



MORLEYN LAUSE

LuK Olga Raassina

Luk -tutkielma
Helmikuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:

Dos. Ilkka Törmä

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luk -tutkielma

Pääaine: Matematiikka

Tekijä: Olga Raassina

Otsikko: Morleyn lause

Ohjaaja: Dos. Ilkka Törmä

Sivumäärä: 9 sivua

Aika: Helmikuu 2026

Tämä LuK-tutkielma käsittelee Frank Morleyn löytämää Morleyn lausetta. Morleyn lause kuvaa kolmioiden ominaisuutta. Jos kolmion kulmat jaetaan kolmanneksiin, niin sen kulmia jakavien janojen leikkauspisteet muodostavat tasasivuisen kolmion. Frank Morley ei kuitenkaan esittänyt artikkelissa lauseelle todistusta. Ensimmäinen todistus lauseelle esitettiin vasta 15 vuotta lauseen julkaisun jälkeen. Matematiikassa tutkielma sisältyy tasogeometriaan. Tutkielma rakentuu johdannosta, Morleyn lauseesta ja sen historiasta sekä kolmesta erilaisesta todistustavasta. Lopuksi esitetään vielä yhteenveto. Työssä esitettävät todistukset perustuvat Conwayn, Bollobásin ja Kissin todistustapoihin. Nämä todistukset poikkeavat toisistaan niiden todistustyylien vuoksi. Conwayn todistus on helppolukuisin ja perustuu sanalliseen selitykseen. Bollobásin todistus on trigonometrinen ja sisältää yhtälöiden käsittelyä. Kissin todistuksessa todistetaan monikulmioiden kulmien suuruudet ja päädytään syklisiin monikulmioihin. Syklisten monikulmioiden avulla lause on osoitettu todeksi. Tutkielmassa esiintyy myös todistuksia tukevaa kuvitusta.

Avainsanat: Tasogeometria, Morleyn lause, Frank Morley, Conway, Bollobás, Kiss

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Morleyn lause ja sen historiaa	1
3	Morleyn lauseen todistuksia	1
3.1	Conwayn todistus	2
3.2	Bollobásin todistus	4
3.3	Kissin todistus	7
4	Yhteenveto	9

1 Johdanto

Tässä työssä tutustutaan Morleyn lauseeseen ja kolmeen erilaiseen tapaan todistaa se. Morleyn lause kuuluu matematiikan osa-alueista geometriaan, minkä vuoksi geometrian pohjatiedoista on hyötyä tämän työn ymmärrettävyyden kannalta. Morleyn lauseessa määritetään, että kolmion kulmat kolmanneksiin jakavien janojen leikkauspisteet muodostavat tasasivuisen kolmion. Morleyn lause on erityinen siitä, että sen esittäjä Frank Morley ei itse esittänyt lauseelleen todistusta. Ensimmäinen todistus julkaistiin vasta 15 vuotta myöhemmin lauseen julkaisusta. Lisäksi lauseelle on kehitetty monia todistustapoja, mikä ei ole tavanomaista jokaisen matematiikassa esiintyvän lauseen kohdalla.

Tämän työn ensimmäinen todistus luvussa 3.1 on luonteeltaan sanallisesti kertova ja perustuu Conwayn todistustapaan. Luvussa 3.2 esitetään Bollobásin todistus, joka pohjautuu enemmän laskennalliseen todistustapaan. Bollobásin todistus hyödyntää trigonometriaa. Kolmas todistus luvussa 3.3 perustuu puolestaan sekä sanalliseen että laskennalliseen todistustapaan. Kolmas todistus on Kissin todistus ja se etenee samoin kuin luvun 3.1 todistus eli takaperin. Todistuksien tueksi, työhön on laadittu geometrisia merkintöjä noudattavia kuvituksia. Kaikki kolme todistusta on kirjoitettu käyttäen matematiikan akateemista sanastoa. Todistuksissa oletetaan, että lukija tuntee käsitteet yhteneväisyys, sinilause sekä monikulmio.

