusarvon mukaisesti $\frac{2}{3}$ kolikkoa.

Vastaavasti voidaan päätellä pelaajan 2 kannattava strategia. Pelaaja 2 pelaa sekastrategian $(1-q, q)$, missä $q \in [0, 1]$. Koska

$$\min \max u_2(1-q, 2q) = \frac{2}{3}$$

saavutetaan, kun $q = \frac{1}{3}$, on pelaajan optimaalisinta käyttää strategiaa $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Tällä strategian valinnalla pelaaja 2 häviää joka kierroksella odotusarvon mukaisesti niin vähän kuin mahdollista eli $\frac{2}{3}$ kolikkoa.

Nollasummapelin sääntöjen mukaisesti toisen pelaajan odotettu voitto on yhtä suuri kuin toisen pelaajan odotettu tappio.

5.6 Graafinen kirjekuorimetodi

Analyyttisten keinojen lisäksi peliteoreettisia ongelmia voidaan ratkaista graafisesti ja tätä kutsutaan kirjekuorimetodiksi (envelope method). Näin voidaan

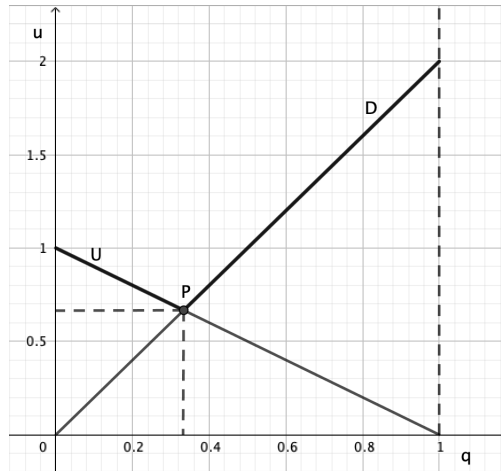
ratkaista sekä 2×2 matriisin pelejä, että $n \times 2$ ja $2 \times m$ matriisin pelejä. Eri matriiseissa voidaan käyttää joko ylä- tai alakirjekuorimetodia riippuen siitä, halutaanko maksimoida minimejä vai minimoida maksimeja. Yläkirjekuorimetodilla saadaan etsittyä maksimien minimi ja alakirjekuorimetodilla minimien maksimi. [3]

Muotoa 2×2 olevan matriisin pelissä, joka on esitetty taulukossa 14, pelaaja 1 pelaa sekastrategian $(1 - p, p)$ ja pelaaja 2 sekastrategian $(1 - q, q)$, missä p kuvaa todennäköisyyttä valita strategia ”D” ja q kuvaa todennäköisyyttä valita strategia ”R”.

Taulukko 14: Peli

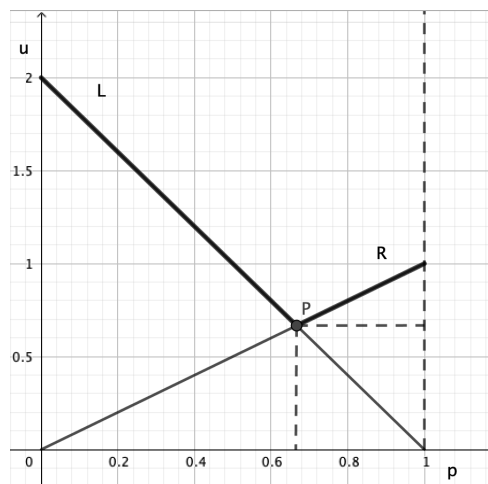
		Pelaaja 2	
		L	R
Pelaaja 1	U	(1, 2)	(0, 0)
	D	(0, 0)	(2, 1)

Kuvassa 11 on esitettyinä graafinen kirjekuorimetodin toteutus. Pelaaja 1:n utiliteetti pelaaja 2:n todennäköisyyden q suhteen, kun pelaaja 1 tekee strategiavalinnan ”U” tai ”D”. Laskeva suora kuvaa strategiavalinnan ”U” utiliteettia pelaajan 2 strategiavalintojen muuttuessa ja nouseva suora puolestaan strategiavalinnan ”D” utiliteetin muuttumista. Paras mahdollinen strategiavalinta on piirretty kuvaan lihavoidulla viivalla eli ylös muodostuu kirjekuori. Tasapainopiste saavutetaan näiden suorien leikkauspisteessä, eli kun $q = \frac{1}{3}$. Tällöin utiliteetti on $u_1 = \frac{2}{3}$.



