Lineaariset optimointimallit

Eveliina Karhapää

LuK -tutkielma
Huhtikuu 2025

Tarkastaja:
FT S. Emet

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Eveliina Karhapää: Lineaariset optimointimallit
LuK -tutkielma, s. 13,
Matematiikka
Huhtikuu 2025

Tutkielmassa käsitellään lineaarista optimointia, jonka avulla etsitään tavoitefunktion suurimpia ja pienimpiä arvoja annettujen rajoitteiden puitteissa. Työssä esitellään keskeisiä lineaarisen optimoinnin malleja ja niiden sovelluksia, kuten allokaatio- ja sekoitusmalleja. Ratkaisumenetelminä tutkitaan sekä visuaalisia että laskennallisia tapoja, ja erityisesti perehdytään Simplex-menetelmän toimintaan vaihe vaiheelta. Tutkielmassa havainnollistetaan esimerkkien avulla, miten matemaattisia optimointiongelmia muotoillaan ja ratkaistaan tehokkaasti. Lineaarinen optimointi tarjoaa hyödyllisiä työkaluja mm. teollisuuden, talouden ja logistiikan päätöksenteon tueksi.

Asiasanat: Lineaarinen optimointi, Simplex-menetelmä.

Sisällys

1 Johdanto

Lineaarinen optimointi on matemaattinen menetelmä, jonka avulla etsitään lineaarisen tavoitefunktion suurinta tai pienintä arvoa tiettyjen rajoitteiden välissä. Lineaarisessa optimoinnissa kaikki muuttujat ovat jatkuvia, jos kaikki muuttujat eivät ole jatkuvia silloin on kyseessä sekalukumuuttujat ja tutkitaan sekalukuoptimointia. Tässä tutkielmassa tutkitaan erilaisia tapoja, joilla voidaan ratkaista lineaarinen optimointitehtävä. Lineaarisessa optimoinnissa ongelmat voivat olla yksinkertaisia, mutta rajoitteet sekä ehdot tuovat haasteita tehtävän ratkaisemiseen. Epäyhtälöt muutetaan lineaarisissa optimointitehtävissä perusmuotoon.

Mallin rakentaminen on tärkeä osa lineaarisessa optimointitehtävässä. Malli voidaan rakentaa eri tavoin ja prosessin tutkimista jatketaan riittävän kauan, kunnes kaikki ongelman tarpeelliset tiedot on selvitetty. Kaikki ehdot ovat lineaarisessa optimoinnissa lineaarisia, mikä helpottaa ongelman ratkaisualueen tutkimista. Tämän avulla yksinkertaiset lineaarisen optimoinnin ongelmat on mahdollista ratkaista myös visuaalisesti. Kun visuaalisesti ratkaiseminen ei enää onnistu, käytetään erilaisia ratkaisualgoritmeja. Simplex-menetelmä on esimerkki tällaisesta algoritmista. Simplex-menetelmän ratkaisu perustuu vaihe vaiheelta tutkimiseen, ja sitä voidaan tarvittaessa toistaa useita kierroksia, jotta päästään haluttuun optimiratkaisuun. Tässä tutkielmassa perehdytään vain yksinkertaisen Simplex-algoritmin toimintaan. Tutkielman alussa perehdytään lineaarisiin optimointimalleihin sekä niiden ongelmiin. Kolmannessa luvussa käsitellään lineaaristen optimointitehtävien rakentamista. Neljännessä luvussa tutkitaan erilaisia ratkaisutapoja. Viidennessä luvussa käsitellään Simplex-menetelmää ja Simplex-algortimin käyttöä.

Lineaarinen optimointi on keskeinen osa myös operaatioanalyysiä ja tarjoaa tehokkaita työkaluja päätöksenteon tueksi, erityisesti tilanteissa, joissa resurssit ovat rajallisia. Tässä tutkielmassa tarkastellaan aihetta teoreettisesta ja käytännöllisestä näkökulmasta. Mallinnustekniikoiden lisäksi tutustutaan esimerkkien kautta siihen, kuinka erilaiset optimointiongelmat voidaan ratkaista laskennallisesti ja visuaalisesti. Tutkielma tarjoaa näin johdannon aiheeseen, joka on tärkeä sekä soveltavan matematiikan että monien muiden tieteenalojen kannalta.