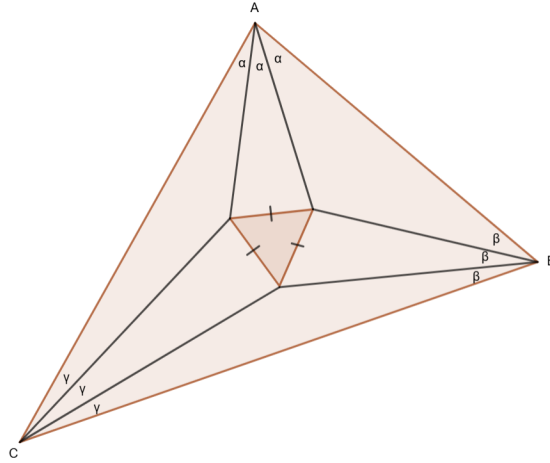
2 Morleyn lause ja sen historiaa

Morleyn lauseen löysi Frank Morley (1860-1937) vuonna 1899. Hän oli englantilainen matematiikan professori Haverford collegesta [1]. Morley julkaisi lauseensa American Mathematical Society Translation - lehdessä vuonna 1900. Lause esiintyi artikkelissa nimeltä *On the Metric Geometry of the Plane n -line*. Morley ei kuitenkaan esittänyt artikkelissaan lauseelle todistusta. [2] Muut matemaatikot kiinnostuivat lauseesta ja ensimmäinen todistus julkaistiin vasta 15 vuotta myöhemmin todistuksen esittämisestä. [3] Matemaatikot kehittivät Morleyn lauseelle myös lukuisia toisistaan poikkeavia todistustapoja. Erilaiset todistukset perustuvat muun muassa algebraan ja trigonometriaan. Lisäksi on esitetty synteettisiä ja takaperin eteneviä todistuksia. Tämä tutkielma mahdollistaa Morleyn lauseen todistusten suomenkielisyyden. Useat todistukset ovat alkuperäisesti englanninkielisiä ja suomenkielisiä vastineita on verrattain vähän. Tässä luvussa esitetään Morleyn lause ja havainnoidaan lause kuvan avulla.

Lause 1. *Kun jaetaan mielivaltaisen kolmion jokainen kulma kolmeen yhtäsuureen kolmannekseen, kulmia jakavien janojen leikkauspisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.*

3 Morleyn lauseen todistuksia

Esitetään aluksi lukujen 3.1 ja 3.2 todistuksissa voimassa olevat määritelmät.



Kuva 1: Morleyn lause mielivaltaisessa kolmiossa $\triangle ABC$.

Määritelmä 1. Mille tahansa kulmalle ω merkitään, että ω^+ on sama kuin $\omega + \frac{\pi}{3}$. Samoin ω^{++} on sama kuin $\omega + \frac{2\pi}{3}$.

Näin ollen tasasivuisen kolmion $\frac{\pi}{3}$ kulmat merkitään 0^+ . Lisäksi tiedetään, että kolmion kulmien summan tulee olla aina yhteensä π .

Määritelmä 2. Mielivaltaisen kolmion $\triangle ABC$ kulmille pätee, että $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$, sekä $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Määritelmän 2 nojalla kolmioiden kulmien summa on halutun π suuruinen, sillä