Kuva 11: Kirjekuorimetodi pelaajalle 1

Kuvassa 12 on vastaava esitys pelaajan 2 utiliteetille. Nyt laskeva suora kuvaa pelaaja 2:n strategian ”L” utiliteettia ja nouseva suora strategian ”R” utiliteettia, kun pelaajan 1 todennäköisyys valita strategia ”D”, eli p muuttuu. Tasapainopiste voidaan taas lukea suorien leikkauspisteestä. Pelaajan 2 paras sekastrategia on $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ja tällöin utiliteetiksi tulee $\frac{2}{3}$.



Kuva 12: Kirjekuorimetodi pelaajalle 2

Graafisella menetelmällä voidaan ratkaista myös 3×2 matriisin peljä. Taulukon 15 peli mallinnetaan kuvassa 13. Kuvaaajassa on pelaajan 1 utiliteetti q :n suhteen.

Taulukko 15: Peli
Pelaaja 2

		L	R
		Pelaaja 1	U
M	(0, 0)		(2, 1)
D	(-1, 4)		(3, 1)

Nyt tasapainokohdat ovat jälleen lihavoiduilla alueilla suorien leikkauspisteissä. Sekastrategiayhdistelmät "U" ja "D", ja "M" ja "D" ovat mahdollisia. Kaikkia kolmea strategiaa pelaajan ei kannata pelata yhtä aikaa.

Jos pelaaja 1 valitsee strategiat "U" ja "D", ja pelaaja 2 on valinnut sekastrategian $(1 - q, q) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Tällöin pelaaja 1 pelaa sekastrategian $(1 - p, p)$, missä p on todennäköisyys valita strategia "D", ja $1 - p$ todennäköisyys valita strategia "U". Nyt pelaajan kannattaa valita oma sekastrategiansa siten, että utiliteetti u_1 maksimoituu. Utiliteetti maksimoituu, kun $u_1(U) = u_1(D)$, jolloin

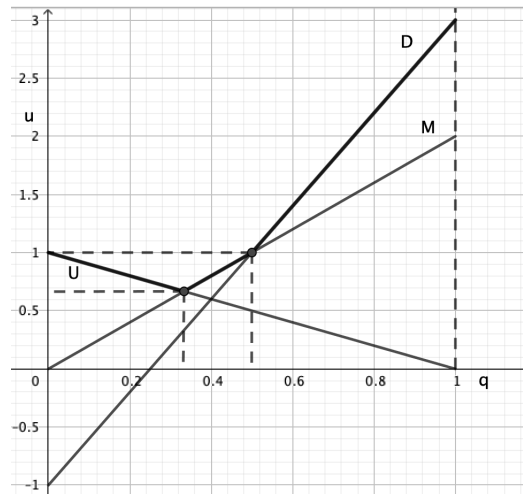
$$\begin{aligned}
 & u_1(U) = u_1(D) \\
 \Leftrightarrow & (1 - p)(1 \cdot (1 - q) + 0) = p \cdot (-1(1 - q) + 3 \cdot q) \\
 \Leftrightarrow & (1 - p)(1 \cdot \frac{2}{3} + 0) = p \cdot (-\frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3}) \\
 \Leftrightarrow & \frac{2}{3}(1 - p) = -\frac{2}{3}p + p \\
 \Leftrightarrow & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}p = -\frac{2}{3}p + p \\
 \Leftrightarrow & p = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Maksimi siis saavutetaan, kun $p = \frac{2}{3}$, eli pelaaja 1 pelaa sekastrategian $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Jos pelaaja 1 valitsee strategiat "M" ja "D", pelaajan 2 rationaalinen strategiavalinta on sekastrategia $(1 - q, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Tällöin paras sekastrategia on pelaaja 1:lle $(1 - r, r)$, missä r on pelaajan 1 todennäköisyys valita strategia "D" ja $1 - r$ todennäköisyys valita strategia "M". Pelaajan 1 utiliteetti maksimoituu, kun $u_1(M) = u_1(D)$, eli

