



DISKREETTI MONIKRITEERINEN OPTIMOINTI

Qifan Wu

Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:
Ph.D. Doc. Yury Nikulin
Ph.D. Stefan Emet

Turun yliopiston laatu järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Pääaine: Matematiikka

Tekijä: Qifan Wu

Otsikko: Diskreetti monikriteerinen optimointi

Ohjaaja: Ph.D. Doc. Yury Nikulin

Sivumäärä: 53 sivua

Aika: Kesäkuu 2025

Tässä tutkielmassa tarkastellaan optimointia. Keskitytään matemaattiseen optimointiin ja monikriteeriseen optimointiin.

Tutkielmassa esitellään matemaattista optimointia. Suurimmassa osassa käsitellään lineaarisia optimointitehtäviä, epälineaarisia optimointitehtäviä sekä niiden graafista ratkaisua. Esimerkiksi, kun kyseessä on lineaarinen optimointitehtävä, seuraavien ehtojen tulee täyttyä: verrannollisuus, additiivisuus, jaollisuus, deterministisyys ja tavoitteena on optimoida vain yksi kriteeri. Jos optimointitehtävässä on vain kaksi päätösmuuttujaa, tehtävä voidaan ratkaista graafisesti. Tutkielmassa esitetään myös optimointitehtävä verkkoteoriassa, jossa käsitellään Kruskalin algoritmin teoria, siihen liittyvää esimerkkiä ja optimointitehtävä.

Tutkielmassa käsitellään monikriteeristä optimointia, jossa esitellään päätöksenteoavaruus, kohdefunktion määrittelyalue, dominoimattomat pisteet, nadir-piste ja ideal-piste. Esimerkiksi painotettu kompromissiohjelmointitehtävä voidaan ratkaista ideal-pisteen perusteella. Tutkielmassa esitetään myös monikriteerinen optimointitehtävä verkkoteoriassa, jossa tarkastellaan Primin algoritmin teoria, siihen liittyvää esimerkkiä ja monikriteeristä optimointitehtävä. Lisäksi monikriteerisessä optimointitehtävässä käytetään sekä ideal-pistettä että painotettua kompromissiohjelmointia.

Asiasanat: matemaattinen optimointi, monikriteerinen optimointi, optimointi.

Sisällys

1	Johdanto	1
1.1	Merkinnät	2
2	Matemaattinen optimointi	3
2.1	Lineaarinen optimointitehtävä	3
2.2	Epälineaarinen optimointitehtävä	9
2.3	Graafinen ratkaisu lineaariseen tapaukseen	11
2.4	Optimointiongelma verkkoteoriassa	16
2.4.1	Kruskalin algoritmi	16
3	Monikriteerinen optimointi	24
3.1	Päätöksentekoavaruus ja kohdefunktion määrittelyalue	24
3.2	Dominoimaton (nondominated) pisteet ja joukko	29
3.3	Nadir-piste ja ideal-piste	36
3.4	Monikriteerinen optimointi verkkoteoriassa	47
3.4.1	Primin algoritmi	47
3.5	Loppusanat	51

1 Johdanto

Tutkielmassa esitellään aluksi matemaattista optimointia. Matemaattisessa optimoinnissa käsitellään lineaarisia ja epälineaarisia optimointitehtäviä. Tehtävän tyyppi riippuu kohdefunktiosta ja rajoitefunktiosta [1]. Kun tehtävässä on vain kaksi päätösmuuttujaa, se voidaan ratkaista graafisesti. Tutkitaan myös optimointitehtävä verkkoteoriassa. Verkkoteoriassa käytetään Kruskalin algoritmia, jonka Joseph Kruskal julkaisi vuonna 1956. Myöhemmin H. Loberman ja A. Weinberger kehittivät algoritmia edelleen [14]. Pohditaan algoritmin perusteoriaa ja yhdistetään se optimointitehtävän ratkaisemiseen.

Seuraavaksi määritellään päätöksentekoavaruus ja kohdefunktion määrittelyalue esimerkin avulla. Lisäksi käsitellään monikriteerinen optimointi. Tässä tutkielmassa esitetään ideal-pisteen ja nadir-pisteen määritelmät ja niiden yhteys tehtävään. Tutkitaan myös monikriteeristä optimointitehtävää verkkoteoriassa. Pohditaan verkkoteorian Primin algoritmin perusteoriaa ja yhdistetään ideal-piste sekä painotettu kompromissiohjelmointi tehtävän ratkaisemiseen.

Tutkielman lähteenä on käytetty Dr. habil. Matthias Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, 2009, New Zealand.

Tämän tutkielman kirjoituksessa on hyödynnetty Hemingwayapp ja ChatGPT-tekoälytyökalua kielenhuoltoon.

1.1 Merkinnät

Seuraavat matemaattiset merkinnät käytetään tutkielmassa.

Taulukko 1: Tutkielmassa käytetyt matemaattiset merkinnät.

Merkinnät	Selitteet
f_0	matemaattinen optimointitehtävän kohdefunktio
f_i	matemaattinen optimointitehtävän rajoitefunktio
\mathcal{X}	optimointitehtävän ratkaisujoukko
\mathcal{Y}	kriteerinavaruuden ratkaisujoukko
(\mathbb{R}^p, \preceq)	järjestetty joukko
θ	mallikuvaus
y^I	ideal-piste
y^N	nadir-piste
MST	minimivirittävä puu

2 Matemaattinen optimointi

Optimointitehtävä voi olla joko lineaarinen tai epälineaarinen, riippuen kohdefunktiosta ja rajoitefunktiosta. Optimointitehtävä on lineaarinen, kun sekä kohdefunktio että rajoitefunktiot ovat lineaarisia. Optimointitehtävä on epälineaarinen, jos kohdefunktio tai rajoitefunktiot tai molemmat ovat epälineaarisia. (Lineaarinen optimointitehtävä ja epälineaarinen optimointitehtävä esitetään luvussa 2). Kun optimointitehtävä on lineaarinen, seuraavat ehdot täytyy olla voimassa [1]:

1. verrannollisuus: päätösmuuttujan vaikutus kohdefunktioon ja rajoituksiin on suoraan verrannollinen sen arvoon.
2. additiivisuus: kukin päätösmuuttujan vaikutus kohdefunktioon ja rajoituksiin on riippumaton muiden päätösmuuttujien arvoista.
3. jaollisuus: kukin päätösmuuttuja on jatkuva eli se voi saada mielivaltaisia reaalilukuarvoja.
4. deterministisyys: tehtävän parametrit ovat vakioita eivätkä satunnaismuuttujia.
5. kriteereitä on vain yksi.

Mikäli optimointitehtävä on lineaarinen, mutta päätösmuuttujat voivat saada vain diskreettejä arvoja, puhutaan diskreetistä optimoinnista.

Mikäli optimointitehtävä on lineaarinen, mutta tehtävän parametrit ovat satunnaismuuttujia, puhutaan stokastisesta optimoinnista.

Mikäli optimointitehtävä on lineaarinen ja siinä on useita kriteerejä, puhutaan monikriteerisestä optimoinnista [1].

2.1 Lineaarinen optimointitehtävä

Matemaattisessa optimoinnissa pyritään löytämään paras mahdollinen ja järkevä ratkaisu kaikista mahdollisista ratkaisuvaihtoehdoista joko minimoimalla tai maksimoimalla kohdefunktio. Seuraava lause on lähteestä [7] ja [8].

Lause 2.1. Matemaattinen optimointiongelma voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} & \max / \min f_0(x) \\ & \text{s.t. } f_i(x) \leq 0, i = 0, \dots, m, \end{aligned}$$

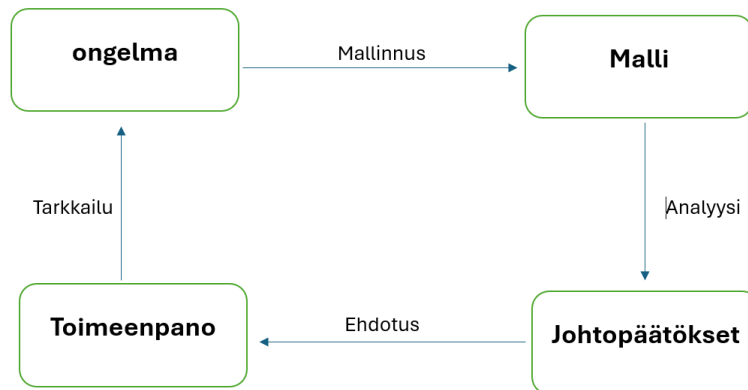
jossa vektori $x = (x_1, \dots, x_n)$ on ongelman päätösmuuttuja; kohdefunktio $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; funktiot $f_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, indeksit, jolla $i = 0, \dots, m$ ovat rajoitefunktiot.

Optimointiongelma voidaan analysoida seuraavasti

1. Luetaan ongelmananto läpi.

2. Mallinnetaan ongelma, jossa on määritelty päätösmuuttuja ja rajoitukset.
3. Analyysoidaan mallinnus ja saadaan johtopäätökset.
4. Jos johtopäätös on järkevä, esitetään päätöksentekijälle. Jos johtopäätös ei ole järkevä palataan takaisin, aloitetaan alusta ja parannetaan malli.

Kuvassa (1) esitetään optimointiongelman operaatioanalyysin prosessin kaavio.



Kuva 1: optimointiongelman operaatioanalyysin prosessi.
[1]

Seuraavien esimerkkien (2.2) ja (2.4) tehtävänannot ovat lähteestä [6].

Esimerkki 2.2. (Matemaattinen ongelma, jossa on kaksi muuttujaa) Käsitellään ongelma

$$\min_x 0, 9x_1^2 - 0, 4x_1x_2 + 0, 6x_2^2 - 6, 4x_1 - 0, 8x_2 : -1 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3.$$

Tässä ongelmassa voidaan lauseen (2.1) perusteella päätellä, että päätösmuuttuja on $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; kohdefunktio $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on

$$f_0(x) = 0, 9x_1^2 - 0, 4x_1x_2 + 0, 6x_2^2 - 6, 4x_1 - 0, 8x_2;$$

rajoitefunktio $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1,2,3,4$ on

$$f_1(x) = -x_1 - 1, f_2(x) = x_1 - 2, f_3(x) = -x_2, f_4(x) = x_2 - 3.$$

Esimerkki 2.3. Kosmetiikkafirma tuottaa deodoranttia. Valittavana on kaksi eri menetelmä, joista tavalla 1 saadaan 3 pulloa deodoranttia, kun käytetään 1 työtunti ja 2 pulloa kemikaaleja. Tavalla 2 taas saadaan 5 pulloa deodoranttia, kun käytetään 2 työtuntia ja 3 pulloa kemikaaleja. Työvoima maksaa 12 euroa tunnilta ja kemikaalit 8 euroa pullolta. Joka vuosi on käytettävissä 20 000 työtuntia ja 35 000 pulloa kemikaaleja. On arveltu, että mainostamatta saadaan myydyksi vuodessa 1000 pulloa deodoranttia. Myyntiä edistämään voidaan palkata megatähti Beytwice, joka vaatii 400 euroa/h. Jokaisen tunnin, jonka Beytwice käyttää myynnin edistämiseen, on

Taulukko 2: Esimerkin (2.3) tehtävänannon tiedon taulukko.

	Työtunti	Kemikaaleja	Myydyt
Tavalla 1 valmistettava määrä x_1	x_1	$2x_2$	$3x_1$
Tavalla 2 valmistettava määrä x_2	$2x_2$	$3x_2$	$5x_2$
Beytwice			$200x_3$
Yhteensä	≤ 20000	≤ 35000	$= 1000 + 200x_3$

arvioitu lisäävän kysyntää 200 pulloa. Formuloi optimointitehtävä se miten voidaan kokonaistuotto maksimoida, kun deodorantin myyntihinta on 20 euroa pullolta. Mitä tyyppiä optimointitehtävä on?

Mallinnetaan tehtävä. Määritellään päätösmuuttujat, jotka on

x_1 : tavalla 1 valmistettavan deodorantin määrä

x_2 : tavalla 2 valmistettavan deodorantin määrä

x_3 : Beytwice työtunnit.

Lisäksi kolme päätösmuuttujat ovat ei-negatiivisia eli $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ ja $x_3 \geq 0$.

Katsotaan rajoitukset.

Joka vuosi on käytettävissä 20 000 työtunti. Lisäksi tuotantomenetelmässä tavalla 1 saadaan 3 pulloa käyttämällä 1 työtunti ja tavalla 2 saadaan 5 pulloa käyttämällä 2 työtunti. Saadaan rajoitefunktio

$$x_1 + 2x_2 \leq 20000.$$

Joka vuosi on käytettävissä 35 000 pulloa kemikaaleja, lisäksi tavalla 1 saadaan 3 pulloa, kun käytetään 2 pulloa kemikaaleja, ja tavalla 2 saadaan 5 pulloa, kun käytetään 3 pulloa kemikaaleja. Saadaan rajoitefunktio

$$2x_1 + 3x_2 \leq 35000.$$

On arvioitu, että myyntimäärä vuodessa on 1000 pulloa. Megatähti Beytwice osallistuu kampanjamyyntiin, joka edistää myyntiä ja kasvattaa kysyntää arviolta 200 pulloa jokaista tuntia kohden. Lisäksi tavalla 1 saadaan 3 pulloa ja tavalla 2 saadaan 5 pulloa.

$$3x_1 + 5x_2 = 1000 + 200x_3.$$

Taulukossa (2) esitetään tehtävänannon tiedot.

Tehtävän tavoite on maksimoida kokonaistuotto, kun deodorantin myyntihinta on 20 euroa pullolta. Lisäksi otetaan huomioon työvoiman kustannukset, kemikaalien maksu ja megatähden palkka.

Deodorantin myyntihinta on 20 euroa pullolta. Tavalla 1 saadaan 3 pulloa ja tavalla 2 saadaan 5 pulloa eli myyntitulo on $20 \cdot (3x_1 + 5x_2)$.

Työvoima maksaa 12 euroa tunnilta. Tavalla 1 käytetään 1 työtunti valmistukseen ja tavalla 2 käytetään 2 työtuntia eli työvoimakustannukset ovat $12 \cdot (x_1 + x_2)$.

Kemikaalit maksavat 8 euroa pullolta. Tavalla 1 käytetään 2 pulloa valmistukseen ja tavalla 2 käytetään 3 pulloa valmistukseen eli kemikaalikustannukset ovat $8 \cdot (2x_1 + 3x_2)$.

Lisäksi täytyy maksaa megatähti Beytwicelle palkka, joka on 400 euroa per tunti eli megatähtin palkka on $400x_3$.

Yhdistetään tuotto ja kulut saada maksimoitavat kohdefunktio, joka on

$$\begin{aligned} \max \quad & 20(3x_1 + 5x_2) - 12(x_1 + x_2) - 8(x_1 + 3x_2) - 400x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 20000 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 35000 \\ & 3x_1 + 5x_2 = 1000 + 200x_3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Optimointitehtävä on lineaarinen maksimointitehtävä.

Optimointitehtävä on lineaarinen, kun kohdefunktio ja rajoitefunktio ovat lineaarisia.

Esimerkki 2.4. Öljyjalostamo tuottaa kahta tuotetta: lentokoneen polttoainetta ja bensiiniä. Jalostamon voitto on 0,10 euroa tynnyristä lentokoneesta polttoainesta ja 0,20 euroa tynnyristä bensiinistä. Jalostamo on käytettävissään vain 10 000 tynnyriä raakaöljyä prosessoitavaksi. Lisäksi seuraavat ehdot on täytettävä.

1. Jalostamolla on hallituksen sopimus, jonka mukaan tuotetaan vähintään 1000 tynnyriä lentokonesen polttoainetta. Jalostamo on yksityinen sopimus, jonka mukaan tuotetaan vähintään 2000 tynnyriä bensiiniä.
2. Molemmat sopimustuotteet toimitetaan kuorma-autoilla, ja kuorma-autojen yhteenlaskettu toimitustilavuus on enintään 180 000 tynnyriä.
3. Lentokonesen polttoainetta toimitetaan lentokentälle, joka on 10 mailia päähän jalostamosta. Bensiini toimitetaan jakelijalle, joka on 30 mailia päähän jalostamosta.

Kuinka paljon kumpikin tuote voisi tuottaa maksimivoittoa? [6]

Mallinnetaan ongelma annetun tehtävänannon mukaan vaihe vaiheelta. Ensimmäisessä vaiheessa täytyy määrittää päätösmuuttujat. Tässä esimerkissä päätösmuuttujat ovat x_1 on määrä, jonka jalostamo tuottaa lentokosen polttoainetta (lasketaan tynnyrinä). x_2 on määrä, jonka jalostamo tuottaa bensiiniä (lasketaan tynnyrinä)

Tehdään taulukko, joka sisältää kaikki ongelmassa annetut tiedot. Sen jälkeen on helppo miettiä ongelman ratkaisu.

Taulukko 3: Esimerkin (2.4) tehtävänannon tiedon taulukko.

	Raakaöljy	Toimitus	Voitto
Lentokoneen polttoaineen määrä $x_1 \geq 1000$	1	10	0,10 euroa/tynnyri
Bensiinin määrä $x_2 \geq 2000$	1	30	0,20 euroa/tynnyri
Yhteensä	≤ 10000	≤ 180000	$0, 1x_1 + 0, 2x_2$

Formalisoidaan ongelma matemaattisesti. Ongelman annossa on kolme rajoituslausetta. Mallinnetaan ongelman rajoitukset.