$$3 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi.$$

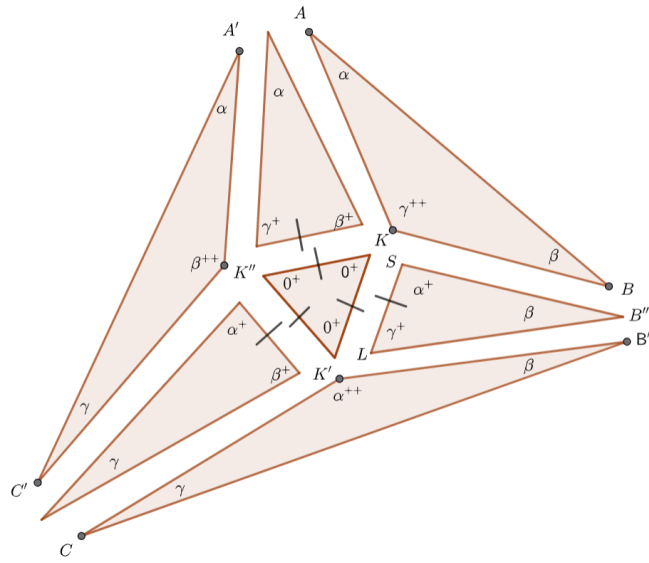
3.1 Conwayn todistus

Tämän työn ensimmäinen todistus Morleyn lauseesta pohjautuu aineistoon [3]. Todistus on luonteeltaan takaperin etenevä.

Todistus. Otetaan tasasivuinen kolmio ja muodostetaan sen ympärille kuusi kolmiota, kuvan 2 mukaisesti. Määrätään irrallisten kolmioiden sivujen ja kulmien suuruudet. Aluksi muokataan kolmioiden $\triangle AKB$, $\triangle B'K'C$ ja $\triangle C'K''A'$ sivujen pituuksia. Sivujen pituudet skaalataan haluttuun muotoon yhtenevyyslauseen avulla.

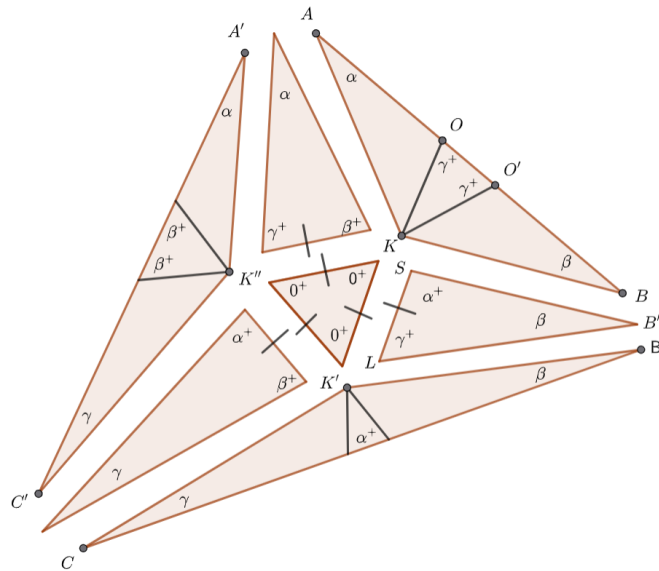
Lause 2. *Kaksi kolmiota ovat yhtenevät, jos niillä on kaksi samansuuruisia vastinkulmaa, sekä yksi yhtenevä vastinsivu.*

Muodostetaan jana KO kärkipisteestä K janalle AB niin, että kulma $\angle KOB = \gamma^+$, kuvan 3 mukaisesti. Tarkastellaan nyt muodostunutta kolmiota $\triangle KOB$. Nähdään, että kolmioilla $\triangle B''LS$ ja $\triangle KOB$ on kaksi yhtäsuurta vastinkulmaa β ja γ^+ . Kuvasta huomataan, että kyseiset kolmiot $\triangle B''LS$ ja $\triangle KOB$ ovat toistensa peilaukset sivun SB' suhteen. Tällöin valitaan kolmion $\triangle AKB$ skaalaus siten, että $KO = SL$. Nyt kahden yhtäsuuren kulman, sekä yhden yhtenevän sivun myötä kolmiot $\triangle B''LS$ ja $\triangle KOB$ ovat yhtenevät.