$$\begin{aligned}
& u_1(M) = u_1(D) \\
\Leftrightarrow & (1-r)(0+2) = r \cdot (-1 \cdot (1-q) + 3q) \\
\Leftrightarrow & (1-r)\left(0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = r\left(-1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) \\
\Leftrightarrow & (1-r) = r\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \\
\Leftrightarrow & 1-r = r \\
\Leftrightarrow & r = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Maksimi siis saavutetaan, kun $r = \frac{1}{2}$, eli pelaajan 1 kannattaa pelata sekastrategia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



Kuva 13: Kirjekuorimetodi. Pelaajan 1 utiliteetit q :n muuttuessa

Pelin tasapainoiksi valikoituivat siis strategiat $\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$ ja $\{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

5.7 Lineaarinen optimointi LP

Lineaarisella optimoinnilla (linear programming) tarkoitetaan tekniikkaa, jolla löydetään ratkaisu lineaariseen optimointiongelmaan. Tällöin kohdefunktion, eli minimoitavan tai maksimoitavan funktion sekä rajoitefunktioiden, jotka määrittävät tehtävän sallitut pisteet, täytyy olla lineaarisia. Lineaarisella optimoinnilla voidaan ratkaista muitakin kuin peliteoreettisia optimointiongelmia. Itseasiassa peliteoreettisten ongelmien ratkaiseminen on vain pieni erikoistapaus lineaarisesta optimoinnista. [9]

Kohdefunktion

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

päätösmuuttujille x_j määritetään sellaiset arvot, että se joko minimoituu tai maksimoituu, riippuen siitä, kumpaa halutaan. Rajoitusfunktiot voivat olla muotoa

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n &\leq b \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n &= b \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &\geq b. \end{aligned}$$

Optimointiongelman kanoninen muoto on näillä merkinnöillä

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

ja se voidaan muuntaa matriisimuotoon

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Käytännössä kanoninen muoto on selkeä reaalimaailman ongelman mallintamiseen, mutta tehtävän ratkaisemisen kannalta voi olla paras muuntaa tehtävä standardimuotoon. Esimerkiksi Simplex-menetelmän käyttö vaatii

tehtävän muuntamista standardimuotoon. Standardimuotoon muunnos tehdään siten, että rajoitteista poistetaan epäyhtälöt lisäämällä tai vähentämällä yhtälöstä jokin uusi muuttuja, jolloin saadaan aikaan yhtäsuuruus erisuuruuden sijaan. Standardimuodossa rajoitefunktioiden muuttujat ovat sievennettyinä vasemmalla, ja vakiot oikealla puolella yhtälöä. Oletetaan lisäksi, että $b_i \geq 0$, sillä käsittelemme vain positiiviarvoisia matriiseja tällä menetelmällä.

Tehtävän standardimuoto on

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Standardimuoto voidaan muuntaa samoin matriisimuotoiseksi,

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

missä matriisi A on $m \times n$ muotoa, jossa $m < n$, eli matriisissa tulee olla vähemmän rivejä kuin sarakkeita. Optimointiongelmassa rajoitteet määrittävät sallitun alueen, jolta ratkaisun pitää löytyä. Optimointialgoritmillä, joka tässä tutkielmassa on Simplex-menetelmä, pyritään parantamaan sallitulla alueella olevaa valittua pistettä liikkumalla alueen kulmissa olevasta kärkipisteestä toiseen siten, että seuraava kärkipiste antaa paremman tuloksen. Seuraavaksi määritellään keskeisiä optimointikäsitteitä. Simplex-menetelmää hyödyntäessä sallittujen pisteiden joukon pitää olla konvekssi joukko.