Ensimmäinen rajoitus on: Jalostamolla on hallituksen sopimus, jonka mukaan tuottaa vähintään 1000 tynnyriä lentokoneen polttoainetta. Jalostamo on myös yksityinen sopimus, jonka mukaan tuottaa vähintään 2000 tynnyriä bensiiniä. Rajoitus merkitään matemaattisessa muodossa seuraavasti

$$x_1 \geq 1000$$

$$x_2 \geq 2000.$$

Toinen rajoitus on: molemmat sopimustuotteet toimitetaan kuorma-autoilla, ja kuorma-autojen yhteenlaskettu toimitustilavuus on enintään 180 000 tynnyriä. Kolmas rajoitus on: lentokoneen polttoaine toimitetaan lentokentälle 10 mailia päähän jalostamosta, ja a bensiini toimitetaan 30 mailia päähän jalostamosta. Ne voivat yhdistää, ja rajoitus voidaan esittää seuraavasti

$$10x_1 + 30x_2 \leq 180000.$$

Lisäksi jalostamo on käytettävissään vain 10 000 tynnyriä raakaöljyä prosessoitavaksi. Tämä rajoitus merkitään matemaattisessa muodossa seuraavasti

$$x_1 + x_2 \leq 10000.$$

Ongelman tavoite on maksimoida jalostamon voitto. Jalostamon voitto voidaan kuvata matemaattisessa muodossa seuraavasti $0, 1x_1 + 0, 2x_2$. Tämä tuotanto-ongelma voidaan muotoilla matemaattiseksi optimointiongelmaksi muuttujalla x_1 ja x_2 , siten että $0, 1x_1 + 0, 2x_2$ maksimoidaan mainituilla rajoituksilla. Nyt ongelma voidaan esittää optimointitehtävänä seuraavasti

$$\begin{aligned} \max \quad & 0, 1x_1 + 0, 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \geq 1000 \\ & x_2 \geq 2000 \\ & x_1 + x_2 \leq 10000 \\ & 10x_1 + 30x_2 \leq 180000. \end{aligned}$$

Ratkaistaan tehtävä. Rajoitukset ovat seuraavat

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 10000 \\ 10x_1 + 30x_2 &\leq 180000.\end{aligned}$$

Nämä rajoitukset ovat voimassa, joten voidaan kirjoittaa yhtälön seuraavassa muodossa

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 10000 \\ 10x_1 + 30x_2 &= 180000.\end{aligned}$$

saadaan yhtälöpari, joista voidaan ratkaista muuttujat x_1 ja x_2

$$x_1 + x_2 = 10000 \Leftrightarrow x_1 = 10000 - x_2.$$

Sijoitetaan $x_1 = 10000 - x_2$ yhtälöön $10x_1 + 30x_2 = 180000$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}10(10000 - x_2) + 30x_2 &= 180000 \\ \Leftrightarrow 100000 - 10x_2 + 30x_2 &= 180000 \\ \Leftrightarrow 100000 + 20x_2 &= 180000 \\ \Leftrightarrow 20x_2 &= 180000 - 100000 = 80000 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 4000.\end{aligned}$$

Sijoitetaan $x_2 = 4000$ yhtälöön $x_1 = 10000 - x_2$, jolloin saadaan

$$x_1 = 10000 - 4000 = 6000.$$

Optimaalinen piste on $x_1 = 6000$ ja $x_2 = 4000$. Sijoitetaan muuttujien x_1 ja x_2 arvot kohdefunktioon, jolloin saadaan

$$0,1 \cdot 6000 + 0,2 \cdot 4000 = 600 + 800 = 1400.$$

Kohdefunktion arvo on 1400,

eli maksimivoitto on 1400 euroa.

Tarkistetaan, päteekö tämä ratkaisu kaikkiin rajoituksiin.

$$\begin{aligned}x_1 &= 6000 > 1000 \quad \text{ok.} \\ x_2 &= 4000 > 2000 \quad \text{ok.} \\ x_1 + x_2 &= 6000 + 4000 = 10000 \quad \text{ok.} \\ 10 \cdot 6000 + 30 \cdot 4000 &= 180000 \quad \text{ok.}\end{aligned}$$

2.2 Epälineaarinen optimointitehtävä

Seuraava on lähteestä [1].

Yleinen epälineaarinen optimointitehtävä kirjoitetaan muodossa

$$\begin{aligned} & \min / \max f_0(x) \\ \text{s.t. } & f_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i, i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

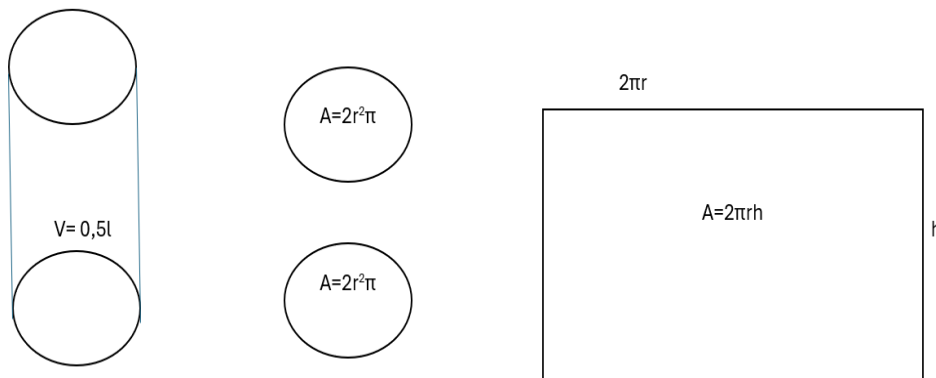
missä

vektori $x = (x_1, \dots, x_n)$ on optimointitehtävän päätösmuuttuja;

f_i on rajoitefunktio; b_i on parametreja;

Optimointitehtävä on epälineaarinen, kun kohdefunktio tai vähintään yksi rajoitefunktio on epälineaarinen.

Esimerkki 2.5. (Epälineaarinen optimointitehtävä) Valmistetaan lieriön muotoinen puolen litran juomatölkki, johon kuluu mahdollisimman vähän materiaalia. Muotoile ongelma optimointitehtäväksi. Onko tehtävä lineaarinen? Ratkaise tehtävä.



Kuva 2: Esimerkki (2.5) lieriön muotoinen juomatölkki.

Kuva (2) esitetään lieriön muotoinen puolen litran juomatölkki. Mallinnetaan ongelma optimointitehtäväksi. Ongelmanannossa kerrotaan, että kyseessä on lieriön muotoinen puolen litran juomatölkki, joten saadaan tölkin tilavuus on 0,5 litra eli 500ml. V on tilavuus. Tehtävän päätösmuuttujat ovat: r on säde, h on tölkin korkeus, r (säde) ja h (korkeus) eivät ole negatiivisia eivätkä nollia eli $r > 0$ ja $h > 0$. Lieriön tilavuuden kaava on

$$V = \pi r^2 h = 500$$

Ongelman tavoitteena on valmistaa tölkki, jonka valmistukseen kuluu mahdollisimman vähän materiaalia. Tätä varten tarvitaan lieriön pinta-ala, joka on

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Koska halutaan käyttää mahdollisimman vähemmän materiaalia, pyritään minimoimaan materiaalin kulutus. Halutaan minimoida $\min 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Ongelma mallinnetaan optimointitehtäväksi seuraavasti

$$\begin{aligned} \min & 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ \text{s.t.} & \pi r^2 h = 500 \\ & r > 0, h > 0. \end{aligned}$$

Koska kohdefunktio $2\pi r^2 + 2\pi r h$ ei ole lineaarinen ja myöskään rajoite $\pi r^2 h = 500$ ei ole lineaarinen, tehtävä on epälineaarinen optimointitehtävä.

Ratkaistaan optimointitehtävä. Ratkaistaan rajoite $\pi r^2 h = 500$, joka saadaan

$$\pi r^2 h = 500 \Leftrightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}.$$

Sijoitetaan $h = \frac{500}{\pi r^2}$ kohdefunktioon, jolloin saadaan

$$2\pi r^2 + 2\pi r h \Leftrightarrow 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{500}{\pi r^2} \Leftrightarrow 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}.$$

Derivoidaan kohdefunktio, jolloin saadaan

$$\frac{d}{dr} 2\pi r^2 + \frac{1000}{r} = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}.$$

Lasketaan nollakohta, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 4\pi r - \frac{1000}{r^2} &= 0 \\ 4\pi r^3 &= 1000 \\ r^3 &= \frac{1000}{4\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}} \\ r &\approx 4,30. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $r \approx 4,30$ yhtälöön $h = \frac{500}{\pi \cdot r^2}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} h &= \frac{500}{\pi \cdot r^2} \\ h &\approx \frac{500}{\pi \cdot 4,30^2} \\ h &\approx 8,60. \end{aligned}$$

Juomatölkin säde on 4,30 cm ja korkeus on 8,60 cm, pinta-ala on $2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 4,30^2 + 2\pi \cdot 4,30 \cdot 8,60 \approx 348,528 \approx 348,53$, joten pinta-ala on $348,53 \text{ cm}^2$. Kyseessä todella on minimi, sillä jos lasketaan toinen derivaatta, jolloin saadaan

$$\frac{d}{dr} 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 4\pi + \frac{2000}{r^3}.$$

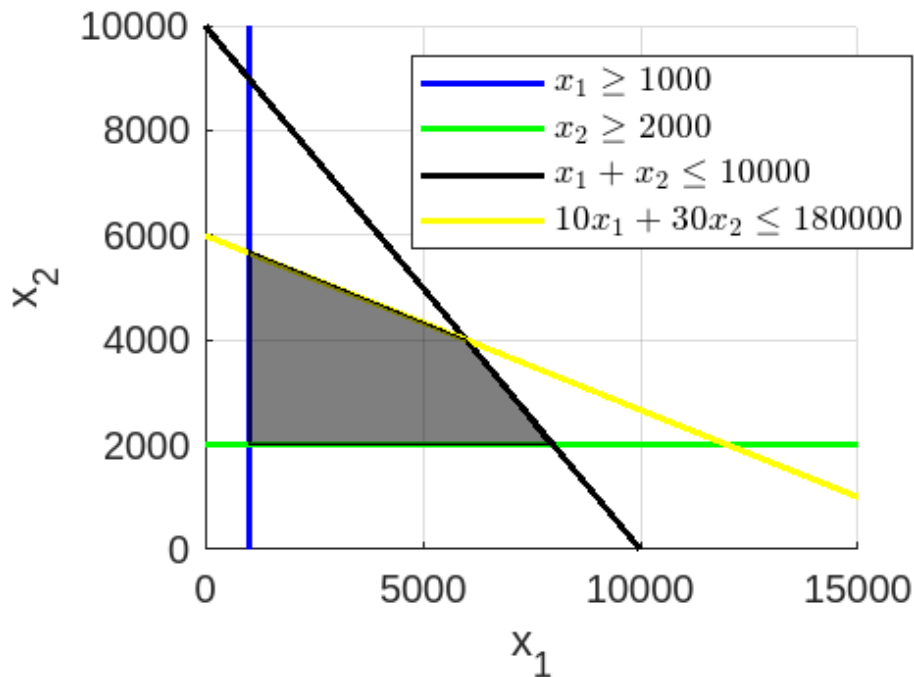
koska $r \geq 0$, että $4\pi + \frac{2000}{r^3} > 0$, ja edellä vaaditaan $r \neq 0$. Tämä osoittaa, että deivaatan nollakohdassa saavutetaan funktion minimi.

2.3 Graafinen ratkaisu lineaariseen tapaukseen

Optimointitehtävä, jossa on vain kaksi päätösmuuttujaa, voidaan ratkaista graafisesti.

Esimerkki 2.6. Käytetään sama esimerkki kuten esimerkki (2.4). Optimointitehtävän matemaattinen muoto on

$$\begin{aligned} \max \quad & 0,1x_1 + 0,2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \geq 1000 \\ & x_2 \geq 2000 \\ & x_1 + x_2 \leq 10000 \\ & 10x_1 + 30x_2 \leq 180000. \end{aligned}$$



Kuva 3: Esimerkin (2.6) sallittu alue.

Kuva (3) on kaksiulotteinen kuva, jossa x-akselilla on x_1 ja y-akselilla on x_2 . Kuvassa (3) esitetään tehtävän rajoitefunktiot. Funktiot leikkaavat toisensa, ja leikkauspisteet saadaan (leikkauspisteet kirjoitetaan muodossa (x_1, x_2)).

Funktion $x_1 \geq 1000$ ja funktion $x_2 \geq 2000$ leikkauspiste on $(1000, 2000)$.

Funktion $x_1 \geq 1000$ ja funktion $x_1 + x_2 \leq 10000$ leikkauspiste on $(1000, 9000)$.

Funktion $x_1 \geq 1000$ ja funktion $10x_1 + 30x_2 \leq 180000$ leikkauspiste on $(1000, \frac{17000}{3})$.

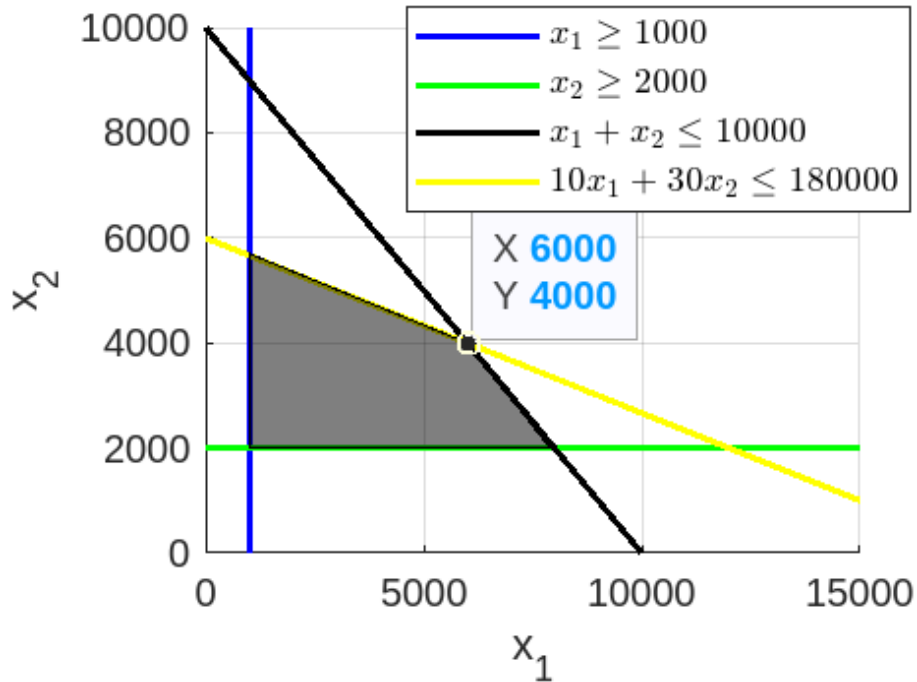
Funktion $x_2 \geq 2000$ ja funktion $x_1 + x_2 \leq 10000$ leikkauspiste on $(8000, 2000)$.

Funktion $x_2 \geq 2000$ ja funktion $10x_1 + 30x_2 \leq 180000$ leikkauspiste on $(12000, 2000)$.

Funktion $x_1 + x_2 \leq 10000$ ja funktion $10x_1 + 30x_2 \leq 180000$ leikkauspiste on

(6000,4000).

Optimointitehtävän rajoitusten mukaan löydetään neljä leikkauspistettä, jotka ovat $(1000,2000)$, $(1000, \frac{17000}{3})$, $(6000,4000)$, $(8000,2000)$. Yhdistetään neljä leikkauspistettä saadaan optimointitehtävän sallitun alueen rajat.



Kuva 4: Esimerkin (2.6) sallittu alue ja optimointitehtävän ratkaisu.

Kuvassa (4) esitetään tehtävän sallittu alue ja päätösmuuttujan arvot. Optimointitehtävän rajoitusten mukaan löydetään neljä leikkauspistettä, jotka ovat $(1000,2000)$, $(1000, \frac{17000}{3})$, $(6000,4000)$, $(8000,2000)$. Neljästä leikkauspisteestä vain piste $(6000,4000)$ pätee kaikkiin rajoituksiin. Piste $(6000,4000)$ on funktion $x_1 + x_2 \leq 10000$ ja funktion $10x_1 + 30x_2 \leq 180000$ leikkauspiste. Se pätee myös funktioihin $x_1 \geq 1000$ ja $x_2 \geq 2000$. Optimointitehtävän päätösmuuttujat ratkaistaan seuraavasti: $x_1 = 6000$ ja $x_2 = 4000$ (kuvassa (4) on merkitty leikkauspiste $(6000,4000)$, joka tarkoittaa $X=6000$, $Y=4000$.) Optimointitehtävän ratkaisu on, että $\max 0, 1x_1 + 0, 2x_2$ on 1400 euroa.

Esimerkki 2.7. Burgerikaupassa on myynnissä kevytburgeri, jossa on kanaa ja nautilia. Kevytburgerin pihvi painaa vähintään 125 grammaa, sisältää korkeintaan 350 kaloria, 15 grammaa rasvaa ja 360 milligrammaa suolaa. Käytetyssä nautilihassa on 2,5 kaloria, 0,2 grammaa rasvaa ja 3,5 milligrammaa suolaa per gramma. Vastaavat arvot kananlihassa ovat 1,8 kaloria, 0,1 grammaa rasvaa ja 2,5 milligrammaa suolaa per gramma. Määrää lihasekoitus, joka täyttää kaikki edellä mainitut rajoitukset ja jossa on mahdollisimman paljon nautilia. Formuloi ongelma optimointitehtäväksi ja ratkaise se graafisesti.