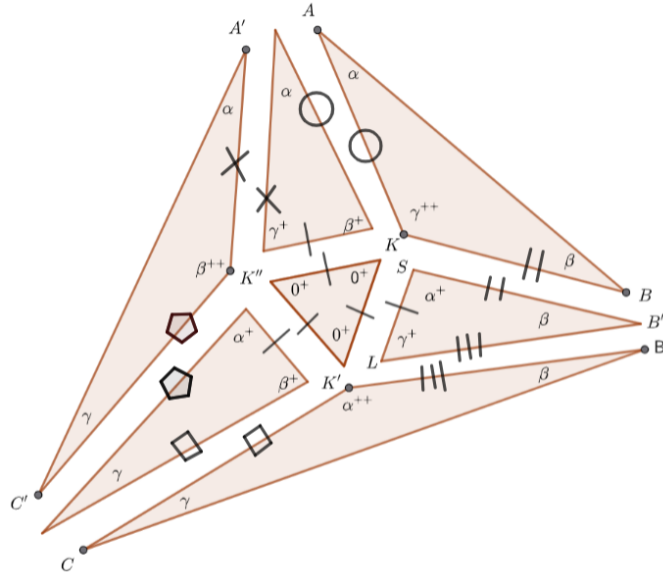
Kuva 2: Tasasivuinen kolmio sekä kuusi irrallista kolmiota.

Tarkastellaan nyt saman kolmion $\triangle AKB$ sivua KA . Koska kyseinen sivu KA kuuluu jo skaalattuun kolmioon $\triangle AKB$, sivun KA skaalaus on valmis. Vastaava kolmioiden sivujen skaalaus tehdään kahdelle muulle kolmiolle $\triangle B'K'C$ ja $\triangle CK''A'$. Skaalauksen jälkeen saadaan muodostettua kuvassa 4 näkyvät yhtenevät sivut. Tarkasteltavaksi jää kolmioiden kulmien suuruudet.



Kuva 3: Kärkipisteistä K, K' ja K'' piirretyt janat janoille $AB, B'C$ ja $C'A'$.

Määritelmä 3. Kolmiot yhdistyvät tasasivuisen kolmion ympärille muodostaen kolmion $\triangle ABC$, jos ja vain jos kulmien summa jokaisen kiertopisteen K, K' ja K'' ympäri on 2π .



Kuva 4: Kolmioiden yhtenevät sivut.

Lasketaan summa S tyypillisen kiertopisteen K ympäri.

$$\begin{aligned}
 S &= \alpha^+ + 0^+ + \beta^+ + \gamma^{++} \\
 &= \alpha + \frac{\pi}{3} + 0 + \frac{\pi}{3} + \beta + \frac{\pi}{3} + \gamma + \frac{2\pi}{3} \\
 &= (\alpha + \beta + \gamma) + \frac{\pi}{3} \cdot 5
 \end{aligned}$$

Tiedetään määritelmän 2 nojalla, että $(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\pi}{3}$. Näin ollen summaksi S saadaan

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \cdot 5 = 2\pi.$$

Määritelmän 3 nojalla on muodostunut haluttu kolmio $\triangle ABC$, jossa Morleyn lause toteutuu.