2 Lineaariset optimointimallit ja niiden ongelmat

Lineaarisen optimoinnin ongelmiin on erilaisia ratkaisutapoja ratkaista ongelmia. Kaikissa ongelmissa ei kuitenkaan aina ole selvää, miten ongelma tulisi ratkaista eli mitä tehtävässä lasketaan. Yksinkertainen lineaarinen optimointiongelma voisi näyttää esimerkiksi tältä:

Esimerkki 1. Opiskelija voi käyttää 120 minuuttia ajastaan tehtävien tekemiseen. Opiskelija voi valita tekeekö hän tehtäviä todennäköisyyslaskennan kurssilta vai algebran kurssilta. Opiskelija saa jokaisesta todennäköisyyslaskennan tehtävästä 2 lisäpistettä tenttiin ja algebran tehtävistä 3 lisäpistettä. Todennäköisyyslaskennan kurssin yhden tehtävän tekemiseen aikaa kuluu 10 minuuttia ja algebran yhden tehtävän tekemiseen aikaa kuluu 20 minuuttia. Miten opiskelijan kannattaa valita tehtävät, jotta hän saa mahdollisimman monta lisäpistettä tuleviin tentteihin? Valitaan aluksi muuttujat ja merkataan todennäköisyyslaskennan tehtäviä x_1 ja algebran tehtäviä x_2. Aikaa on käytettävissä rajallisesti tehtävien tekemiseen. Todennäköisyyslaskennan tehtävän tekemiseen aikaa kuluu 10 minuuttia ja algebran tehtävän tekemiseen 20 minuuttia. Muodostetaan näistä yhtälö:

$$10\mathrm{x}_1 + 20\mathrm{x}_2 \leq 120$$

Lisäpisteet muodostuvat seuraavalla tavalla:

$$2\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 = \mathrm{z}$$

z kertoo yhtälössä kokonaispisteiden määrän. Huomataan, että opiskelijalla menee puolet vähemmän aikaa todennäköisyyslaskennan tehtävien tekemiseen. Opiskelija saa algebran tehtävistä vain yhden pisteen enemmän, vaikka aikaa kuluu kaksinkertainen määrä tehtävän tekemiseen, joten kannattaa tehdä vain todennäköisyyslaskennan tehtäviä saadakseen parhaimmat pisteet tentteihin. Asetetaan algebran tehtäville arvoksi 0 ja ratkaistaan ajankäytön epäyhtälö jakamalla luvulla 10, jolloin saadaan x_1 arvo.

$$10\mathrm{x}_1 \leq 120$$

$$\mathrm{x}_1 \leq 12$$

Eli opiskelija pystyy tekemään enintään 12 tehtävää, joista hän saa $2 \cdot 12 = 24$ pistettä.

2.1 Lineaarisen optimoinnin malleja

Lineaarisessa optimoinnissa on käytössä paljon erilaisia malleja erilaisten ongelmien ratkaisemiseen. Allokaatiomalleissa jaetaan rajoitettuja resursseja keskenään kilpaileviin tarpeisiin. Sekoitusmalleissa eri raaka-aineita yhdistetään siten, että lopputuote täyttää tietyt vaatimukset, kuten laatu- tai koostumusrajat. Tavoitteena on löytää paras mahdollinen yhdistelmä, joka esimerkiksi minimoi kustannukset tai maksimoi tuoton. Allokaatiomalleissa sen sijaan keskitytään resurssien jakamiseen eri käyttökohteisiin mahdollisimman tehokkaasti. Metalliseokset, eläinten rehut sekä ihmisen ruokavalio ovat esimerkkejä tälläisistä malleista. Useat lineaarisen optimoinnin tehtävistä ovat dynaamisia malleja. Usein mallinnuksessa voidaan esittää tilayhtälöitä, joissa jakson t aloitustilaan lisätään kyseisen jakson päätöksistä aiheutuvat muutokset, ja näin saadaan seuraavan jakson $t + 1$ aloitustila. Lineaariset optimointimallit ovat yleensä helpommin ratkaistavissa kuin epälineaariset, joten on suositeltavaa pyrkiä lineaariseen muotoon aina kun mahdollista. Joissakin tapauksissa alun perin epälineaarinen ongelma voidaan muuntaa lineaariseksi. Tällaisia ovat esimerkiksi maxmin-ongelmat, joissa tavoitteena on maksimoida äärellisestä joukosta valittu minimi. Tyypillinen esimerkki tällaisesta ongelmasta on...