Ratksitaan ongelma. Määrätään tehtävän päätösmuuttujat, jotka ovat x_1 on pihvissä käytetyn nautilian määrä (yksikkö on gramma)

	Paino	Kaloria/gramma	Rasvaa	Suolaa
Naudanliha x_1	x_1	$2,5x_1$	$0,2x_1$	$3,5x_1$
Kananliha x_2	x_2	$1,8x_2$	$0,1x_2$	$2,5x_2$
Kevytburgerin pihvi	$\geq 125\text{g}$	$\leq 350\text{g}$	$\leq 15\text{g}$	$\leq 360\text{mg}$

Taulukko 4: Esimerkin (2.7) tehtävänannon tiedon taulukko.

x_2 on pihvissä käytetyn kananlihan määrä (yksikkö on gramma). Naudanlihan ja kananlihan määrät eivät olla negatiivisia eli $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Katsotaan rajoitukset läpi. Pihvin paino täytyy olla vähintään 125 grammaa, eli naudanlihan ja kananlihan yhteismäärän tulee olla suurempi tai yhtä suuri kuin 125 grammaa. Matemaattinen muoto on seuraavasti

$$x_1 + x_2 \geq 125.$$

Pihvin kokonaiskaloria on korkeintaan 350 kaloria. Naudanlihassa on 2,5 kaloria per gramma ja kananlihassa on 1,8 kaloria per gramma, jolloin saadaan

$$2,5x_1 + 1,8x_2 \leq 350.$$

Pihvissä kokonaisrasvaa on korkeintaan 15 grammaa. Naudanlihassa on 0,2 grammaa rasvaa per gramma ja kananlihassa on 0,1 grammaa rasvaa per gramma, jolloin saadaan

$$0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 15.$$

pihvin kokonaissuolan määrä on korkeintaan 360 milligrammaa. Naudanlihassa on 3,5 milligrammaa suolaa per gramma ja kananlihassa on 2,5 milligrammaa suolaa per gramma, jolloin saadaan rajoitefunktio

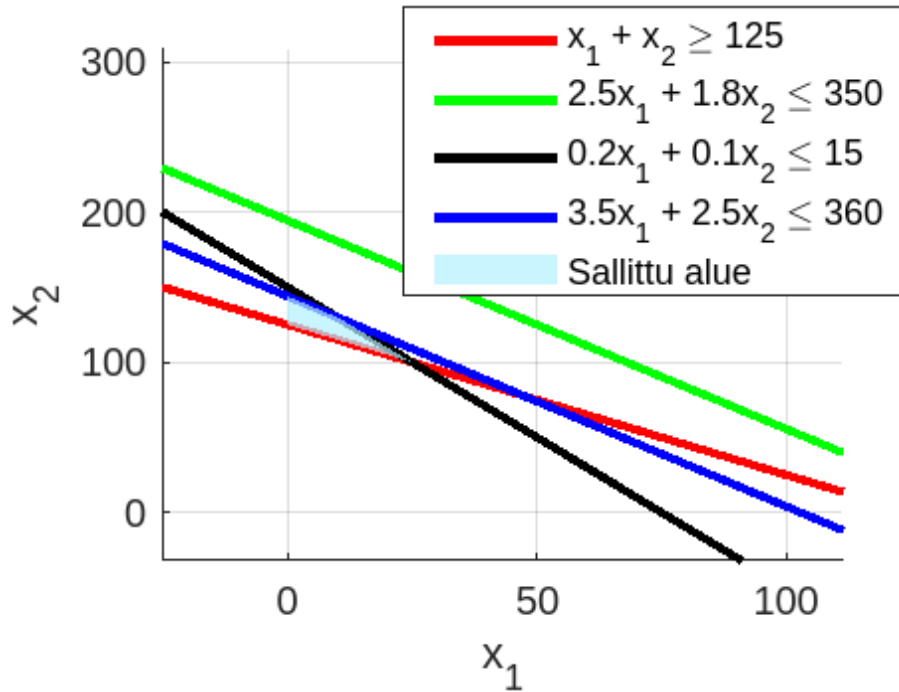
$$3,5x_1 + 2,5x_2 \leq 360.$$

Tehtävän toiveena on valmistaa pihvi, jossa on mahdollisimman paljon naudanlihaa. Saadaan kohdefunktio seuraavasti

$$\max x_1$$

Yhdistetään kohdefunktio ja rajoitefunktio, saadaan seuraavan optimointitehtävän

$$\begin{aligned} & \max x_1 \\ & \text{s.t. } x_1 + x_2 \geq 125 \\ & 2,5x_1 + 1,8x_2 \leq 350 \\ & 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 15 \\ & 3,5x_1 + 2,5x_2 \leq 360 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Kuva 5: Esimerkin (2.7) sallittu alue.

Kuvassa (5) esitetään optimointitehtävän rajoitefunktioita ja sallittu alue. Kuvassa sallittu alue on merkitty siniseksi. Sallittu alue muodostuu seuraavista rajoitefunktion $x_1 + x_2 \geq 125$ ja rajoitefunktion $0, 2x_1 + 0, 1x_2 \leq 15$ leikkauspisteestä sekä rajoitefunktion $0, 2x_1 + 0, 1x_2 \leq 15$ ja rajoitefunktion $3, 5x_1 + 2, 5x_2$ leikkauspisteestä ja x_2 -akseli. Kun yhdistetään nämä leikkauspisteet ja x_2 akseli, optimointitehtävän sallittu alue muodostuu.

Kuvassa (6) esitetään sallittu alue ja optimointitehtävän ratkaisu. Optimointitehtävän ratkaisu löytyy rajoitefunktion $x_1 + x_2 \geq 125$ ja rajoitefunktion $0, 2x_1 + 0, 1x_2 \leq 15$ leikkauspisteestä, joka on

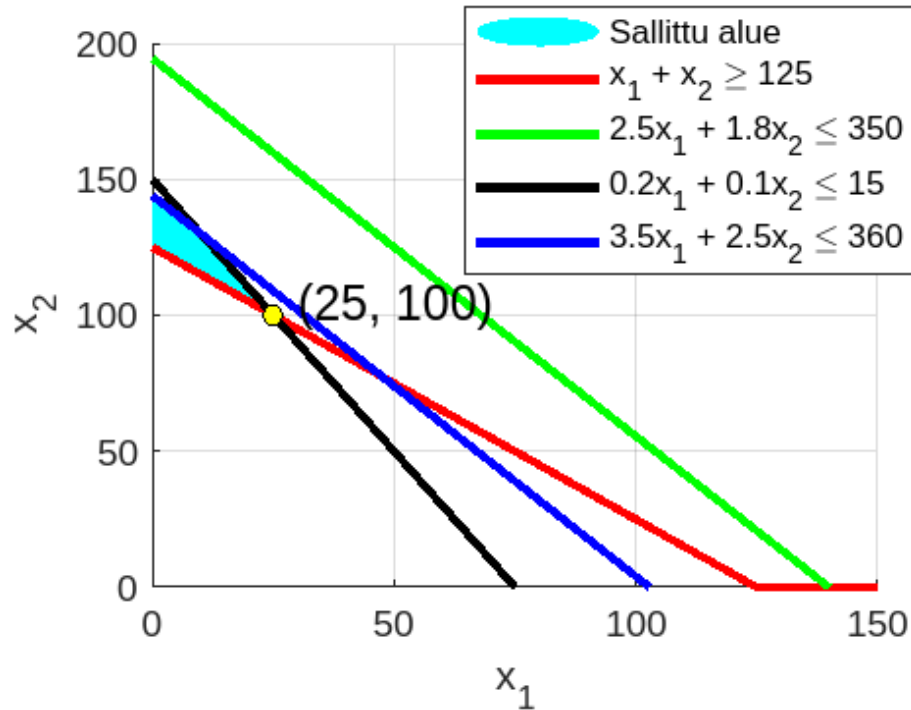
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 125 \\ 0, 2x_1 + 0, 1x_2 \leq 15. \end{cases}$$

Rajoitteet ovat voimassa. Voidaan kirjoittaa ne tässä muodossa

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 125 \\ 0, 2x_1 + 0, 1x_2 = 15. \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari, saadaan

$$x_1 + x_2 = 125 \Leftrightarrow x_1 = 125 - x_2.$$



Kuva 6: Esimerkin (2.7) sallittu alue ja optimointitehtävän ratkaisu.

Sijoitetaan $x_1 = 125 - x_2$ funktioon $0,2x_1 + 0,1x_2 = 15$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
 0,2 \cdot (125 - x_2) + 0,1x_2 &= 15 \\
 0,2 \cdot 125 - 0,2x_2 + 0,1x_2 &= 15 \\
 25 - 0,1x_2 &= 15 \\
 -0,1x_2 &= 15 - 25 \\
 -0,1x_2 &= -10 \\
 x_2 &= 100.
 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x_2 = 100$ funktioon $x_1 = 125 - x_2$, jolloin saadaan

$$x_1 = 125 - 100 = 25$$

Saadaan ratkaisu

$$\begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = 100. \end{cases}$$

Pihvissä on 25 grammaa naudanlihaa ja 100 grammaa kananlihaa. Tämä piste on myös merkitty kuvassa (6) näkyville.

Monia teorioita voidaan soveltaa optimointiongelmaan, kuten kombinatoriikkaan, verkkoteoriaan, dynaamiseen peliteoriaan ja niin edelleen. Seuraavassa luvussa käsitellään optimointiongelmiä verkkoteoriassa.

2.4 Optimointiongelma verkkoteoriassa

Tyypillisiä verkkoteorian optimointiongelmia ovat lyhin reitti ja minimivirittävä puu. Tässä kappaleessa käytetään minimivirittäviä puita verkkoteoria.

Virittävä puu on joukko kaaria, jotka yhdistävät kaikki solmut siten, että jokaisen solmun kautta kuljetaan ja verkkoon ei muodostu syklejä. Minimivirittävä puu on painotetun graafin virittävä puu, jonka kaarien painojen summa on mahdollisimman pienin [11]. Painotettu graafi on graafi, jossa jokaisella kaarella on liitetty paino tai kustannus. Painotetun graafin minimivirittävä puu on virittävä puu, jonka kokonaispaino (kaikkien kaarien painojen summa) ei ole suurempi kuin mikään muun virittävän puun kokonaispaino [10]. Graafi $G=(V,E)$, missä V on kaikkien solmujen joukko läpikulussa prosessissa ja E on kaikkien kaarien joukko läpikulussa prosessissa [12]. Graafin $G=(V,E)$ minimivirittävä puu on läpikulun prosessin kaarien E osajoukko, jonka kokonaispaino on pienin ja joka muodostaa graafin G virittävän puun [13]. Minimivirittävä puu suuntaamattomassa yhtenäisessä painotetussa graafissa on virittävä puu, jonka kokonaispaino on kaikista mahdollisista virittävästä puista pienin [5].

Minimivirittävä puu voidaan laskea seuraavilla algoritmeilla, kuten

1. Kruskalin algoritmi: algoritmi julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1956 ja Joseph Kruskal kehitti algoritmi. Myöhemmin H. Loberman ja A. Weinberger kehittivät algoritmia ja esittelivät sen tutkielmassa "Formal Procedures for Connecting Terminals with a Minimum Total Wire Length" [16], [14].
2. Primin algoritmi: algoritmi kehitti tšekkiläinen matemaatikko Vojtech Jarnik, joka julkaisi algoritmi vuonna 1930. Algoritmi julkaisi uudelleen vuonna 1957 tietojenkäsittelyn tutkija Robert C. Prim ja esitteli tutkielmassa "Shortest Connection Networks And Some Generalizations" [17], [15].
3. Boruvkan algoritmi: algoritmi julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1926 ja Otakar Boruvka julkaisi [18],

Tässä luvussa esitetään Kruskalin algoritmin teoria, käytännön esimerkki sekä optimointitehtävä. Myöhemmin luvussa 3.4 esitetään Primin algoritmin teoria, esimerkki ja monikriteerinen optimointitehtävä.

2.4.1 Kruskalin algoritmi

Lause 2.8. Kruskalin algoritmi on menetelmä minimivirittävän puun ongelman ratkaisemiseen. Algoritmi toimii seuraavalla tavalla:

Vaihe 1: Etsitään ja numeroidaan kaikki verkon solmut.

Vaihe 2: Järjestetään kaaret nousevaan järjestykseen painojen perusteella.

Vaihe 3: Valitaan järjestyksestä kaikista pienin painon kaari.

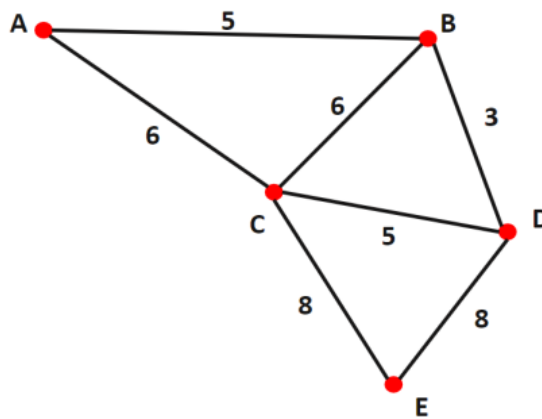
Vaihe 4: Tarkistetaan, muodostaako valittu kaari syklin nykyisen virittävän puun kanssa. Jos sykli ei muodostu, lisätään kaari virittävään puuhun, päivitetään puu. Jos sykli muodostuu, hylätään kyseinen kaari.

Vaihe 5: Toistetaan vaihe 3 ja vaihe 4.

Vaihe 6: Kun virittävässä puussa on kaikki verkon solmut (yhteensä V kappaletta) ja siinä on $V-1$ kaarta, jossa V on solmujen lukumäärä, algoritmi päättyy. Kruskalin algoritmin minimivirittävä puu syntyy. [12]

Seuraava esimerkki on lähteestä [19] kysymys 2.

Esimerkki 2.9. Etsitään kuvassa(7) esitetyn painotetun verkon minimivirittävä puu Kruskalin algoritmin avulla.



Kuva 7: Esimerkin (2.9) painotettu verkko [19].

Tehdään tehtävä lauseen (2.8) nojalla vaihe vaiheelta.

Vaihe 1 Numeroidaan solmut. Kuvassa on jo numeroitu, joten siirrytän seuraavaan vaiheeseen.

Vaihe 2 Järjestetään kaaret nousevaan järjestykseen painojen perusteella. Saadaan taulukko (5).

Vaihe 3 Valitaan vaiheessa 2 järjestyksestä pienin painon kaari. Pienin painon kaari on $(B,D)=3$.

Vaihe 4 Tarkistetaan, muodostuuko syklin nykyisen virittävän puun kanssa. Kaari (B,D) ei muodosta sykliä, joten se lisätään ja puu päivitetään puuhun. Muodostetaan syklintarkistusta varten seuraava taulukko (6)

Vaihe 5 Toistetaan vaihe 3 ja vaihe 4. Valitaan pienimmät kaaret, jotka ovat $(A,B)=5$ ja $(C,D)=5$. Tarkistetaan, muodostuuko sykli nykyisen virittävän puun kanssa, eli kaaren (B,D) kanssa. Kumpikaan ei muodosta sykliä valitun kaaren kanssa, joten

Taulukko 5: Esimerkin (2.9) kaaret nousevaan järjestykseen painojen perusteella.

E(Kaaret)	Painot
(B,D)	3
(A,B)	5
(C,D)	5
(A,C)	6
(B,C)	6
(C,E)	8
(D,E)	8

Taulukko 6: Esimerkin (2.9) kaaren syklistyys.

E(Kaaret)	Sykli
(B,D)	Ei
(A,B)	Ei
(C,D)	Ei
(A,C)	Kyllä
(B,C)	Kyllä
(C,E)	Ei
(D,E)	Ei

molemmat voidaan lisätä virittävään puuhun.

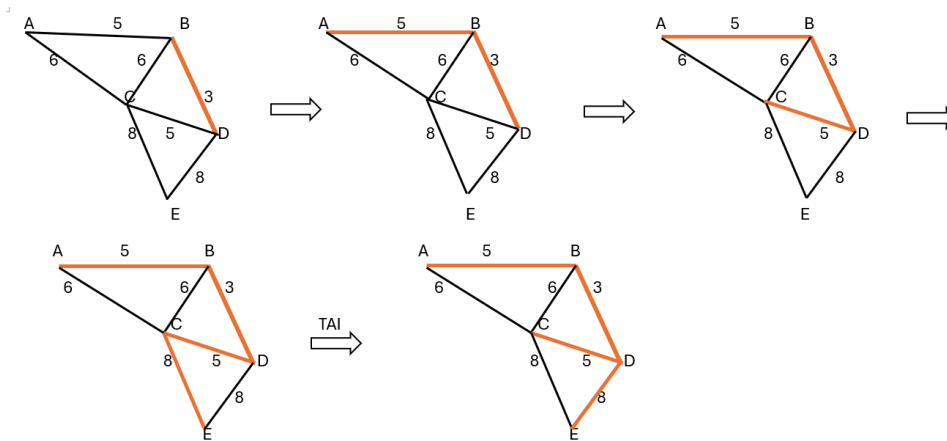
Aloitetaan uusi toisto. Valitaan pienimmät kaaret, jotka ovat $(A,C)=6$ ja $(B,C)=6$. Tarkistetaan, muodostuuko sykli. Kaari (A,C) muodostaa syklin kaarien (A,B) , (B,D) ja (C,D) kanssa. Kaari (B,C) muodostaa syklin kaarien (B,D) ja (C,D) kanssa. Näin ollen ei lisätä kaaria (A,C) ja (B,C) virittävään puuhun.

Aloitetaan uusi toisto. Valitaan pienimmät kaaret, jotka ovat $(C,E)=8$ ja $(D,E)=8$. Tarkistetaan, muodostuuko sykli. Kaari (C,E) ei muodosta sykliä valitun kaaren kanssa. Kaari (D,E) ei myöskään muodosta nykyisen virittävän puun kanssa. Huomioidaan, että ei voida lisätä molempia samanaikaisesti virittävään puuhun. Jos lisätään molemmat puuhun, ne muodostavat syklin. Voidaan lisätä vain jommankumman kaarista (C,E) tai kaarista (D,E) virittävään puuhun (8).

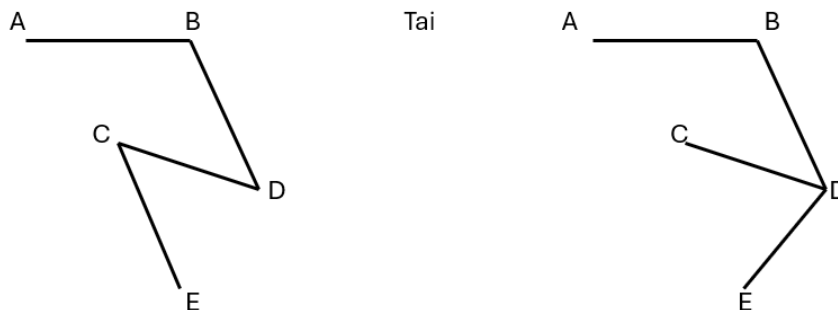
Vaihe 6 Tarkistetaan, nykyisessä virittävässä puussa sisältää kaikki solmut

$V=5=(A,B,C,D,E)$, ja siinä on 4 ($V-1=5-1=4$) kaarta. Virittävässä puussa ei muodostu sykliä. $MST = \{(B, D), (A, B), (C, D), (C, E)\} = 21$ tai

$MST = \{(B, D), (A, B), (C, D), (D, E)\} = 21$. Minimivirittävä puu syntyy, ja se esitetään kuvassa (9).



Kuva 8: Esimerkin (2.9) virittävä puu.



Kuva 9: Esimerkin (2.9) minimivirittävä puu.

Minimivirittävän puun Kruskalin algoritmi voidaan kirjoittaa matemaattisesti ja käyttää optimointitehtävässä. Seuraavassa lauseessa esitetään Kruskalin algoritmi matemaattisessa muodossa, ja esimerkissä (2.11) esitetään optimointitehtävä, joka ratkaistaan Kruskalin algoritmin perusteella.

Lause 2.10. Kruskalin algoritmin matemaattinen muoto voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j)} p_{(i,j)} x_{(i,j)} \\
 & s.t. \sum_{(i,j)} x_{(i,j)} = V - 1 \\
 & \sum_{(i,j)} x_{(i,j)} \leq K - 1 \\
 & x_{(i,j)} = \begin{cases} 1, & \text{jos kaari lisätään virittävään puuhun.} \\ 0, & \text{muuten} \end{cases} \\
 & i \in (A, B, C, D), j \in (A, B, C, D).
 \end{aligned}$$

$p_{(i,j)}$ on kaaren (i,j) pain.

V on kaikkien solmujen joukko, tässä tapauksessa V on solmujen lukumäärä joukossa.

K on joukon V osajoukko, tässä tapauksessa K on osajoukon solmujen lukumäärä.