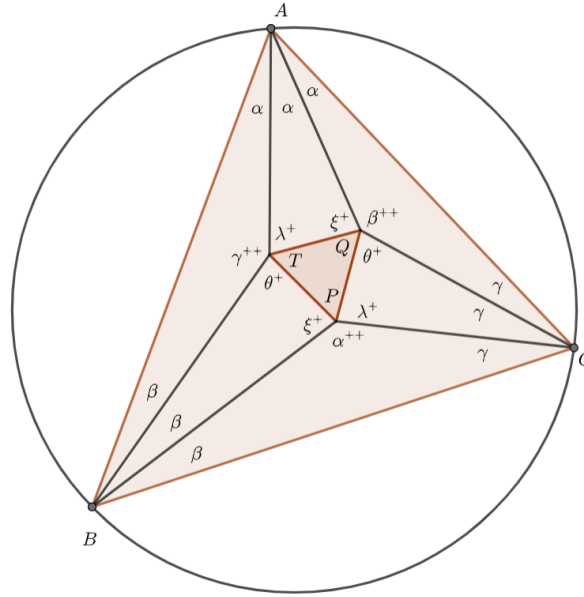
□

3.2 Bollobásin todistus

Seuraava todistus perustuu aineistoon [4] ja on luonteeltaan trigonometrinen. Todistuksessa näytetään sinilauseita useasti käyttäen, että kolmion kulmat ovat $\alpha = \theta, \beta = \lambda$ ja $\gamma = \xi$. Näin ollen pystytään osoittamaan, että kolmion $\triangle QTP$ on oltava tasasivuinen.

Todistuksessa tarkastellaan kuvan 5 kolmiota $\triangle ABC$. Kuvaan on merkitty kaikkien kulmien suuruudet, mutta tässä todistuksessa tarkastellaan vain kiertopisteitä T ja Q ympäröiviä kulmia, sekä niiden vastinsivuja AT ja AQ . Täysin samanlainen tarkastelu toteutettaisiin huomioiden myös kiertopisteen P ympäröivät kulmat, sekä niitä vastaavat vastinsivut.

Todistus. Muodostetaan ympyrä, joka kulkee pisteiden A, B ja C kautta ja määrätään ympyrän säteeksi $R = \frac{1}{2}$.



Kuva 5: Kolmio $\triangle ABC$ ja sen ympäri piirretty ympyrä.

Aloitetaan näyttämällä kulman $\angle ATB$ suuruus. Tiedetään, että minkä tahansa kolmion kulmien summan tulee olla yhteensä π . Näin ollen saadaan näytettyä, että tarkasteltava kulma $\angle ATB = \gamma^{++}$.

$$\alpha + \beta + \angle ATB = \alpha + \beta + \gamma^{++} = (\alpha + \beta + \gamma) + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$$

Samoin voidaan näyttää, että kulmat $\angle BPC = \alpha^{++}$ ja $\angle CQA = \beta^{++}$.

Siirrytään tarkastelemaan sivujen AB, BC ja AC pituuksia sinilauseen avulla.

$$2R = \frac{BC}{\sin 3\alpha} = \frac{AC}{\sin 3\beta} = \frac{AB}{\sin 3\gamma}$$

$$AB = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 3\gamma = \sin 3\gamma$$

$$BC = \sin 3\alpha$$

$$AC = \sin 3\beta$$

Tarkastellaan sinilauseen avulla myös sivujen AT ja AB suhdetta. Kolmiolle $\triangle ABT$ pätee sinilauseen mukaan seuraava yhtälö.

$$\frac{AT}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma^{++}}$$

Sijoitetaan tähän yhtälöön jo saatu tulos sivun AB pituudesta $AB = \sin 3\gamma$.

$$AT = \frac{\sin \beta \cdot \sin 3\gamma}{\sin \gamma^{++}}$$

Samoin kolmiolle $\triangle ACQ$ saadaan, että

$$AQ = \frac{\sin \gamma \cdot \sin 3\beta}{\sin \beta^{++}}$$

Tällöin kolmion $\triangle ATQ$ sivujen AT ja AQ suhteelle on voimassa seuraavat esitysmuodot.

$$\frac{AT}{AQ} = \frac{\sin \xi^+}{\sin \lambda^+}$$

ja

$$\frac{AT}{AQ} = \frac{\frac{\sin \beta \cdot \sin 3\gamma}{\sin \gamma^{++}}}{\frac{\sin \gamma \cdot \sin 3\beta}{\sin \beta^{++}}}$$

$$\frac{AT}{AQ} = \frac{\sin \beta \cdot \sin 3\gamma}{\sin \gamma^{++}} \cdot \frac{\sin \beta^{++}}{\sin \gamma \cdot \sin 3\beta}$$

$$AT \cdot \sin 3\beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \gamma^{++} = AQ \cdot \sin 3\gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \beta^{++}$$