$$\max \min_{i=1,\ldots,k} \left\{ c_i^T x \right\}$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0,$$

jossa kohdefunktio $\min_{i=1,\ldots,k} \left\{ c_i^T x \right\}$ on paloittain lineaarinen, mutta epälineaarinen kokonaisuutena. Tehtävä on kuitenkin ekvivalentti lineaarisen optimointitehtävän

$$\max f$$

$$\text{s.t. } \mathbf{f} \leq \mathbf{c_i^T x}, \ \ i = 1, \ldots, k$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0, f \in \mathbb{R}$$

kanssa, jossa on otettu käyttöön yksi uusi päätösmuuttuja f. Ratkaisun täytyy toteuttaa ehto

$$f^* = \min \ \left\{ c_i^T x^* \right\}.$$

Minmax-ongelmat ovat vastaavasti tehtäviä, joissa minimoidaan maksimia. Minmax-ongelmasta

$$\min \max_{i=1,\ldots,k} \left\{ c_i^T x \right\}$$

$$\text{s.t.} Ax = b$$

$$x \geq 0$$

saadaan puolestaan lineaarinen ongelma

$$\min f$$

$$\text{s.t. } f \geq c_i^T x, \ \ i = 1, ..., k$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0, f \in \mathbb{R}.$$

Molemmat ovat ns. pullonkaulaongelmia. [1]

2.2 Lineaarisen optimoinnin ongelmien rakenne

Lineaarisessa optimoinnissa ongelmat muodostuvat kohdefunktion lisäksi rajoitteista, joita voi olla yksi tai useampi. Tavoitteena on löytää kohdefunktiolle paras mahdollinen ratkaisu siten, että kaikki ehtolauseet pitävät paikkansa. Ongelmasta riippuen ehtolauseita voi olla paljon erilaisia. Työvuorojen suunnittelu on käytännönläheinen esimerkki lineaarisen optimoinnin ongelmasta. Kaikille lineaarisille optimointitehtäville on voimassa seuraavat ehdot:

1. Verrannollisuus: Jokaisen päätösmuuttujan vaikutus kohdefunktioon ja rajoitteisiin on suoraan verrannollinen muuttujan arvoon.
2. Additiivisuus: Päätösmuuttujien vaikutukset ovat riippumattomia toisistaan – kokonaisvaikutus on yksittäisten vaikutusten summa.
3. Jaollisuus: Päätösmuuttujat voivat saada jatkuvia, reaalilukuarvoja.
4. Deterministisyys: Kaikki mallin parametrit ovat tunnettuja ja vakioita, eivät satunnaisia.
5. Mallissa optimoidaan vain yhtä tavoitefunktiota.

Ehdot 1 ja 2 varmistavat mallin lineaarisuuden. Jos ehto 3 ei toteudu, kyseessä on diskreetti optimointi, jossa muuttujat voivat saada vain erillisiä arvoja. Tällöin ratkaisuja voidaan lähestyä lineaarista mallia hyödyntäen ja pyöristämällä saadut arvot kokonaisluvuiksi. Mikäli ehto 4 ei päde, kyse on stokastisesta optimoinnista, jossa osa mallin tiedoista on satunnaisia. Jos tavoitteita on useita, puhutaan monitavoiteoptimoinnista.. [1]

2.3 Lineaarisen optimoinnin epäyhtälöt

Lineaarisen optimoinnin ongelmat esitetään usein epäyhtälömuotoisina rajoitteina. Kuitenkin mallin perusmuodossa kaikki rajoitteet ilmaistaan yhtälöinä. Tämän vuoksi epäyhtälöt on muunnettava perusmuotoon lisäämällä niihin sopivat apumuuttujat, kuten ylijäämä- tai alijäämämuuttujat. Esimerkiksi epäyhtälöön:

$$\mathrm{x}_1 + ... + \mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \mathrm{b}$$

täytyy lisätä tarvittava ylijäämämuuttuja $\mathrm{x}_{\mathrm{n}+1} \leq 0$, jolloin päästään perusmuotoon

$$\mathrm{x}_1 + ... + \mathrm{x}_\mathrm{n} + \mathrm{x}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{b}$$

[2]. Jos malli sisältää useita epäyhtälöitä, jokaiselle niistä on lisättävä oma ylijäämä- tai alijäämämuuttujansa.

Epäyhtälön merkistä riippuen lisätään tai vähennetään, joko alijäämä- tai ylijäämämuuttuja. Alijäämämuuttuja vähennetään epäyhtälöstä, kun epäyhtälö on "suurempi tai yhtä suuri kuin-muotoa. Vastaavasti ylijäämämuuttuja lisätään epäyhtälöön, kun se on muotoa "pienempi tai yhtä suuri kuin". Näin kaikki rajoitteet voidaan muuntaa perusmuotoon, eli yhtälömuotoon. Muuntaminen tapahtuu seuraavasti:

$$4x_1 + 3x_2 \geq 9$$

$$6x_1 + 8x_2 \geq 10$$

Lisätään alijäämämuuttujat $x_4 \leq 0$ ja $x_3 \geq 0$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 9$$

$$6x_1 + 8x_2 - x_4 = 10$$

Näin ollaan päästy yhtälöiden perusmuotoihin.