Esimerkki 2.11. Suunnitellaan matka ja valitaan neljä nähtävyyttä, jotka ovat nähtävyys A , nähtävyys B , nähtävyys C ja nähtävyys D . Tärkeimmät tiedot on esitetty kuvassa (10) (kaaren painon yksikkö on km). Etsitään mahdollisimman lyhyt matka, jolla vierailaan kaikissa nähtävyyksissä. Muotoillaan ongelma optimointitehtäväksi ja ratkaistaan tehtävä Kruskalin algoritmilla.

$p_{(i,j)}$ on kahden nähtävyyden välisen kaaren paino. Solmun (nähtävyyden) i ja solmun (nähtävyyden) j välin yhdistävä kaari, missä $i \in (A, B, C, D)$, $j \in (A, B, C, D)$. V on kaikkien nähtävyyksien solmujen joukko, ja tehtävässä käytetään solmujen lukumäärä.

$x_{(i,j)}$ on valittu kaari, joks tulee nähtävyyden i ja nähtävyyden j väli, missä $i \in (A, B, C, D)$, $j \in (A, B, C, D)$.

K on V osajoukko eli $K \subset V$, ja tehtävässä käytetään solmujen määrä.

määritellään rajoitefunktio Kruskalin algoritmin rajoituksella. Minimivirittävässä puussa pitää sisältää kaikki solmut eli valittujen kaarien lukumäärä on kaikkien valittujen solmujen lukumäärä miinus yksi. Tällöin saadaan seuraava rajoite

$$\sum_{i \in (A, B, C, D), j \in (A, B, C, D)} x_{(i,j)} = V - 1.$$

Lisäksi kaarien väliin ei missään vaiheessa saa muodostua sykliä. Mikä tahansa nähtävyyksien osajoukon, johon kuuluvat solmut, yhdistyvät kaarien joukkolla, ei muodostaa sykliä. Valittujen kaarien määrä on pienempi tai yhtä suuri kuin osajoukon solmujen lukumäärä miinus yksi. Täällöin saadaan seuraava rajoite

$$\sum_{i \in (A, B, C, D), j \in (A, B, C, D)} x_{(i,j)} \leq K - 1, K \text{ on } V \text{ osajoukko ja joukko ei ole tyhjä.}$$

Lopuksi on

$$x_{(i,j)} = \begin{cases} 1, & \text{jos kaari solmujen } i \text{ ja } j \text{ välillä kaari on valittu mukaan virittävään puuhun} \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä $i \in (A, B, C, D)$ ja $j \in (A, B, C, D)$

Tehtävän tavoitteena on etsiä mahdollisimman lyhyt reitti, joka käy läpi kaikki nähtävyydet. Tällöin saadaan

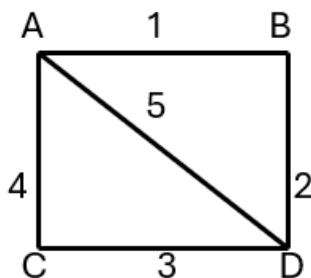
$$\min \sum_{i \in (A, B, C, D), j \in (A, B, C, D)} p_{(i,j)} x_{(i,j)}.$$

Lopullinen optimointitehtävä matemaattisesti on

Taulukko 7: Esimerkin (2.11) kaaret nousevaan järjestykseen painojen perusteella.

Kaaret	Painot
(A,B)	1
(B,D)	2
(D,C)	3
(C,A)	4
(A,D)	5

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} p_{(i,j)} x_{(i,j)} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} x_{(i,j)} = V - 1 \\
 & \sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} x_{(i,j)} \leq K - 1 \\
 x_{(i,j)} = & \begin{cases} 1, & \text{jos kaari solmujen } i \text{ ja } j \text{ välillä kaari on valittu mukaan virittävään puuhun.} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases} \\
 & i \in (A, B, C, D) \text{ ja } j \in (A, B, C, D).
 \end{aligned}$$



Kuva 10: Esimerkin (2.11) nähtävyyksien reitin verkko ja nähtävyyksien välin etäisyys.

Ratkaistaan tehtävä Kruskalin algoritmin avulla. Verkossa solmujen merkinnät on jo annettu. Aloitetaan vaiheesta 2: järjestetään kaikki kaaret painon mukaan nousevaan järjestykseen. Saamme seuraava taulukko (7).

Vaihe 3: Valitaan järjestyksestä pienin painon kaari. Pienin painon kaari on $(A,B)=1$.

Taulukko 8: Esimerkissä (2.11) muodostuuko sykli kaarien välillä.

Kaaret	Sykli
(A,B)	Ei
(B,D)	Ei
(D,C)	Ei
(C,A)	Kyllä
(A,D)	Kyllä

Vaihe 4: Tarkistetaan muodostaako syklin. Kaari (A,B) ei muodosta sykliä valitun kaaren kanssa, Joten lisätään se virittävään puuhun. Taulukossa (8) esitetään, muodostuuko kaarien välillä sykli.

Vaihe 5: Toistetaan vaihe 3 ja vaihe 4. Lopulta saadaan kaaret (A,B)=1, (B,D)=2 ja (D,C)=3.

Vaihe 6: Tarkistetaan, sisältääkö kaikki verkon solmut virittävä puussa ja muodostuuko syklin.

$$\text{MST} = \{(A, B), (B, D), (D, C)\} \quad (11). \quad (1)$$

Kruskalin algoritmilla saadaan kaaret (A,B)=1, (B,D)=2, (D,C)=3, jotka täyttävät rajoitukset. Kaaret (C,A)=4 ja (A,D)=5 eivät täytä rajoituksia.

Tarkistetaan, täyttääkö (1) kaikki rajoitukset. Tiedämme, että

$$x_{(i,j)} = \begin{cases} 1, & \text{jos kaari solmujen } i \text{ ja } j \text{ välillä kaari on valittu mukaan virittävään puuhun} \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä $i \in (A, B, C, D)$ ja $j \in (A, B, C, D)$, tarkistetaan rajoitusten täyttääminen

$$\sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} x_{(i,j)} = V - 1 \quad (2)$$

Tarkistetaan, täyttääkö ratkaisu rajoitukset.

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} x_{(i,j)} \\ &= x_{(A,B)} + x_{(B,D)} + x_{(D,C)} + x_{(C,A)} + x_{(A,D)} = 3, \\ & V = \{A, B, C, D\} = 4, \\ & V - 1 = 3. \end{aligned}$$

Rajoitefunktion (2) vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret, joten tämä ratkaisu täyttää rajoituksen.

Tarkistetaan, rajoitella $\sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} x_{(i,j)} \leq K - 1$ täyttääkö (1) rajoituksen. K on V osajoukko, joka on määritelty seuraavasti: $K = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,D\}, \{C,D\}, \{A,B,C\}, \{A,B,D\}, \{B,C,D\}\}$. Kaaria, jotka voivat syntyä, on $K = \{\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,D\}, \{C,D\}, \{A,B,C\}, \{A,B,D\}, \{B,C,D\}\}$. Sijoitetaan joukon K muuttujalle $x_{(i,j)}$. Kun $K = (A,B) = 2$,

$$\sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} x_{(i,j)} \leq K - 1,$$

Missä $x_{(A,B)} = 1$ ja $K - 1 = 1$.

Näin ollen $K = (A,B)$ täyttää rajoituksen.

Kun $K = (A,C) = 2$

$$\sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} x_{(i,j)} \leq K - 1,$$

Missä $x_{(A,C)} = 0$ ja $K - 1 = 2 - 1 = 1$.

Näin ollen $K = (A,C)$ täyttää rajoituksen.

Niin kuin edelleen, saadaan

kun $K = (A,D) = 2$, $x_{(A,D)} = 0 < 2 - 1 = 1$. Täyttää rajoituksen.

kun $K = (B,D) = 2$, $x_{(B,D)} = 1 = 2 - 1$. Täyttää rajoituksen.

kun $K = (C,D) = 2$, $x_{(C,D)} = 1 = 2 - 1$. Täyttää rajoituksen.

kun $K = (A,B,C) = 3$, $x_{(A,B)} + x_{(A,C)} = 1 + 0 < 3 - 1$. Täyttää rajoituksen.

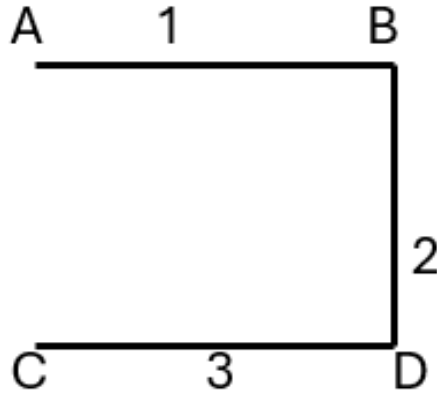
kun $K = (A,B,D) = 3$, $x_{(A,B)} + x_{(B,D)} = 1 + 1 = 3 - 1$ TAI $x_{(A,B)} + x_{(A,D)} = 1 + 0 < 3 - 1$. Täyttää rajoituksen.

kun $K = (B,C,D) = 3$, $x_{(B,D)} + x_{(D,C)} = 1 + 1 = 3 - 1$. Täyttää rajoituksen. Kun minimivirittävä puu (MST) (1) täyttää kaikki rajoitukset. Sijoitetaan minimivirittävä puu (MST) (1) kohtefunktioon, saadaan

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i \in (A,B,C,D), j \in (A,B,C,D)} p_{(i,j)} x_{(i,j)} \\ &= p_{(A,B)} x_{(A,B)} + p_{(B,D)} x_{(B,D)} + p_{(D,C)} x_{(D,C)} + p_{(C,A)} x_{(C,A)} + p_{(A,D)} x_{(A,D)} \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Eli mahdollisimman lyhyt reitti kulkee nähtävyydestä A nähtävyyteen B, sieltä nähtävyyteen C ja lopuksi nähtävyyteen D (eli reitti A-B-C-D), ja sen kokonaispituus on 6 km.

Kruskalin algoritmia voidaan hyödyntää elämässä. Esimerkiksi postinjakelussa. Postinjakeluverkossa pyritään löytämään jakelupisteiden välinen mahdollisimman lyhyt reitin.



Kuva 11: Esimerkin (2.11) minimi virittävä puu.

Taulukko 9: Kriteerit ja vaihtoehdot esimerkissä (3.1).

	VW	Opel	Ford	Toyota
Hinta(1000 euroa)	16,2	14,9	14,0	15,2
Kulutus(1/100KM)	7,2	7,0	7,5	8,2
Teho(KW)	66,0	62,0	55,0	71,0

3 Monikriteerinen optimointi

3.1 Päätöksentekoavaruus ja kohdefunktion määrittelyalue

Tässä esimerkissä esitetään niin kutsuttu päätösavaruus. Seuraava esimerkki on lähteestä [2].

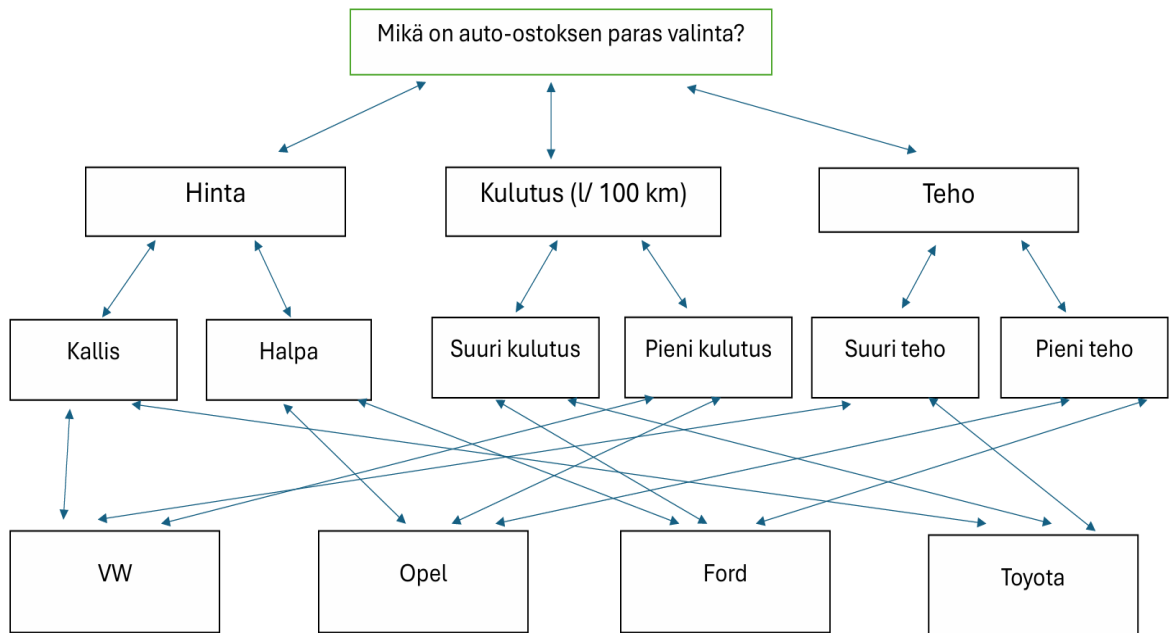
Esimerkki 3.1. Halutaan ostaa uusi auto ja olemme valinneet neljä vaihtoehtoa eri automerkeiltä: VW Golf, Opel, Ford Focus ja Toyota Corolla. Teemme päätösvalinnan hinnan, polttoaineenkulutuksen ja tehon perusteella. Pidetään parempana edullista ja tehokasta autoa, joka kuluttaa vähän polttoainetta. Tässä tapauksessa on neljä vaihtoehtoa ja kolme kriteeriä. Näiden neljän auton ominaisuudet on esitetty taulukossa (9).

Päätetään, mikä neljästä vaihtoehdosta on paras ostovaihtoehto, kun autolla on korkea teho, pieni polttoaineenkulutus ja matala hinta. Ei valita auto, joka on sekä kallis että pienellä teholla, ja jonka polttoaineenkulutus on suuri. Huomataan, että valinta on helppo, jos otetaan huomioon vain yksi kolmesta kriteeristä. Kuvassa (12) pohdintaa esimerkistä.

Katsotaan takaisin esimerkki (3.1), ja tarkastellaan, jos otetaan huomioon vain hinta ja polttoaineenkulutus. Voidaan miettiä kriteeriarvoja hinnasta ja polttoai-

neenkulutuksesta kaksiulotteisessa koordinaatistossa.

Kuvasta (13) voimme helposti havaita, että automerkit Ford ja Opel ovat kannattavimpia. Ford on kaikista halvin, ja Opelilla on kaikista matalin polttoaineenkulutus. Lisäksi sekä Toyota että VW ovat kalliimpia ja kuluttavat enemmän polttoainetta kuin Opel.



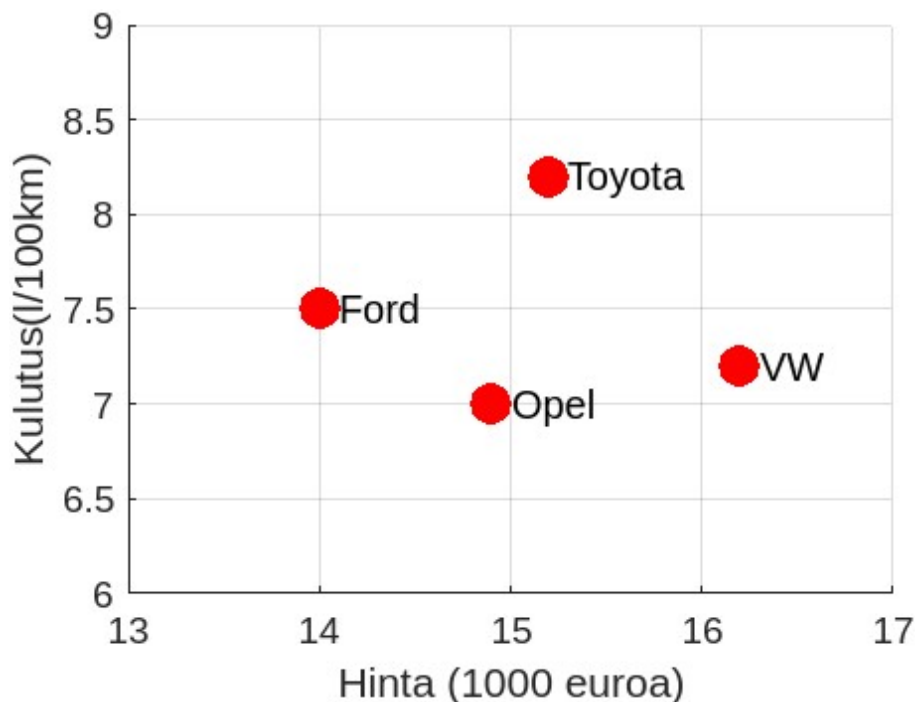
Kuva 12: Auto-osto esimerkissä (3.1).

Kutsutaan $\chi = \{\text{VW}, \text{Opel}, \text{Ford}, \text{Toyota}\}$ **ratkaisujoukoksi (feasible set)** tai ratkaisuongelman vaihtoehtojoukoksi. $\{\text{Opel}, \text{Ford}\}$ on pareto-optimaalinen ratkaisu. Avaruutta, joka sisältää ratkaisujoukon χ , kutsutaan **päätöksentekoavaruudeksi (decision space)**. Jos merkitään hinta funktiona f_1 ja polttoaineenkulutus funktiona f_2 , niin kuvat $f_i : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ ovat kriteerifunktioita tai kohdefunktio. Optimoitioingelma voidaan merkitä matemaattisesti muodossa

$$\min_{x \geq 0} (f_1(x), f_2(x)).$$

Ratkaisujoukon χ kuva kohdassa $f = (f_1, f_2)$, joka on merkitty $\mathcal{Y} = f(\chi) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), \text{jolle } x \in \chi\}$ kutsutaan ratkaisujoukon kuvaksi tai ratkaisujoukoksi kriteeriavaruudessa. Avaruus, josta kriteeriarvot ovat otettu, kutsutaan **kriteeria-varuudeksi (criterion space)**.

Lause 3.2. Ratkaisujoukko on joukko, joka edustaa sallittua aluetta (sisältäen kaikki vaihtoehdot), josta voidaan tehdä päätöksiä. Ratkaisujoukko on päätöksentekoavaruuden osajoukko.



Kuva 13: Esimerkin (3.1) määrittelyalue.

Taulukko 10: Esimerkin (3.3) yliopiston tiedot.

