

STONEN ESITYSLAUSE

Teemu Pirttimäki

Pro gradu -tutkielma
Elokuu 2017

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PIRTTIMÄKI, TEEMU: Stonen esityslause

Pro gradu -tutkielma, 51 s.

Matematiikka

Elokuu 2017

Stonen esityslauseen mukaan jokainen Boolean algebra on isomorfinen jonkin joukkojen algebran kanssa. Tässä tutkielmassa esitellään Boolean algebrat ja esitetään todistus Stonen esityslauseelle ja joillekin sen välittömille seurauksille.

Ensimmäisessä luvussa esitetään kaikki Stonen esityslauseita ja sen tässä esitettyjä seurauksia varten vaaditut topologian tiedot. Kaikki todistukset esitetään. Topologian käsittely painottuu kompakteihin Hausdorffin avaruuksiin.

Toisessa luvussa esitetään Boolean algebran aksioomat ja johdetaan niistä joitain Boolean algebroiden koskevia perustuloksia. Yhtenä tuloksena osoitetaan, että kukin Boolean algebra on Boolean rengas ja päinvastoin.

Kolmannessa luvussa todistetaan Stonen esityslause ja sen seurauksia ja vaihtoehtoisia muotoiluja.

Asiasanat: Boolean algebrat, ultrafiltterit, Stonen avaruudet.

Sisältö

1	Topologiaa	2
1.1	Yleisesti	2
1.2	Määritelmiä ja lauseita	3
1.3	Yhtenäisyys ja epäyhtenäisyys	12
1.4	Cantorin avaruus	15
2	Boolean algebrat	18
2.1	Yleisesti	18
2.2	Määritelmä ja esimerkkejä	18
2.3	Kaavoja	21
2.4	Boolean rengas	25
2.5	Homomorfismit	29
2.6	Järjestys ja ihanteet	31
3	Stonen esityslause	37
3.1	Ultrafiltterit	37
3.2	Stonen duaalisuus	42
3.3	Lisähavaintoja	45
3.4	Kategoriateoriaa	46
	Kirjallisuutta	49

Johdanto

Stonen esityslauseen mukaan jokainen Boolean algebra on isomorfinen jonkin joukkojen algebran kanssa; siis kaikki Boolean algebran alkiot voidaan esittää joukkoina siten, että näiden joukkojen komplementoinnit, leikkaukset ja unionit vastaavat täysin alkuperäisen Boolean algebran operaatioita. Stonen esityslauseen todisti alunperin Marshall Harvey Stone vuonna 1936 [1]. Stonen esityslause ilmaisee yhteyden Boolean algebroiden ja topologian välillä, ja sen yleistyksenä saatavat *Stonen duaalisuudet* ovat pohjana *pisteettömälle topologialle*.

Tämän tutkielman ensimmäisessä luvussa esitetään myöhemmin tarvittavia topologisia tuloksia. Toisessa luvussa esitetään Boolean algebran aksioomat ja todistetaan niitä koskevia perustuloksia. Kolmannessa luvussa todistetaan Stonen esityslause ja sen joitain välittömiä seurauksia.

Kaikkien käytettävien lauseiden todistukset on esitetty tässä tutkielmassa. Jos jollekin todistukselle ei ole mainittu lähdettä, se on kirjoittajan oma. Lukijalta ei edellytetä mitään erityisiä esitietoja. Joukkojen unionin ja karteesisen tulon kaltaisten yleisten ja usein vastaan tulevien matemaattisten käsitteiden tuntemus riittää. Silti topologian, algebran ja jossain määrin loogiikan tuntemus on varmasti eduksi ja auttaa asettamaan esitetyt asiat oikeaan kontekstiin.

1 Topologiaa

1.1 Yleisesti

Topologia on matematiikan osa-alue, joka tutkii niitä kappaleen ominaisuuksia, jotka säilyvät muuttumattomina kappaletta venytettäessä ja väännettäessä. Tällaisten muokkausten (eli *homeomorfismien*) tulee olla jatkuvia ja kumottavissa vastaavalla jatkuvalla muokkauksella. Erityisesti siis muokattavan kappaleen leikkaaminen osiin ei ole sallittua. Esimerkiksi ympyrän voi venyttää ellipsiksi, joten ympyrä ja ellipsi ovat topologisessa mielessä samantilaiset. Sen sijaan ympyrää ei voi muokata numeron 8 muotoon, sillä vaikka kaksi pistettä ympyrän kehältä voidaan jatkuvalla muunnoksella puristaa yhteen, muunnoksen kumoaminen hajottaisi kahdeksikon keskiosan ympärillä olevat pisteet kahteen osaan eri puolille ympyrää.

Ensimmäisiä topologiaan liittyviä ongelmia oli kuuluisa Königsbergin siltaongelma vuodelta 1736. Euler havaitsi, että kaikkien siltojen kautta kulkevan polun olemassaolo ei riippunut siltojen tarkasta sijainnista, vaan ainoastaan siltojen päätepisteiden keskinäisistä suhteista. Yhdesti yhtenäisiä monitahokkaita koskevaa Eulerin kaavaa $v - e + f = 2$ voidaan pitää ensimmäisenä topologisena tuloksena.

Yksittäisiä tuloksia lukuun ottamatta topologia matematiikan osa-alueena sai kuitenkin alkunsa vasta aivan 1800-luvun lopussa. Ensimmäinen topologiaa systemaattisesti käsittelevä teos oli Henri Poincarén *Analysis situs* vuodelta 1895. Teos loi perustan algebralliselle topologialle ja esitteli useita uusia käsitteitä, muun muassa *homotopian* ja *homologian* käsitteet.

Metrisen avaruuden käsitteen määritteli Maurice Fréchet väitöskirjassaan vuonna 1906. Vuonna 1914 Felix Hausdorff nimesi topologiseksi avaruudeksi rakenteen, joka nykyisin tunnetaan Hausdorffin avaruutena. Topologisen avaruuden nykyinen laajempi määritelmä on peräisin Kazimierz Kuratowskilta.

1.2 Määritelmiä ja lauseita

Luvussa 3 hyödynnetään useita topologisia tuloksia, jotka todistetaan tässä. Esitetyt määritelmät ja lauseet on tarkoituksella rajattu niihin, joita tarvitaan myöhemmin. Keskeisenä teemana ovat kompaktit Hausdorffin avaruudet. Topologiaa jo osaavan lukijan kannattaa siirtyä suoraan lukuun 2 (Boolean algebrat).

Mikäli muuta ei mainita, tässä pykälässä lähteenä on käytetty teoksia [2] ja [3].

Määritelmä 1.2.1. Olkoon X joukko ja τ kokoelma joukon X osajoukkoja. Järjestetty pari (X, τ) on *topologinen avaruus*, jos τ sisältää

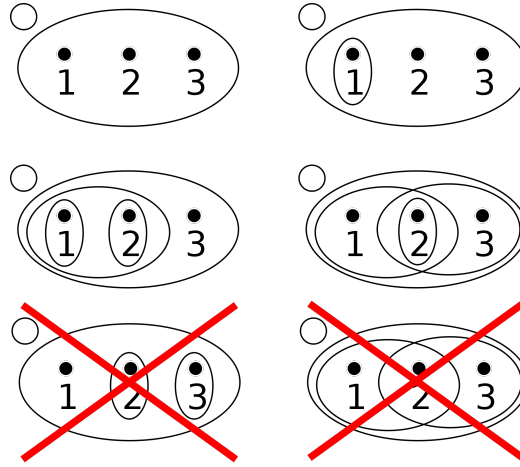
1. tyhjän joukon ja koko joukon X ,
2. kaikki alkoidensa mielivaltaisten osakokoelmien unionit, ja
3. kaikki alkoidensa äärellisten osakokoelmien leikkaukset.

Tällöin kokoelmaa τ kutsutaan joukon X *topologiaksi* ja sen alkioita *avoiniksi joukoiksi*. Joukon X alkioita kutsutaan *pisteiksi*.

Esimerkki 1.2.2. Joukolla X on aina *triviaali topologia* $\tau = \{\emptyset, X\}$ ja *diskreetti topologia* $\tau = \mathcal{P}(X)$, missä $\mathcal{P}(X)$ tarkoittaa kaikkien joukon X osajoukkojen kokoelmaa eli *potenssijoukkoa*. Diskreetissä topologiassa siis kaikki joukot ovat avoimia.

Esimerkki 1.2.3. Kuvassa 1 on esimerkkejä joukon $\{1, 2, 3\}$ mahdollisista topologioista. Kaksi alinta eivät ole topologioita, sillä vasemmanpuoleisesta puuttuu joukkojen $\{2\}$ ja $\{3\}$ unioni $\{2, 3\}$ ja oikeanpuoleisesta joukkojen $\{1, 2\}$ ja $\{2, 3\}$ leikkaus eli joukko $\{2\}$.

Joukko A on *suljettu*, jos sen komplementti $A^c = X \setminus A$ on avoin. Kaikkien joukon A sisältävien suljettujen joukkojen leikkausta kutsutaan joukon A *sulkeumaksi* ja merkitään $\overline{A}$. Joukko A on suljettu tarkalleen silloin kun se on oma sulkeumansa: $\overline{A} = A$. Jos $\overline{A} = X$, sanotaan, että A on *tiheä* joukko.



Kuva 1: Esimerkkejä joukon $\{1, 2, 3\}$ topologioista [4].

Joukko voi olla sekä avoin että suljettu. Erityisesti joukot $\emptyset$ ja X ovat sekä avoimia että suljettuja kaikissa joukon X topologioissa. Sekä avoimien että suljettujen joukkojen kokoelmalle käytetään merkintää $B(X)$.

Joukon topologia määräytyy yksikäsitteisesti, kun suljetut joukot tunnetaan. Topologinen avaruus olisikin voitu yhtä hyvin määritellä käyttäen suljettuja joukkoja. Päin vastoin kuin avoimilla joukoilla, suljettujen joukkojen äärelliset unionit ja mielivaltaiset leikkaukset ovat suljettuja.

Esimerkki 1.2.4. Määritellään joukon $\mathbb{R}^n$ tavanomainen euklidinen topologia. Palautetaan ensin mieleen kahden vektorin $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sisätulo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Sisätulosta saadaan *normi*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Joukkoa

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}$$

sanotaan pisteen $\mathbf{x}$ *avoimeksi r -säteiseksi palloympäristöksi*. Piste $\mathbf{x}$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *sisäpiste*, jos on olemassa jokin $r > 0$, jolle $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet joukot ovat tarkalleen ne joukot, joissa jokainen piste on sisäpiste.

Erityisesti avaruuden $\mathbb{R}$ avoimet välit (a, b) , $(-\infty, a)$, (a, ∞) ovat avoimia joukkoja ja välit $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ suljettuja joukkoja. Puoliavoimet välit $[a, b)$ ja $(a, b]$ eivät ole avoimia eivätkä suljettuja.

Esimerkki 1.2.5. Joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$ on avoimien välien unioni. Kukin avoin väli on avoin joukko avaruudessa $\mathbb{R}$ ja avoimien joukkojen unioni on aina avoin. Siis joukon $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ komplementti $\mathbb{N}$ on suljettu.

Määritelmä 1.2.6. Topologisen avaruuden (X, τ) avoimien joukkojen kokoelma B on avaruuden (X, τ) *kanta*, jos kaikki avoimet joukot voidaan ilmaista kokoelman B alkioden unioneina. Jos B on avaruuden (X, τ) kanta, sanotaan että B *generoi* topologian τ .

Esimerkki 1.2.7. Avaruuden $\mathbb{R}$ avoimien välien unionin jokainen piste on sisäpiste, joten avoimien välien unioni on aina avoin joukko. Toisaalta jokainen avoin joukko on avoimien välien unioni. Siispä kaikkien avoimien välien kokoelma on avaruuden $\mathbb{R}$ kanta euklidisen topologian suhteen.

Kanta ei ole yksikäsitteinen, ja samalla avaruudella voi olla kaksi erikoistakin kantaa. Toinen kanta avaruudelle $\mathbb{R}$ saataisiin kaikista avoimista väleistä, joiden päätepisteet ovat rationaaliset. Toistamalla äskeinen päätely nähdään, että tämä kanta generoi saman topologian, mutta toisaalta sisältyy aidosti kaikkien avoimien välien kokoelmaan.

Esimerkki 1.2.8. Olkoon S kaikkien muotoa $(-\infty, a)$ tai (a, ∞) olevien reaalilukuvälien kokoelma. Tämä kokoelma ei ole kanta millekään joukon $\mathbb{R}$ topologialle. Nimittäin $(0, 1) = (0, \infty) \cap (-\infty, 1)$ on avoin joukko, mutta kokoelman S välit eivät mahdu välille $(0, 1)$, eikä sitä siis voi lausua kokoelman S alkioden unionina.

Määritelmä 1.2.9. Olkoon

$$X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$$

karteesinen tulo topologisista avaruuksista X_i . Joukon X *tulotopologia* koostuu muotoa $\prod_{i \in \mathcal{I}} U_i$ olevien joukkojen unioneista, missä jokainen U_i on avoin avaruudessa X_i ja $U_i \neq X_i$ vain äärellisen monella indeksillä $i \in \mathcal{I}$.

Seuraava lause on nyt ilmeinen.

Lause 1.2.10. *Tulotopologia on karteesisen tulon topologia.*

Esimerkki 1.2.11. Olkoot $X = \{0, 1\}$ ja $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Tulon $(X, \tau) \times (X, \tau)$ kannaksi saadaan $\{\{(0, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}\}$.

Esimerkki 1.2.12. Jos reaalilukujen joukolle $\mathbb{R}$ annetaan euklidinen topologia esimerkin 1.2.4 mukaisesti, niin äärelliselle tulolle $\mathbb{R}^n$ saatu tulotopologia on sama kuin suoraan avaruudelle $\mathbb{R}^n$ määritelty euklidinen topologia.

Myös topologisen avaruuden (X, τ) osajoukkoa voidaan käsitellä topologisena avaruutena. Tällöin kyseistä osajoukkoa sanotaan avaruuden (X, τ) *aliavaruudeksi*. Aliavaruuden (S, τ_S) topologia τ_S määritellään niin, että avoimia joukkoja ovat avaruuden (X, τ) avoimien joukkojen leikkaukset joukon S kanssa, siis

$$\tau_S = \{S \cap U \mid U \in \tau\}.$$

Lause 1.2.13. *Joukko $H \subseteq Y$ on suljettu aliavaruudessa Y jos ja vain jos $H = F \cap Y$ jollain avaruuden X suljetulla joukolla F .*

Todistus. Jos H on suljettu avaruudessa Y , niin $Y \setminus H$ on avoin eli $Y \setminus H = G \cap Y$ jollekin avaruudessa X avoimelle joukolle G . Tällöin G^c on suljettu ja $H = G^c \cap Y$. Jos taas $H = F \cap Y$ ja F on suljettu avaruudessa X , niin F^c on avoin ja $Y \setminus H = F^c \cap Y$, jolloin $Y \setminus H$ on avoin aliavaruudessa Y ja H vastaavasti suljettu. $\square$

Seuraus 1.2.14. *Avaruuden X suljetussa aliavaruudessa suljettu joukko on suljettu myös avaruudessa X .*

Todistus. Jos lauseessa 1.2.13 aliavaruus Y on suljettu joukko, niin H on kahden suljetun joukon leikkaus. $\square$

Määritelmä 1.2.15. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subseteq X$. Olkoon lisäksi $C = \{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Jos $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$, niin kokoelma C on joukon A *peite*. Voidaan myös sanoa, että C

peittää joukon A . Peitteen C osapeite (joukolle A) on sellainen peitteen C osajoukko, joka peittää joukon A . Peite C on *avoin peite*, jos jokainen U_i on avoin.