3 Lineaarisen optimoinnin mallintaminen

Ongelman muodostaminen tehtävästä on lineaarisessa optimoinnissa yhtä merkittävä osa ratkaisua, kuin ratkaisun saaminen numeerisessa muodossa. Malli rakennetaan tehtävästä poimittujen tietojen perusteella. Lopullisessa ratkaisussa tulee olla kaikki ongelman kannalta merkittävät tiedot. Tutkitaan seuraavaksi perinteistä lineaarisen optimoinnin ongelmaa ja sen ratkaisua.

3.1 Sekoitusmalli tehtävän ratkaiseminen

Tutkitaan sekoitusmalli tehtävää. Sekoitusmalli tehtävissä tyypillistä on, että resursseja yhdistetään toisiinsa. Tarkoituksena on määrittää, millainen lähtöaineiden sekoitus parhaiten täyttää asetetut vaatimukset. [1]

Esimerkki 2. Eräällä terästehtaalla halutaan täyttää 1000 kg:n uuni käyttäen erilaista romurautaa sekä täydentämällä hiukan arvokkaammilla lisäaineilla. Oheisessa taulukossa on esitetty raaka-aineiden koostumus prosentteina sekä tavoiteosuudet

Taulukko 1. raaka-aineiden koostumus prosentteina sekä tavoiteosuudet:

	hiili %	*nikkeli %*	*kromi %*	*molybdeeni %*	*saataavissa kg*	*hinta* $\frac{kr}{kg}$
romu 1	0.80	18	12	–	75	16
romu 2	0.70	3.2	1.1	0.1	250	10
romu 3	0.85	–	–	–	*rajatta*	8
romu 4	0.40	–	–	–	*rajatta*	9
nikkeli	–	100	–	–	*rajatta*	48
kromi	–	–	100	–	*rajatta*	60
molybdeeni	–	–	–	100	*rajatta*	53
min *imiarvo*	0.65	3.0	1.0	1.1		
maksimiarvo	0.75	3.5	1.2	1.3		

Valitaan päätösmuuttujiksi:

$$x_j = \text{käytetty raaka-aineen j määrä kiloina, j=1,...,7,}$$

arvoilla 1-4 viitataan erilaisiin romurautoihin, arvolla 5 nikkeliin, 6 kromiin ja 7 molybdeeniin. Saadaan optimointitehtävä

$$\min 16x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 48x_5 + 60x_6 + 53x_7$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1000$$

$$0.0080x_1 + 0.0070x_2 + 0.0085x_3 + 0.0040 \geq 0.0065 \cdot 1000$$

$$0.0080x_1 + 0.0070x_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 \leq 0.0075 \cdot 1000$$

$$0.180x_1 + 0.032x_2 + 1.0x_5 \geq 0.030 \cdot 1000$$

$$0.180x_1 + 0.032x_2 + 1.0x_5 \leq 0.035 \cdot 1000$$

$$0.120x_1 + 0.011x_2 + 1.0x_6 \geq 0.010 \cdot 1000$$

$$0.120x_1 + 0.011x_2 + 1.0x_6 \leq 0.012 \cdot 1000$$

$$0.001x_2 + 1.0x_7 \geq 0.011 \cdot 1000$$

$$0.011x_2 + 1.0x_7 \leq 0.013 \cdot 1000$$

$$x_1 \leq 75$$

$$x_2 \leq 250$$

$$x_1, ..., x_7 \geq 0,$$

Tehtävälle saadaan yksikäsitteinen ratkaisu, joka on $x_1^* = 75.00$kg, $x_2^* = 90.91$kg, $x_3^* = 672.28$kg, $x_4^* = 137.31$ kg, $x_5^* = 13.59$kg, $x_6^* = 0.00$kg, $x_7^* = 10.91$kg ja minimikustannus 9953.7 kr.