Määritelmä 8. [6] Joukko S on *konvekssi joukko*, jos kahden joukon pisteen \mathbf{x}_1 ja \mathbf{x}_2 välinen jana kuuluu kokonaisuudessaan joukkoon S , eli

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in S, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S, \lambda \in (0, 1).$$

Sallittujen pisteiden joukko voidaan jakaa reuna- ja sisäpisteisiin.

Määritelmä 9. [6] Lineaarisen optimointitehtävän sallittu piste on *reunapiste*, jos ainakin yksi rajoite toteutuu siinä yhtäsuuruutena ja *sisäpiste*, jos kaikki epäyhtälörajoitteet toteutuvat aidosti.

Määritellään seuraavaksi kärkipisteen käsite.

Määritelmä 10. [6] Olkoon joukko S on epätyhjä konvekksi joukko. Piste $\mathbf{x} \in S$, on *kärkipiste*, jos ehdosta

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S, \lambda \in (0, 1)$$

seuraa $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, eli pistettä \mathbf{x} ei ole mahdollista esittää pisteiden \mathbf{x}_1 ja \mathbf{x}_2 ($\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$) aitona konveksina yhdistelmänä.

Lineaarinen optimointitehtävä voidaan ratkaista esimerkiksi käyttämällä Simplex-menetelmää, missä etsitään ensin kantaratkaisu asettamalla kantamuuttujien kertoimiksi nolliä, jolloin saadaan rajoiteyhtälöistä ratkaistua kantaratkaisu valitulle kannalle. Kantaratkaisu löytyy aina rajoiteyhtälöiden leikkauspisteestä, eli se vastaa kärkipistettä. Tämän jälkeen aletaan liikkua gradientin suuntaan sallitulla alueella käymällä läpi kärkipisteitä. Optimi saavutetaan lopulta jossain alueen kärkipisteessä, kun toiseen kärkipisteeseen liikkuminen ei enää paranna tulosta.

Aiemmin esitellyn kivi-paperi-sakset -pelin ratkaisemiseen voidaan käyttää lineaarista optimointia. Voittomatriisi pelaajalle 1 on

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0. \end{bmatrix}.$$

Koska LP-tehtävien ratkaisemisessa Simplex-taulukkoon halutaan vain positiivisia arvoja, lisätään voittomatriisiin vakio 2. Se ei muuta pelin ratkaisua matriisin laskusääntöjen mukaan ja tällöin matriisi saa muodon

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2. \end{bmatrix}.$$

Muotoillaan kivi-paperi-sakset -peli lineaariseksi optimointitehtäväksi. Peli on helpointa mallintaa ensin kanonisessa muodossa. Oikealle puolelle tulee yksikkövektori, jonka jokainen alkio on 1. Tämä juontaa juurensa LP-tehtävän duaalisuudesta.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 1, \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Muutetaan ongelma standardimuotoon lisäämällä alijäämamuuttujat y_1, y_2 ja y_3 rajoitefunktioiden muuntamiseksi epäyhtälöistä yhtälöiksi ja muuntamalla kohdefunktio siten, että kaikki muuttujat ovat yhtälön vasemmalla puolella.

$$\begin{aligned} \max \quad & z - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_1 = 1, \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 1, \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_3 = 1, \\ & x_i \geq 0, y_j \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Muodostetaan Simplex-kaavio tälle maksimointiongelmalle, joka on esitettyinä taulukossa 16. Kaaviossa on kohdefunktion ja rajoitefunktioiden kertoimet ja kohdefunktion arvo kierroksella valituilla kertoimilla. Lisäksi kaavion vasemman puoleisessa sarakkeessa näkyy kullakin hetkellä valitut kantamuuttujat. Simplex-menetelmässä lasketaan ensin kantaratkaisu, ja tämän jälkeen iteroidaan ratkaisua aina parempaan simplex-suuntaan, eli alimman rivin pienimmän negatiivisen luvun sarakkeen mukaisen kannan suuntaan. Valitusta sarakkeesta valitaan vielä alkio, jonka mukaan taulukkoa muunnetaan. Alkio valitaan siten, että verrataan kunkin rivin arvon ja valitun sarakkeen arvon osamäärää ja valitaan näistä pienin. Tämän jälkeen redusoidaan matriisia siten, että kantamuuttujan kertoimeksi tulee 1. Tämän jälkeen iterointi alkaa alusta, ja kun saavutetaan tilanne, jossa alimmalla rivillä ei ole negatiivisia arvoja, ollaan saavutettu optimaalinen kärkipiste, ja vastaus voidaan tulkita taulukosta.