Esimerkki 1.2.16. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Joukot $\{2, 3\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$ ja $\{1, 3\}$ muodostavat joukon A peitteen. Kolme ensimmäistä joukkoa ovat yksinäänkin joukon A peite ja näin ollen isomman peitteen osapeite.

Esimerkki 1.2.17. Olkoon $U_p = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 0 \pmod{p}\}$. Kokoelma $\{\{1\}\} \cup \{U_p \mid p \text{ on alkuluku}\}$ on luonnollisten lukujen joukon peite.

Määritelmä 1.2.18. Avaruus on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Esimerkki 1.2.19. Olkoon $(\mathbf{x}_k)$ jono avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Näytetään, että aliavaruus $A = \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}\}$ on kompakti. Olkoon $\{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ joukon A avoin peite. Erityisesti $\mathbf{x} \in U_{i_0}$ jollain $i_0 \in \mathcal{I}$. Koska joukko U_{i_0} on avoin, jollain $r > 0$ pätee $B(\mathbf{x}, r) \subseteq U_{i_0}$. Toisaalta raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, r)$ aina kun $k > k_0$. Näin ollen kukin $\mathbf{x}_k \in U_{i_0}$, kun $k > k_0$. Jokaista $k \in \{1, \dots, k_0\}$ kohti valitaan $i_k \in \mathcal{I}$ siten, että $\mathbf{x}_k \in U_{i_k}$. Nyt $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{k_0} U_{i_k}$, joten saatiin äärellinen osapeite.

Esimerkki 1.2.20. Avaruuden $\mathbb{R}$ aliavaruus $B = \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ ei ole kompakti. Koska kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$\frac{1}{2k} < \frac{1}{k} < \frac{2}{k},$$

avoimet välit $U_k = (\frac{1}{2k}, \frac{2}{k})$ muodostavat avoimen peitteen joukolle B . Tällä peitteellä ei kuitenkaan ole äärellistä osapeitettä. Jos nimittäin $\mathcal{I}$ on äärellinen joukko luonnollisia lukuja ja m on näistä luvuista suurin, niin $\frac{1}{2m} \notin \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$, vaikka selvästi $\frac{1}{2m} \in B$.

Esimerkki 1.2.21. Luonnollisten lukujen joukko varustettuna diskreetillä topologialla ei ole kompakti, sillä esimerkissä 1.2.17 määritelty peite on avoin, mutta sillä ei ole äärellistä osapeitettä. Itse asiassa sillä ei ole aitoja osapeitteitä lainkaan, sillä luku 1 ei ole missään joukossa U_p ja kukin alkuluku p kuuluu ainoastaan vastaavaan joukkoon U_p .

Lause 1.2.22. *Topologinen avaruus X on kompakti jos ja vain jos jokaisella avaruuden X suljetuista joukoista koostuvalla kokoelmalla C , jonka joukkojen kaikki äärelliset leikkaukset ovat epätyhjiä, leikkaus $\bigcap_{S \in C} S$ on epätyhjä.*

Todistus. ([5], s. 169-170) Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Määritellään kokoelman $\mathcal{A}$ joukkojen komplementtien joukko

$$C = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

- (i) kokoelma $\mathcal{A}$ on kokoelma avoimia joukkoja jos ja vain jos C on kokoelma suljettuja joukkoja;
- (ii) kokoelma $\mathcal{A}$ peittää avaruuden X jos ja vain jos leikkaus $\bigcap_{S \in C} S$ on tyhjä joukko;
- (iii) kokoelman $\mathcal{A}$ äärellinen osakokoelma $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ peittää avaruuden X jos ja vain jos vastaavien komplementtien $S_i = X \setminus A_i$ leikkaus on tyhjä joukko.

Väite ”Avaruus X on kompakti” voidaan kirjoittaa muodossa ”Jos avoimien joukkojen muodostama kokoelma $\mathcal{A}$ peittää avaruuden X , niin jokin kokoelman $\mathcal{A}$ äärellinen osakokoelma peittää avaruuden X .” Tämä on ekvivalentti kontrapositionsa ”Jos mikään avoimien joukkojen kokoelman $\mathcal{A}$ äärellinen osakokoelma ei peitä avaruutta X , niin kokoelma $\mathcal{A}$ ei peitä avaruutta X ” kanssa. Kun sovelletaan tähän ominaisuuksia (i)-(iii), niin väite tulee muotoon ”jos suljettujen joukkojen kokoelman C joukkojen jokainen äärellinen leikkaus on epätyhjä, niin leikkaus $\bigcap_{S \in C} S$ on epätyhjä.” $\square$

Lause 1.2.23. *Jokainen kompaktin avaruuden suljettu joukko on kompakti.*

Todistus. Olkoon X kompakti avaruus ja $F \subseteq X$ suljettu joukko. Olkoon $\{G_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ joukon F avoin peite avaruudessa F (eli $G_i \subseteq F$ kaikilla $i \in \mathcal{I}$ ja kukin G_i on avoin aliavaruudessa F). Aliavaruuden määritelmän mukaan on olemassa avoimet joukot $H_i \subseteq X$, joille $G_i = F \cap H_i$. Joukot H_i yhdessä joukon F komplementin $F^c = X \setminus F$ kanssa muodostavat avaruuden

X avoimen peitteen. Koska X on kompakti, niin $X = F^c \cup H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_n}$ jollain äärellisellä indeksijoukolla $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \mathcal{I}$. Siispä

$$F = F \cap X = (F \cap F^c) \cup (F \cap H_{i_1}) \cup \dots \cup (F \cap H_{i_n}) = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}.$$

□

Määritelmä 1.2.24. Topologinen avaruus X on *Hausdorffin avaruus*, jos jokaista pisteparia $p, q \in X, p \neq q$, kohti on olemassa sellaiset avoimet joukot G ja H , että $p \in G, q \in H$ ja $G \cap H = \emptyset$.

Selvästi $\mathbb{R}^n$ on Hausdorffin avaruus, samoin kuin mikä tahansa avaruus, jonka topologia on diskreetti.

Lause 1.2.25. *Jokainen Hausdorffin avaruuden aliavaruus on Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Olkoon X Hausdorffin avaruus ja $p, q \in E \subseteq X$. Olkoot G ja H kuten Hausdorffin avaruuden määritelmässä. Nyt $p \in G \cap E, q \in H \cap E$ ja kyseiset leikkaukset ovat avoimia avaruudessa E . □

Lause 1.2.26. *Hausdorffin avaruuksien karteesinen tulo on Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Olkoot X ja Y Hausdorffin avaruuksia, $z_1 = (x_1, y_1) \in X \times Y, z_2 = (x_2, y_2) \in X \times Y$ ja $z_1 \neq z_2$. Tällöin joko $x_1 \neq x_2$ tai $y_1 \neq y_2$. Voidaan olettaa, että $x_1 \neq x_2$. Avaruus X on Hausdorffin avaruus, joten on olemassa sellaiset avoimet joukot U ja V , että $x_1 \in U, x_2 \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Nyt karteesiset tulot (U, Y) ja (V, Y) ovat tulotopologiassa erilliset avoimet joukot, joille $z_1 \in (U, Y)$ ja $z_2 \in (V, Y)$. □

Lause 1.2.26 yleistyy helposti myös useamman kuin kahden avaruuden tulolle.

Lause 1.2.27. *Jokainen Hausdorffin avaruuden kompakti aliavaruus on suljettu joukko.*

Todistus. ([5], s.165) Olkoon X Hausdorffin avaruus ja $A \subseteq X$ kompakti. Mille tahansa pisteille $x \in A$ ja $b \in A^c$ on olemassa sellaiset avoimet joukot U_x ja V_x , että $b \in U_x$, $x \in V_x$ ja $U_x \cap V_x = \emptyset$. Kokoelma $\{V_x \mid x \in A\}$ muodostaa avoimen peitteen avaruudelle A . Koska A on kompakti, $A \subseteq V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ äärellisellä määrällä alkioita $x_i \in A$. Olkoon $G_b = U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$. Tämä on avoin joukko ja $G_b \subseteq A^c$. Koska $b \in A^c$ oli mielivaltainen, saadaan eri joukkojen G_b unionina koko A^c . Näin ollen A^c on avoin, joten A on suljettu. $\square$

Jos yllä olevassa todistuksessa X on kompakti, niin joukoksi A voidaan valita mikä tahansa suljettu joukko. Lauseen 1.2.23 nojalla A on tällöin kompakti ja todistusta voi jatkaa samaan tapaan. Saadaan seuraava tulos: jokaisesta pisteestä $x \in X$ ja jokaista suljettua joukkoa A , jolle $x \notin A$ kohti on olemassa sellaiset avoimet joukot U ja V , että $x \in U$, $A \subseteq V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Tällaista avaruutta kutsutaan *säännölliseksi*.

Määritelmä 1.2.28. Topologinen avaruus on *normaali*, jos erillisille suljetuille joukoille A ja B , on aina olemassa sellaiset avoimet joukot U ja V , että $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ ja $U \cap V = \emptyset$.

Lause 1.2.29. *Kompakti Hausdorffin avaruus on normaali.*

Todistus. ([5], s. 202) Todistus seuraa jälleen samaa juonta kuin lauseen 1.2.27 todistus. Olkoon X kompakti Hausdorffin avaruus, A ja B erilliset suljetut joukot, ja $x \in B$ mielivaltainen. Avaruuden X säännöllisyydestä seuraa, että on olemassa erilliset avoimet joukot U_x ja V_x , joille $A \subseteq U_x$ ja $x \in V_x$. Kokoelma $\{V_x \mid x \in B\}$ muodostaa avoimen peitteen joukolle B . Joukko B on suljettuna kompakti aliavaruus ja $B \subseteq V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ äärellisellä määrällä alkioita $x_i \in B$. Unioni on avoin joukko, samoin leikkaus $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$. Nämä ovat erilliset joukot ja väite seuraa. $\square$

Määritelmä 1.2.30. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f : X \rightarrow Y$ kuvaus. Kuvaus f on *jatkuva*, jos jokaisen avoimen joukon $H \subseteq Y$ alkukuva $f^{-1}(H) = \{x \in X \mid f(x) \in H\}$ on avoin.

Lause 1.2.31. *Kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on jatkuva jos ja vain jos jokaisen suljetun joukon $K \subseteq Y$ alkukuva $f^{-1}(K)$ on suljettu.*

Todistus. Oletetaan ensin, että f on jatkuva. Suljetun joukon K komplementti $Y \setminus K$ on avoin, joten $f^{-1}(Y \setminus K)$ on avoin. Alkukuva $f^{-1}(K) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus K)$ on siis suljettu.

Oletetaan sitten, että jokaisen suljetun joukon alkukuva on suljettu. Jos H on avoin joukko, niin $Y \setminus H$ on suljettu. Siispä alkukuva $f^{-1}(Y \setminus H) = X \setminus f^{-1}(H)$ on suljettu ja sen komplementti $f^{-1}(H)$ avoin. Siis f on jatkuva. $\square$

Esimerkki 1.2.32. Kun X ja Y ovat reaalilukujen joukkoja, yllä oleva jatkuvuuden määritelmä vastaa klassisen analyysin (ε, δ) -määritelmää.

Lause 1.2.33. *Kompaktin avaruuden kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Olkoon X kompakti ja $f : X \rightarrow Y$ jatkuva surjektio. Olkoon $\{G_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ avaruuden Y avoin peite. Tällöin $\{f^{-1}(G_i) \mid i \in \mathcal{I}\}$ on avaruuden X avoin peite. Koska X on kompakti, niin $X = f^{-1}(G_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(G_{i_n})$ jollain äärellisellä indeksijoukolla $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \mathcal{I}$ ja $Y = f(X) = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$. $\square$

Määritelmä 1.2.34. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Jos kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus f^{-1} on myös jatkuva bijektio, sanotaan, että f on *homeomorfismi*. Tällöin avaruudet X ja Y ovat *homeomorfishet*.

Homeomorfismi on pohjimmiltaan "topologinen isomorfismi". Homeomorfismi säilyttää kaikki topologiset ominaisuudet, eikä homeomorfishen avaruuksien välillä ole topologian näkökulmasta katsoen mitään eroa.

Lause 1.2.35. *Olkoot X kompakti avaruus ja Y Hausdorffin avaruus. Jos $f : X \rightarrow Y$ on jatkuva bijektio, se on homeomorfismi.*

Todistus. Todistus on lähteestä [6]. Riittää näyttää, että kuvaus $g = f^{-1}$ on jatkuva. Lauseen 1.2.31 mukaan g on jatkuva, jos jokaisen suljetun joukon $V \subseteq X$ alkukuva $g^{-1}(V) = f(V)$ on suljettu.

Olkoon V avaruuden X suljettu joukko. Kompaktin avaruuden suljetuna joukkona V on kompakti lauseen 1.2.23 nojalla. Koska f on jatkuva, niin lauseen 1.2.33 mukaan $f(V)$ on kompakti. Nyt siis $f(V)$ on Hausdorffin avaruuden Y kompakti osajoukko ja näin ollen suljettu lauseen 1.2.27 nojalla. $\square$

1.3 Yhtenäisyys ja epäyhtenäisyys

Topologista avaruutta X sanotaan *epäyhtenäiseksi*, jos se on kahden erillisen epätyhjän avoimen joukon unioni. Toisin sanoen avaruus X on epäyhtenäinen, jos on olemassa epätyhjät avoimet joukot G ja H , joille

$$X = G \cup H \text{ ja } G \cap H = \emptyset. \quad (1)$$

Avaruus, joka ei ole epäyhtenäinen, on *yhtenäinen*.

Jos tällaiset joukot G ja H ovat olemassa, ne ovat toistensa komplementit ja näin ollen myös suljetut. Näin saadaan triviaalisti seuraava ekvivalenssi.

Lause 1.3.1. *Olkoon X topologinen avaruus. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentit:*

- (i) *Avaruus X on yhtenäinen eli ei ole olemassa epätyhjiä avoimia joukkoja G ja H , jotka toteuttavat ehdon (1).*
- (ii) *Ei ole olemassa epätyhjiä suljettuja joukkoja G ja H , jotka toteuttavat ehdon (1).*
- (iii) *Ainoat avaruuden X joukot, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja, ovat joukot X ja $\emptyset$.*

Esimerkki 1.3.2. Yhden pisteen joukko ja tyhjä joukko ovat aina yhtenäisiä aliavaruuksia. *Dedekindin aksiooman* mukaan avaruudessa $\mathbb{R}$ erillisten avoimien välien välissä on aina yhden pisteen joukko. Koska avaruuden $\mathbb{R}$ avoimet joukot ovat avoimien välien unioneja, $\mathbb{R}$ on yhtenäinen. Avaruuden $\mathbb{R}$ kaikki yhtenäiset aliavaruudet ovat edellä mainittujen lisäksi kaikki välit.

Kompakteille Hausdorffin avaruuksille tavanomainen epäyhtenäisyyden määritelmä on varsin kömpelö. Niinpä loppuosa tästä pykälästä käytetäänkin ekvivalentin määritelmän johtamiseen.