4 Yksinkertaisen lineaarisen optimointi ongelman ratkaiseminen

Lineaaristen optimoinnin tehtäviä voi ratkaista useilla eri tavoilla. Ratkaisutapoja on valittavana useita erilaisia, niin kauan kuin ongelma pysyy yksinkertaisena. Visuaalista ratkaisua voidaan käyttää silloin, kun ongelma pysyy tasossa. Kun ratkaistaan lineaarisen optimoinnin ongelmaa tasossa tarvitaan siihen seuraava lause [2]:

Lause 1. *Lineaarisen optimointiongelman suurin ja pienin arvo löytyvät tasossa rajatun alueen ääripisteistä.*

Todistus. Oletetaan, että käytössä on alue A, joka on rajattu lineaarisilla yhtälöillä kohdefunktio $z = c_1x_1 + c_2x_2$. jota halutaan optimoida. Koska kohdefunktio on lineaarinen, sen osittaisderivaatat ovat vakioita eikä ne riipu muuttujien arvoista $\frac{\delta z}{\delta x_1}$ ja $\frac{\delta z}{\delta x_2}$ Osittaisderivaatat voivat olla nollia vain silloin, kun niitä vastaavat kertoimet ovat nollia. Tästä seuraa, että lineaarisella kohdefunktiolla ei ole lokaaleja ääriarvokohtia alueen sisäpuolella, vaan sen maksimi- ja minimiarvot sijaitsevat alueen reunoilla. Näin ollen kohdefunktion ääriarvot löytyvät pisteistä, joissa sen tasokäyrät sivuavat tai leikkaavat alueen A rajoja. Koska alue A on muodostettu lineaarisista ehdoista, sen reuna koostuu suoraviivaisista osista. Jos kohdefunktio leikkaa alueen A jossakin kohdassa u, joka ei ole kärkipiste. Lisäksi kohdefunktio saavuttaa suurimman arvonsa kyseisessä pisteessä. Koska reuna on lineaarinen, liikuttaessa sitä pitkin kohdefunktion arvo joko kasvaa, pienenee tai pysyy vakiona. Jos arvo pienenee toiseen suuntaan liikuttaessa, sitä voidaan kasvattaa liikkumalla vastakkaiseen suuntaan. Tästä seuraa, että jos ollaan kahden kärkipisteen välillä, suurin arvo ei voi pienentyä, sillä toiseen suuntaan liikkuessa sen tulisi kasvaa. □

4.1 Lineaarisen optimointitehtävän ratkaiseminen visuaalisesti

Helpoimmat lineaarisen optimoinnin ongelmat voidaan ratkaista visuaalisesti graafisen menetelmän avulla. Kun tarkasteltavassa ongelmassa on vain kaksi positiivista päätösmuuttujaa, kaikki rajoitteet voidaan esittää koordinaatistossa. Näin muodostuu alue, jonka kulmapisteet eli kärkipisteet ovat mahdollisia ratkaisuja. Suurin ja pienin arvo kohdefunktiolle löytyy näistä kärkipisteistä. [4]. Tutkitaan kohdefunktion minimointi tehtävää Dantzigin kirjasta [2].

$$-2x_1 - x_2 = z$$

seuraavat ehdot rajoittavat alueen:

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 4$$

kun $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Kun lähdetään ratkaisemaan tehtävää, voidaan joko etsiä kuvasta leikkauskohdat tai voidaan ratkaista yhtälöparit. Tarkasteltavan alueen kärkipisteet ovat (0,0), (4,0), (0,4), (4,1) ja (3,2). Sijoitetaan saadut koordinaatit yllä olevaan kohdefunktioon:

$$-2 \cdot 0 - 0 = 0$$

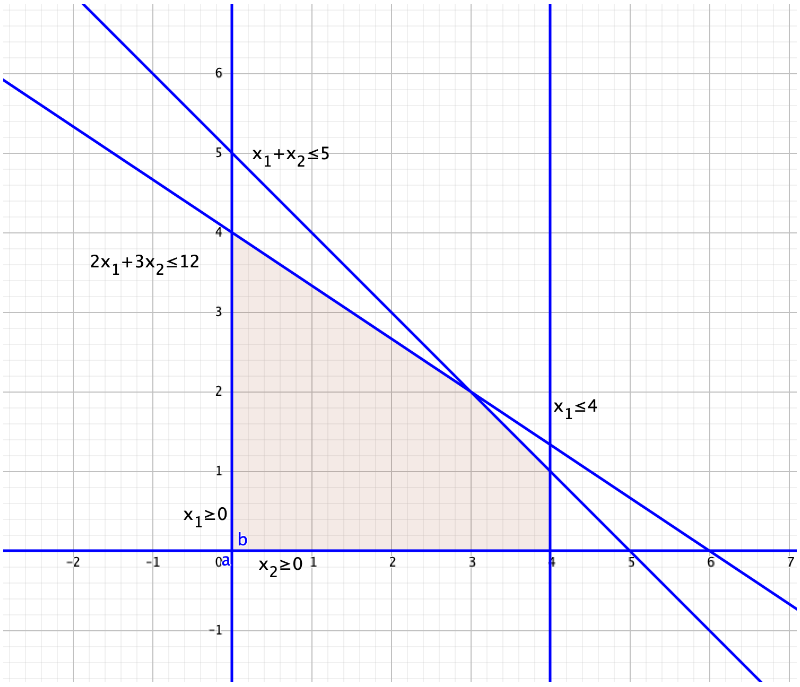
$$-2 \cdot 4 - 0 = -8$$

$$-2 \cdot 4 - 1 = -9$$

$$-2 \cdot 0 - 4 = -4$$

$$-2 \cdot 3 - 2 = -7$$

Pisteessä (4,1) kohdefunktio saa pienimmän arvonsa.