Määritelmä 4. Geometrisen identiteetin mukaan

$$\sin 3x = 4 \cdot \sin x \cdot \sin x^+ \cdot \sin x^{++}.$$

Määritelmää 4 hyödyntäen kolmion $\triangle ATQ$ yhtälö saadaan esitettyä seuraavasti.

$$4 \cdot AT \cdot \sin \beta \cdot \sin \beta^+ \cdot \sin \beta^{++} \cdot \sin \gamma \cdot \sin \gamma^{++} = 4 \cdot AQ \cdot \sin \gamma \cdot \sin \gamma^+ \cdot \sin \gamma^{++} \sin \beta \cdot \sin \beta^{++}$$

$$\frac{4 \cdot AT}{4 \cdot AQ} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \gamma^+ \cdot \sin \gamma^{++} \sin \beta \cdot \sin \beta^{++}}{\sin \beta \cdot \sin \beta^+ \cdot \sin \beta^{++} \cdot \sin \gamma \cdot \sin \gamma^{++}}$$

$$\frac{AT}{AQ} = \frac{\sin \gamma^+}{\sin \beta^+}$$

On siis näytetty, että kulmat $\xi = \gamma$ ja $\lambda = \beta$. Samoin pystytään näyttämään, että $\theta = \alpha$. Nyt Morleyn lause pätee, jos ja vain jos $\angle PTQ = \angle TQP = \angle QPT = \frac{\pi}{3}$.

Lasketaan kulman $\angle PTQ$ suuruus, kun tiedetään, että kiertopisteen T ympäryskulman on oltava yhteensä 2π .

$$\begin{aligned} \angle PTQ &= 2\pi - (\theta^+ + \gamma^{++} + \lambda^+) \\ &= 2\pi - (\theta + \lambda + \gamma + 4 \cdot \frac{\pi}{3}) \\ &= 2\pi - (\alpha + \beta + \lambda + 4 \cdot \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

Määritelmän 2 mukaan tiedetään, että $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$, joten

$$\angle PTQ = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

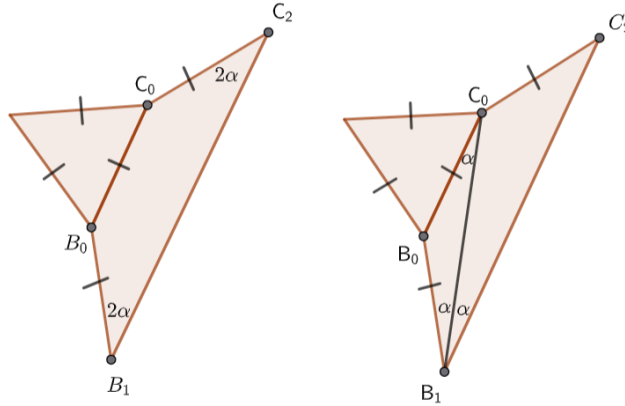
Vastaavalla tarkastelulla myös kaksi muuta kulmaa ovat suuruudeltaan $\frac{\pi}{3}$.

On näytetty, että kaikilla mielivaltaisilla kolmioilla $\triangle ABC$ Morleyn lause toteutuu. \square

3.3 Kissin todistus

Seuraava todistus perustuu aineistoon [5] ja on luonteeltaan takaperin etenevä. Todistuksen luettavuutta on pyritty helpottamaan kuvien 6 ja 7 avulla.

Todistus. Olkoon $\triangle A_0B_0C_0$ tasasivuinen kolmio ja $B_0B_1C_2C_0$ tasakylkinen puolisuunnikas.



Kuva 6: Kolmiot $\triangle A_0B_0C_0$ sekä puolisuunnikkaat $B_0B_1C_2C_0$.