Määritelmä 1.3.3. Olkoon X topologinen avaruus ja $x \in X$ jokin sen alkio. Alkion x *yhtenäinen komponentti* C_x on suurin alkion x sisältävä yhtenäinen

avaruus. Alkion x *kvasikomponentti* Q_x on kaikkien alkion x sisältävien sekä avoimien että suljettujen joukkojen leikkaus, siis

$$Q_x = \bigcap_{\substack{S \in B(X) \\ x \in S}} S.$$

Lemma 1.3.4. *Olkoon X kompakti Hausdorffin avaruus. Tällöin $C_x = Q_x$ kaikilla $x \in X$.*

Todistus. Todistus on lähteestä [7]. Osoitetaan ensin, että $C_x \subseteq Q_x$. Olkoon $y \notin Q_x$. Tällöin kvasikomponentin määritelmän nojalla on olemassa jokin $S \in B(X)$, jolle $x \in S$ ja $y \in S^c$. Tällöin S on sekä avoin että suljettu avaruuden X aito osajoukko ja X on siis epäyhtenäinen. Komponentti C_x ei voi samanaikaisesti sisältää joukkoja $A \subseteq S$ ja $B \subseteq S^c$. Tällöin A ja B olisivat sekä avoimia että suljettuja aliavaruudessa C_x , eikä C_x siis olisi yhtenäinen, vastoin määritelmää. Koska $x \in C_x$, seuraa $y \notin C_x$.

Osoitetaan sisältyminen toiseen suuntaan. Tehdään vastaoletus: $Q_x \not\subseteq C_x$. Tällöin Q_x on epäyhtenäinen, ja on siis olemassa avaruudessa X avoimet joukot G' ja H' , joille pätee

$$G' \cap Q_x \neq \emptyset, \quad H' \cap Q_x \neq \emptyset, \quad G' \cap H' \cap Q_x = \emptyset, \quad Q_x \subseteq G' \cup H'.$$

Joukot G' ja H' voidaan valita erillisiksi. Aliavaruus Q_x on nimittäin suljettu määritelmän nojalla ja leikkaukset $G' \cap Q_x$ ja $H' \cap Q_x$ suljettuja suljetussa aliavaruudessa Q_x ja seurauksen 1.2.14 nojalla suljettuja myös koko avaruudessa X . Koska X on normaali, on olemassa erilliset avoimet joukot U ja V , joille $G' \subseteq U$ ja $H' \subseteq V$.

Olkoon $L = (U \cup V)^c$. Joukko L on suljettu ja lauseen 1.2.23 nojalla kompakti. Lisäksi $Q_x \cap L = \emptyset$. Selvästi on olemassa äärellinen kokoelma sekä avoimia että suljettuja joukkoja $F_1, \dots, F_n$, joille $Q_x \subseteq F_1 \cap \dots \cap F_n$ (voidaan valita $F_1 = X$). Osoitetaan, että joukot F_i voidaan valita siten, että $F_1 \cap \dots \cap F_n \cap L = \emptyset$. Tehdään vastaoletus. Tällöin kokoelman $\{F \in B(X) \mid x \in F\} \cup \{L\}$ äärellisen osajoukon leikkaus on aina epätyhjä. Lause 1.2.22 kertoo, että koko kokoelman leikkaus on epätyhjä, mutta tämä on ristiriita, koska $Q_x \cap L = \emptyset$.

Merkitään nyt $F = F_1 \cap \dots \cap F_n$. Joukko F on sekä avoin että suljettu, ja $Q_x \subseteq F \subseteq U \cup V$. Joukko $U \cap F$ on avoimien joukkojen unionina avoin, ja lisäksi

$$\overline{U \cap F} \subseteq \overline{U} \cap F \subseteq (X \setminus V) \cap F = U \cap F,$$

siis $U \cap F$ on myös suljettu. Samoin joukko $V \cap F$ on sekä avoin että suljettu.

Symmetrian nojalla voidaan olettaa $x \in U \cap Q_x$. Tällöin kvasikomponentin määritelmän nojalla $Q_x \subseteq U \cap F$ ja saadaan

$$\emptyset \neq V \cap Q_x \subseteq V \cap U \cap F = \emptyset,$$

mikä on ristiriita. Lopulta saatiin $Q_x \subseteq C_x$ ja siis $Q_x = C_x$. $\square$

Topologista avaruutta sanotaan *täysin epäyhtenäiseksi*, jos sen jokainen vähintään kahden pisteen aliavaruus on epäyhtenäinen.

Lause 1.3.5. *Kompakti Hausdorffin avaruus X on täysin epäyhtenäinen jos ja vain jos jokaista pisteparia $p, q \in X$ kohti on olemassa sellaiset erilliset avoimet joukot G ja H , että $p \in G$, $q \in H$ ja $G \cup H = X$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että X on täysin epäyhtenäinen. Tällöin $Q_x = C_x = \{x\}$ kaikilla $x \in X$. Olkoot $p, q \in X$. Koska $Q_p = \{p\}$, on olemassa sekä avoin että suljettu joukko S , jolle $p \in S$ ja $q \notin S$. Joukot S ja S^c toteuttavat vaaditun ehdon.

Oletetaan sitten väitteen oikea puoli. Nyt mistä tahansa vähintään kahden pisteen aliavaruudesta S voidaan valita jotkin pisteet p ja q . Jos G ja H ovat kuten oletuksessa, niin $G \cap S$ ja $H \cap S$ ovat avoimia aliavaruuden S topologiassa,

$$(G \cap S) \cup (H \cap S) = S \cap (G \cup H) = S \cap X = S,$$

ja

$$(G \cap S) \cap (H \cap S) = S \cap (G \cap H) = S \cap \emptyset = \emptyset.$$

Siispä X on täysin epäyhtenäinen. $\square$



Kuva 2: Cantorin joukon konstruktio [8].

1.4 Cantorin avaruus

Seuraavaksi konstruoidaan erikoislaatuinen joukko nimeltä *Cantorin joukko*. Otetaan suljettu reaalilukuväli $[0, 1]$ ja poistetaan siitä keskimäinen kolmannes eli avoin väli $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Jäljelle jäi joukko

$$G_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Poistetaan taas jäljelle jääneistä väleistä kummastakin keskimäinen kolmannes eli avoimet välit $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ja $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Nyt jäljelle jää

$$G_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Jatketaan poistamalla aina jäljellä olevista väleistä keskimäiset kolmannekset. Konstruktion ensimmäiset kuusi iteraatiota on esitetty kuvassa 2. Nähdään, että $G_{i+1} \subset G_i$ kaikilla $i \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään *Cantorin joukko*

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Leikkaus ei ole tyhjä joukko, sillä esimerkiksi alkuperäisiä päätepisteitä 0 ja 1 ei poisteta missään vaiheessa.

Jokainen luku $x \in [0, 1]$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},$$

missä kukin $a_n \in \{0, 1, 2\}$. Kertoimista a_n saadaan luvun x *ternääriesitys* $0.a_1a_2a_3\dots$. Luvulla voi olla kaksikin ternääriesitystä, esimerkiksi

$$\frac{1}{3} = 0.1000\dots = 0.0222\dots$$

Selvästi $x \in G$ jos ja vain jos luvulla x on jokin ternääriesitys, jossa $a_n \neq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Jos väliä $[0, 1]$ tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}$ aliavaruutena, niin kukin joukoista G_i on suljettu ja näin ollen Cantorin joukko G on suljettu. Tarkasteltaessa Cantorin joukkoa avaruuden $[0, 1]$ (tai yhtä hyvin avaruuden $\mathbb{R}$) aliavaruutena, sitä kutsutaan *Cantorin avaruudeksi*.

Lemma 1.4.1. *Suljettu väli $[0, 1]$ on avaruuden $\mathbb{R}$ kompakti aliavaruus.*

Todistus. ([9], s.174). Olkoon $\{O_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ jokin välin $[0, 1]$ avoin peite. Tällöin jokainen piste $x \in [0, 1]$ sisältyy johonkin joukoista O_i . Kukin joukko O_i on avoimien välien unioni, joten jokainen piste $x \in [0, 1]$ sisältyy johonkin avoimeen väliin U_x . Määritellään joukko

$$S = \left\{ z \in [0, 1] \mid [0, z] \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{x_k} \text{ äärellisellä määrällä alkioita } x_k \in [0, 1] \right\}.$$

Selvästi joukko S on kompakti.

Olkoon $x \in S$ ja $y \in U_x$. Tällöin $[x, y] \subset U_x$ (voidaan rajoituksetta olettaa, että $x \leq y$) ja edelleen siis

$$[0, y] = [0, x] \cup [x, y] \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{x_k} \cup U_x,$$

eli $y \in S$. Siis aina kun yksikin alkio joukosta U_x kuuluu joukkoon S , niin $U_x \subseteq S$. Tämähän tarkoittaa sitä, että

$$S = \bigcup_{x \in S} U_x \text{ ja } S^c = \bigcup_{x \notin S} U_x.$$

Joukko S on siis sekä avoin että suljettu. Koska $[0, 1]$ on yhtenäinen, on S joko koko avaruus $[0, 1]$ tai tyhjä joukko. Koska $0 \in S$, niin $S = [0, 1]$ eli $[0, 1]$ on kompakti. $\square$

Seuraus 1.4.2. *Cantorin avaruus on kompakti.*

Todistus. Cantorin avaruus on kompaktin avaruuden $[0, 1]$ suljettu osajoukko. $\square$

Lause 1.4.3. Olkoon A joukko $\{0, 2\}$ varustettuna diskreetillä topologialla. Määritellään kuvaus f Cantorin avaruudelta G äärettömälle karteesiselle tulolle $\prod_{n=1}^{\infty} A$ ehdosta

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Tällöin f on homeomorfismi.

Todistus. ([9], s.218) Selvästi f on bijektio. Lauseen 1.2.26 mukaan $\prod_{n=1}^{\infty} A$ on Hausdorffin avaruus. Koska G on kompakti, lauseen 1.2.35 nojalla riittää osoittaa, että f on jatkuva.

Olkoon U avaruuden $\prod_{n=1}^{\infty} A$ kantaan kuuluva avoin joukko. Voidaan rajoituksetta olettaa, että

$$U = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \cdots \times U_N \times A \times A \times \cdots,$$

missä kukin joukoista U_i on avaruuden A avoin joukko. Olkoon $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in U$ mielivaltainen ja

$$W_a = B\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \frac{1}{3^{N+2}}\right) \cap G.$$

Näin määriteltynä W_a on avoin avaruudessa G ja $a \in f(W_a)$. Jos nyt $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in W_a$, niin $x_i = a_i$ kaikilla $i = 1, \dots, N$. Tällöin siis $f(x) \in U$ eli $f(W_a) \subseteq U$. Nyt

$$W = \bigcup_{a \in U} W_a$$

on avoin joukko ja $f(W) = U$. □

Cantorin avaruus on Hausdorffin avaruuden $\mathbb{R}$ aliavaruutena itsekin Hausdorffin avaruus.

2 Boolean algebrat

2.1 Yleisesti

Boolean algebrat ovat algebrallisia struktuureita, joissa tavanomaisen propositiologiikan säännöt ovat voimassa. Boolean algebrat esitteli George Boole teoksissa *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) ja *An Investigation of the Laws of Thought* (1854). Teorian jatkokehityksestä vastasivat muiden muassa Jevons, Schröder, Whitehead ja Huntington. Nimitystä ”Boolean algebra” käytti ensimmäisenä Henry M. Sheffer vuonna 1913.

Boolean algebrat ja ultrafiltterit ovat tärkeitä työkaluja logiikassa. Propositiologiikan kaavat voidaan esittää Boolean algebrassa niin, että kaavojen väliset suhteet säilyvät. Boolean algebra ei kuitenkaan pysty suoraan ilmaisemaan kvanttoreita sisältäviä kaavoja, eikä siis ensimmäisen kertaluvun logiikkaa.

1930-luvulla Akira Nakashima ja Claude Shannon kuvailivat, kuinka kaksialkioista Boolean algebraa voi käyttää kytkentäpiirien toiminnan mallintamiseen. Näin Boolean algebra tarjosi matemaattiset työkalut digitaalisten sistemien suunnitteluun ja analysointiin, mahdollistaen lopulta jopa tietokoneiden synnyn ja kehityksen.

2.2 Määritelmä ja esimerkkejä

Propositiologiikka pohjautuu *propositiomuuttujiin* $p, q, r, \dots$, jotka voivat olla tosia tai epätosia. Propositiomuuttujia voi liittää yhteen *konnektiiveilla*, joista vakiintuneimmat ovat $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$ (luetaan ”ei”, ”tai”, ”ja”, ”jos... , niin” ja ”jos ja vain jos”). Näin muodostuu *propositioita* eli *kaavoja*. Muodostuneen proposition totuusarvo määräytyy propositiomuuttujien totuusarvoista. Esimerkiksi propositio $p \vee (q \wedge \neg r)$ on tosi, kun joko p on tosi, tai q on tosi ja r ei ole tosi. Propositio $p \vee \neg p$ on aina tosi ja propositio $p \wedge \neg p$ aina epätosi. Merkitään näitä propositioita vastaavasti 1 ja 0. Propositio on *tautologia*, jos se on tosi riippumatta propositiomuuttujien arvoista. Tautologioita ovat esimerkiksi propositiot 1 ja $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

Propositiot P ja Q ovat *loogisesti ekvivalentit*, merkitään $P \equiv Q$, jos P on tosi tarkalleen silloin kun Q on tosi, eli jos $P \Leftrightarrow Q$ on tautologia. Huomataan,

että P on tautologia tarkalleen silloin kun $P \equiv 1$.

Yllä lähdettiin siitä, että konnektiiveilla on ennalta määrätty merkitykset, joiden avulla voidaan päätellä, mitkä propositiot ovat keskenään loogisesti ekvivalentteja. Seuraavaksi edetään vastakkaiseen suuntaan ottamalla loogiset ekvivalenssit aksioomiksi, joista konnektiivien merkitys seuraa. Koska konnektiivien $\neg$, $\vee$ ja $\wedge$ avulla voidaan ilmaista kaikki muut, rajoitutaan näihin.

Seuraavassa määritelmässä käytämme operaatioille samaa merkintää kuin propositiologiikan konnektiiveille. Tästä huolimatta operaatiot eivät tietenkään ole samoja kuin propositiologiikassa.

Määritelmä 2.2.1. Olkoon B joukko, $\neg$ joukon B unaarinen operaatio, $\vee$ ja $\wedge$ joukon B binäärioperaatioita ja $0, 1 \in B$. Kuusikko $(B, \neg, \vee, \wedge, 0, 1)$ on *vahva Boolean algebra*, jos kaikki propositiologiikan loogiset ekvivalenssit voidaan korvata yhtäsuuruuksilla joukossa B , kun propositiomuuttujat korvataan joukon B alkioilla ja propositiologiikan konnektiivit vastaavilla operaatioilla.

Joukon B alkioita voi ajatella totuusarvoina. Tosi ja epätosi, eli 1 ja 0, ovat joukossa B , mutta lisäksi saattaa olla muitakin totuusarvoja. Näiden voi ajatella olevan epävarmoja tilanteita, joissa propositiomuuttujan totuusarvoa ei tiedetä.

Yllä oleva määritelmä on liiankin voimakas, sillä jokaisen loogisen ekvivalenssin tarkistaminen on vaikeaa. Käytännöllisempää on ottaa pienempi määrä aksioomia, joista muut seuraavat.