Taulukon 16 alimmalla rivillä pienin arvo löytyy kolmelta eri kantalu-
vun kohdalta. Valitaan näistä satunnaisesti sarake x_1 . Lasketaan kunkin rivin arvo-sarakkeelta löytyvän luvun ja sarakkeen x_1 kohdalta löytyvän luvun osamäärät c ja valitaan niistä pienin. Se löytyy riviltä 2, jossa kantamuuttujana on y_2 . Vaihdetaan kantamuuttujaksi x_1 ja kerrotaan rivi $\frac{1}{3}$:lla. Näin saadaan muuttujan x_1 kertoimeksi 1.

Taulukko 16: Simplex-tilaus

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z	arvo	c
y_1	2	1	3	1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	2	1	0	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$
y_3	1	3	2	0	0	1	0	1	$\frac{1}{1}$
z	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	

Seuraavaksi valitaan taulukosta 17 alimman rivin pienin kerroin. Se löytyy sarakkeen x_3 kohdalta. Lasketaan c jokaiselle riville, ja valitaan näistä pienin. Se löytyy ylimmältä riviltä, eli nyt y_1 :n tilalle tulee kantamuuttuja x_3 . Seuraavaksi redusoidaan taulukkoa siten, että ylimmälle riville tulee x_3 :n kertoimeksi 1.

Taulukko 17: Simplex-tilaus

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z	arvo	c
y_1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
x_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1
y_3	0	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
z	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	

Seuraavassa iteraatiossa alimman rivin pienin luku löytyy taulukon 18 x_2 sarakkeesta. Lasketaan c jokaiselle riville ja valitaan näistä pienin. Nyt pienin arvo löytyy kolmannelta riviltä, eli kantamuuttuja x_2 valitaan siihen.

Taulukko 18: Simplex-tilaus

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z	arvo	c
x_3	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	1
x_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
y_3	0	$\frac{18}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{18}$
z	0	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	

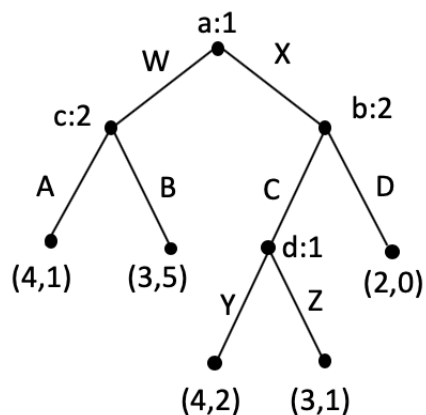
Taulukosta 19 nähdään, että alimmalla rivillä ei ole enää negatiivisia lukuja. Tällöin ei ole enää tulosta parantavaa suuntaa, eli optimipiste on löydetty. Tuloksena on $x_1, x_2, x_3 = \frac{1}{6}$, eli strategiat valitaan yhtä suurella todennäköisyydellä. Tällöin $z = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Pelin arvo on $v = \frac{1}{z} = \frac{1}{1/2} = 2$ ja strategioiden valitsemistodennäköisyydet ovat $p = (p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Taulukko 19: Simplex-taulukko

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z	arvo	c
x_3	0	0	1	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{6}$	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$	0	$\frac{1}{6}$	
x_2	0	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	0	$\frac{1}{6}$	
z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{2}$	