	Yliopisto A	Yliopisto B	Yliopisto C	Yliopisto D
Aika	3 vuotta	3 vuotta	3 vuotta	5 vuotta
Lukukausimaksu	350 euroa	1250 euroa	300 euroa	2000 euroa
Apuraha	Ei	Kyllä(suhteellinen)	Kyllä(ylittää)	Kyllä(kattaa)
elinkustannukset	1000 euroa	900 euroa	1030 euroa	1300 euroa

Esimerkki 3.3. Maisterin tutkinto on loppuvaiheessa, ja on aika miettiä jatko-opiskelua. Olemme hakeneet useisiin yliopistoihin, ja neljä on lähettänyt hyväksymiskirjeen (offer of admission). Täytyy valita yksi neljästä yliopistosta. Neljän yliopistojen tiedot on esitetty taulukossa (10).

Taulukossa, jos tarkastellaan vain opiskeluaajan pituutta, yliopisto A ja yliopisto B tarjoavat 3 vuoden opiskeluaajan. Yliopisto C tarjoaa 4 vuoden opiskeluaajan ja yliopisto D tarjoaa 5 vuoden opiskeluaajan. Yliopisto A ja yliopisto B ovat lyhyimmät opiskeluaikajakson, eli 3 vuotta.

Jos tarkastellaan vain lukukausimaksuja, yliopiston A lukukausimaksu on 350 euroa, yliopiston B lukukausimaksu on 1250 euroa, yliopiston C lukukausimaksu on 300 euroa, ja yliopiston D lukukausimaksu on 2000 euroa. Yliopisto A ja yliopisto C tarjoavat neljästä alhaisimmat lukukausimaksut, eli 350 euroa.

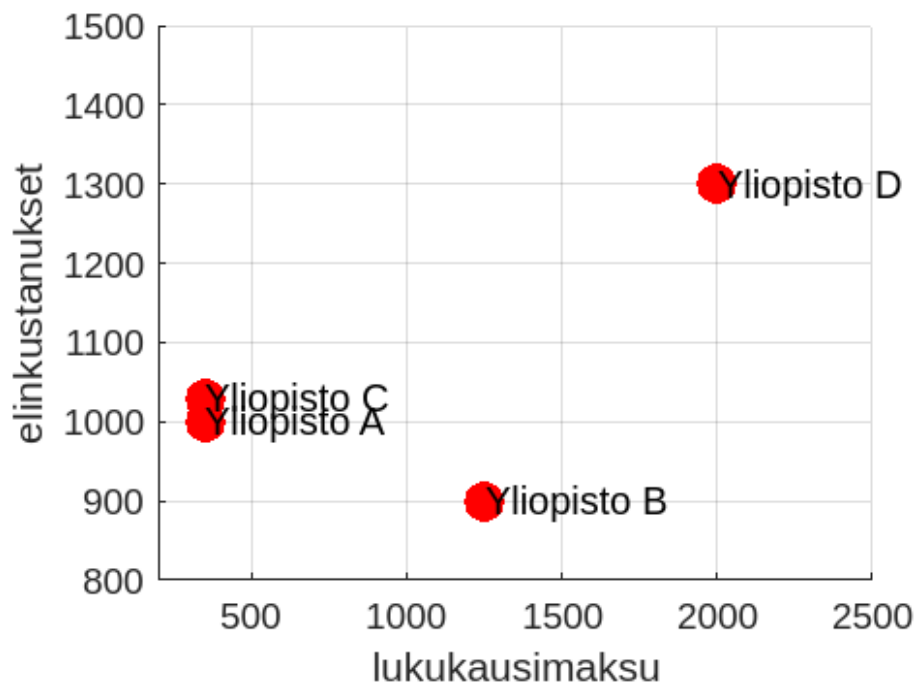
Jos tarkastellaan apurahoja, yliopisto A ei tarjoa apurahaa. Yliopisto B tarjoaa suhteellinen apurahaa. Yliopisto C tarjoaa apurahan, joka ylittää peruselinkustannukset. Yliopisto D tarjoaa apurahan, joka kattaa peruselinkustannukset. Yliopisto

C tarjoaa suurimman apuraha.

Jos tarkastellaan elinkustannuksia, yliopiston A kaupungissa elinkustannukset ovat noin 1000 euroa, yliopiston B kaupungissa elinkustannukset ovat noin 900 euroa, yliopiston C kaupungissa elinkustannukset ovat noin 1030 euroa ja yliopiston D kaupungissa elinkustannukset ovat noin 1300 euroa. Yliopiston B kaupungissa elinkustannukset ovat matalimmat, ja yliopiston D kaupungissa elinkustannukset ovat korkeimmat.

Katsotaan takaisin esimerkkiin (3.3), ja otetaan huomioon vain lukukausimaksu ja elinkustannukset. Voidaan tarkastella kriteeriärvot lukukausimaksulle ja elinkustannuksille kaksiulotteisessa koordinaatistossa. (Kuvassa (14) on esitetty.) Yliopistolla C on matalin lukukausimaksu. Yliopistolla A on matalin elinkustannus ja yliopistolla B on toiseksi matalin elinkustannus. Tästä huomaa, että valinta on helppo, jos ottaa huomioon vain yksi kriteeri.

$\chi = \{\text{yliopisto A, yliopisto B, yliopisto C, yliopisto D}\}$ on ratkaisujoukko tai ratkaisuongelman vaihtoehtojoukko. Päätöksentekoavaruus on avaruus, joka sisältää ratkaisujoukko χ , eli ratkaisujoukko on päätöksentekoavaruuden osajoukko. $\{\text{Yliopisto B, Yliopisto C}\}$ on pareto-optimaalinen ratkaisu tässä esimerkissä.



Kuva 14: Esimerkin (3.3) yliopiston lukukausimaksu ja elinkustannukset.

Tässä esimerkissä esitetään niin kutsuttu kohdefunktion määrittelyalue [2].

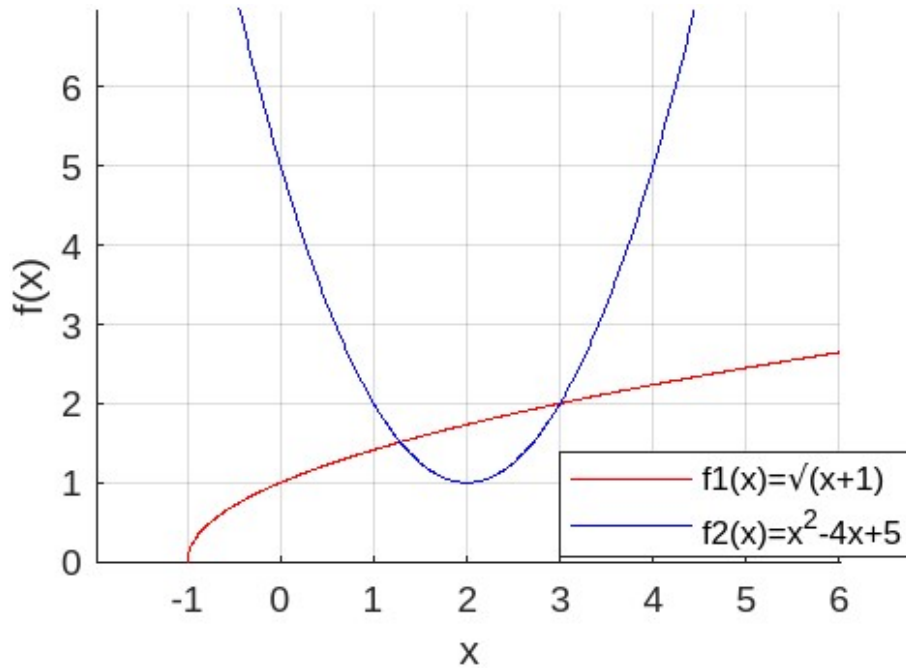
Esimerkki 3.4. Mietitään tässä esimerkissä matemaattista ongelmaa, jossa on kaksi kriteeriä ja yksi päätösmuuttuja. Kriteerit tai kohdefunktiot, joita halutaan minimoida samanaikaisesti ei-negatiivisella reaalinlinjalla, ovat

$$f_1 = \sqrt{x+1} \quad \text{ja} \quad f_2 = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1, \quad (3)$$

funktio on piirretty kuvassa (15). Halutaan ratkaista optimointiongelma

$$\min_{x \geq 0} (f_1(x), f_2(x)) \quad (4)$$

Huomataan, että jokaiselle funktiolle on olemassa yksikäsitteinen vastaava ongelma, joka on helppo ratkaista (voi lukea suoraan kuvasta) : $x_1 = 0$ on funktion f_1 yksikäsitteinen minimiarvo, kun $x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ ja $x_2 = 2$ on funktion f_2 yksikäsitteinen minimiarvo, kun $x \in \mathbb{R} : x \geq 0$.



Kuva 15: Esimerkin (3.4) kohdefunktiot.

3.2 Dominoimaton (nondominated) pisteet ja joukko

Seuraava esimerkki on lähteestä [2].

Esimerkki 3.5. Esimerkissä (3.4) on ratkaisut ratkaisujoukko, joka on

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad (5)$$

ja kohdefunktiot ovat

$$f_1 = \sqrt{x+1} \quad \text{ja} \quad f_2 = x^2 - 4x + 5. \quad (6)$$

Päätöksentekoavaruus on \mathbb{R} , koska $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$. Kriteeriavaruus on \mathbb{R}^2 , koska $f(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}$. Tällöin saadaan ratkaisujoukon kuva kriteeriavaruudessa. Korvataan merkintä $f_1(x)$ muodossa y_1 ja merkintä $f_2(x)$ muodossa y_2 , jolloin saadaan $x = (y_1)^2 - 1$ (ratkaistaan $y_1 = \sqrt{x+1}$).

$$\begin{aligned} f_1 = \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow y_1 = \sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow (y_1)^2 = (\sqrt{x+1})^2 \\ &\Leftrightarrow (y_1)^2 = x+1 \\ &\Leftrightarrow (y_1)^2 - 1 = x \\ &\Leftrightarrow x = (y_1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Siksi saadaan myös

$$\begin{aligned} f_2 &= x^2 - 4x + 5 \\ &\Leftrightarrow y_2 = x^2 - 4x + 5. \end{aligned}$$

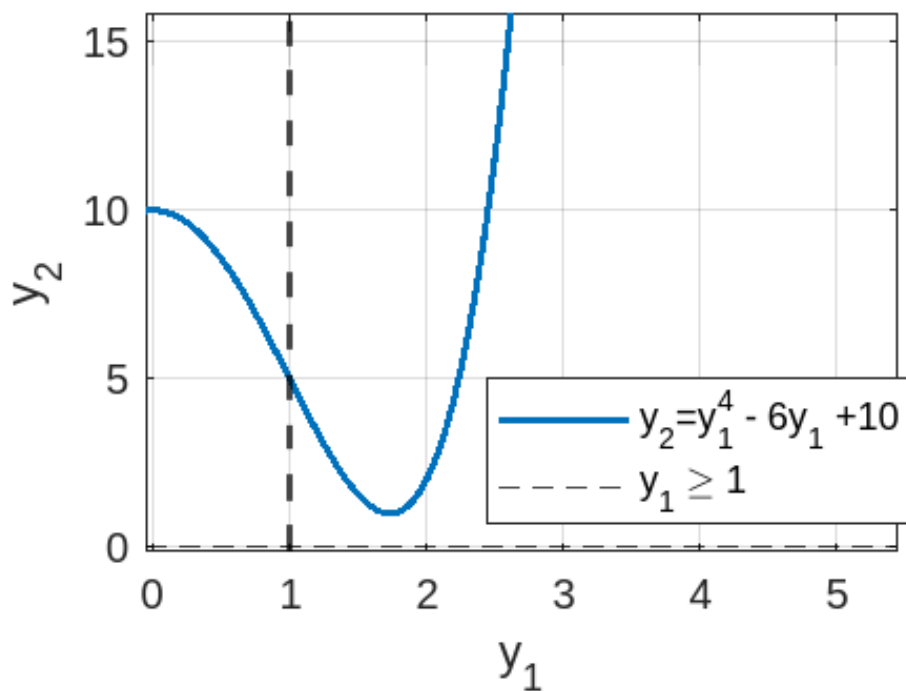
Sijoitetaan $x = (y_1)^2 - 1$ funktioon $f_2(x)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} y_2 &= ((y_1)^2 - 1)^2 - 4((y_1)^2 - 1) + 5 \\ &\Leftrightarrow y_2 = (y_1^2 - 1)(y_1^2 - 1) - (4(y_1)^2 - 4) + 5 \\ &\Leftrightarrow y_2 = ((y_1^2)(y_1^2) + (y_1^2)(-1) + (-1)(y_1^2) + (-1)(-1)) - 4(y_1)^2 + 4 + 5 \\ &\Leftrightarrow y_2 = (y_1^4 - y_1^2 - y_1^2 + 1) - 4(y_1)^2 + 4 + 5 \\ &\Leftrightarrow y_2 = (y_1^4 - 2y_1^2 + 1) - 4y_1^2 + 4 + 5 \\ &\Leftrightarrow y_2 = y_1^4 - 6y_1^2 + 10 \end{aligned}$$

Huomataan, että $x \geq 0$, joten $y_1 \geq 1$. Näin ollen ratkaisualue $\mathcal{Y} := f(\mathcal{X})$ sijaitsee pystysuoran $y_1 = 1$ oikealla puolella. Kuvassa (16) havainnollistetaan tämä.

Lasketaan funktion y_1 minimikohta. Esimerkissä (3.4) saatiin $x_1 = 0$ ja $x_2 = 2$, joten sijoittamalla $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$ funktioon y_1 , saadaan seuraavat tulokset

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{x+1}, \\ &\text{sijoitetaan } x=0 \\ y_1 &= \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1, \\ &\text{sijoitetaan } x=2 \\ y_1 &= \sqrt{2+1} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$



Kuva 16: Esimerkin (3.5) määrittelyalue.

eli $y_1 = f_1(x) \in [1, \sqrt{3}]$. Samalla voidaan laskea funktiolle y_2 muuttujan y_1 avulla, jolloin saadaan

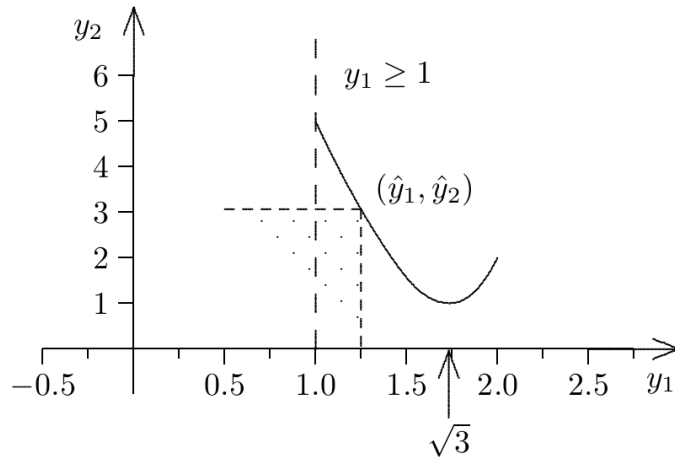
$$\begin{aligned}
 y_2 &= x^2 - 4x + 5 = y_1^4 - 6y_1^2 + 10, \\
 &\text{sijoitetaan } y_1 = 1 \text{ funktioon} \\
 y_2 &= 1^4 - 6 + 10 = 1 - 6 + 10 = 5, \\
 &\text{sijoitetaan } y_1 = \sqrt{3} \text{ funktioon} \\
 y_2 &= (\sqrt{3})^4 - 6 \cdot (\sqrt{3})^2 + 10 = 9 - 18 + 10 = 1.
 \end{aligned}$$

joten $y_2 = f_2(x) \in [1, 5]$. Näitä y_1 pisteitä, joiden arvo on $1 \leq y_2 \leq 5$ ja y_2 pisteitä, joiden arvo on $1 \leq y_1 \leq \sqrt{3}$, kutsutaan **dominoimattomiksi pisteiksi (EN. nondominated point)**. Kuvassa (17) havainnollistetaan tämän.

Seuraavaksi esitellään niin sanottu dominoimaton ratkaisu, Seuraava määritelmä on lähteestä [3].

Määritelmä 3.6. kohdefunktio $f_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kun $j=1, \dots, p$, on monikriteerinen. Ratkaisujoukko on diskreetti eli erillinen ja merkitään $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Jokainen kelvollinen ratkaisu $x \in \mathcal{X}$ vastaa kohdefunktioarvoja $y = f(x)$. Tavoiteavaruuden arvojoukko määritellään seuraavasti: $\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^p : y = f(x), \text{ jolle } x \in \mathcal{X}\}$, missä \mathcal{Y} sisältää kaikki mahdolliset kohdefunktioarvot tavoiteavaruudessa. Matemaattinen määritelmä on:

$$\begin{aligned}
 \min f(x) &= [f_1(x), \dots, f_p(x)] \\
 &\text{s.t. } x \in \mathcal{X}.
 \end{aligned}$$



Kuva 17: Esimerkin (3.5) dominoimaton pisteet [2].

Ristiriitaisten tavoitteiden vuoksi matemaattisella määritelmällä voi olla useampi kuin yksi ratkaisu. Näitä ratkaisuja kutsutaan **tehokkaiksi ratkaisuiksi**.