Määritelmä 2.2.2. Olkoon B joukko, $\neg$ joukon B unaarinen operaatio, $\vee$ ja $\wedge$ joukon B binäärioperaatioita ja $0, 1 \in B$. Kuusikko $(B, \neg, \vee, \wedge, 0, 1)$ on *Boolean algebra*, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa kaikille $a, b, c \in B$:

1A. $a \vee 0 = a$;

1B. $a \wedge 1 = a$;

2A. $a \vee b = b \vee a$;

2B. $a \wedge b = b \wedge a$;

3A. $a \vee \neg a = 1$;

3B. $a \wedge \neg a = 0$;

$$4A. a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c); \quad 4B. a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$5A. a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c; \quad 5B. a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Aksioomat 2A ja 2B sanovat, että operaatiot $\vee$ ja $\wedge$ ovat kommutatiivisia. Aksioomat 4A ja 4B ovat distributiivilait ja aksioomat 5A ja 5B assosiatiivilait. Assosiatiivisuus mahdollistaa sen, että sulkeet voidaan jättää pois, jos sama operaatio toistuu monta kertaa peräkkäin. Myöhemmin nähdään, että tämä määritelmä on ekvivalentti määritelmän 2.2.1 kanssa eli jokaiselle loogiselle ekvivalenssille voidaan johtaa vastaava yhtälö näistä aksioomista.

Huomautus 1. Itse asiassa aksioomat 5A ja 5B ovat ylimääräisiä. Ne saadaan johdettua muista aksioomista, mutta tämä on varsin työlästä [10].

Huomautus 2. Jos kaikilla $a, b, c \in B$ pätee

1. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
2. $a \vee b = b \vee a$, ja
3. $\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(\neg a \vee \neg b) = a$,

niin B on Boolean algebra [11]. Tässä määritelmässä vaadittiin vain yksi unaarinen ja yksi binäärinen operaatio. Määritelmän 2.2.2 aksiomatisointi on kuitenkin havainnollisempi, joten rajoitutaan siihen.

Käydään läpi muutama esimerkki Boolean algebroista.

Esimerkki 2.2.3. Joukko $\{0, 1\}$ on Boolean algebra, missä $\neg$ on looginen negatio, $\vee$ on looginen disjunktio ja $\wedge$ looginen konjunktio. Tämä algebra vastaa tavanomaista propositiologiikkaa, missä kaikki väitteet ovat joko tosia tai epätosia. Boolean algebrasta $\{0, 1\}$ käytetään merkintää **2**, koska konstruoidessa luonnollisia lukuja joukko-opin aksioomista lähtien luku 2 vastaa (yleensä) juuri joukkoa $\{0, 1\}$.

Esimerkki 2.2.4. Olkoon X joukko. Sen potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$ on Boolean algebra, jossa $\vee = \cup$, $\wedge = \cap$ ja $\neg A = A^c = X \setminus A$. Voidaan ajatella, että X on joukko mahdollisia tilanteita ja kukin osajoukko $A \subseteq X$ koostuu niistä tilanteista, joissa jokin tietty väittämä on tosi.

Esimerkki 2.2.5. Erikoistapauksena edellisestä esimerkistä saadaan, kun $X = \emptyset$, yhden alkion algebra $\{\emptyset\}$. Tässä algebrassa $1 = 0 = \emptyset$. Algebra $\{\emptyset\}$ vastaa logiikkaa, jossa ei ole mahdollisia tilanteita, eikä siis mitään, mikä voisi olla totta tai epätotta.

Esimerkki 2.2.6. Olkoon X joukko propositionimuuttujia ja $F(X)$ niistä muodostuvien propositionien joukko modulo looginen ekvivalenssi (eli propositionit P ja Q samaistetaan, kun $P \equiv Q$). Joukko $F(X)$ on Boolean algebra tavanomaisin logiikan operaatioin.

Määritelmä 2.2.7. Jos B on Boolean algebra ja C sen osajoukko, joka on suljettu operaatioiden $\neg$, $\vee$ ja $\wedge$ suhteen, sanotaan että C on algebran B *alialgebra*. Erityisesti jos $B = \mathcal{P}(X)$, niin sanotaan, että C on *joukkojen algebra*.

Huomataan, että aksioomien 3A ja 3B nojalla alkiot 1 ja 0 sisältyvät kaikkiin alialgebroihiin.

Esimerkki 2.2.8. Olkoon X topologinen avaruus. Sekä avoimien että suljettujen joukkojen kokoelma $B(X)$ on algebran $\mathcal{P}(X)$ alialgebra, sillä avoimien ja suljettujen joukkojen äärelliset unionit ja leikkaukset ovat avoimia ja suljettuja, samoin komplementit.

Esimerkki 2.2.9. Olkoon $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ topologisen avaruuden $\mathbb{R}$ aliavaruus. Kokoelma $B(X)$ koostuu joukon $\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ äärellisistä osajoukoista ja niiden komplementeista joukossa X .

2.3 Kaavoja

Jokaisella yhtälöllä Boolean algebrassa on *duaaliyhtälö*, joka saadaan vaihtamalla operaatiot $\vee$ ja $\wedge$ keskenään ja alkiot 0 ja 1 keskenään. Esimerkiksi yhtälön $a \vee (b \wedge \neg c) = 1$ duaaliyhtälö on $a \wedge (b \vee \neg c) = 0$. Duaaliyhtälön duaaliyhtälö on aina alkuperäinen yhtälö. Yhtälö ja sen duaaliyhtälö ovat keskenään *duaaliset*. Nähdään, että kukin määritelmässä 2.2.2 esiintyvä A-aksiooma on duaalinen vastaavan B-aksiooman kanssa. Aksioomien duaalisuudesta seuraa, että jos B on Boolean algebra, on olemassa *vastakkainen*

algebra B^{op} , jossa $\vee_{B^{op}} = \wedge_B$, $\wedge_{B^{op}} = \vee_B$, $0_{B^{op}} = 1_B$ ja $1_{B^{op}} = 0_B$. Lisäksi tämä tarkoittaa, että Boolean algebraa koskevan yhtälön duaaliyhtälö on voimassa tarkalleen silloin kun alkuperäinen yhtälö on voimassa.

Seuraavaksi todistetaan joitakin Boolean algebroissa yleisesti voimassaolevia yhtäsuuruuksia. Todistukset ovat lähteestä [10]. Assosiativisuutta hyödyntävät todistukset ovat kuitenkin kirjoittajan omat. Tässä pykälässä B on aina Boolean algebra.

Lause 2.3.1. *Alkiot $0, 1 \in B$ ovat yksikäsitteiset, toisin sanoen*

(i) *jos kaikilla $a \in B$ pätee $a \vee o = a$, niin $o = 0$;*

(ii) *jos kaikilla $a \in B$ pätee $a \wedge i = a$, niin $i = 1$.*

Todistus. Aksioomista 1A ja 2A saadaan $o = o \vee 0 = 0 \vee o = 0$. Kohta (ii) on kohdan (i) duaaliyhtälö; todistus saadaan seuraamalla edellistä todistusta vastakkaisessa algebrassa eli aksioomista 1B ja 2B: $i = i \wedge 1 = 1 \wedge i = 1$. $\square$

Lause 2.3.2. *Alkioille $0, 1 \in B$ on voimassa*

(i) $\neg 0 = 1$;

(ii) $\neg 1 = 0$.

Todistus. Aksioomista 1A, 2A ja 3A saadaan $\neg 0 = \neg 0 \vee 0 = 0 \vee \neg 0 = 1$. Kohta (ii) on kohdan (i) duaaliyhtälö. $\square$

Lause 2.3.3. *Boolean algebran alkiot ovat molempien binäärioperaatioiden suhteen idempotentteja, toisin sanoen kaikilla $a \in B$ pätee*

(i) $a \vee a = a$;

(ii) $a \wedge a = a$.

Todistus. Kohta (i):

$$a \vee a \stackrel{1B}{=} (a \vee a) \wedge 1 \stackrel{3A}{=} (a \vee a) \wedge (a \vee \neg a) \stackrel{4A}{=} a \vee (a \wedge \neg a) \stackrel{3B}{=} a \vee 0 \stackrel{1A}{=} a.$$

Kohta (ii): duaaliyhtälö. $\square$

Jatkossa ei enää välttämättä merkitä näkyviin jokaista käytettyä aksioomaa. Lisäksi kommutatiivisuus on siinä määrin selkeä ja tuttu ominaisuus, että pelkkää kommutatiivisuutta hyödyntävät välivaiheet voidaan hypätä yli. Duaaliyhtälöitä ei enää todistuksissa erikseen mainita ja duaalisista yhtälöistä todistetaan aina ensimmäinen.

Lause 2.3.4. *Kaikilla $a \in B$ pätee*

$$(i) \ a \vee 1 = 1;$$

$$(ii) \ a \wedge 0 = 0.$$

Todistus. Aksioomista 3A ja 5A saadaan $a \vee 1 = a \vee (a \vee \neg a) = (a \vee a) \vee \neg a$, joka lauseen 2.3.3 mukaan on $a \vee \neg a = 1$. $\square$

Seuraavaa ominaisuutta kutsutaan *absorptioksi*.

Lause 2.3.5. *Kaikilla $a, b \in B$ pätee*

$$(i) \ a \vee (a \wedge b) = a;$$

$$(ii) \ a \wedge (a \vee b) = a.$$

Todistus. Ensinnäkin $a \vee (a \wedge b) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge b)$. Käytetään distributiivisuutta ja lausetta 2.3.4, jolloin saadaan edelleen $(a \wedge 1) \vee (a \wedge b) = a \wedge (1 \vee b) = a \wedge 1 = a$. $\square$

Lause 2.3.6. *Jokaista alkioita $a \in B$ vastaava alkio $\neg a$ on yksikäsitteinen. Toisin sanoen, jos jollain $a' \in B$ pätee $a \vee a' = 1$ ja $a \wedge a' = 0$, niin $a' = \neg a$.*

Todistus. Ensinnäkin

$$a' = a' \wedge 1 = a' \wedge (a \vee \neg a) = (a' \wedge a) \vee (a' \wedge \neg a).$$

Oletuksen nojalla $a' \wedge a = 0 = a \wedge \neg a$, joten sijoitetaan tämä lausekkeeseen. Saadaan

$$(a \wedge \neg a) \vee (a' \wedge \neg a) = \neg a \wedge (a \vee a') = \neg a \wedge 1 = \neg a.$$

$\square$

Lause 2.3.7. *Kaikilla $a \in B$ pätee $\neg\neg a = a$.*

Todistus. Aksiomista saadaan $\neg a \vee a = 1$ ja $\neg a \wedge a = 0$. Väite seuraa edellisestä lauseesta. $\square$

Lopuksi todistetaan *De Morganin lait*.

Lemma 2.3.8. *Kaikilla $a, b \in B$ on voimassa*

$$(i) \quad (a \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg b) = 1;$$

$$(ii) \quad (a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = 0.$$

Todistus. Käytetään distributiivisuutta, jolloin saadaan $(a \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg b) = ((a \vee b) \vee \neg a) \wedge ((a \vee b) \vee \neg b)$. Tässä voidaan assosiatiivisuuden nojalla jättää sisemmät sulkeet pois. Koska $a \vee \neg a = 1$ ja vastaavasti $b \vee \neg b = 1$, lauseke sievenee muotoon $(b \vee 1) \wedge (a \vee 1)$, joka edelleen lauseen 2.3.4 mukaan on $1 \vee 1 = 1$. $\square$

Lemma 2.3.9. *Kaikilla $a, b \in B$ on voimassa*

$$(i) \quad (a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b) = 0;$$

$$(ii) \quad (a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = 1.$$

Todistus. Käytetään taas distributiivisuutta: $(a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b) = ((\neg a \wedge \neg b) \wedge a) \vee ((\neg a \wedge \neg b) \wedge b)$. Väite seuraa assosiatiivisuudesta ja lauseesta 2.3.4 aivan samoin kuin edellisen lemmän todistuksessa. $\square$

Lemma 2.3.8 ja lemma 2.3.9 yhdessä lauseen 2.3.6 kanssa antavat seuraavan lauseen.

Lause 2.3.10 (De Morganin lait). *Kaikilla $a, b \in B$ on voimassa*

$$(i) \quad \neg(a \vee b) = (\neg a \wedge \neg b);$$

$$(ii) \quad \neg(a \wedge b) = (\neg a \vee \neg b).$$

Yhtälöt voidaan tietysti kirjoittaa myös muodossa $(a \vee b) = \neg(\neg a \wedge \neg b)$ ja $(a \wedge b) = \neg(\neg a \vee \neg b)$.

2.4 Boolean rengas

Boolean algebroilla on myös rengasrakenne. Seuraavaksi osoitetaan, että jokainen Boolean algebra on ns. *Boolean rengas*, kun rengasoperaatiot määritellään sopivasti. Sama pätee toiseenkin suuntaan, siis jokainen Boolean rengas on Boolean algebra.

Määritelmä 2.4.1. *Boolean rengas* on kolmikko $(R, +, \cdot)$, missä R on joukko, $+$ ja $\cdot$ ovat joukon R binäärioperaatioita ja seuraavat aksioomat ovat voimassa:

BR1. $(R, +)$ on Abelin ryhmä;

BR2. $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in R$;

BR3. on olemassa alkio $1 \in R$, jolle $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in R$;

BR4. $a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in R$;

BR5. $a^2 = a \quad \forall a \in R$.

Tässä neljä ensimmäistä aksioomaa ovat itse asiassa rengasaksioomat, joten voidaan sanoa, että Boolean rengas on rengas, jonka jokainen alkio on idempotentti.

Lemma 2.4.2. *Boolean renkaassa $a + a = 0$ kaikilla $a \in R$.*

Todistus. Koska $1 + 1 = (1 + 1)(1 + 1)$ aksiooman BR5 nojalla ja tämä on edelleen $(1 + 1) \cdot 1 + (1 + 1) \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1$, saadaan $1 + 1 = 0$ eli $1 = -1$. Siispä $a = 1 \cdot a = -1 \cdot a = -a$ ja väite on selvä. $\square$

Lemma 2.4.2 tarkoittaa siis, että Boolean renkaan karakteristika on 2 (pait-si tapauksessa $R = \{0\}$, jolloin karakteristika on 1).