Kuva 1: Rajattu alue

5 Simplex-menetelmä

Simplex-menetelmä on George Dantzigin vuonna 1947 kehittämä parantava hakualgoritmi, joka hyödyntää lineaaristen optimointitehtävien rakennetta tehokkaasti. Lineaarinen kohdefunktio on unimodaalinen, ja lineaariset rajoitteet muodostavat konveksin toteutusjoukon. Tämän ansiosta mikä tahansa paikallinen optimi on samalla myös globaali optimi. Lineaarisessa optimointiongelmassa tavoitteena on löytää päätösmuuttujille sellaiset arvot, jotka maksimoivat tai minimoivat kohdefunktion annettujen rajoitusten puitteissa. Lineaarisessa optimointitehtävässä tavoitteena on määrittää päätösmuuttujille x_j sellaiset arvot, että kohdefunktio

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

saa mahdollisimman suuren tai pienen arvon annettujen rajoitteiden puitteissa. Eli päätösmuuttujille etsitään sellaiset arvot, jotka joko maksimoivat tai minimoivat kohdefunktion tehtävän tavoitteen mukaan, ottaen huomioon joukon rajoituksia. Nämä rajoitukset voivat olla seuraavan tyyppisiä:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$$

Ensimmäinen rajoitustyyppi kattaa erityistapauksena myös etumerkkirajoitukse $x_j \geq 0$, joka yleensä käsitellään erillisenä ehtona. [1] [5]

5.1 Lineaarisen optimointitehtävän muunnokset

Lineaarisia optimointitehtäviä voidaan muokata seuraavilla tavoilla tai muunnoksilla: [1] [3]:

1. Optimointisuuntaa voidaan muuttaa muuttamalla kohdefunktion kertoimien etumerkit vastakkaisiksi. Tällöin maksimointitehtävä muuttuu minimointitehtäväksi – ja päinvastoin. Koska nyt

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right\} = -\min\left\{\sum_{j=1}^{n} (-c_j)\, x_j\right\},$$

kohdefunktion arvoksi tulee alkuperäisen arvon vastaluku.

2. Epäyhtälön suunta voidaan muuttaa kertomalla se luvulla -1, jolloin kaikki epäyhtälöt saadaan esitettyä samaan suuntaan.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ \leq b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (-a_j)\, x_j \geq -b.$$

3. Epäyhtälö voidaan muuntaa yhtälöksi lisäämällä siihen ei-negatiivinen apumuuttuja.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ \leq b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + s = b\ ,\ s \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ \geq b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - t = b\ ,\ t \geq 0$$

Muuttuja s on täydennys- eli alijäämämuuttuja (slack) ja muuttuja t taas ylijäämämuuttuja (surplus).

4. Yhtälöt

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ = b_i,\ i = 1,...,m$$

voidaan muuttaa ekvivalenteiksi epäyhtälöiksi

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ \leq b_i,\ i = 1,...,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \leq s$$

ottamalla käyttöön yksi lisärajoitus. Tässä on merkitty

$$r_j = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij},\ \ j = 1,...,n$$

$$s = -\sum_{i=1}^{m} b_i$$

Usein muunnos tehdään kirjoittamalla jokainen yhtälö kahdeksi epäyhtälöksi, jolloin saadaan vaihtoehtoinen esitys edellä oleville rajoitusyhtälöille

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1,...,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij})\, x_j \leq -b_i,\ i = 1,...,m.$$

5. Merkiltään rajoittamattomat muuttujat x_j voidaan korvata kahden ei-negatiivisen muuttujan erotuksella muotoa $x_j = x_j' - x_j'', x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0$. Tällainen esitys ei ole yksikäsitteinen, mutta Simplex-algoritmissa muuttujien arvot määräytyvät siten, että vähintään toinen muuttujista x_j' tai x_j'' saa arvon nolla. Tämä vastaa seuraavaa määrittelyä: $x_j' = \max\{0,x_j\}$ ja $x_j'' = -\min\{0,x_j\}$.