Lause 3.7. Ratkaisu $x^* \in \mathcal{X}$ kutsutaan tehokkaaksi tai Pareto-optimaaliseksi, jos ei ole olemassa kelvollista ratkaisua $x \in \mathcal{X}$, jonka $f_j(x) \leq f_j(x^*)$, kaikilla $j = \{1, \dots, p\}$, ja $f_i(x) < f_i(x^*)$ jollekin $i \in \{1, \dots, p\}$. Jos $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ ja $f_1(x_1) \leq f_2(x_2)$, sanotaan, että x_1 dominoi x_2 ja $f_1(x)$ dominoi $f_2(x)$. Tehokas ratkaisu x^* on sellainen, että $f(x^*) \in \mathbb{R}^p$, ja sitä kutsutaan dominoimattomaksi ratkaisuksi. Kaikkien tehokkaiden ratkaisujen joukko $x^* \in \mathcal{X}$ merkitään \mathcal{X}_E ja sitä kutsutaan tehokkaaksi joukoksi. Kaikkien dominoimattomien pisteiden joukko $y^* = f(x^*) \in \mathcal{Y}$, jossa $x^* \in \mathcal{X}_E$, merkitään \mathcal{Y}_N ja sitä kutsutaan dominoimattomaksi joukoksi. [3]

Esimerkki 3.8. Kaksi kohdefunktiota, jotka halutaan minimoida ei-negatiivisella alueella

$$f_1(x) = x + 1 \quad \text{ja} \quad f_2(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1.$$

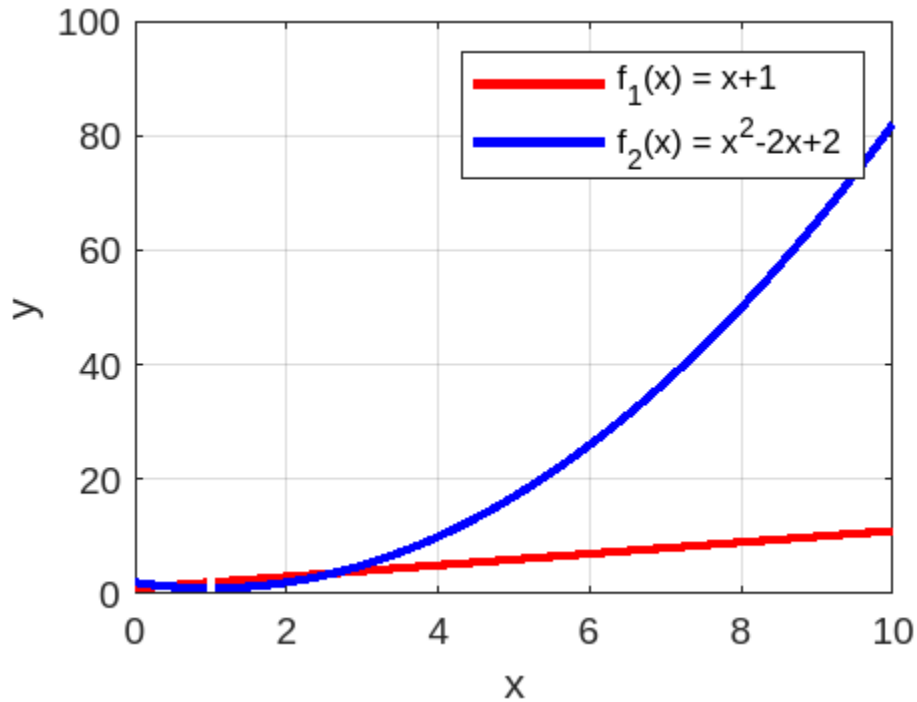
Optimointiongelma on

$$\min_{x \geq 0} (f_1(x), f_2(x)). \quad (7)$$

saadaan, että $x_1 = 0$ on funktion $f_1(x)$ yksikäsitteinen minimiarvo, kun $x \in \mathbb{R}: x \geq 0$, ja $x_2 = 1$ on funktion $f_2(x)$ yksikäsitteinen minimiarvo, kun $x \in \mathbb{R}: x > 0$. Tässä tapauksessa $x \neq 0$, koska funktion nimittäjässä ei saa olla nolla. Tavoitefunktion kuva on esitetty kuvassa (18).

Merkitään y_1 merkinnällä $f_1(x)$ ja y_2 merkinnällä $f_2(x)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} f_1(x) = x + 1 &\Leftrightarrow y_1 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow y_1 - x = 1 \Leftrightarrow -x = 1 - y_1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 + y_1 \Leftrightarrow x = y_1 - 1. \end{aligned}$$



Kuva 18: Esimerkin (3.8) kohdefunktio.

jolloin saadaan myös (sijoitetaan $x = y_1 - 1$ funktioon $f_2(x)$)

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow y_2 = (x - 1)^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow y_2 = ((y_1 - 1) - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow y_2 = (y_1 - 2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Huomataan, että $x \geq 0$, jolloin $y_1 \geq 1$.

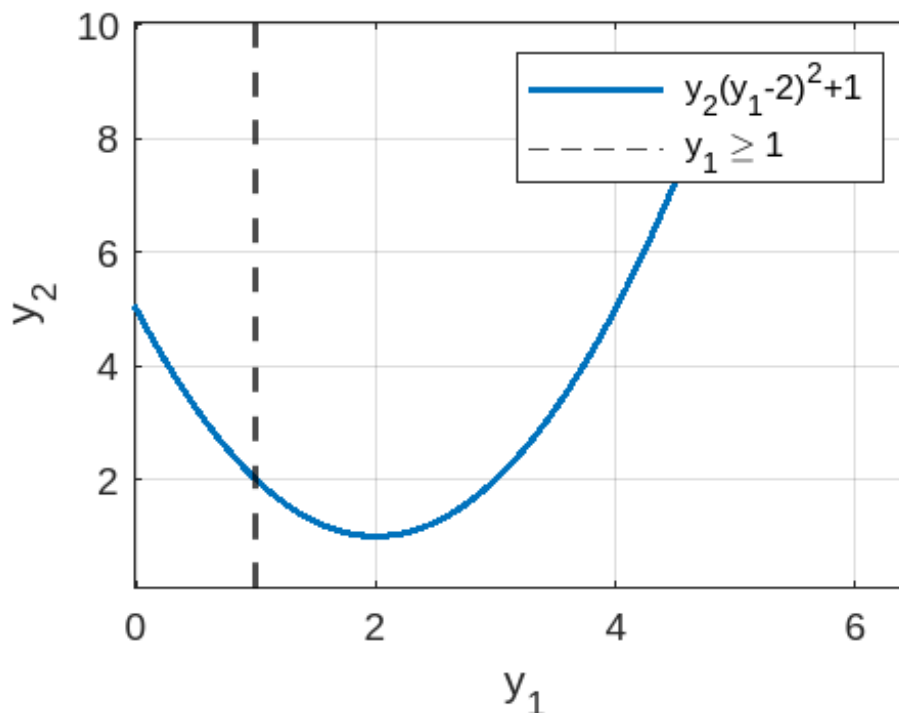
Lasketaan funktion y_1 minimikohta: sijoitetaan $x_1 = 0$ ja $x_2 = 1$ funktioon, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} y_1 &= x + 1 \\ \text{sijoitetaan } x=0 &\text{ funktioon} \\ y_1 &= 0 + 1 = 1, \\ \text{sijoitetaan } x=1 &\text{ funktioon} \\ y_1 &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

eli $y_1 = f_1(x) \in [1, 2]$. Saadaan myös funktioon y_2 muuttujalla y_1

$$\begin{aligned} y_2 &= x^2 - 2x + 2 = (y_1 - 2)^2 + 1 \\ \text{sijoitetaan } y_1 = 1 &\text{ funktioon} \\ y_2 &= (1 - 2)^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2, \\ \text{sijoitetaan } y_1 = 2 &\text{ funktioon} \\ y_2 &= (2 - 2)^2 + 1 = 1. \end{aligned}$$

eli $y_1 = f_1(x) \in [1, 2]$ ja samalla $y_2 = f_2(x) \in [1, 2]$. Dominoimattomat pisteet ovat y_1 pisteet, joiden arvo on $1 < y_1 < 2$ ja y_2 pisteet, joiden arvo on $1 < y_2 < 2$. Eli



Kuva 19: Esimerkin (3.8) määrittelyalue.

molemmat funktiot eivät dominoi toisiaan, vaan ovat pareto-optimaalisia. Kuvassa (19) on esitetty esimerkin (3.8) määrittelyalue.

Seuraavan esimerkin tehtävänanto on lähdeestä [2].

Esimerkki 3.9.

$$\begin{aligned} \min & (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{s.t.} & x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

mistä

$$f_1(x) = \sqrt{5 - x^2} \quad \text{ja} \quad f_2(x) = \frac{x}{2}$$

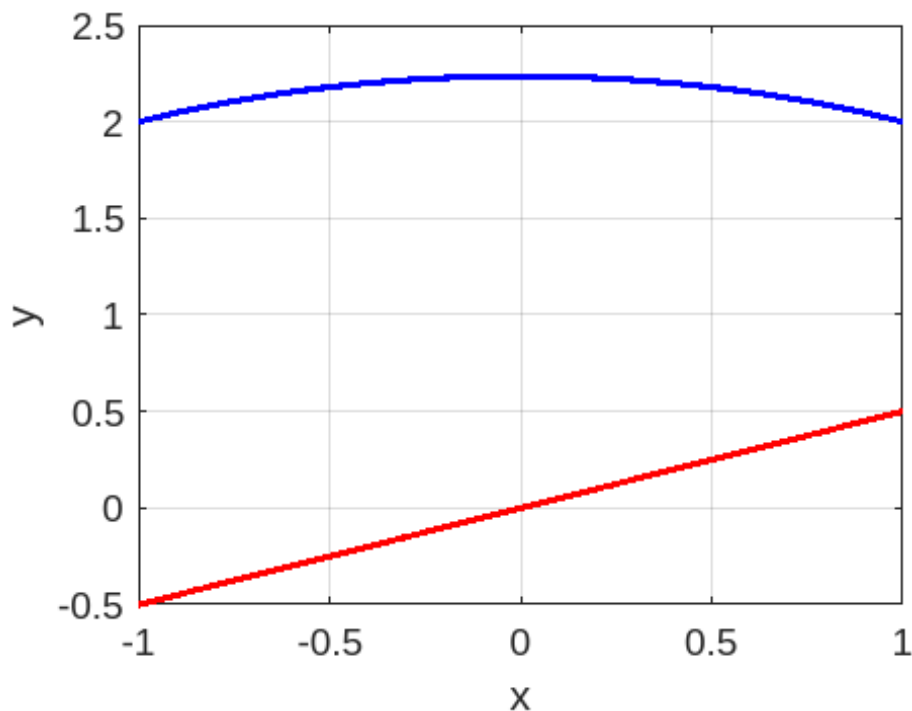
(kuvassa (20) on esitetty funktiot.) Ratkaistaan tehtävän ratkaisujoukko ja kohdefunktion määrittelyalue sekä määritetään dominoimaton joukko $\mathcal{Y}_N = \{y \in \mathcal{Y}, \text{ joita } y' \in \mathcal{Y} \text{ ei dominoi ja } y' \leq y\}$ ja tehokas joukko $\mathcal{X}_E = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in \mathcal{Y}_N\}$. Koska $x \in [-1, 1]$, eli $\mathcal{X} = \{-1 \leq x \leq 1\}$, päätöksentekoavaruus on $x \in [-1, 1]$. Korvataan merkintä $f_1(x)$ merkinnällä y_1 ja merkintä $f_2(x)$ merkinnällä y_2 . Tällöin kohdefunktion määrittelyalue on $f(x) = (\sqrt{5 - x^2}, \frac{x}{2})$, missä $x \in [-1, 1]$. Sijoitetaan $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$ funktioihin. Sijoitetaan ensin $x_1 = -1$, jolloin saadaan

$$y_1 = \sqrt{5 - (-1)^2} = \sqrt{5 - 1} = \sqrt{4} = 2.$$

$$y_2 = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

sijoitetaan sitten $x_2 = 1$, jolloin saadaan

$$y_1 = \sqrt{5 - 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$



Kuva 20: Esimerkin (3.9) funktiot $f_1(x) = \sqrt{5-x^2}$ (sin.) ja $f_2(x) = \frac{x}{2}$ (pun.).

$$y_2 = \frac{1}{2}.$$

Muokataan funktio y_1 muuttujan x suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{5-x^2} \\ \Leftrightarrow y_1^2 &= 5-x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 5-y_1^2 \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{5-y_1^2}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = \sqrt{5-y_1^2}$ funktioon y_2 , jolloin saadaan

$$y_2 = \pm \frac{\sqrt{5-y_1^2}}{2}.$$

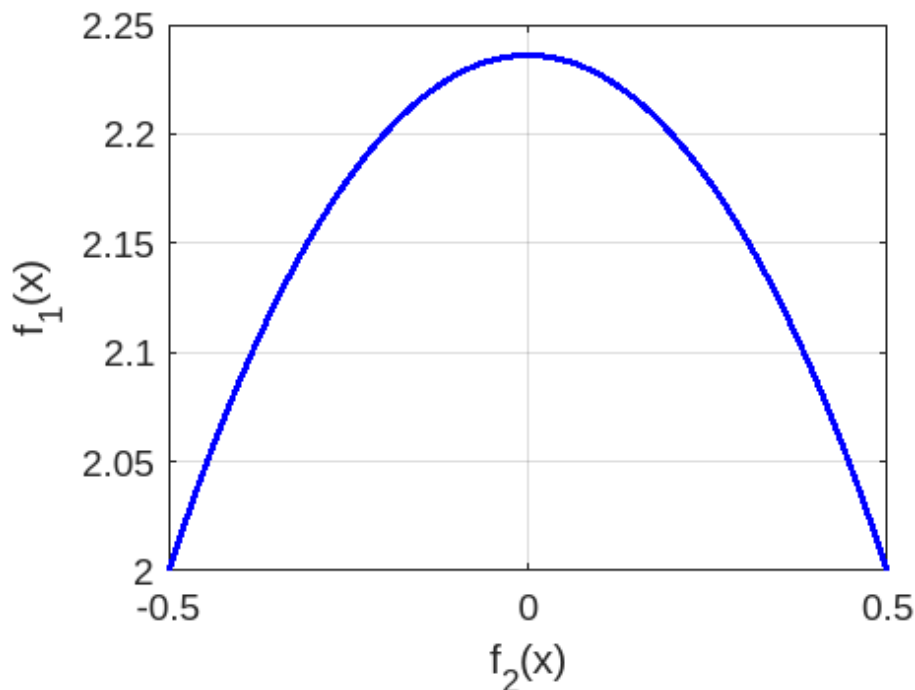
Lasketaan funktion y_1 minimikohta, kun $x \in [-1, 1]$. Sijoitetaan $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$ funktioon y_1 . Saadaan $y_1 = 2$ (tämä on laskettu aiemmin). Sijoitetaan y_1 funktioon y_2 , jolloin saadaan

$$y_2 = \pm \frac{\sqrt{5-y_1^2}}{2}.$$

Sijoitetaan $y_1 = 2$ funktioon

$$y_2 = \pm \frac{\sqrt{5-2^2}}{2} = \pm \frac{1}{2}.$$

Saadaan $y_1 = f_1(x) \leq 2$ ja $y_2 = f_2(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Kuvassa (21) on esitetty Esimerkin (3.9) funktion $f(x) = (\sqrt{5-x^2}, \frac{x}{2})$ kohdefunktion määrittelyalue. Dominoimaton



Kuva 21: Esimerkin (3.9) funktion $f(x) = (\sqrt{5-x^2}, \frac{x}{2})$ kohdefunktion määrittelyalue.

piste funktiolle y_2 on sellainen, jossa $y_1 \leq 2$ ja dominoimattomat pisteet funktiolle y_1 ovat sellaisia, joissa $-\frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{1}{2}$. Dominoimaton joukko \mathcal{Y}_N on: $\mathcal{Y}_N := \{\sqrt{5-x^2}, \frac{x}{2}\}$, jossa ei ole olemassa $y' \in \mathcal{Y}$ ja $y' \leq y : -1 \leq x \leq 1\} = \{2, [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$ jossa ei ole $y' \in \mathcal{Y}$ ja $y' \leq y : -1 \leq x \leq 1\}$. Tehokas joukko on $\mathcal{X}_E = [-1, 1]$.

Lause 3.10. Esimerkissä (3.4) on muotoiltu optimointiongelma

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{i=1,2} f_i(x) \quad (8)$$

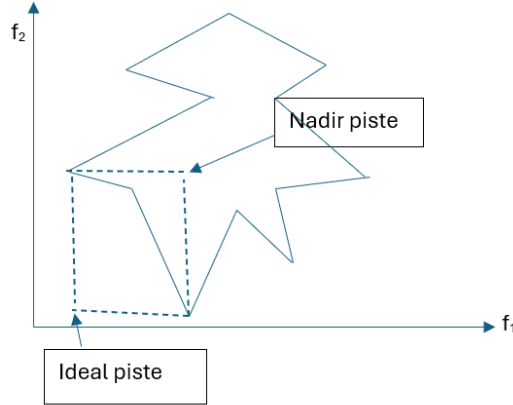
käytetään kuvausta $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kohdefunktiosta määrittelyalueesta \mathbb{R}^2 kohdefunktiolle määrittelyalueelle \mathbb{R} , jossa minimointi (8) on määritelty kohdefunktion määrittelyalueella \mathbb{R} kanonisen järjestyksen mukaan. Kohdefunktio vektori on kuvattu avaruudesta \mathbb{R}^p järjestettyyn avaruuteen (\mathbb{R}^p, \preceq) , jossa vertailut tehdään järjestysrelaatiolla \preceq . Tämä kuvaus kutsutaan mallin kuvaukseksi.

Yhteenvedo monikriteerisen optimointiongelman elementteistä mallin kuvauksen mukaan. Monikriteerisen optimointiongelman elementit ovat

- ratkaisujoukko \mathcal{X} ,
- kohdefunktion vektori $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p$,
- Kohdefunktion määrittelyalue tai kriteeriavaruus \mathbb{R}^p ,
- järjestetty joukko (\mathbb{R}^p, \preceq) ,
- mallikuvaus θ .

Seuraavaksi esitellään nadir-piste ja ideal-piste.

3.3 Nadir-piste ja ideal-piste



Kuva 22: Nadir-piste ja ideal-piste.
[14], [9].

Nadir-piste ja ideal-piste on esitetty kuvassa (22).

Lause 3.11. Piste $y^I = (y_1^I, y_2^I, \dots, y_p^I)$, joka määritellään seuraavasti

$$y^I = \min_{x \in \mathcal{X}} f_k(x) = \min_{y \in \mathcal{Y}} y_k,$$

kutsutaan monikriteerisen optimointiongelman $\min_{x \in \mathcal{X}} (f_1(x), \dots, f_p(x))$ ideal-pisteeksi. [4]

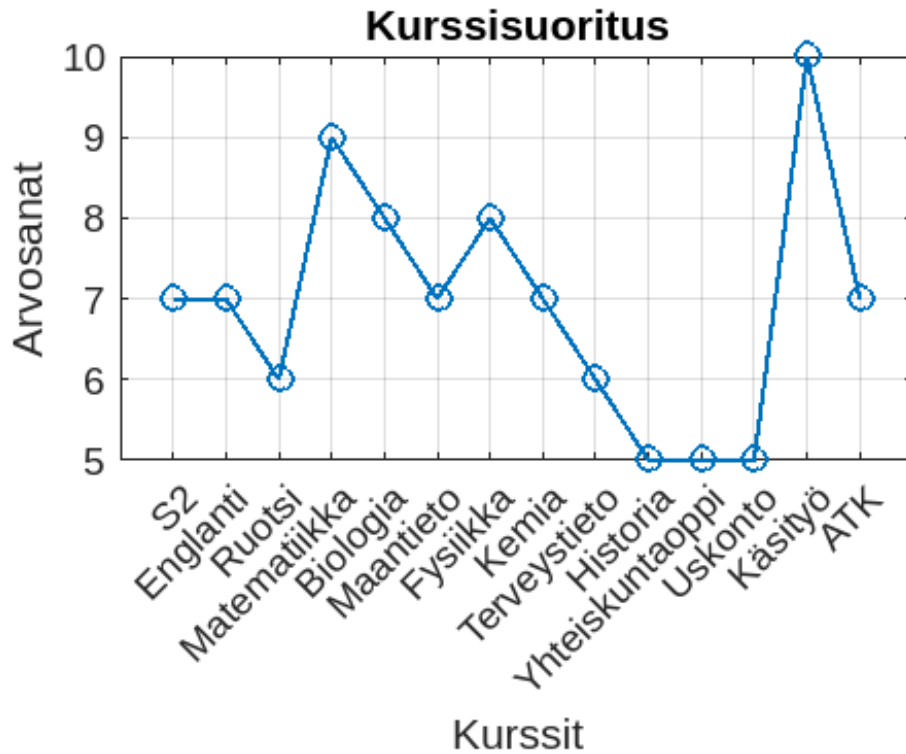
Lause 3.12. Piste $y^N = (y_1^N, y_2^N, \dots, y_p^N)$, joka määritellään seuraavasti

$$y^N = \max_{x \in \mathcal{X}_E} f_k(x) = \max_{y \in \mathcal{Y}} y_k,$$

kutsutaan monikriteerisen optimointiongelman $\max_{x \in \mathcal{X}} (f_1(x), \dots, f_p(x))$ nadir-pisteeksi. (Oletetaan joukot \mathcal{X}_E ja \mathcal{Y}_N eivät ole tyhjiä.)