Lause 2.4.3. *Boolean rengas on kommutatiivinen.*

Todistus. Tarkastellaan lauseketta $x+y$. Todistus etenee kuten lemmän 2.4.2 todistus:

$$\begin{aligned} x+y &= (x+y)(x+y) \\ &= (x+y)x + (x+y)y \\ &= x^2 + yx + xy + y^2 \\ &= x + yx + xy + y, \end{aligned}$$

joten $yx + xy = 0$. Nyt lemmasta 2.4.2 saadaan $yx = -xy = xy$, eli Boolean renkaan kertolasku kommutoi. $\square$

Lause 2.4.4. *Olkoon R Boolean rengas. Määritellään $a \vee b = a + b + ab$, $a \wedge b = ab$ ja $\neg a = 1 + a$. Tällöin R on Boolean algebra.*

Todistus. Aksioomat 1A ja 1B on nopeasti tarkistettu, samoin kommutatiivisuus, koska R on kommutatiivinen rengas. Aksiooma 3A saadaan, kun kirjoitetaan

$$a \vee \neg a = a \vee (1 + a) = a + (1 + a) + a(1 + a) = a + 1 + a + a + a = 1,$$

missä viimeinen vaihe seuraa lemmasta 2.4.2. Aksiooma 3B on vielä suoraviivaisempi:

$$a \wedge \neg a = a(1 + a) = a + a = 0.$$

Kirjoitetaan $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a + b + ab)(a + c + ac)$. Kerrotaan auki muistaen alkioiden idempotenttisuus ja kommutatiivisuus. Saadaan $a + ac + ac + ab + bc + abc + ab + abc + abc$. Lemman 2.4.2 avulla tämä sievenee muotoon $a + bc + abc = a \vee bc = a \vee (b \wedge c)$. Näin saatiin aksiooma 4A. Aksiooma 4B on taas suoraviivaisempi:

$$a \wedge (b \vee c) = a(b + c + bc) = ab + ac + abc = ab \vee ac = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Aksiooma 5A saadaan kirjoittamalla auki

$$\begin{aligned} a \vee (b \vee c) &= a \vee (b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc. \end{aligned}$$

Tämä voidaan järjestää uudelleen muotoon

$$a + b + ab + c + (a + b + ab)c = (a \vee b) \vee c.$$

Aksiooma 5B puolestaan on sama kuin BR2. $\square$

Ennen lauseen todistusta toiseen suuntaan, katsotaan millaisia ominaisuuksia on operaatiolla $a + b = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ eli *poissulkevalla disjunktioilla*. Käytetään merkintää $+$, koska algebrassa $\{0, 1\}$ poissulkeva disjunktio vastaa yhteenlaskua modulo 2.

Heti on selvää, että $a + b = b + a$.

Lemma 2.4.5. *Olkoon B Boolean algebra. Kaikilla $a, b \in B$ pätee*

$$a + b = (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b).$$

Todistus. Käyttämällä distributiivisuutta kahdesti saadaan

$$\begin{aligned} (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) &= ((a \wedge \neg b) \vee \neg a) \wedge ((a \wedge \neg b) \vee b) \\ &= ((a \vee \neg a) \wedge (\neg a \vee \neg b)) \wedge ((a \vee b) \wedge (b \vee \neg b)), \end{aligned}$$

mikä sievenee väitteen muotoon, kun käytetään aksioomia 3A ja 1B. $\square$

Lemma 2.4.6. *Olkoon B Boolean algebra. Kaikilla $a, b \in B$ pätee*

$$\neg(a + b) = (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b).$$

Todistus. Käytetään De Morganin lakeja useita kertoja peräkkäin; ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa poissulkevan disjunktin määritelmästä, jälkimmäinen lemmasta 2.4.5. $\square$

Lemma 2.4.7. *Kun B on Boolean algebra, $a + (b + c) = (a + b) + c$ kaikilla $a, b, c \in B$.*

Todistus. Kirjoitetaan auki

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a \wedge \neg(b + c)) \vee (\neg a \wedge (b + c)) \\ &= (a \wedge ((b \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c))) \vee (\neg a \wedge ((b \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c))) \\ &= (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c). \end{aligned} \tag{2}$$

Toisaalta $(a+b)+c = c+(a+b)$, ja kun tehdään sopivat sijoitukset ylläolevaan, saadaan

$$c + (a + b) = (c \wedge a \wedge b) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg a \wedge b),$$

mikä on uudelleenjärjestelyä vaille sama kuin (2). $\square$

Lemma 2.4.8. *Jos B on Boolean algebra, niin $(B, +)$ on Abelin ryhmä.*

Todistus. Ensinnäkin operaatio $+$ on kommutatiivinen. Assosiatiivisuus nähtiin lemmassa 2.4.7. Identiteettialkio on 0, sillä

$$a + 0 = (a \wedge \neg 0) \vee (\neg a \wedge 0) = (a \wedge 1) \vee 0 = (a \wedge 1) = a.$$

Lopuksi jokaisella alkiolla $a \in B$ on käänteisalkio, nimittäin a itse:

$$a + a = (a \wedge \neg a) \vee (\neg a \wedge a) = 0 \vee 0 = 0.$$

$\square$

Nyt voidaan todistaa lause 2.4.4 toiseen suuntaan.

Lause 2.4.9. *Olkoon B Boolean algebra. Määritellään $ab = a \wedge b$ ja $a + b = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$. Tällöin B on Boolean rengas.*

Todistus. Aksiooma BR1 on lemma 2.4.8. Aksiooma BR2 on Boolean algebran aksiooma 5B. Aksiooma BR3 on selvä, koska $1 \wedge a = a \wedge 1 = a$. Lauseen 2.3.3 nojalla $a \wedge a = a$ eli BR5 on voimassa.

Siispä jäljellä on enää aksiooma BR4, josta kommutatiivisuuden nojalla riittää osoittaa, että $a(b + c) = ab + ac$ kaikilla $a, b, c \in B$. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned} a(b + c) &= a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c)) \\ &= (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \\ &= (b \wedge (0 \vee (a \wedge \neg c))) \vee ((0 \vee (a \wedge \neg b)) \wedge c) \\ &= (b \wedge ((a \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg c))) \vee (((a \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg b)) \wedge c) \\ &= (b \wedge a \wedge \neg c) \vee ((\neg a \vee \neg b) \wedge a \wedge c) \\ &= ((a \wedge b) \wedge \neg(a \wedge c)) \vee (\neg(a \wedge b) \wedge (a \wedge c)) \\ &= ab + ac. \end{aligned}$$

Kaikki Boolean renkaan aksioomat toteutuvat, joten B on Boolean rengas. $\square$

2.5 Homomorfismit

Tähän asti kaikki operaatiot on suoritettu Boolean algebran sisällä. Seuraavaksi katsotaan, miten Boolean algebrat suhtautuvat toisiinsa.

Määritelmä 2.5.1. Olkoot B ja C Boolean algebroita. Kuvaus $f : B \rightarrow C$ on *homomorfismi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat kaikilla $a, b \in B$:

1. $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$,
2. $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$,
3. $f(\neg a) = \neg f(a)$.

Homomorfismi säilyttää Boolean algebran rakenteen. Määritelmän ehdoista seuraa $f(0) = f(a \wedge \neg a) = f(a) \wedge f(\neg a) = f(a) \wedge \neg f(a) = 0$ ja vastaavasti $f(1) = 1$.

Esimerkki 2.5.2. Olkoon f homomorfismi ja $+$ edellisessä pykälässä esitelty poissulkeva disjunktio. Tällöin

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)) \\ &= f(a \wedge \neg b) \vee f(\neg a \wedge b) \\ &= (f(a) \wedge \neg f(b)) \vee (\neg f(a) \wedge f(b)) \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Yleisemmin: jos $*$ on mikä tahansa Boolean algebran binäärioperaatio, niin $f(a * b) = f(a) * f(b)$.

Bijektiivistä homomorfismia sanotaan *isomorfismiksi*. Jos on olemassa isomorfismi $f : B \rightarrow C$, niin sanotaan, että B ja C ovat *isomorfiset* ja merkitään $B \simeq C$.

Esimerkki 2.5.3. Olkoon B jokin Boolean algebra, jossa $0 = 1$. Tällöin kaikilla alkioilla $a \in B$ pätee $a = a \wedge 1 = a \wedge 0 = 0$, joten $B = \{0\}$. Olkoon C esimerkin 2.2.5 algebra $\{\emptyset\}$. Kuvaus $f : B \rightarrow C$, $f(0) = \emptyset$ on isomorfismi, joten $B \simeq C$.

Esimerkki 2.5.4. Näytetään, että Boolean algebra B on isomorfinen vastakkaisen algebransa B^{op} kanssa. Olkoon $f : B \rightarrow B^{op}$, $f(a) = \neg a$ kaikilla $a \in B$. Lauseen 2.3.10 nojalla kaikilla $a, b \in B$

$$f(a \vee b) = \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b = f(a) \vee_{B^{op}} f(b)$$

ja samoin $f(a \wedge b) = f(a) \wedge_{B^{op}} f(b)$. Lisäksi $f(\neg a) = \neg \neg a = \neg f(a)$. Näin ollen f on homomorfismi.

Jos $\neg a = \neg b$, niin $\neg \neg a = \neg \neg b$, mikä on sama kuin $a = b$, joten f on injektio. Koska jokaista alkioa $a \in B^{op}$ vastaa alkio $\neg a$, joka on myös algebrassa B , ja $f(\neg a) = a$, kuvaus f on surjektio. Koska f on injektio ja surjektio, niin f on bijektio.

Lause 2.5.5. *Olkoot B ja C Boolean algebroita. Karteesinen tulo $B \times C$ on Boolean algebra, kun operaatiot suoritetaan komponenteittain. Yleisemmin: jos kukin B_α on Boolean algebra, niin karteesinen tulo $\prod B_\alpha$ on Boolean algebra.*

Todistus. Yksinkertaisuuden vuoksi todistetaan, että kahden Boolean algebran tulo on Boolean algebra. Tämä tapahtuu käymällä aksioomat läpi.

Aksiooma 1A on voimassa:

$$(b, c) \vee (0, 0) = (b \vee 0, c \vee 0) = (b, c) \quad \forall b \in B, c \in C.$$

Samoin saadaan 1B, 3A ja 3B.

Kommutatiivisuus on helppo todeta; se seuraa suoraan operaatioiden kommutatiivisuudesta algebroissa B ja C . Samoin assosiatiivisuus palautuu algebroiden B ja C assosiatiivisuuteen.

Olkoot $b_i \in B$, $c_i \in C$, $i = 1, 2, 3$. Aksiooma 4A saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} (b_1, c_1) \vee ((b_2, c_2) \wedge (b_3, c_3)) &= (b_1, c_1) \vee (b_2 \wedge b_3, c_2 \wedge c_3) \\ &= (b_1 \vee (b_2 \wedge b_3), c_1 \vee (c_2 \wedge c_3)) \\ &= ((b_1 \vee b_2) \wedge (b_1 \vee b_3), (c_1 \vee c_2) \wedge (c_1 \vee c_3)) \\ &= (b_1 \vee b_2, c_1 \vee c_2) \wedge (b_1 \vee b_3, c_1 \vee c_3) \\ &= ((b_1, c_1) \vee (b_2, c_2)) \wedge ((b_1, c_1) \vee (b_3, c_3)). \end{aligned}$$

Aksiooma 4B todistetaan vastaavasti. $\square$

Esimerkki 2.5.6. Olkoon X mikä tahansa joukko ja $\mathbf{2}^X$ karteesinen tulo, jossa on yksi kopio algebrasta $\mathbf{2}$ jokaista joukon X alkiota kohti. Edellisen lauseen mukaan $\mathbf{2}^X$ on Boolean algebra. Määritellään kuvaus $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbf{2}^X$ siten, että alkiota $a \in X$ vastaava komponentti on 1 tai 0 sen mukaan, kuuluuko alkio a kuvattavaan osajoukkoon vai ei.

Olkoot $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Jos $a \in A \cup B$, niin $a \in A$ tai $a \in B$, vastaavasti jos $a \in A \cap B$, niin $a \in A$ ja $a \in B$. Siispä $f(A \cup B) = f(A) \vee f(B)$ ja $f(A \cap B) = f(A) \wedge f(B)$. Jos $a \in A$, niin tietysti $a \notin A^c$, eli $f(A^c) = \neg f(A)$. Näin ollen f on homomorfismi. Eri osajoukoilla on eri kuvat, siis f on injektio. Jokainen alkio $y \in \mathbf{2}^X$ on jonkin alkion kuva, siis f on surjektio. Koska f on injektio ja surjektio, niin f on bijektio. Siis f on isomorfismi ja $\mathcal{P}(X) \simeq \mathbf{2}^X$.

2.6 Järjestys ja ihanteet

Tästä pykälästä alkaen esitys perustuu lähteeseen [12], mikäli muuta ei mainita.

Joukkojen algebrat ovat aina osittain järjestettyjä joukkoja sisältymisrelaation $\subseteq$ suhteen. Osoittautuu, että kaikki muutkin Boolean algebrat ovat osittain järjestettyjä vastaavan relaation suhteen.

Määritelmä 2.6.1. Olkoon B Boolean algebra ja $a, b \in B$. Merkitään $a \leq b$, jos $a \wedge b = a$.

Tämä on ekvivalentti sen kanssa, että $a \vee b = b$. Nimittäin jos $a \wedge b = a$, niin absorptiosta saadaan $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$. Käänteinen väite seuraa vastaavasti. Erityisesti on huomattava, että relaatio $\leq$ kääntyy vastakkaisessa algebrassa.

Toinen huomionarvoinen seikka on se, että aina $a \wedge b \leq a$, sillä $(a \wedge b) \vee a = a$.

Lause 2.6.2. *Relaatio $\leq$ on osittainen järjestys.*

Todistus. Ensinnäkin $a \wedge a = a$, joten $a \leq a$. Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = a \wedge b = b$. Lopuksi, jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$ eli $a \leq c$. $\square$

Itse asiassa pelkästään relaation $\leq$ avulla voidaan ilmaista koko Boolean algebran rakenne.

Määritelmä 2.6.3. Olkoon P osittain järjestetty joukko. Alkio $0 \in P$ on *pohja*, jos $0 \leq p$ kaikilla $p \in P$. Alkio $1 \in P$ on *huippu*, jos $p \leq 1$ kaikilla $p \in P$.

Alkio $r \in P$ on alkioden $p \in P$ ja $q \in P$ *yhdiste* (tai *supremum*), jos $p \leq r$ ja $q \leq r$, ja lisäksi $r \leq s$ aina kun $p \leq s$ ja $q \leq s$. Alkio $r \in P$ on alkioden p ja q *kohtaus* (tai *infimum*), jos $r \leq p$ ja $r \leq q$, ja lisäksi $s \leq r$ aina kun $s \leq p$ ja $s \leq q$.

Jos 0 on joukon P pohja ja 1 on joukon P huippu, niin alkion $p \in P$ *komplementti* on sellainen alkio $q \in P$, että alkioden p ja q yhdiste on 1 ja kohtaus 0 .

Osittain järjestettyä joukkoa, jossa on pohja ja huippu ja jossa jokaisella alkioaparilla on yhdiste ja kohtaus, sanotaan *hilaksi*.

Lause 2.6.4. Olkoon B Boolean algebra. Tällöin

1. 0 on joukon B pohja ja 1 on joukon B huippu;
2. $a \vee b$ on alkioden a ja b yhdiste ja $a \wedge b$ on niiden kohtaus;
3. $\neg a$ on alkion a komplementti.

Todistus. Ensinnäkin kaikilla $a \in B$ on voimassa $0 \wedge a = 0$, joten $0 \leq a$. Vastaavasti $a \wedge 1 = a$, joten $a \leq 1$ kaikilla $a \in B$. Yhtälöistä $a \wedge (a \vee b) = a$ ja $b \wedge (a \vee b) = b$ nähdään, että $a \leq a \vee b$ ja $b \leq a \vee b$. Jos jollain $c \in B$ pätee $a \leq c$ ja $b \leq c$, niin $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = a \vee b$. Siispä $a \wedge b \leq c$. Kohtausta koskeva väite saadaan vastakkaisesta algebrasta. Viimeinen väite on lause 2.3.6. $\square$

Homomorfismi säilyttää järjestyksen: jos f on homomorfismi ja $a \leq b$, niin $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, joten $f(a) \leq f(b)$.