6. Ei-positiiviset muuttujat $x_j \leq 0$ voidaan muuntaa ei-negatiivisiksi ottamalla käyttöön muuttuja $y_j = -x_j$. Näiden muunnosten perusteella mikä tahansa lineaarinen optimointitehtävä voidaan esittää niin sanotussa kanonisessa muodossa, jossa kaikki muuttujat ovat ei-negatiivisia, kaikki rajoitteet ovat yhtälömuodossa sekä kohdefunktio on lineaarinen.

$$\max\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1,...,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, ..., n$$

eli matriisimuotoon kirjoitettuna

$$\max\ c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$x \geq 0.$$

5.2 Simplex-algoritmi

Simplex-algoritmin tavoitteena on liikkua standardimuotoisen tehtävän kärjestä toiseen siten, että objektifunktion arvo paranee kokoajan. Käydään seuraavaksi läpi Simplex-algoritmin vaiheet [1]:

1. (Alustus) Valitaan jokin sallittu lähtökanta ja muodostetaan sitä vastaava kantaratkaisu x^0. Kierroslaskurille asetetaan arvo $t \leftarrow 0$.

2. (Simplex-suunnat) Muodostetaan jokaiselle ei-kantamuuttujalle x_j Simplex-suunta. Kasvattamalla saatava Simplex-suunta Δx ja lasketaan sen redusoitu kustannus $\overline{c_j} = c^T \Delta x$.

3. (Optimaalisuus) Jos parantavaa Simplex-suuntaa ei ole eli $\bar{c} \leq 0$ maksimointitehtävässä tai $\bar{c} \geq 0$ minimointitehtävässä algoritmi lopetetaan. Koska nykyinen kantaratkaisu $\mathbf{x}^t$ on globaali optimipiste. Muussa tapauksessa valitaan jokin parantava suunta seuraavaksi etenemissuunnaksi $\Delta\mathbf{x}^{t+1}$, ja merkitään $\mathbf{x}_p$:llä kantaan tulevaa muuttujaa.

4. (Askelpituus) Jos kaikki kantamuuttujia vastaavat suunnan $\Delta\mathbf{x}^{t+1}$ komponentit ovat ei-negatiivisia, algoritmi lopetetaan. Tällöin tehtävällä ei ole äärellistä ratkaisua. Muussa tapauksessa valitaan kannasta poistuva päätösmuuttuja $\mathbf{x}_r$ siten, että

$$\frac{\mathrm{x_r^t}}{-\Delta\mathrm{x_r^{t+1}}} = \min\left\{\frac{\mathrm{x_j^t}}{-\Delta\mathrm{x_j^{t+1}}} < 0,\ \mathrm{x_j^t}\ \text{kantamuuttuja}\right\}$$

ja asetetaan

$$\lambda = \frac{\mathrm{x_r^t}}{-\Delta\mathrm{x_r^{t+1}}}.$$

5. (Uusi kärki ja kanta) Lasketaan uusi kärkipiste

$$\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{x}^t + \lambda\Delta\mathbf{x}^{t+1}$$

ja korvataan kannassa oleva muuttuja $\mathbf{x}_r$ uudella muuttujalla $\mathbf{x}_p$. Asetetaan $t \leftarrow t+1$ ja palataan askeleeseen 1.

Vaikka algoritmi tarkastelee vain pisteestä lähtevien särmien suuntaisia Simplex-suuntia, muita suuntia ei tarvitse erikseen tutkia, koska jos mikään Simplex-suunta ei ole parantava, parantavia suuntia ei ole lainkaan. Tämä perustuu siihen, että kaikki muut suunnat voidaan esittää Simplex-suuntaisten vektoreiden konveksina yhdistelmänä.

5.3 Simplex-algoritmin käyttö

Tutkitaan seuraavaksi lyhyttä esimerkkiä Simplex-algoritmin käyttämisestä. Kun suoritetaan Simplex-algoritmi, saadaan