Esimerkki 3.13. Tässä on yhden yläasteen opiskelijan syyslukukauden todistus, jossa aineiden arvosanat ovat: suomi toisena kielenä 7, englantia 7, ruotsi 6, matematiikka 9, biologia 8, maantieto 7, fysiikka 8, kemia 7, terveystieto 6, historia 5, yhteiskuntaoppi 5, uskonto 5, käsityö 10, ATK 7.

Muodostetaan ratkaisujoukko, joka on $\mathcal{X} = \{\text{suomi toisena kielenä, englantia, ruotsi, matematiikka, biologia, maantieto, fysiikka, kemia, terveystieto, historia, yhteiskuntaoppi, uskonto, käsityö, ATK}\}$, johon liittyvät arvosanat ovat $\mathcal{Y} = \{7, 7, 6, 9, 8, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 5, 10, 7\}$. Saadaan ideal-piste $y^I = 10$ ja nadir-piste $y^N = 5$. Nämä arvot voidaan nähdä helposti kuvasta (23).



Kuva 23: Esimerkin (3.13) opiskelijan syyslukukauden kurssisuorituksen viivakaavio.

Algoritmi 3.14. (Nadir piste $p=2$)

Syöttö: Monikriteerinen optimointiongelman ratkaisujoukko \mathcal{X} ja kohdefunktio $f = (f_1, f_2)$.

Ratkaistaan yksittäiset optimointiongelmat $\min_{x \in \mathcal{X}} f_1(x)$ ja $\min_{x \in \mathcal{X}} f_2(x)$, ja merkitään optimaaliset arvot $y_1^I = \min_{x \in \mathcal{X}} f_1(x)$ ja $y_2^I = \min_{x \in \mathcal{X}} f_2(x)$.

Ratkaistaan $\min_{x \in \mathcal{X}} f_2(x)$, lisärajoituksella $f_1(x) \leq y_1^I$ ja $\min_{x \in \mathcal{X}} f_1(x)$ lisärajoituksella $f_2(x) \leq y_2^I$.

Merkitään optimaaliset arvot $y_1^N = \max_{x \in \mathcal{X}} f_1(x)$ ja $y_2^N = \max_{x \in \mathcal{X}} f_2(x)$.

Tuloste: $y^N = (y_1^N, y_2^N)$ on nadir-piste, $y^I = (y_1^I, y_2^I)$ on ideal-piste.

Seuraava esimerkki on lähdeestä [2].

Esimerkki 3.15. Matemaattisen optimointiongelman ratkaisujoukko on

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 1, -x_1 + x_2 \geq 0, x_1, x_2 \geq 0\}$$

ja kohdefunktiot ovat $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$. Ratkaistaan ideal-piste.

Ratkaistaan tehtävä algoritmin (3.14) mukaan. Etsitään $f_1(x) = \min_{x \in \mathcal{X}} x_1$ ja

$f_2(x) = \min_{x \in \mathcal{X}} x_2$. Tehtävän rajoitukset ovat

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Koska rajoitukset ovat aktiivisia, rajoitus $x_1 + x_2 \geq 1$ esitetään muodossa $x_1 + x_2 = 1$, ja rajoitus $-x_1 + x_2 \geq 0$ esitetään muodossa $x_1 = x_2$ tai $x_2 \geq x_1$. Näistä saadaan

$$\text{kaksi yhtälöparia } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \quad \text{TAI} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 \geq x_1 \end{cases}.$$

Ratkaistaan ensin ensimmäinen yhtälöpari, jolloin saadaan

$$x_1 = x_2.$$

Sijoitetaan $x_1 = x_2$ yhtälöön $x_1 + x_2 = 1$, jolloin saadaan

$$x_1 + x_1 = 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}.$$

koska $x_1 = x_2$, saadaan myös $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ratkaistaan toinen yhtälöpari, jolloin saadaan

$$x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_2.$$

Koska $x_1 \geq 0$ ja $x_2 \geq 0$, tutkitaan, kun $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$. Sijoitetaan ensin $x_1 = 0$ yhtälöön $x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - x_1$, jolloin saadaan $x_2 = 1$. Sijoitetaan myös $x_2 = 0$ yhtälöön $x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_2$, jolloin saadaan $x_1 = 1$. Näin saadaan kaksi

$$\text{ratkaisuparia } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Lisäksi on olemassa toinen rajoitus, joka on $x_2 \geq x_1$. Tarkastellaan jäljellä olevaa ratkaisuparia, joka on $x_1 = 0$ ja $x_2 = 1$.

Loppujen lopuksi saadaan seuraavat ratkaisut $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ ja $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$. Ratkaisemalla optimointiongelmat

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= x_1 = 0 \text{ eli } y_1^I = 0 \\ \min f_2(x) &= x_2 = \frac{1}{2} \text{ eli } y_2^I = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Saadaan } \begin{cases} y_1^I = 0 \\ y_2^I = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Seuraava lause on lähteestä [2].

Lause 3.16. Painotetut kompromissiohjelmointiongelmät esitetään seuraavasti

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k (f_k(x) - y_k^I)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (9)$$

Kun p on vakio, saadaan

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, p} \lambda_k (f_k(x) - y_k^I), \quad (10)$$

Kun $p = \infty$, saadaan

$$y^I = \min_{x \in \mathcal{X}} f_k(x) = \min_{y \in \mathcal{Y}} y_k$$

Tässä tapauksessa oletetaan, että vektorin painokerroin $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^p$, eli kaikki λ_k ovat ei-negatiivisia ja λ ei ole nolla. Kun $p = 1$, saadaan

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p (\lambda_k f_k(x) - y_k^I) \quad (11)$$

$$= \min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \right) - \sum_{k=1}^p \lambda_k y_k^I. \quad (12)$$

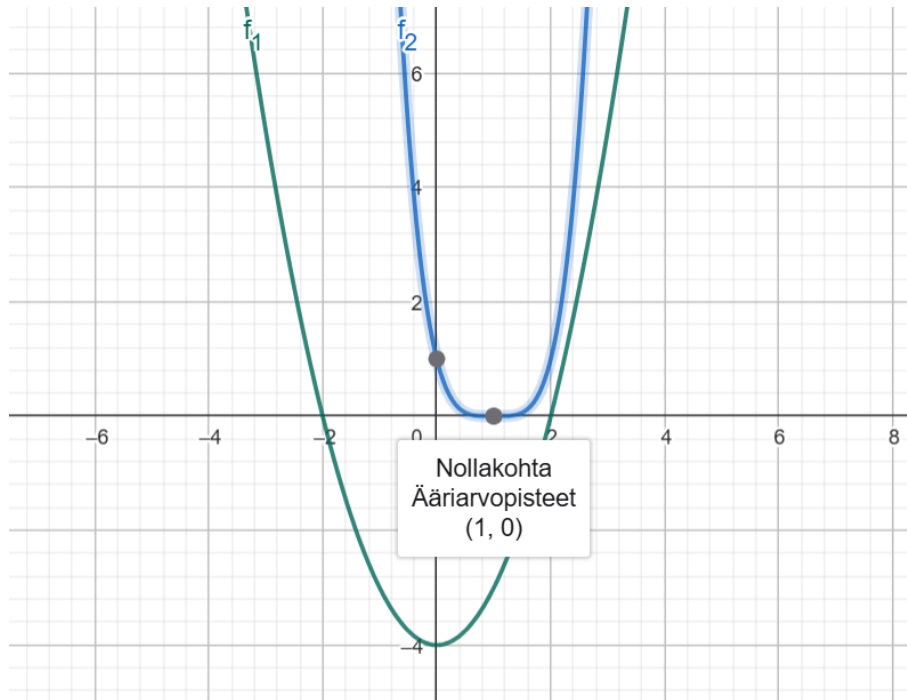
Esimerkki 3.17. Ratkaistaan ongelma painotetulla kompromissiohjelmoinnilla, jossa $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ja etäisyyksien laskennassa käytetään euklidinen metriikka, joka määrittää etäisyyden ideal-pisteeseen.

$$f_1(x) = x^2 - 4 \rightarrow \min, f_2(x) = (x - 1)^4 \rightarrow \min \\ \text{s.t. } -x - 100 \leq 0.$$

Lisätieto: Euklidinen metriikka määrittää kahden vektorin $X = (x_1, \dots, x_p)$ ja $Y = (y_1, \dots, y_p)$ etäisyyden p -ulotteisessa avaruudessa, joka on

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (13)$$

Painotetun kompromissiohjelmoinnin ehdon mukaan (9) tarvitaan ensin ideal-piste y^I . Lasketaan $f_1 = x^2 - 4$ ja $f_2(x) = (x - 1)^4$ minimiarvot. Kuvassa (24) esitetään funktioiden f_1 ja f_2 kuvaajat. Kuvasta on helposti nähtävissä, että funktion f_1 minimiarvo on $x = 0$, jolloin $f_1(0) = -4$ ja funktion f_2 minimiarvo on $x = 1$, jolloin $f_2(1) = 0$. Saadaan ideal-piste $y^I = (-4, 0)$. Kun sijoitetaan kaikki arvot



Kuva 24: Esimerkin (3.17) $f_1(x) = x^2 - 4$ ja $f_2(x) = (x - 1)^4$.

kompromissiohjelmoinnin ehdolle , saadaan

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k (f_k(x) - y_k^I)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

sijoitetaan λ ja ideal-piste

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum \frac{1}{2} (f_k(x) - y_k^I) \\ &= \frac{1}{2} [(x^2 - 4) - (-4)]^2 + \frac{1}{2} [(x - 1)^4 - 0]^2 \\ &= \frac{1}{2} [(x^2 - 4) + 4]^2 + \frac{1}{2} [(x - 1)^4]^2 \\ &= \frac{1}{2} [x^2]^2 + \frac{1}{2} [x - 1]^8 \\ &= \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{2} [x - 1]^8. \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}[x - 1]^8$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}[x - 1]^8 \\ &= 2x^3 + 4(x - 1)^7. \end{aligned}$$

Lasketaan derivoidun funktion nollakohta eli ratkaistaan $2x^3 + 4(x - 1)^7 = 0$, jolloin saadaan $x \approx 0,39$.

Seuraava esimerkki on lähteestä [2].

Esimerkki 3.18. Ratkaistaan ongelma painetetulla kompromissiohjelmoinnilla. $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ja tarkastellaan eri arvoja $p = 1$, $p = 2$ ja $p = \infty$.

$$\begin{aligned} & \min -6x_1 - 4x_2 \\ & \min -x_1 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 150 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Samalla painotetun kompromissiohjelmoinnin ehdon mukaan (9) tarvitaan ensin ideal-piste y^I .

$$\text{Lasketaan ensin rajoitefunktiot } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 2x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

Lasketaan ensin rajoitefunktiot, jolloin saadaan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 2x_1 + x_2 = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 100 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 150 \end{cases} .$$

Sijoitetaan $x_1 = 100 - x_2$ funktioon $2x_1 + x_2 = 150$, jolloin

$$\begin{aligned} 2 \cdot (100 - x_2) + x_2 &= 150 \\ 200 - 2x_2 + x_2 &= 150 \\ 200 - x_2 &= 150 \\ -x_2 &= 150 - 200 \\ x_2 &= 50. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x_2 = 50$ funktioon $x_1 + x_2 = 100$, jolloin $x_1 = 100 - 50 = 50$.

Sijoitetaan $x_1 = 50$ ja $x_2 = 50$ kohdefunktioon, jolloin $-6x_1 - 4x_2 = -6 \cdot 50 - 4 \cdot 50 = -500$ ja $-x_1 = -50$. Joten saadaan piste $(-500, -50)$.

Lisäksi löytyy kolmas rajoitefunktio $x_1, x_2 \geq 0$ eli $x_1 = 0$ tai $x_2 = 0$ tai $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$. Sijoitetaan rajoitefunktioon $x_1 = 0$, jolloin

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 2x_1 + x_2 = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + x_2 = 100 \\ 2 \cdot 0 + x_2 = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 100 \\ x_2 = 150 \end{cases} .$$

Mutta $x_2 = 150$ ei päde rajoitukselle $x_1 + x_2 \leq 100$, joten $x_2 = 100$ jää voimaan.

Sijoitetaan $x_1 = 0$ ja $x_2 = 100$ kohdefunktioon, jolloin saadaan $-6x_1 - 4x_2 = -6 \cdot 0 - 4 \cdot 100 = -400$ ja $-x_1 = 0$. Joten saadaan piste $(-400, 0)$.

Sijoitetaan rajoitefunktioon $x_2 = 0$, jolloin

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 2x_1 + x_2 = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0 = 100 \\ 2x_1 + 0 = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 100 \\ x_1 = 75 \end{cases} .$$

$x_1 = 100$ ei päde rajoitusfunktiolle $2x_1 + x_2 \leq 150$, joten $x_1 = 75$ jää voimaan. Sijoitetaan $x_1 = 75$ ja $x_2 = 0$ kohdefunktioon, jolloin saadaan $-6x_1 - 4x_2 = -6 \cdot 75 - 4 \cdot 0 = -450$ ja $-x_1 = -75$. Joten saadaan piste $(-450, -75)$. Sijoitetaan $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 2x_1 + x_2 \leq 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 < 100 \\ 2 \cdot 0 + 0 < 150 \end{cases} .$$

$x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$ pätevät rajoitukselle. Sijoitetaan $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$ kohdefunktioon, jolloin saadaan $-6x_1 - 4x_2 = 0$ ja $-x_1 = 0$ eli saadaan $(0,0)$. Yhteensä saadaan pisteet $(-500,50), (-400,0), (-450,-75)$ ja $(0,0)$. Tästä saadaan idealpiste $(-500,-75)$.

Jatketaan laskemista painetetulla kompromissiohjelmoinnilla, kun $p = 1$, $p = 2$ ja ∞ . Lauseessa (3.16) on esitetty. Kun $p=1$, yhtälö muodostuu seuraavasti

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p (\lambda_k f_k(x) - y_k^I) \quad (14)$$

$$= \min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \right) - \sum_{k=1}^P \lambda_k y_k^I. \quad (15)$$

Sijoitetaan $f_k(x)$ ja y_k^I ehtoon(14), jolloin

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p (\lambda_k f_k(x) - y_k^I) \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^1 (\lambda_k f_k(x) - y_k^I) \\ &= \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2) - (-500) + \frac{1}{2}(-x_1) - (-75) \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \right) - \sum_{k=1}^P \lambda_k y_k^I \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \left[\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2) + \frac{1}{2}(-x_1) \right] - \left[\frac{1}{2}(-500) + \frac{1}{2}(-75) \right] \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \left[\frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575) \right]. \end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 75 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}$ funktioon $\frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575)$, jolloin

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575) \\ &= \frac{1}{2}(-7 \cdot 50 - 4 \cdot 50 + 575) \\ &= \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 100 \end{cases}$ funktioon $\frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575)$, jolloin

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575) \\ &= \frac{1}{2}(-7 \cdot 0 - 4 \cdot 100 + 575) \\ &= \frac{175}{2}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 75 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ funktioon $\frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575)$, jolloin

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575) \\ &= \frac{1}{2}(-7 \cdot 75 - 4 \cdot 0 + 575) \\ &= 25. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$ funktioon $\frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575)$, jolloin

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-7x_1 - 4x_2 + 575) \\ &= \frac{1}{2}(-7 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 575) \\ &= \frac{575}{2}. \end{aligned}$$

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{25}{2}, \frac{175}{2}, 25, \frac{575}{2} \right\} = \frac{25}{2}, \text{ jolla on } \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}.$$

Kun $p=2$, pitää päteä seuraava ehto, joka on esitetty myös lauseessa (3.16)

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k (f_k(x) - y_k^I)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (17)$$

Sijoitetaan $f_k(x)$, y_k^I ja $p = 2$ ehtoon, jolloin

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k (f_k(x) - y_k^I)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^2 \lambda_k (f_k(x) - y_k^I)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \left[\left(\frac{1}{2}((-6x_1 - 4x_2) - (-500)) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1) - (-75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan (16) funktioon $\left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$.

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}$, funktioon $\left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$,
jolloin

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} \cdot (-6 \cdot 50 - 4 \cdot 50 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-50 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{625}{4}}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 100 \end{cases}$ funktioon $\left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, jolloin

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}(-6 \cdot 0 - 4 \cdot 100 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(0 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{15625}{4}}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 75 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ funktioon $\left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, jolloin

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}(-6 \cdot 75 - 4 \cdot 0 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-75 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 25. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ funktioon $\left[\left(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, jolloin

$$\begin{aligned}
& [(\frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500))^2 + (\frac{1}{2}(-x_1 + 75))^2]^{\frac{1}{2}} \\
& = [(\frac{1}{2}(-6 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 500))^2 + (\frac{1}{2}(-0 + 75))^2]^{\frac{1}{2}} \\
& = \sqrt{\frac{68125}{4}}.
\end{aligned}$$

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \sqrt{\frac{625}{4}}, \sqrt{\frac{15625}{4}}, 25, \frac{68125}{4} \right\} = \sqrt{\frac{625}{4}}, \text{ jolla on } \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}.$$

Kun $p = \infty$, lauseessa (3.16) on esitetty ehto, joka on

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, p} \lambda_k(f_k(x) - y_k^I) \quad (18)$$

Sijoitetaan samalla $f_k(x)$, y_k^I ehtoon (18), jolloin

$$\begin{aligned}
& \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, p} \lambda_k(f_k(x) - y_k^I) \\
& = \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}((-6x_1 - 4x_2) - (-500)), \frac{1}{2}((-x_1) - (-75)) \right\} \\
& = \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan (16) funktioon $\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\}$.