Määritelmä 2.6.5. Homomorfismin $f : B \rightarrow C$ *ydin* on joukko

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{a \in B \mid f(a) = 0\}.$$

Jos $a \in \text{Ker}(f)$ ja $b \leq a$, niin $b \in \text{Ker}(f)$, sillä $f(b) \leq f(a) = 0$. Toiseksi jos $a, b \in \text{Ker}(f)$, niin $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = 0 \vee 0 = 0$, siis $a \vee b \in \text{Ker}(f)$. Nämä kaksi ominaisuutta määräävät sen, millaisia joukkoja ytimet voivat olla.

Määritelmä 2.6.6. Olkoon B Boolean algebra. Osajoukko $I \subseteq B$ on *ihanne*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- I1. $0 \in I$,
- I2. jos $a \in I$ ja $b \leq a$, niin $b \in I$,
- I3. jos $a, b \in I$, niin $a \vee b \in I$.

Jos lisäksi $1 \notin I$, niin sanotaan että I on *aito ihanne*.

Renkaassa ihanteet määritellään eri tavalla. Palautetaan mieleen ihannekriteeri renkaan ihanteille.

Lause 2.6.7 (Ihannekriteeri). Olkoon R rengas ja I sen osajoukko. Silloin I on renkaan R ihanne, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- IK1. $I \neq \emptyset$,
- IK2. $a - b \in I \quad \forall a, b \in I$,
- IK3. $ra \in I$ ja $ar \in I \quad \forall r \in R, a \in I$.

Osoittautuu, että määritelmät ovat ekvivalentit.

Lause 2.6.8. Boolean algebran B osajoukko I on ihanne, jos ja vain jos se on Boolean renkaan B ihanne rengasteoreettisessa mielessä.

Todistus. Todistus on kirjoittajan oma. Osoitetaan ensin, että jokainen Boolean algebran B ihanne I on renkaan ihanne. Ensinnäkin $0 \in I$, joten $I \neq \emptyset$. Olkoot $a, b \in I$. Lemman 2.4.2 mukaan $-b = b$, joten $a - b = a + b = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$. Koska $a \wedge \neg b \in I$ ja $\neg a \wedge b \in I$, niin myös $a + b \in I$. Lopuksi aina kun $r \in B$ ja $a \in I$, niin $ra = ar = a \wedge r \leq a$, joten myös IK3 on voimassa.

Toiseen suuntaan: Olkoon I Boolean renkaan B ihanne. Ihanne on epätyhjä, joten on olemassa jokin $a \in I$. Tällöin myös $0 = a - a \in I$. Jos $a \in I$ ja $b \leq a$, niin $b = a \wedge b = ab$ ja tämä kuuluu ihanteeseen I kohdan IK3 nojalla. Lopuksi, kun $a, b \in I$, niin $a + b \in I$ ja $a \wedge b \in I$, joten $(a + b) + (a \wedge b) \in I$ ja auki laskemalla

$$\begin{aligned}
(a + b) + (a \wedge b) &= ((a + b) \wedge \neg(a \wedge b)) \vee (\neg(a + b) \wedge (a \wedge b)) \\
&= ((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)) \\
&\quad \vee (((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \wedge (a \wedge b)) \\
&= ((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b) \\
&= (\neg(a \wedge b) \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b) \\
&= (\neg(a \wedge b) \vee (a \wedge b)) \wedge ((a \vee b) \vee (a \wedge b)) \\
&= 1 \wedge (a \vee (b \vee (a \wedge b))) \\
&= a \vee b.
\end{aligned}$$

Siis $a \vee b \in I$. □

Olkoon B Boolean algebra ja I sen ihanne. *Sivuluokat* $a + I = \{a + i \mid a \in B, i \in I\}$ muodostavat *tekijäalgebran* B/I , kun määritellään

- $(a + I) \vee (b + I) = (a \vee b) + I \quad \forall a, b \in B$
- $(a + I) \wedge (b + I) = (a \wedge b) + I \quad \forall a, b \in B$
- $\neg(a + I) = \neg a + I \quad \forall a \in B$.

Tekijäalgebra B/I voitaisiin todeta Boolean algebraksi tarkistamalla, että operaatiot ovat hyvinmääritellyjä. Tämä on suoraviivainen, mutta työläs laskutoimitus. Saadaan kuitenkin vaihtoehtoinen todistus, koska B on Boolean rengas ja B/I on siis tekijärenkas. Koska renkaan B jokainen alkio on idempotentti, niin myös renkaassa B/I jokainen alkio on idempotentti. Siispä B/I on Boolean rengas ja näin ollen Boolean algebra.

Logiikan näkökulmasta voidaan ajatella, että muodostettaessa tekijäalgebra saadaan lisää tietoa. Algebrassa B on monia alkioita, joiden totuusarvoa ei tiedetä, mutta algebrassa B/I tiedetään, että kaikki ihanteen I alkiot ovat epätosia.

Lause 2.6.9. *Boolean algebran B osajoukko I on jonkin homomorfismin ydin jos ja vain jos se on ihanne.*

Todistus. On jo nähty, että ydin on ihanne. Ihanne I taas on luonnollisen homomorfismin $f : B \rightarrow B/I$, $f(a) = a + I$ ydin. $\square$

Lause 2.6.10. *Homomorfismi on injektio jos ja vain jos sen ydin on $\{0\}$.*

Todistus. Injektio voi kuvata nolllaksi korkeintaan yhden alkion, ja 0 kuvautuu aina nolllaksi. Siis injektiivisen homomorfismin ydin on $\{0\}$.

Olkoon f homomorfismi, jonka ydin on $\{0\}$. Jos $f(a) = f(b)$, niin $0 = f(a) + f(b) = f(a + b)$, joten $a + b \in \text{Ker}(f)$. Täytyy siis olla $a + b = 0$ eli $a = b$, jolloin f on injektio. $\square$

Jos $f : B \rightarrow C$ on homomorfismi ja $I = \text{Ker}(f)$, niin on olemassa homomorfismi $\bar{f} : B/I \rightarrow C$, $\bar{f}(a + I) = f(a)$. Kuvauksen $\bar{f}$ ydin on $\{0\}$; siis $\bar{f}$ on injektio. Erityisesti jos f on surjektio, niin myös $\bar{f}$ on surjektio, jolloin $\bar{f}$ on itse asiassa isomorfismi.

Esimerkki 2.6.11. Olkoon B Boolean algebra. Pienin alkion $a \in B$ sisältävä ihanne on $\langle a \rangle = \{b \in B \mid b \leq a\}$. Tällaista yhden alkion generoimaa ihannetta sanotaan *pääihanteeksi*.

Esimerkki 2.6.12. Olkoon I ihanne, jonka generoi äärellinen määrä alkioita $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tällöin I on pääihanne, sillä $I = \langle a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \rangle$.

Esimerkki 2.6.13. Olkoot X ja Y joukkoja ja $f : X \rightarrow Y$ kuvaus. Tällöin on olemassa homomorfismi $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, joka kuvaa kunkin joukon Y osajoukon sen alkukuvaksi kuvauksessa f . Homomorfismin f^{-1} ydin koostuu kaikista niistä joukoista $A \subseteq Y$, jotka eivät ole minkään joukon X alkion kuvia. Siispä kuvajoukon $f(X)$ komplementti $Y \setminus f(X)$ generoi ihanteen $\text{Ker}(f)$. Kuvaus f^{-1} on surjektio jos ja vain jos f on injektio.

Esimerkki 2.6.14. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f : X \rightarrow Y$ jatkuva kuvaus. Sekä avoimen että suljetun joukon alkukuva on sekä avoin että suljettu, joten on olemassa homomorfismi $f^{-1} : B(Y) \rightarrow B(X)$. Edellisessä

esimerkissä ytimen generoi joukko $Y \setminus f(X)$, mutta tämä ei välttämättä kuulu joukkoon $B(Y)$. Ydin on $\text{Ker}(f^{-1}) = \{A \in B(Y) \mid A \cap f(X) \neq \emptyset\}$, mikä ei välttämättä ole pääihanne.

Esimerkki 2.6.15. Olkoon X joukko. Kaikki joukon X äärelliset osajoukot muodostavat ihanteen fin , joka on aito tarkalleen silloin kun X on ääretön. Tekijäalgebrassa $\mathcal{P}(X)/\text{fin}$ samaistetaan ne osajoukot, jotka eroavat toisistaan äärellisen monen alkion verran.

Lopuksi katsotaan, millaisia ovat vastakkaisen algebran ihanteet.

Määritelmä 2.6.16. Olkoon B Boolean algebra. Osajoukko $F \subseteq B$ on *filtteri*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

F1. $1 \in F$,

F2. jos $a \in F$ ja $a \leq b$, niin $b \in F$,

F3. jos $a, b \in F$, niin $a \wedge b \in F$.

Jos lisäksi $0 \notin F$, niin sanotaan että F on *aito* filtteri.

Joukko on filtteri jos ja vain jos se on $f^{-1}(\{1\})$ jollekin homomorfismille f . Joukko F on filtteri jos ja vain jos $\{\neg a \mid a \in F\}$ on ihanne. Koska filtteri on ihanne vastakkaisessa algebrassa, filttäreitä koskevat väitteet riittää todistaa ihanteille ja päinvastoin.

3 Stonen esityslause

3.1 Ultrafiltterit

Kuvitellaan, että on olemassa ”todellisuus”, jossa jokainen väite on joko tosi tai epätosi, siis 1 tai 0. Boolean algebra B voidaan ajatella kokoelmaksi epätäydellistä tietoa; jokainen alkio tosiaan on joko 1 tai 0, mutta totuusarvoa ei tiedetä. Kukin mahdollinen todellisuus on siis algebra B varustettuna lisätiedolla, joka kertoo kunkin alkion totuusarvon. Tämä lisätieto antaa siis homomorfismin $f : B \rightarrow \mathbf{2}$.

Nyt algebran B alkiot voidaan jakaa kahteen joukkoon: ihanteeseen $f^{-1}(\{0\})$, joka sisältää kaikki epätodet väitteet, ja filteriin $f^{-1}(\{1\})$, joka sisältää kaikki todet väitteet. Homomorfismin $f : B \rightarrow \mathbf{2}$ ydin on niin sanottu *maksimaalinen ihanne*, ja vastaavaa filteriä sanotaan *ultrafiltteriksi*. Toisin sanoen ihanne (filtteri) on maksimaalinen (ultrafiltteri) jos ja vain jos se sisältää tarkalleen yhden alkioista a ja $\neg a$ kaikilla $a \in B$.

Lause 3.1.1. *Aito ihanne (filtteri) on maksimaalinen ihanne (ultrafiltteri) jos ja vain jos se ei sisälly mihinkään muuhun aitoon ihanteeseen (filtteriin).*

Todistus. Riittää todistaa ihanteita koskeva väite. Olkoon I maksimaalinen ihanne ja $I \subset J$. Tällöin on olemassa jokin sellainen alkio $b \in J$, että $b \notin I$. Maksimaalisuuden nojalla $\neg b \in I$, jolloin siis $\neg b \in J$. Jos J on ihanne, niin $b \vee \neg b = 1 \in J$, jolloin J ei ole aito.

Olkoon sitten I jokin ei-maksimaalinen ihanne. Tällöin on olemassa sellainen alkio a , että $a, \neg a \notin I$. Olkoon $J = \{b \mid b \leq a \vee i \text{ jollakin } i \in I\}$. Selvästi J on ihanne, $I \subseteq J$ ja $a \in J$. Oletetaan, että J ei ole aito. Tällöin $1 \leq a \vee i$ jollain $i \in I$. Toisaalta 1 on huippu, joten $a \vee i \leq 1$. Näin ollen $a \vee i = 1$. Tällöin $\neg a = \neg a \wedge (a \vee i) = \neg a \wedge i \leq i$ eli $\neg a \in I$, mikä on ristiriita, joten J on aito. $\square$

Maksimaaliset ihanteet ja ultrafiltterit ovat aina olemassa. Tämän osoittamiseksi palautetaan mieleen Zornin lemma.

Lause 3.1.2 (Zornin lemma). *Olkoon A epätyhjä osittain järjestetty joukko. Jos joukon A jokaisella täydellisesti järjestetyllä osajoukolla (eli ketjulla)*

on yläraja joukossa A , niin joukossa A on ainakin yksi maksimaalinen alkio.

Lause 3.1.3 (Boolean algebroiden alkuihannelause). *Jokainen aito ihanne (filtteri) sisältyy maksimaaliseen ihanteeseen (ultrafiltteriin).*

Todistus. Todistus on oleellisesti sama kuin renkaille. Olkoon I aito ihanne ja olkoon $P = \{J \mid I \subseteq J, J \text{ on aito ihanne}\}$. Koska $I \in P$, niin P on epätyhjä. Kokoelma P on osittain järjestetty sisältymisrelaation suhteen. Olkoon $\{J_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{I}\}$ jokin epätyhjä ketju kokoelmassa P . Tällä ketjulla on yläraja $U = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{I}} J_\gamma$. Näytetään, että $U \in P$.

Ihanne I sisältyy jokaiseen ihanteeseen J_γ ja näin ollen niiden unioniin U . Tällöin myös $0 \in U$. Olkoon $a \in U$. Tällöin $a \in J_\alpha$ jollain $\alpha \in \mathcal{I}$. Jos $b \leq a$, niin $b \in J_\alpha$. Siispä $b \in U$. Olkoon sitten $a, b \in U$. On olemassa sellaiset $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$, että $a \in J_\alpha$ ja $b \in J_\beta$. Nyt $a \vee b \in J_\alpha \cup J_\beta \subseteq U$. Alkio 1 ei kuulu mihinkään ihanteista J_γ , eikä siis niiden unioniin U , joten U on aito.

Nyt Zornin lemmän oletus on voimassa ja väite seuraa. $\square$

Seuraus 3.1.4. *Boolean algebrassa $B \neq \{0\}$ on ainakin yksi maksimaalinen ihanne (ultrafiltteri).*

Todistus. Algebralla B on aito ihanne $\{0\}$. Väite seuraa edellisestä lauseesta. $\square$

Vaikka alkuihannelauseen todistukseen tässä käytettiin Zornin lemmaa, ei alkuihannelause itse asiassa vaadi valinta-aksiooman koko vahvuutta [13].

Määritelmä 3.1.5. Olkoon B Boolean algebra. Algebran B ultrafilttereiden kokoelmaa $S(B)$ sanotaan algebran B *Stonen avaruudeksi*.

Jos ajatellaan, että Boolean algebra on kokoelma epätäydellistä tietoa, niin vastaava Stonen avaruus sisältää kaikki annetun tiedon perusteella mahdolliset todellisuudet.

Lause 3.1.6. *Olkoon B Boolean algebra. Määritellään kuvaus $f : B \rightarrow \mathcal{P}(S(B))$ siten, että $f(a) = \{U \in S(B) \mid a \in U\}$ (siis $f(a)$ koostuu niistä maailmoista, joissa a on tosi). Tällöin f on injekttiivinen homomorfismi.*

Todistus. Jos $B = \{0\}$, niin $S(B) = \emptyset$, $f(0) = \emptyset$ ja f on isomorfismi. Voidaan siis olettaa, että algebrassa B on vähintään kaksi alkioa ja että ultrafiltterit ja maksimaaliset ihanteet ovat olemassa.