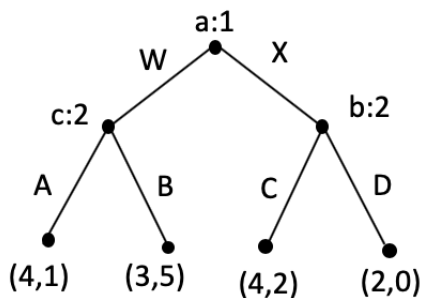
5.8 Ekstensiivimuotoisten pelien ratkaiseminen

Päätöspuumuotoisten ekstensiivipelien ratkaisemisessa voidaan käyttää eri tapoja. Kaikki ekstensiivimuotoiset pelit voidaan esittää normaalimuodossa, joskin joitain tietoja niistä voi kadota. Jos peli on epätäydellisen informaation peli, muuntaminen on kuitenkin usein helppoa. Normaalimuotoinen peli on ratkaistavissa jo edellä esitetyillä keinoilla. Ekstensiivimuotoinen peli voidaan myös ratkaista suoraan päätöspuumuotoisena. Tällöin käytetään induktiota taaksepäin, eli lähdetään karsimaan päätöspuun oksia viimeisestä alkaen. Otetaan esimerkiksi kuvan 14 peli, jossa on kaksi pelaajaa, jossa pelaajalla 1 on kaksi päätöksentekovaihtetta, ja pelaajalla 2 yksi päätöksentekovaihe. Pelaajalla 1 on strategiat ("W"), ("X", "Y") ja ("X", "Z"). Pelaajan 2 strategiat ovat "A", "B", "C" ja "D". Pelaaja 1:n ensimmäinen päätös tehdään solmussa a , ja toinen päätös solmussa d . Pelaajan 2 päätös tehdään joko solmussa b tai c .



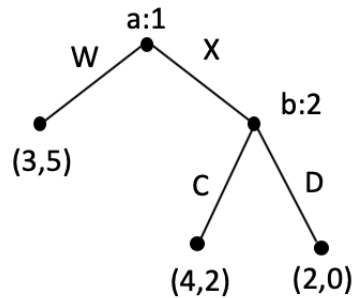
Kuva 14: Täydellisen informaation ekstensiivimuotoinen peli

Peli voidaan ratkaista taaksepäin induktiolla lähtemällä liikkeelle solmussa d tapahtuvasta päätöksestä. Strategia "Y" dominoi strategiaa "Z", koska utiliteetti on isompi, eli voidaan redusoida puu kuvan 15 muotoon.



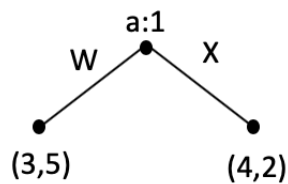
Kuva 15: Täydellisen informaation ekstensiivimuotoinen peli, josta poistettu pelaajan 1 dominoitu strategia.

Jäljelle jäävästä puusta jatketaan dominoitujen strategioiden eliminointia. Solmusta c lähtee strategiat "A" ja "B", joista B dominoi strategiaa "A", sillä pelaajalle 2, joka tekee tässä solmussa päätöksen, on kannattavampaa pelata strategia "B". Tällöin voidaan poistaa puusta strategia "A", sillä pelaaja 2 ei koskaan valitse sitä, jos hän pelaa rationaalisesti. Iteroitu puu on esitetty kuvassa 16.



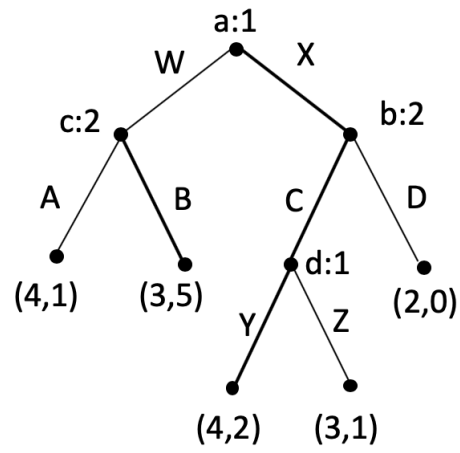
Kuva 16: Täydellisen informaation ekstensiivimuotoinen peli, josta poistettu pelaajan 2 dominoitu strategia.