Tarkastellaan tasakylkisen puolisuunnikkaan $B_0B_1C_2C_0$ kulmia. Koska kyseessä on tasakylkinen puolisuunnikas, pystytään ratkaisemaan kulman $\angle B_1B_0C_0$ suuruus helposti. Tiedetään, että puolisuunnikkaan kulmien summan tulee olla suuruudeltaan 2π . Voidaan muodostaa janoilta B_0C_0 ja B_1C_2 uusi jana, joka muodostaa kohtisuoran kulman molempia janoja B_0C_0 ja B_1C_2 vasten. Näin ollen saadaan laskettua kulman $\angle B_1B_0C_0$ suuruus seuraavasti.

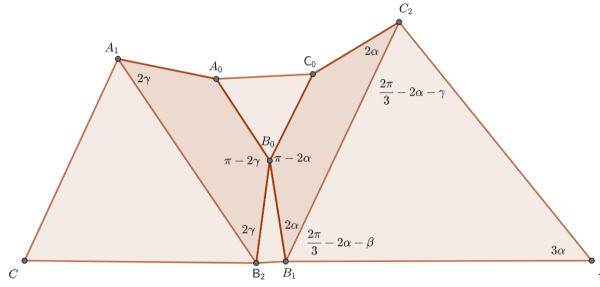
$$\angle B_1B_0C_0 = 2\pi - \frac{\pi}{2} \cdot 2 - 2\alpha = \pi - 2\alpha$$

Muodostetaan nyt jana B_1C_0 ja lasketaan kulmien $\angle C_0B_1B_0$, $\angle B_0C_0B_1$ suuruudet. Tiedetään, että kolmio $\triangle B_1B_0C_0$ on tasakylkinen, sillä kolmiolla on kaksi yhtäpitkää sivua $B_0B_1 = B_0C_0$. Näin ollen kolmion kantakulmat ovat yhtäsuuret ja saadaan ratkaistua seuraavasti.

$$\angle C_0B_1B_0 = \angle B_0C_0B_1 = \frac{\pi - (\pi - 2\alpha)}{2} = \alpha$$

Muodostetaan seuraavaksi kolmion $\triangle ABC$:n kanta niin, että tasakylkisten puolisuunnikkaiden $B_0B_1C_2C_0$ ja $B_0B_2A_1A_0$ kärkipisteet A_1 , B_2 , B_1 ja C_2 osuvat janoille AB , AC ja CB . Kuvaan 7 ei ole piirretty pistettä B näkyviin, sillä tarkasteluun riittää pisteet A ja C .

Siirrytään tarkastelemaan tasakylkistä kolmiota $\triangle B_0B_1B_2$. Lasketaan kyseisen kolmion kulma $\angle B_1B_0B_2$, kun pisteen B_0 ympäryskulman tulee olla suuruudeltaan 2π .



Kuva 7: Kolmio $\triangle A_0B_0C_0$ sekä osa kolmiosta $\triangle ABC$.

$$\begin{aligned}
 \angle B_1B_0B_2 &= 2\pi - \frac{\pi}{3} - \left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right) - \left(\frac{2\pi}{3} - 2\gamma\right) \\
 &= 2\alpha + 2\gamma - \frac{\pi}{3} \\
 &= 2\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) - \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{\pi}{3} - 2\beta
 \end{aligned}$$

Nyt saadaan laskettua tasakylkisen kolmion $\triangle B_0B_1B_2$ kantakulmat $\angle B_1B_2B_0$ ja $\angle B_0B_1B_2$. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtäsuuret.

$$\angle B_1B_2B_0 = \angle B_0B_1B_2 = \frac{\pi - \left(\frac{\pi}{3} - 2\beta\right)}{2} = \frac{\pi}{3} + \beta$$

Myös kulmat $\angle B_0B_1A$ ja $\angle C_0C_2A$ saadaan helposti laskettua.

$$\angle B_0B_1A = \frac{2\pi}{3} - 2\alpha - \beta + 2\alpha = \frac{2\pi}{3} - \beta$$