Näytetään ensin, että f on homomorfismi. Ensinnäkin täytyy olla voimassa $f(a \vee b) = f(a) \cup f(b)$. Jos $a \in U$, niin $a \leq a \vee b$, joten $a \vee b \in U$, ja vastaavasti jos $b \in U$. Näin ollen $f(a) \cup f(b) \subseteq f(a \vee b)$. Täytyy vielä osoittaa, että $f(a \vee b) \subseteq f(a) \cup f(b)$. Olkoon U ultrafiltri ja $a \vee b \in U$. Tällöin pitäisi siis olla $a \in U$ tai $b \in U$. Tehdään vastaoletus: $a, b \notin U$. Tällöin $\neg a, \neg b \in U$, joten $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \in U$, mikä on ristiriita.

Vastaavasti saadaan $f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$. Selvästikin $f(\neg a) = S(B) \setminus f(a)$. Siispä f on homomorfismi.

Injektiivisyyden osoittamiseksi riittää lauseen 2.6.10 nojalla osoittaa, että ydin on $\{0\}$. Jos $f(a) = \emptyset$, niin a ei kuulu mihinkään ultrafiltriin, eikä $\neg a$ kuulu mihinkään maksimaaliseen ihanteeseen. Jos $\neg a \neq 1$, niin $\langle \neg a \rangle$ on aito ihanne, joka siis sisältyy maksimaaliseen ihanteeseen. Siispä $\neg a = 1$ eli $a = 0$. $\square$

Seuraus 3.1.7 (Stonen esityslause). *Jokainen Boolean algebra on isomorfinen jonkin joukkojen algebran kanssa.*

Todistus. Edellisen lauseen funktiosta f saadaan isomorfismi rajoittamalla maalijoukko joukoksi $f(B)$. $\square$

Seuraus 3.1.8. *Kun propositiot P ja Q ovat loogisesti ekvivalentit, yhtälö $P = Q$ on tosi mielivaltaisessa Boolean algebrassa, kun propositiomuuttujiksi sijoitetaan Boolean algebran alkioita ja konnektiivit tulkitaan kyseisen algebran operaatioiksi.*

Todistus. Jokainen Boolean algebra on isomorfinen jonkin joukon X potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ alialgebran kanssa. Riittää siis osoittaa, että loogisia ekvivalensseja vastaavat yhtälöt ovat tosia algebrassa $\mathcal{P}(X)$. Jokainen alkio $x \in X$ määrää homomorfismin $f_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbf{2}$, missä $f_x(A) = 1$, jos $x \in A$, ja $f_x(A) = 0$ muulloin. Jos $P \equiv Q$, ja A ja B ovat näitä propositiota jollakin sijoituksella vastaavat joukot, niin $f_x(A) = f_x(B)$ kaikilla $x \in X$. Tällöin joukoilla A ja B on samat alkiot eli $A = B$ sijoituksesta riippumatta. $\square$

Seuraus 3.1.9. *Jokainen looginen ekvivalenssi on algebrallisesti johdettavissa Boolean algebran aksioomista.*

Nyt on siis näytetty, että jokainen Boolean algebra on vahva Boolean algebra ja Boolean algebran aksioomat riittävät ilmaisemaan operaatioiden loogiset merkitykset.

Esimerkki 3.1.10. Olkoon $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ joukkojen algebra. Seurauksen 3.1.8 todistuksen mukaan jokainen alkio $x \in X$ määrää homomorfismin $f_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbf{2}$. Samalla saadaan ultrafiltteri $\{a \in B \mid x \in a\}$. Jos $B = \mathcal{P}(X)$, niin tämä on *pääultrafiltteri*, siis yhden alkion generoima ultrafiltteri $\{b \in B \mid \{x\} \subseteq b\}$ (vrt. pääihanne, esim. 2.6.11).

Jos X on ääretön, on olemassa muitakin ultrafilttereitä kuin pääultrafilttereitä. Olkoon F filtteri, joka koostuu kaikista niistä äärettömän joukon X osajoukoista, joiden komplementti on äärellinen. Boolean algebroiden alkuihannelauseen mukaan filtteri F sisältyy johonkin ultrafiltteriin. Tämä ultrafiltteri ei voi sisältää yhden alkion joukkoja eikä siis voi olla pääultrafiltteri. Kyseistä ultrafiltteriä ei voi eksplisiittisesti konstruoida, sillä Boolean algebroiden alkuihannelausetta ei voi todistaa pelkästään ZF-aksioomista.

Esimerkki 3.1.11. Olkoon X epätyhjä joukko propositiomuuttujia ja $F(X)$ niistä muodostuvien propositioiden joukko modulo looginen ekvivalenssi. Mikä tahansa funktio $f : X \rightarrow \mathbf{2}$ voidaan laajentaa homomorfismiksi $F(X) \rightarrow \mathbf{2}$ korvaamalla kukin $p \in X$ sen kuvalla $f(p)$ ja evaluoimalla lauseke. Näin saatu homomorfismi on hyvin määritelty, koska jos propositiot ovat loogisesti ekvivalentit, niin niillä on aina sama totuusarvo, joten ne kuvautuvat samaksi alkioksi algebrassa $\mathbf{2}$. Käymällä läpi kaikki mahdolliset funktiot f saadaan kaikki algebran $F(X)$ ultrafiltterit. Jokaista tällaista funktiota, ja näin ollen myös jokaista ultrafiltteriä, vastaa yksikäsitteinen alkio joukosta 2^X .

Stonen avaruus $S(B)$ on luonnostaan topologinen avaruus. Avaruus $S(B) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ja esimerkin 2.5.6 mukaan $\mathcal{P}(B) \simeq \mathbf{2}^B$. Annetaan algebralle $\mathbf{2}$ diskreetti topologia, jolloin $\mathbf{2}^B$ saa tulotopologian ja $S(B)$ avaruuden $\mathbf{2}^B$ aliavaruuden topologian.

Ekvivalentisti voidaan avaruuden $S(B)$ avoimiksi joukoiksi ottaa kokoelmat

$$C_a = \{U \in S(B) \mid a \in U\}.$$

Äärellinen leikkaus $C_{a_1} \cap C_{a_2} \cap \cdots \cap C_{a_n} = C_{a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n}$, ja näin ollen kaikki avoimet joukot saadaan kokoelmien C_a unioneina, siis $\{C_a \mid a \in B\}$ on avaruuden kanta. Joukot C_a ovat paitsi avoimia, myös suljettuja, sillä $S(B) \setminus C_a = C_{\neg a}$, mikä on avoin joukko. Joukkojen C_a mielivaltaisen unionin komplementti on vastaavien joukkojen $C_{\neg a}$ leikkaus. Siispä kaikki suljetut joukot saadaan joukkojen C_a leikkauksina.

Lause 3.1.12. *Olko B Boolean algebra. Tällöin $S(B)$ on kompakti täysin epäyhtenäinen Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Jos $U, V \in S(B)$ ovat erisuuret, niin voidaan valita $a \in U \setminus V$, jolloin $U \in C_a$ ja $V \in C_{\neg a}$. Joukot C_a ja $C_{\neg a}$ ovat erilliset avoimet joukot, joten $S(B)$ on Hausdorffin avaruus. Joukkojen C_a ja $C_{\neg a}$ unioni on koko avaruus $S(B)$, joten $S(B)$ on täysin epäyhtenäinen.

Olko $\{D_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ kokoelma suljettuja joukkoja $D_\alpha \in S(B)$, joiden kaikki äärelliset leikkaukset ovat epätyhjiä. Kompaktisuuden osoittamiseksi riittää osoittaa, että leikkaus $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} D_\alpha$ on epätyhjä. Kaikki suljetut joukot saatiin joukkojen C_a leikkauksina. Jokaista indeksia $\alpha \in \mathcal{I}$ vastaa siis jokin $a_\alpha \in B$ siten, että $D_\alpha = C_{a_\alpha}$. Olkoot $\alpha_i \in \mathcal{I}$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tällöin äärellinen leikkaus $C_{a_{\alpha_1}} \cap \cdots \cap C_{a_{\alpha_n}} \neq \emptyset$ eli lauseen 3.1.6 isomorfismin nojalla $a_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge a_{\alpha_n} \neq 0$. Olkoot F alkioiden a_α generoima filtti. Toisin sanoen F sisältää ne alkiot $b \in B$, joille pätee $b \geq a_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge a_{\alpha_n}$ joillain $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Koska $0 \notin F$, niin F voidaan laajentaa ultrafilteriksi U . Nyt $U \in C_{a_\alpha}$ kaikilla a_α eli leikkaus $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} C_{a_\alpha}$ on epätyhjä. $\square$

Lause 3.1.13. *Olko X epätyhjä joukko propositionaalisuuttujia. Avaruudet $S(F(X))$ ja $\mathbf{2}^X$ ovat homeomorfiset.*

Todistus. Todistus on kirjoittajan oma. Esimerkissä 3.1.11 saatiin bijektio $\beta : S(F(X)) \rightarrow \mathbf{2}^X$. Olko V avoin joukko avaruuden $\mathbf{2}^X$ kannasta. Järjestystä vaille

$$V = \underbrace{\{1\} \times \{1\} \times \cdots \times \{1\}}_{m \text{ kpl}} \times \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{n \text{ kpl}} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \cdots$$

Joillain propositionimuuttujilla $p_i \in X$, $i = 1, \dots, m+n$ joukon V alkukuva

$$\begin{aligned}\beta^{-1}(V) &= \{U \in S(F(X)) \mid p_1, p_2, \dots, p_m \in U, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{m+n} \notin U\} \\ &= C_{p_1} \cap C_{p_2} \cap \dots \cap C_{p_m} \cap C_{\neg p_{m+1}} \cap C_{\neg p_{m+1}} \cap C_{\neg p_{m+2}} \cap \dots \cap C_{\neg p_{m+n}} \\ &= C_{p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_m \wedge \neg p_{m+1} \wedge \neg p_{m+2} \wedge \dots \wedge \neg p_{m+n}},\end{aligned}$$

mikä on avoin joukko. Siis β on jatkuva.

Jos X on äärellinen joukko, niin avaruus 2^X on diskreetti ja näin olen Hausdorffin avaruus. Jos taas X on ääretön, niin 2^X on homeomorfinen Cantorin avaruuden kanssa ja taas Hausdorffin avaruus. Siispä β on jatkuva bijektio kompaktilta avaruudelta Hausdorffin avaruudelle eli lauseen 1.2.35 nojalla homeomorfismi. $\square$

3.2 Stonen duaalisuus

Seuraavaksi nähdään, kuinka Boolean algebra on itse asiassa ekvivalentti Stonen avaruutensa kanssa.

Lause 3.2.1. *Olkoon B Boolean algebra. Tällöin kuvaus $f : B \rightarrow B(S(B))$, $f(a) = C_a$ on isomorfismi.*

Todistus. Lauseen 3.1.6 mukaan f on injektiivinen homomorfismi. Riittää siis näyttää, että f on surjektio. Olkoon $C \in B(S(B))$ mielivaltainen. Koska C on avoin, $C = \bigcup C_{a_i}$ joillain kannan joukoilla C_{a_i} . Avaruus $S(B)$ on kompakti, joten C on kompakti lauseen 1.2.23 nojalla. Siis $C = C_{a_1} \cup \dots \cup C_{a_n}$ äärellisen monella joukolla C_{a_i} . Tällöin $C = C_{a_1 \vee \dots \vee a_n} = f(a_1 \vee \dots \vee a_n)$. $\square$

Lause 3.2.2. *Olkoon S kompakti täysin epäyhtenäinen Hausdorffin avaruus. Tällöin S ja $S(B(S))$ ovat homeomorfiset.*

Todistus. Jokaista pistettä $p \in S$ vastaa yhden pisteen joukko $\{p\}$, joka puolestaan generoi ultrafiltterin potenssijoukossa $\mathcal{P}(S)$. Jos ultrafiltterin joukoista otetaan ainoastaan ne, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja, saadaan ultrafilatteri joukossa $B(S)$. Näin saadaan luonnollinen kuvaus $g : S \rightarrow S(B(S))$. Avaruuden $S(B(S))$ avoimet joukot ovat joukkojen C_u unionreja, missä $u \in B(S)$. Koska u on avoin ja $g^{-1}(C_u) = u$, niin g on

jatkuva. Koska S on kompakti ja $S(B(S))$ on Hausdorffin avaruus, niin homeomorfisuuden osoittamiseen riittää lauseen 1.2.35 nojalla osoittaa, että g on bijektio.

Koska S on kompakti ja g jatkuva, lauseen 1.2.33 mukaan $g(S)$ on kompakti. Tällöin $g(S)$ on suljettu lauseen 1.2.27 nojalla. Jos voidaan näyttää, että $g(S)$ on tiheä, sen täytyy silloin olla koko avaruus $S(B(S))$, jolloin g on siis surjektio. Olkoon C_u jokin avaruuden $S(B(S))$ kannan joukko. Tällöin $u \subseteq S$ on epätyhjä ja $u \in B(S)$. Jos $x \in u$, niin joukon $\{x\}$ generoima ultrafiltteri avaruudessa $B(S)$ sisältää myös joukon u . Siispä $g(x) \in C_u$, mistä seuraa, että joukon $g(S)$ leikkaus kaikkien epätyhjien avoimien joukkojen kanssa on epätyhjä, toisin sanoen $g(S)$ on tiheä ja g on siis surjektio.

Olkoot x ja y avaruuden S kaksi eri pistettä. Koska S on epäyhtenäinen, voidaan valita $u \in B(S)$ siten, että $x \in u$ ja $y \notin u$. Nyt $g(x) \in C_u$ ja $g(y) \notin C_u$; siispä $g(x) \neq g(y)$ ja g on siis injektio. $\square$

Yllä esitetyn homeomorfismin perusteella voidaan tästä eteenpäin kompakteja täysin epäyhtenäisiä Hausdorffin avaruuksia kutsua Stonen avaruuksiksi.