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}$ funktioon $\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\}$, jolloin

$$\begin{aligned}
& \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\} \\
& = \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6 \cdot 50 - 4 \cdot 50 + 500), \frac{1}{2}(-50 + 75) \right\} \\
& = \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ 0, \frac{25}{2} \right\} = \min_{x \in \mathcal{X}} \frac{25}{2}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 100 \end{cases}$ funktioon $\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\}$, jolloin

$$\begin{aligned}
& \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\} \\
& = \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6 \cdot 0 - 4 \cdot 100 + 500), \frac{1}{2}(0 + 75) \right\} \\
& = \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ 50, \frac{75}{2} \right\} = \min_{x \in \mathcal{X}} 50.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 75 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ funktioon $\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\}$, jolloin

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\} \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6 \cdot 75 - 4 \cdot 0 + 500), \frac{1}{2}(-75 + 75) \right\} \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \{25, 0\} = \min_{x \in \mathcal{X}} 25. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ funktioon $\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\}$, jolloin

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6x_1 - 4x_2 + 500), \frac{1}{2}(-x_1 + 75) \right\} \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ \frac{1}{2}(-6 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 500), \frac{1}{2}(0 + 75) \right\} \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=0, \dots, \infty} \left\{ 250, \frac{75}{2} \right\} \\ &= \min_{x \in \mathcal{X}} 250. \end{aligned}$$

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{25}{2}, 50, 25, 250 \right\} = \frac{25}{2}, \text{ jolla on } \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}.$$

$$\text{Kun } p=1, \min_x \in \mathcal{X} = \frac{25}{2}, \text{ jolla } \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}.$$

$$\text{Kun } p=2, \min_x \in \mathcal{X} = \sqrt{\frac{625}{4}}, \text{ jolla } \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}.$$

$$\text{Kun } p = \infty, \min_x \in \mathcal{X} = \frac{25}{2}, \text{ jolla } \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 50 \end{cases}.$$

3.4 Monikriteerinen optimointi verkko teoriassa

Aiemmin luvussa 2.5 esitettiin Kruskalin algoritmin teoria ja optimointitehtävä Kruskalin algoritmin perusteella. Tässä luvussa esitetään Primin algoritmin teoria, esimerkki ja monikriteerinen optimointitehtävä.

3.4.1 Primin algoritmi

Lause 3.19. Primin algoritmilla minimivirittävän puun ongelma ratkaistaan seuraavissa vaiheissa:

Vaihe 1: Valitaan aloitussolmu.

Vaihe 2: Etsitään kaikki aloitussolmuun liittyvät kaaret. Valitaan näistä pienimmän painon kaari ja lisätään virittävään puuhun.

Vaihe 3: Etsitään nykyisessä virittävässä puussa oleviin solmuihin liittyvät kaaret, jotka eivät ole vielä mukana virittävässä puussa. Valitaan näistä pienimmän painon kaari, joka ei muodosta sykliä, ja lisätään se virittävään puuhun.

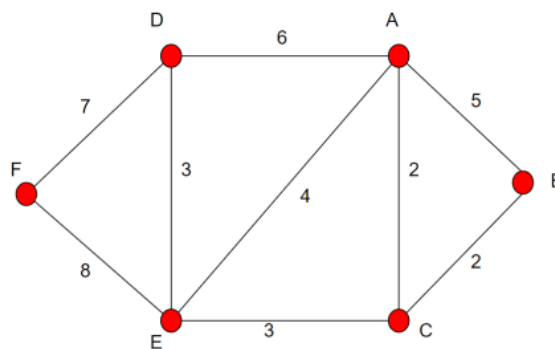
Vaihe 4: Toistetaan vaihe 3, kunnes kaikki solmut ovat mukana.

Vaihe 5: Kun virittävässä puussa on kaikki solmut eikä synny sykliä, minimivirittävä puu on valmis.

[20]

Seuraava esimerkki on lähteestä [21].

Esimerkki 3.20. Etsitään painotetun verkon minimivirittävä puu käyttäen Primin algoritmia.



Kuva 25: Esimerkin (3.20) painotettu verkko [21].

Ratkaistaan tehtävä lauseen (3.19) nojalla vaihe vaiheelta.

Vaihe 1: Valitaan aloitussolmu. Valitaan solmu F aloitussolmuksi.

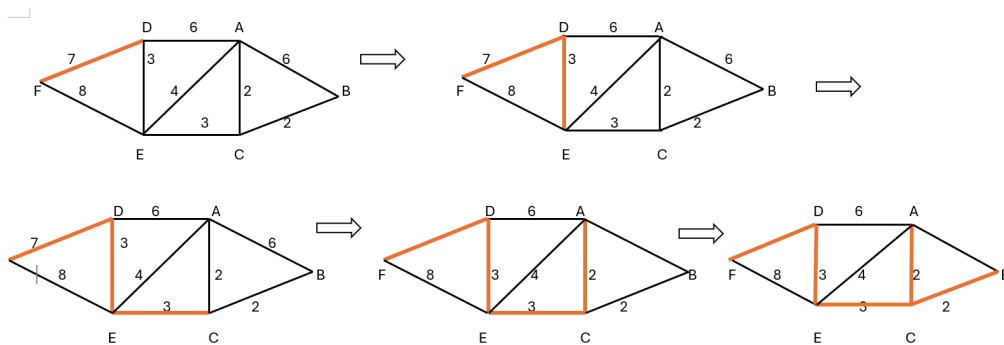
Vaihe 2: Etsitään kaikki aloitussolmuun liittyvät kaaret ja valitaan niistä pienimmän painon kaari, joka lisätään puuhun. Aloitussolmu on F, ja siihen liittyvät kaaret ovat $(F,D)=7$ ja $(F,E)=8$. Pienin paino kaari on kaari $(F,D)=7$, joten se lisätään virittävään puuhun.

Vaihe 3: Etsitään nykyisessä virittävässä puussa oleviin solmuihin liittyvät kaaret, jotka eivät vielä ole puussa. Valitaan niistä pienimmän painon kaari, joka ei muodosta sykliä. Nykyisessä virittävässä puussa olevat solmut ovat solmu F ja solmu D. Niihin liittyvät kaaret ovat $(D,A)=6$, $(D,E)=3$ ja $(F,E)=8$, jotka eivät ole vielä virittävässä puussa. Niistä pienimmän painon kaari on $(D,E)=3$, joka ei muodosta sykliä. Lisätään kaari (D,E) virittävään puuhun.

Vaihe 4: Toistetaan vaihe 3. Nykyisessä virittävässä puussa löytyy solmut F, D ja E. Solmut liittyvät kaaret ovat $(F,E)=8$, $(D,A)=6$, $(E,A)=4$ ja $(E,C)=3$, jotka eivät vielä ole puussa. Niistä pienin painotettu kaari on $(E,C)=3$ ja ei muodosta sykliä valitun kaaren kanssa. Lisätään kaari $(E,C)=3$ virittävään puuhun.

Toistetaan. Nykyisessä virittävässä puussa on solmut F, D, E ja C. Näille solmulle liittyvät kaaret ovat $(F,E)=8$, $(D,A)=6$, $(E,A)=4$, $(C,A)=2$ ja $(C,B)=2$, jotka eivät vielä ole puussa. Niistä pienimmän painon kaaret ovat $(C,A)=2$ ja $(C,B)=2$. Molemmat kaaret eivät muodosta sykliä puun kanssa. Valitaan kaari (C,A) ja lisätään se puuhun. (Tai voidaan valita myös kaari (C,B)).

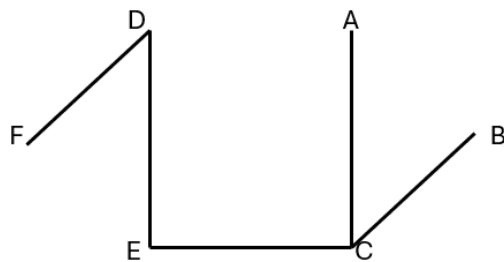
Toistetaan. Nykyisessä virittävässä puussa on solmut F, D, E, C ja A. Näille solmut liittyvät kaaret ovat $(F,E)=8$, $(D,A)=6$, $(E,A)=4$, $(C,B)=2$ ja $(A,B)=5$, jotka eivät vielä ole puussa. Niistä pienimmän painon kaari on (C,B) , joka ei muodosta sykliä. Lisätään kaari (C,B) virittävään puuhun. (26)



Kuva 26: Esimerkin (3.20) virittävä puu.

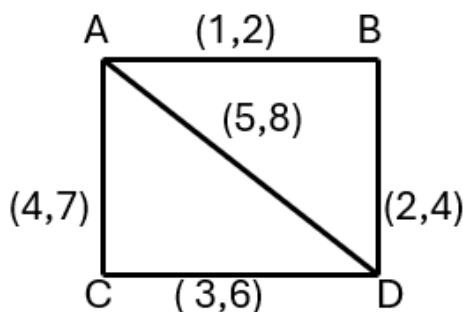
Vaihe 5: Tarkistetaan, että virittävässä puussa on kaikki solmut ja ettei syntyy sykliä, jotta minimivirittävä puu syntyy $MST = \{(F, D), (D, E), (E, C), (C, A), (C, B)\} = 7 + 3 + 3 + 2 + 2 = 17$, joka näkyy kuvassa (27).

Seuraavassa esimerkissä esitetään optimointitehtävä, joka ratkaistaan Primin algoritmilla avulla. Esimerkissä käytetään myös ideal-piste ja painotetun kompromissiohjelmoinnin menetelmä.



Kuva 27: Esimerkin (3.20) minimi virittävä puu.

Esimerkki 3.21. Käytetään samaa esimerkki kuin esimerkissä (2.11). Lisäksi otetaan huomioon matka-aika yhdeltä nähtävyydeltä toiselle. Tärkeimmät tiedot löytyvät kuvasta (28), jossa sulussa on annettu tiedot (etäisyys,aika). Etsitään Primin algoritmilla tehtävän ratkaisun ideal-piste, ratkaistaan tehtävä painotetulla kompromissiohjelmoinnilla ja käytetään Euklidinen metriikka ideal-pisteen määrittämiseen. Etsitään tehtävän ratkaisun ideal-piste Primin algoritmilla. Etsitään ensin etäisyy-



Kuva 28: Esimerkin (3.21) verkko.

den mukaan.

Vaihe 1: valitaan solmu A aloitussolmuksi.

Vaihe 2: etsitään aloitussolmu A liittyvät kaaret, jotka ovat $(A,B)=1$, $(A,C)=4$ ja $(A,D)=5$ ja valitaan niistä pienimmän painon kaari, joka on $(A,B)=1$. Kaari (A,B) ei muodosta sykliä valitun kaaren kanssa. Lisätään se virittävään puuhun.

Vaihe 3: etsitään nykyisessä virittävässä puussa oleviin solmuihin liittyvät kaaret, jotka eivät vielä ole virittävässä puussa. Ne ovat $(A,C)=4$, $(A,D)=5$ ja $(B,D)=2$.

Niistä pienin painon kaari on $(B,D)=2$. Ja kaari (B,D) ei muodosta sykliä nykyisen valitun kaaren kanssa. Lisätään se virittävään puuhun.

vaihe 4: toistetaan vaihe 3. Loppujen lopuksi saadaan kaaret $(A,B)=1$, $(B,D)=2$ ja $(D,C)=3$ puussa.

Vaihe 5: saadaan minimivirittävä puu $MST=\{(A,B),(B,D),(D,C)\}$. Saadaan idealpiste etäisyydestä, joka on $(A,B)+(B,D)+(D,C)=6$. $y_{etäisyys}^I=6$. Etsitään matka-ajan mukaan.

Vaihe 1: valitaan samalla solmu A aloitussolmuksi.

Vaihe 2: etsitään aloitussolmu A liittyvät kaaret, jotka ovat $(A,B)=2$, $(A,D)=8$ ja $(A,C)=7$. Valitaan niistä pienin painon kaari on $(A,B)=2$. Ja kaari (A,B) ei muodosta sykliä valitun kaaren kanssa. Lisätään kaari (A,B) virittävään puuhun.

Vaihe 3: etsitään nykyisessä virittävään puussa oleviin solmuihin liittyvät kaaret, jotka eivät vielä ole puussa. Ne ovat $(A,C)=7$, $(A,D)=8$ ja $(B,D)=4$. Niistä pienin painon kaari on $(B,D)=4$, ja ei muodosta sykliä muiden kaarien kanssa. Lisätään kaari $(B,D)=4$ virittävään puuhun.

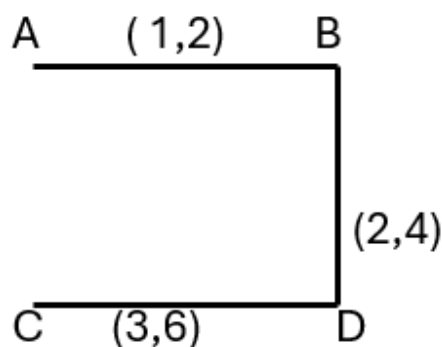
Vaihe 4: toistetaan vaihe 3. Loppujen lopuksi saadaan $(A,B)=2$, $(B,D)=4$ ja $(D,C)=6$ puussa, jotka eivät syntyä sykliä.

Vaihe 5: saadaan minimivirittävä puu $MST=\{(A,B),(B,D),(D,C)\}$. Saadaan idealpiste matka-ajasta $(A,B)+(B,D)+(D,C)=12$. $y_{matka-ajasta}^I=12$. Ratkaistaan tehtävä painettu kompromissiohjelmoinnilla Euklidisen metriikan (13) mukaan.

Saatiin $MST=\{(A,B),(B,D),(D,C)\}$. Minimivirittävän puun kokonaisetaisyys on 6. Minimivirittävän puun kokonaisaika on 12. Euklidisen metriikan mukaan, jolloin

$$\sqrt{(6-6)^2 + (12-12)^2} = 0$$

Koska euklidinen metriikka on 0, minimivirittävän puun reitti osuu ideal-pisteeseen.



Kuva 29: Esimerkin (3.21) minimivirittävä puu.

3.5 Loppusanat

Tutkielmassa käsitellään matemaattista optimointia ja monikriteeristä optimointia. Ne ovat vain pieni osa optimoinnista, mutta niitä käytetään laajasti elämässä, kuten tutkielmassa esitettiin. Matemaattista optimointia voi myös hyvin yhdistää muihin algoritmeihin tehtävien ratkaisemiseksi, kuten esimerkissä (2.11). Samoin minimivirittävä puu algoritmia voi yhdistää muihin optimointitehtävien tehtävien ratkaisemiseksi, kuten esimerkissä (3.21). Esimerkissä (3.21) on käytetty Primin algoritmia ja kompromissiohjelmointia. Esimerkki voidaan ratkaista myös suoraan Kruskalin algoritmilla. Jatkossa voidaan käyttää Kruskalin algoritmia – saadaanko silloin eri tulokset kuin esimerkissä (3.21)? Entä jos käytetään pelkästään Primin algoritmia, saadaanko silloin eri tuloksia?

Tutkielmassa yhdistetään optimointi ja verkkoteoria. Olen myös maininnut, että sitä voisi käyttää esimerkiksi postijakelussa. Jatkossa voin tarkastella, voisiko sitä soveltaa myös muilla alueilla, esimerkiksi navigaattorissa lyhimmän reitin etsimiseen. Verkkoteoriassa on myös muita algoritmeja, joita voidaan yhdistää tähän.

Viitteet

- [1] Marko M. Mäkelä, *Matemaattinen optimointi I*, 2019.
- [2] Matthias Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, 2nd ed., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 491, Springer, Berlin, 2005. DOI: 10.1007/3-540-27659-9.
- [3] G. Kırık and S. Sayın, “Computing the nadir point for multiobjective discrete optimization problems,” *Journal of Global Optimization*, vol. 62, no. 1, pp. 79–99, 2015.
- [4] H. Wang, S. He, and X. Yao, “Nadir point estimation for many-objective optimization problems based on emphasized critical regions,” *Soft Computing*, vol. 21, no. 9, pp. 2283–2295, Nov. 2015.
- [5] Yury Nikulin, *Vector optimization Lecture Supplements*, University of Turku, Finland, 2020.
- [6] G. C. Calafiore and L. El Ghaoui, *Optimization Models*, illustrated ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, Oct. 2014, ISBN 978-1-107-05087-7.
- [7] S. P. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, Mar. 8, 2004, ISBN 0-521-83378-7.
- [8] Osmo Kaleva, *Matemaattinen optimointi 1*, University of Tampere, Finland, 2000.
- [9] K. Miettinen, *Optimointi*, Jyväskylän yliopisto, Finland, 1995.
- [10] R. Sedgewick and K. Wayne, *Algorithms*, 4th ed., Addison-Wesley Professional, Boston, MA, USA, Mar. 24, 2011, 976 pp., ISBN 0-321-57351-X (978-0-321-57351-3).
- [11] A. Laaksonen, *Tietorakenteet ja algoritmit*, Helsingin yliopisto, Finland, 2020.
- [12] L. Wang, B. Wu, and J. Yuan, “Kruskal Algorithm for Construction Network Diagram,” in *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 1385, 1st ed., Springer, Cham, Apr. 2021.
- [13] V. Osipov, P. Sanders, and J. Singler, “The Filter-Kruskal minimum spanning tree algorithm,” in *Proceedings of the 11th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX)*, New York, NY, USA, Jan. 2009, pp. 52–61.
- [14] H. Loberman and A. Weinberger, “Formal procedures for connecting terminals with a minimum total wire length,” *Journal of the ACM*, vol. 4, no. 4, pp. 428–437, Oct. 1957.
- [15] R. C. Prim, “Shortest Connection Networks and Some Generalizations,” *Bell System Technical Journal*, vol. 36, no. 6, pp. 1389–1401, Nov. 1957.

- [16] Kruskalin algoritmin historia, luettu 02.03.2025.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Kruskal>
- [17] Primin algoritmin historia, luettu 02.03.2025.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Prim>
- [18] Borukvan algoritmin historia, luettu 02.03.2025.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Bor>
- [19] Kruskal's algorithm, luettu 05.03.2025.
<https://www.pdst.ie/sites/default/files/Kruskal>
- [20] Painotetut verkot, Itä-Suomen Yliopisto, matematiikan laitos, luettu 06.03.2025.
https://integraali.com/huusko/tiedostoja/muita/verkot-ja-relaatiot/VerkotJaRelaatiot_PainotetutVerkot.pdf
- [21] Prim's algorithm exercises, luettu 07.03.2025.
<https://www.pdst.ie/sites/default/files/Prim>