Samoin

$$\angle C_0C_2A = \frac{2\pi}{3} - \gamma$$

Ratkaistaan vielä kulma

$$\angle C_0B_1A = \frac{2\pi}{3} - 2\alpha - \beta - \alpha = \frac{2\pi}{3} - \alpha - \beta$$

Jolloin saadaan ratkaistua kulmien $\angle C_0C_2A$ ja $\angle C_0B_1A$ summa. Hyödynnetään laskussa määritelmää 2.

$$\begin{aligned}
 \angle C_0C_2A + \angle C_0B_1A &= \frac{2\pi}{3} - \gamma + \frac{2\pi}{3} - \alpha - \beta \\
 &= \frac{4\pi}{3} - (\alpha + \beta + \gamma) \\
 &= \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

Ollaan näytetty, että nelikulmion $C_0C_2AB_1$ vastakkaiset kulmat $\angle C_0C_2A$ ja $\angle C_0B_1A$ ovat supplementtikulmia eli niiden summa on yhteensä π . Näin ollen nelikulmio $C_0C_2AB_1$ on syklinen eli kyseisen nelikulmion kärkipisteiden kautta voidaan piirtää ympyrä. Samalla todistusperiaatteella myös nelikulmio $C_0AB_1B_0$ toteuttaa syklisyyden määritelmän.

Edellä mainituilla syklisillä nelikulmioilla on molemmilla kolme yhteistä pistettä. Täten myös viisikulmion $C_0C_2AB_1B_0$ on oltava syklinen eli kaikkien pisteiden C_0, C_2, A, B_1 ja B_0 on oltava saman ympyrän kehällä.

Ympäripiirretyn ympyrän, sekä yhtä pitkien sivujen $B_0B_1 = B_0C_0 = C_0C_2$ myötä, täytyy olla, että janat AB_0 ja AC_0 jakavat kulman $\angle A$ kolmeen yhtäsuureen osaan. Tällöin on pystytty todistamaan, että kulmat $\angle C_2AC_0 = \angle C_0AB_0 = \angle B_0AB_1 = \alpha$.

Samalla todistusperiaatteella näytetään, että kolmion $\triangle ABC$ kaksi muuta kulmaa $\angle B$ ja $\angle C$ toteuttavat Morleyn lauseen määritelmän ja näin on Morleyn lause todistettu todeksi. \square

4 Yhteenveto

Tähän kandiin valikoitui satunnaisesti vain pieni osa kaikista lauseen todistuksista. Nämä todistukset kuitenkin havainnollistavat hyvin matematiikan luonnetta. Matematiikka tarjoaa erilaisia tapoja todistaa lauseita. Tämä mahdollistaa sekä matematiikan ymmärrettävyyden että matematiikan kehittymisen. Matematiikka on kumulatiivinen aine, missä uusi tieto rakentuu vanhan tiedon päälle. Kun lause on todistettu, sitä voidaan käyttää uusien lauseiden todistuksissa. Näin uutta matematiikkaa voidaan kehittää hyödyntämällä jo olemassa olevaa tietoa. Morleyn lauseen hyödyt ovat tasogeometrian osaamisessa ja kehittämisessä.

Viitteet

- [1] Pritsker, B. (2024). Morley's theorem. In *Geometrical Kaleidoscope* (Vol. 33, pp. 143–144). World Scientific Publishing Company. https://doi.org/10.1142/9789811285288_0012
- [2] Oakley, C. O., & Baker, J. C. (1978). The Morley trisector theorem. *The American Mathematical Monthly*, 85(9), pp. 737–745.
- [3] Conway, J. *The Power of Mathematics*, Verkkosivu, <http://thewe.net/math/conway.pdf>, luettu 27.1.2026.
- [4] Bollobás, B. (2006). *The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis*. Cambridge University Press, pp. 127–128.
- [5] Kiss, G. Z. (2006). Morley's Theorem: G. Zolt Kiss' proof. Cut-The-Knot. <https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/MorleyZolt.shtml> (viitattu 13.2.2026).