Seuraus 3.2.3. *Jokainen Boolean algebra on (homeomorfiaa vaille) yksikäsitteisen Stonen avaruuden avoimien ja suljettujen joukkojen muodostama algebra. Jokainen Stonen avaruus on (isomorfiaa vaille) yksikäsitteisen Boolean algebran Stonen avaruus.*

Todistus. Jos $B = B(S)$ jollekin Stonen avaruudelle S , niin S ja $S(B(S)) = S(B)$ ovat homeomorfiset. Jos $S = S(B)$ jollekin Boolean algebralle B , niin $B \simeq B(S(B)) = B(S)$. $\square$

Seuraus 3.2.4. *Annetaan diskreetti topologia algebralle $\mathbf{2}$. Olkoon X epätyhjä joukko propositionmuuttujia ja $F(X)$ niistä muodostuvien kaavojen joukko. Tällöin $F(X) \simeq B(\mathbf{2}^X)$. Erityisesti jos X on numeroituvasti ääretön, niin $F(X) \simeq B(G)$, missä G on Cantorin avaruus.*

Todistus. Ensinnäkin $F(X) \simeq B(S(F(X)))$. Lauseen 3.1.13 nojalla $S(F(X))$ ja $\mathbf{2}^X$ ovat homeomorfiset. $\square$

Esimerkissä 2.6.14 nähtiin, että topologisten avaruuksien välinen jatkuva kuvaus $f : S \rightarrow T$ antaa homomorfismin $f^* = f^{-1} : B(T) \rightarrow B(S)$. Myös toiseen suuntaan Boolean algebroidien välinen homomorfismi $\varphi : B \rightarrow C$ antaa homomorfismin $\varphi^* : S(C) \rightarrow S(B)$. Olkoon $\psi : C \rightarrow \mathbf{2}$ homomorfismi ja U sitä vastaava ultrafiltteri. Yhdistetty kuvaus $\psi \circ \varphi : B \rightarrow \mathbf{2}$ antaa ultrafiltterin $U^* \in S(B)$. Kuvaus φ^* määräytyy nyt seuraavasti:

$$\varphi^*(U) = U^* = \{x \in B \mid (\psi \circ \varphi)(x) = 1\} = \{x \in B \mid \varphi(x) \in U\} = \varphi^{-1}(U).$$

Kaikilla $a \in B$ on voimassa

$$\begin{aligned} U \in (\varphi^*)^{-1}(C_a) &\Leftrightarrow \varphi^*(U) \in C_a \\ &\Leftrightarrow a \in \varphi^*(U) = \varphi^{-1}(U) \\ &\Leftrightarrow \varphi(a) \in U \\ &\Leftrightarrow U \in C_{\varphi(a)}. \end{aligned}$$

Siispä $(\varphi^*)^{-1}(C_a) = C_{\varphi(a)}$, ja φ^* on jatkuva.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ \eta_B \downarrow & & \downarrow \eta_C \\ B(S(B)) & \xrightarrow{\varphi^{**}} & B(S(C)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ g_S \downarrow & & \downarrow g_T \\ S(B(S)) & \xrightarrow{f^{**}} & S(B(T)) \end{array}$$

Olkoon $\varphi : B \rightarrow C$ mikä tahansa homomorfismi ja olkoot $\eta_B : B \rightarrow B(S(B))$ ja $\eta_C : C \rightarrow B(S(C))$ lauseen 3.2.1 mukaiset isomorfismit. Kuvaukset φ ja φ^{**} vastaavat toisiaan yllä olevan kuvan esittämällä tavalla, siis $\eta_C \circ \varphi = \varphi^{**} \circ \eta_B$. Jos nimittäin $a \in B$ on mielivaltainen, niin

$$\eta_C(\varphi(a)) = C_{\varphi(a)} = (\varphi^*)^{-1}(C_a) = \varphi^{**}(\eta_B(a)).$$

Samanlainen vastaavuus saadaan jatkuville kuvauksille ja homeomorfis-meille. Olkoon $f : S \rightarrow T$ on jatkuva ja olkoot $g_S : S \rightarrow S(B(S))$ ja $g_T : T \rightarrow S(B(T))$ lauseen 3.2.2 mukaiset homeomorfismit. Havaitaan, että kaikilla $a \in S$ pätee

$$\begin{aligned} f^*(\{t \in B(T) \mid f(a) \in t\}) &= \{f^{-1}(t) \in B(S) \mid t \in B(T), f(a) \in t\} \\ &= \{s \in B(S) \mid a \in s\}, \end{aligned}$$

josta nyt seuraa

$$\begin{aligned} f^{**}(g_S(a)) &= (f^*)^{-1}(\{s \in B(S) \mid a \in s\}) \\ &= \{t \in B(T) \mid f(a) \in t\} \\ &= g_T(f(a)). \end{aligned}$$

3.3 Lisähavaintoja

Olkoon B Boolean algebra ja D suljettu joukko Stonen avaruudessa $S(B)$. Tällöin $D = \bigcap_{a \in \mathcal{I}} C_a$ jollain indeksijoukolla $\mathcal{I} \subseteq B$, siis $D = \{U \in S(B) \mid \mathcal{I} \subseteq U\}$. Olkoon $F = \{b \in B \mid D \subseteq C_b\}$. Tämä on filtteri ja D on tarkalleen filtteriä F laajentavien ultrafiltterien joukko.

Toiseen suuntaan: Jos $\mathcal{I} \subseteq B$ on filtteri, niin $D = \bigcap_{a \in \mathcal{I}} C_a = \{U \in S(B) \mid \mathcal{I} \subseteq U\}$ on suljettu joukko. Oletetaan, että $D \subseteq C_b$ jollain $b \in B$. Tällöin täytyy olla $b \in \mathcal{I}$; muutoin olisi olemassa joukon $\mathcal{I} \cup \{\neg b\}$ generoima filtteri, joka laajenee ultrafiltteriksi V , jolle $b \notin V$, mutta $\mathcal{I} \subseteq V$. Tällöin $V \notin C_b$, mutta $V \in D$, vastoin oletusta $D \subseteq C_b$. Siispä $\mathcal{I}$ on tarkalleen joukko $\{b \in B \mid D \subseteq C_b\}$. Algebran B filttäreiden ja avaruuden $S(B)$ suljettujen joukkojen välillä on siis luonnollinen bijektio.

Mikä tahansa aliavaruus $D \subseteq S(B)$ on automaattisesti täysin epäyhtenäinen Hausdorffin avaruus. Jos D on suljettu, se on kompakti ja näin ollen Stonen avaruus. Olkoon $F = \{b \in B \mid D \subseteq C_b\}$ ja $I = \{\neg b \in B \mid b \in F\}$. Muodostettaessa tekijäalgebra B/I , jäljelle jäävät tarkalleen ne mahdolliset todellisuudet, joissa kukin $\neg b \in I$ on epätosi, siis kukin $b \in F$ on tosi. Näitä todellisuuksia vastaavat kaikki ne ultrafiltterit $U \in S(B)$, joille $F \subseteq U$, siis D . Siispä Stonen avaruuden suljetut aliavaruudet vastaavat Boolean algebran tekijäalgebroida: $D \simeq B/I$.

Seuraavat kaksi lausetta ovat lähteestä [14].

Lause 3.3.1. *Olkoon B Boolean algebra. Tällöin kaikkien algebran B pääultrafilttereiden leikkaus on $\{1\}$.*

Todistus. Alkio 1 sisältyy kaikkiin ultrafilttereihin, joten se sisältyy varmasti myös pääultrafilttereiden leikkaukseen. Algebralle B pätee $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ jollain

joukolla X . Joukko $F_x = \{A \in B \mid x \in A\}$ on pääultrafiltteri kaikilla $x \in X$. Jos $A \in \bigcap_{x \in X} F_x$, niin $x \in A$ kaikilla $x \in X$ eli $A = X$. Nyt tiedetään, että kaikkien pääultrafilttereiden leikkaus on $\{1\}$. $\square$

Lause 3.3.2. *Olkoot A ja B Boolean algebroita ja $f : A \rightarrow B$ ja $g : A \rightarrow B$ homomorfismeja. Jos kaikilla homomorfismeilla $h : B \rightarrow \mathbf{2}$ pätee $h \circ f = h \circ g$, niin $f = g$.*

Todistus. Jos kaikilla $h : B \rightarrow \mathbf{2}$ pätee $h(f(x)) = h(g(x))$ kaikilla $x \in B$, niin erityisesti $h(f(x)) = 1$ tarkalleen silloin kun $h(g(x)) = 1$. Edelleen siis kaikille ultrafilttereille $U \in S(B)$ pätee $f(x) \in U$ jos ja vain jos $g(x) \in U$. Koska tämä pätee myös pääultrafilttereille ja edellisen lauseen nojalla niiden leikkaus on $\{1\}$, niin $f(x) = 1$ silloin ja vain silloin kun $g(x) = 1$. Siispä $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A$. $\square$

3.4 Kategoriateoriaa

Kirjoitetaan lopuksi saadut tulokset *kategoriateorian* kielellä. Nyt käsiteltävät ”joukot” eivät välttämättä ole joukkoja ZFC-joukko-opissa. Käytetään näistä ”joukoista” nimitystä *luokka*.

Kategoria $\mathcal{C}$ koostuu seuraavista osista:

- $\text{Ob}(\mathcal{C})$: Luokka *objekteja*.
- $\mathcal{C}(A, B)$: Jokaista paria $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ kohti on luokka *morfismeja*. Jos $f \in \mathcal{C}(A, B)$, niin voidaan merkitä $f : A \rightarrow B$.

Olkoot $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Kaikille morfismeille $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ voidaan muodostaa *yhdistetty morfinismi* $gf : A \rightarrow C$. Jokaista $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ kohti on olemassa *identiteettimorfismi* $1_A : A \rightarrow A$. Nämä toteuttavat seuraavat aksioomat:

1. $f(gh) = (fg)h$ kaikilla f, g, h joilla lauseke on määritelty;
2. $1_B f = f = f 1_A$ kaikilla $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f : A \rightarrow B$.

Intuitiivisesti ajateltuna kategoria koostuu tiettyä tyyppiä olevien maattisten struktuurien luokasta ja näiden struktuurien välisistä rakenteen säilyttävistä kuvauksista. Taulukossa 1 on esimerkkejä juuri tällaisista kategorioista.

Taulukko 1: Esimerkkejä kategorioista.

Kategorian nimi	Objektit	Morfismit
Set	kaikki joukot	kaikki kuvaukset
Grp	kaikki ryhmät	kaikki ryhmähomomorfismit
Bool	kaikki Boolean algebrat	kaikki homomorfismit
Top	kaikki topologiset avaruudet	kaikki jatkuvat kuvaukset
Stone	kaikki Stonen avaruudet	kaikki jatkuvat kuvaukset

Jos morfismeille $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow A$ pätee $fg = 1_B$ ja $gf = 1_A$, niin sanotaan, että f ja g ovat toistensa *käänteismorfismit*. Morfismi, jolla on käänteismorfismi, on *isomorfismi*.

Siinä missä Boolean algebralla B on vastakkainen algebra B^{op} , kategorialla $\mathcal{C}$ on aina vastakkainen kategoria $\mathcal{C}^{op}$, missä $\text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, mutta kaikki morfismit vaihtavat suuntaa; siis $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$ kaikilla objekteilla $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Määritelmä 3.4.1. Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategorioita. *Kovariantti funktori* (tai lyhyemmin pelkkä *funktori*) on kuvaus $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, joka koostuu kuvauksesta $F_0 : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ ja kuvauksista $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B))$, jotka säilyttävät identiteetin ja yhdistetyt morfismit: $F(1_A) = 1_{F(A)}$ ja $F(fg) = F(f)F(g)$. *Kontravariantti funktori* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ on kovariantti funktori $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$, siis morfismit kääntävä funktori.

Huomataan, että kontravariantti funktori kääntää yhdistetyn morfismin suunnan: $F(fg) = F(g)F(f)$.

Esimerkki 3.4.2. Olkoon kategoria $\mathcal{C}$ mikä tahansa taulukon 1 kategorioista. Tällöin on olemassa *hajamielinen funktori* $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, joka kuvaa struktuurin joukoksi.

Esimerkki 3.4.3. Kaikki kategoriat muodostavat kategorian $\mathbf{Cat}$, missä morfismeina toimivat funktorit.

Esimerkki 3.4.4. Operaatio B , joka kuvaa mielivaltaisen Stonen avaruuden S sekä avoimien että suljettujen joukkojen kokoelmaksi $B(S)$ on kontravariantti funktori $B : \mathbf{Stone} \rightarrow \mathbf{Bool}$. Stonen avaruuksien välisestä jatkuvasta kuvauksesta $f : S \rightarrow T$ saadaan kuvaus $B(f) = f^* : B(T) \rightarrow B(S)$, joka säilyttää identiteetit ja yhdistetyt morfismit.

Esimerkki 3.4.5. Operaatio S , joka kuvaa mielivaltaisen Boolean algebran B Stonen avaruudeksi $S(B)$ on kontravariantti funktori $S : \mathbf{Bool} \rightarrow \mathbf{Stone}$. Homomorfismista $\varphi : B \rightarrow C$ saadaan kuvaus $S(\varphi) = \varphi^* : S(C) \rightarrow S(B)$, joka säilyttää identiteetit ja yhdistetyt morfismit.

Määritelmä 3.4.6. Olkoot $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ja $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktoreita. *Luonnollinen kuvaus* $\eta : F \rightarrow G$ liittää jokaiseen objektiin $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ morfismiin $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ siten, että millä tahansa $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ kaikille morfismeille $f : A \rightarrow B$ on voimassa $\eta_B F(f) = G(f) \eta_A$. Jos kukin η_X on isomorfismi, niin η on *luonnollinen isomorfismi*.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

Luonnollisesti isomorfiset funktorit voidaan hyvin samaistaa. Itse asiassa funktorit muodostavat kategorian, jossa morfismeina ovat luonnolliset kuvaukset ja isomorfismeina luonnolliset isomorfismit.

Määritelmä 3.4.7. Kategorioiden $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ välinen *ekvivalenssi* koostuu kahdesta funktorista $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ja $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, ja kahdesta luonnollisesta isomorfismista $\varepsilon : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow FG$ ja $\eta : GF \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$. Kategorioiden $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ välinen *duaalisuus* on ekvivalenssi kategorioiden $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}^{op}$ välillä.

Nyt Stonen esityslause voidaan ilmaista kategoriateoreettisesti.

Lause 3.4.8. *Kategoriat $\mathbf{Bool}$ ja $\mathbf{Stone}$ ovat duaaliset.*

Vastaavia duaalisuuksia saadaan Stonen esityslauseen yleistyksenä monien muidenkin osittain järjestettyjen joukkojen ja topologisten avaruuksien välille. Näitä yleistyksiä kutsutaan *Stonen duaalisuuksiksi*. Stonen duaalisuudet toimivat perustana *pisteettömälle topologialle*, topologian haaralle, jossa topologisia avaruuksia käsitellään viittaamatta lainkaan avaruuksien pisteisiin.

Kirjallisuutta

- [1] M. H. Stone: *The Theory of Representations of Boolean Algebras*. Transactions of the American Mathematical Society 40: 37-111, 1936
- [2] K. Kuratowski: *Topology Volume I*. Academic Press, New York, 1966
- [3] K. Kuratowski: *Topology Volume II*. Academic Press, New York, 1968
- [4] Wikimedia Commons: *File:Topological space examples.svg*, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Topological_space_examples.svg&oldid=157015172" (vierailtu viimeksi 28.6.2017)
- [5] J. R. Munkres: *Topology*. Prentice-Hall, London, 2000
- [6] J. Manton: *Why does Compactness ensure a Bijective Map is a Homeomorphism?*, <https://jmanton.wordpress.com/2013/12/11/why-does-compactness-ensure-a-bijective-map-is-a-homeomorphism/> (vierailtu viimeksi 20.8.2017)
- [7] S. Lee: *Functional Analysis HW # 4*, http://www.math.ucla.edu/~sos440/m/res/255af15/hw_04.pdf (vierailtu viimeksi 18.8.2017)
- [8] Wikimedia Commons: *File:Cantor set in seven iterations.svg*, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Cantor_set_in_seven_iterations.svg&oldid=247153593 (vierailtu viimeksi 28.6.2017)
- [9] S. A. Morris: *Topology without tears*. <http://www.topologywithouttears.net> (vierailtu viimeksi 9.8.2017)
- [10] E. V. Huntington: *Sets of independent postulates for the algebra of logic*. Transactions of the American Mathematical Society 5, s. 288-309, 1904
- [11] E. V. Huntington: *New sets of independent postulates for the algebra of logic, with special reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica*. Transactions of the American Mathematical Society 35 (1), s. 274-304, 1933

- [12] E. Wofsey: *Boolean Algebras*. Mathcamp, 2009
- [13] J.D. Halpern, A. Lévy: *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 13 (1), s. 88-134, 1971
- [14] J. L. Bell: *Boolean algebras and distributive lattices treated constructively*. Mathematical Logic Quarterly 45 (1), s. 135-143, 1999