Solmussa b strategia ” C ” dominoi strategiaa ” D ”, eli strategia ” D ” voidaan poistaa. Jäljelle jää tällöin kuvan 17 peli, jossa on jäljellä enää pelaajan 1 päätös. Strategia ” X ” dominoi strategiaa ” W ”, jolloin pelaaja 1 valitsee strategian ” X ”.



Kuva 17: Täydellisen informaation ekstensiivimuotoinen peli, josta poistettu pelaajan 2 dominoitu strategia.

Pelaajan 1 parhaat strategiat ovat siis (” X ”, ” Y ”) ja pelaajan 2 (” C ”, ” B ”) sen mukaan, mitä päätöksiä on tehtävissä pelin edetessä. Kuvassa 18 on lihavoituna parhaiden strategioiden reitit. Jos pelaajat pelaavat rationaalisesti pelin jokaisen päätöksen, molemmat saavuttavat parhaan lopputuloksen lihavoidulla reitillä, jossa pelaaja 1 valitsee ensin strategian ” X ”, pelaaja 2 sitten strategian ” C ” ja pelaaja 1 tämän jälkeen strategian ” Y ”.



Kuva 18: Täydellisen informaation ekstensiivimuotoinen peli, jossa lihavoituna pelaajien parhaimmat strategiat.

6 Johtopäätökset

Peliteorian suurin anti on se, että sosiaalisia päätöksentekotilanteita voidaan esittää peliteorian avulla usealla tavalla ja tilanteiden formalisoiminen matemaattiseen muotoon voi tuoda objektiivisen ratkaisun tilanteeseen, johon ei ole löydetty muilla keinoilla ratkaisua tilanteen moninaisuudesta johtuen.

Pelien ratkaisemiseksi on kehitetty useita eri ratkaisumenetelmiä, jotka soveltuvat eri tilanteisiin ja niistä mallinnettuihin peleihin. Näin ollen peliteoreettisia menetelmiä voidaan hyödyntää useissa eri sovelluskohteissa monilla eri aloilla.

Tämä tutkielma on johdatus peliteorian maailmaan. Peliteoria on kuitenkin todellisuudessa vielä paljon laajempi tieteenala, jonka pintaa tässä tutkielmassa raapaistaan, jotta lukijalle syntyy ajatus, mitä peliteoria oikeastaan on ja innostus sitä kohtaan.

Kirjallisuus

- [1] Siegfried Tom, *John Nash, Peliteoria ja luonnon koodi*, Helsinki: Haka-paino, 2008
- [2] Gibbons Robert, *A Primer in Game Theory*, Prentice Hall, 1992
- [3] Nikulin Yury, *Game theory*, luentomoniste, Turun yliopisto, 2018
- [4] Prisner Erich, *Game theory : through examples*, Mathematical Association of America Inc, 2014
- [5] Polak Ben, *Handout on mixed strategies*, luentomoniste, Yale University, 2012
- [6] Mäkelä Marko, *Matemaattinen optimointi I*, luentomoniste Turun yliopisto, 2015
- [7] Sirkka Tero, *Peliteoriaa*, pro gradu, Tampereen yliopisto 2013
- [8] Nousiainen Henri, *Johdatus peliteoriaan - Kahden pelaajan nollasummapelien ratkaiseminen ja Nashin tasapainojen olemassaolo usean pelaajan yleisessä summapelissä*, pro gradu, Jyväskylän yliopisto, 2013
- [9] Tadelis Steven, *Game theory - An introduction*, Princeton University Press, 2013
- [10] DeVos Matthew Jared, Deborah A. Kent, *Game theory : a playful introduction*, American Mathematical Society, 2016
- [11] Chevalier-Roignant Benoît, Trigeorgis Lenos, *Competitive Strategy : Options and Games*, MIT Press, 2011