Taulukko 2. Esimerkki Simplex-algoritmista:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
max c	12	9	0	0	0	0	b
	1	0	1	0	0	0	1000
	0	1	0	1	0	0	1500
A	1	1	0	0	1	0	1750
	4	2	0	0	0	1	4800
$t=0$	N	N	B	B	B	B	
x^0	0	0	1000	1500	1750	4800	$c^T x^0 = 0$
$\Delta x\ :\ x_1$	1	0	-1	0	-1	-4	$\bar{c}_1 = 12$
$\Delta x :\ x_2$	0	1	0	-1	-1	-2	$\bar{c}_2 = 9$
			$\frac{1000}{-(-1)}$	$-$	$\frac{1750}{-(-1)}$	$\frac{4800}{-(-4)}$	$\lambda = 1000$
t=1	B	N	N	B	B	B	
x^1	1000	0	0	1500	750	800	$c^T x_1 = 12000$
$\Delta x\ :\ x_2$	0	1	0	-1	-1	-2	$\bar{c}_2 = 9$
$\Delta x\ :\ x_3$	-1	0	1	0	1	4	$\bar{c}_3 = -12$
	$-$			$\frac{1500}{-(-1)}$	$\frac{750}{-(-1)}$	$\frac{800}{-(-2)}$	$\lambda = 400$
$t=2$	B	B	N	B	B	N	
x^2	1000	400	0	1100	350	0	$c^T x^2 = 15600$
$\Delta x\ :\ x_3$	-1	2	1	-2	-1	0	$\bar{c}_3 = 6$
$\Delta x\ :\ x_6$	0	-0.5	0	0.5	0.5	1	$\bar{c}_6 = -4.5$
	$\frac{1000}{-(-1)}$	$-$		$\frac{1100}{-(-2)}$	$\frac{350}{-(-1)}$		$\lambda = 350$
$t=3$	B	B	B	B	N	N	
x^3	650	1100	350	400	0	0	$c^T x^3 = 17700$
$\Delta x\ :\ x_5$	1	-2	-1	2	1	0	$\bar{c}_5 = -6$
$\Delta x\ :\ x_6$	-0.5	0.5	0.5	-0.5	0	1	$\bar{c}_6 = -1.5$

Esimerkki 3. Kun vaiheessa 0 valitaan p=1, seuraa siitä, että r=3 ja $\lambda = 1000$. Vaiheessa t=1 on valittava p=2, josta taas seuraa r=6 ja $\lambda = 400$. Piste x^2 on myös kärkipiste. Vaiheessa t=2 on p=3 sekä r=5 ja päädytään pisteeseen x^3, joka on optimi, sillä kumpikin redusoiduista kustannuksista <0. Nyt pisteessä x^3 ei ole mitään muutakaan parantavaa suuntaa, koska jos pisteestä haluttaisiin mennä vaikkapa suuntaan $\Delta \mathrm{x}_5 = 3, \Delta x_6 = 7$, niin $\Delta \mathrm{x} = 3(\Delta \mathrm{x}') + 7(\Delta \mathrm{x}'')$, missä $\Delta \mathrm{x}'$ja$\Delta \mathrm{x}''$ ovat muuttujia x_5 ja x_6 vastaavat Simplex-suunnat. Tällöin

$$\mathrm{c}^{\mathrm{T}} \Delta \mathrm{x} = \mathrm{c}^{\mathrm{T}}(3\Delta \mathrm{x}' + 7\Delta \mathrm{x}'') = 3(c^T \Delta x') + 7(c^T \Delta x'') = 3(-6) + 7(-1.5) = -29.5.$$

6 Yhteenveto

Tutkielmassa perehdyttiin lineaarisen optimoinnin keskeisiiin periaatteisiin, mallien muodostamiseen ja ratkaisumenetelmiin. Lineaarinen optimointi on tehokas matemaattinen työkalu, jonka avulla voidaan etsiä tavoitefunktion maksimi- tai minimiarvo annettujen lineaaristen rajoitteiden puitteissa.

Tutkielmassa esiteltiin erilaisia lineaarisia optimointimalleja, kuten allokaatio- ja sekoitusmalleja, sekä tarkasteltiin kuinka todellisia ongelmia voidaan muotoilla matemaattisiksi malleiksi.

Yksinkertaisissa tapauksissa ongelmat voidaan ratkaista visuaalisesti, mutta monimutkaisemmissa tilanteissa tarvitaan algoritmipohjaisia menetelmiä. Tutkielmassa perehdyttiin myös Simplex-menetelmään, joka on klassinen ja laajasti käytetty algoritmi lineaarisessa optimoinnissa. Simplex-algoritmi hyödyntää ongelman rakenteellisia ominaisuuksia siirtyen kärkipisteestä toiseen tavoitefunktion arvoa parantaen.

Kirjallisuutta

[1] Mäkelä, M. M. *Matemaattinen optimointi I.* Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

[2] Dantzig, G. B. & Thapa, M. N. *Linear Programming 1, Introduction.* ProQuest Ebook Central, 1997.

[3] Mäkelä, M. M. *Matemaattinen optimointi II.* Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2018.

[4] Dantzig, G. B. *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[5] Dantzig, G. B. *Inductive Proof of the Simplex Method.* The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1960.