

Geometrinen käsitteenmuodostus oppimisen tutkimuksen kohteena

Harry Silfverberg

University of Turku (Finland)

harry.silfverberg@utu.fi

Tiivistelmä

Päähuomio tämän luvun tarkasteluissa kohdistuu geometrisen käsitteenmuodostuksen ja sen ohjaamisen problematiikkaan kohdistuneeseen tutkimukseen ja teorianmuodostukseen. Kirjoituksessa kuvataan, miten geometria näyttäytyy oppijalle erilaisena kouluoppimisen eri vaiheissa. Varhaisemmat katsantokannat geometriaan tarjoavat oppijalle aina perustan seuraavalle geometrian saamalle uudelle tulkinnalle. Geometrisen ajattelun kerroksellisuus näyttäytyy geometrisessa käsitteenmuodostuksessa ja geometrian opetuksessa hedelmällisenä konkreetin ja käsitteellisen lähestymistavan vuoropuheluna. Artikkelissa tarkastellaan erityisesti prototyyppisen käsitteenmuodostuksen ja figuratiivisuuden keskeisyyttä geometrian varhaisvaiheen oppimiselle, luokittelun ja määrittelyn taitojen vähittäistä kehittymistä sekä näiden roolia jäsentyneen geometrisen käsitetiedon muotoutumisessa oppilaalle. Teoreettista tarkastelua havainnollistetaan esimerkein.

1. Koulugeometrian luonnehdintaa

Voidaan sanoa, että aritmetiikka ja algebra tarjoavat oppilaalle matemaattisia työkaluja lukumääräsuhteiden hahmottamiseen ja käsittelyyn. Vastaavasti *geometria tarjoaa matemaattisia työvälineitä spatiaalisten tilasuhteiden tajumiseen ja niillä operointiin*. Tätä voimme itse asiassa pitää jonkinlaisena koulugeometrian työmääritelmänä. Geometrinen ymmärrys ilmenee tämän luonnehdinnan mukaisesti monin eri tavoin. Keskeisesti siihen liittyy avaruudellisten suhteiden hahmottamisen eli spatiaalisen ajattelun monentasoinen kehittyminen. Osa tästä hahmotusprosessista on sellaista, josta on vaikea sanoa, mikä siitä on oppimisen kautta hankittua

taitoa ja mikä ennemminkin eräällä tapaa ihmisille lajityypillistä tai kulttuurista tapaa hahmottaa reaali maailman visuaaliset ominaisuudet sellaisina kuin ne meille näyttäytyvät. Jo muutaman vuoden ikäinen lapsi osaa erottaa suljetun viivan avoimesta, suoran viivan mutkittelevasta, ympyrän monikulmioista jne. Tämän tyyppistä suoraa hahmotusta voi pitää vastaavantyyppisenä toimintona, joka lukukäsitteen yhteydessä tunnetaan pienten lukumäärien ilman laskemistoimintoa tapahtuvana suorana hahmottamisena eli ns. subitizing-ilmionä (Markovits & Hershkovicz, 1997). Osa hahmotusprosessista on kuitenkin selkeästi ohjatun toiminnan ja harjaantumisen seurausta. Yhteisöllinen vuorovaikutuksen ja erityisesti koulun tarjoamien geometrian opintojen myötä lapsi omaksuu toimintakulttuurilleen ominaisia tapoja preferoida tiettyjä visuaalisia ominaisuuksia ja pitää toisia ominaisuuksia vähemmän tärkeinä. Tällainen ohjattu näkökulman muutos muodostaa yhden geometrisen käsitteenmuodostuksen peruslähtökohdista.

Kouluoppimisen myötä oppilas oppii jäsentämään tilasuhteita vakiintuneiden ja itse asiassa varsin harvalukuisten käsitteiden kautta. Käsitteet ja suhteet, joilla geometria operoi, kuten pisteet, suorat, tasot, nimetyt taso- ja avaruuskuviot, yhdensuuntaisuus, kohtisuoruus jne. ovat todella tarkoin valikoituneita ja aikojen saatossa käyttökelpoisuutensa osoittaneita verrattuna siihen muotojen ja tilasuhteiden moninaisuuteen, millä todellisuus ympärillämme tosiasiasa näyttäytyy. Tilasuhteiden tehokas hallinta edellyttää myös suureiden kuten pituuksien, kulmien suuruuksien, pinta-alojen, tilavuuksien jne. tarkastelua ja käsittelyä laskennallisilla keinoilla. Spatiaalisen ajattelun apuneuvoina toimivat erityyppiset spatiaalisten suhteiden esittämiseen kehitetyt ulkoiset representaatiot, kuten geometriset kuviot, mallikappaleet, kartat, kaaviot, verbaalit kuvaukset jne. Spatiaalisen ja geometrisen ajattelun kehittyneisyys tulee ilmi mm. sitä kautta, miten hyvin yksilö kykenee tulkitsemaan, tuottamaan ja käyttämään hyödykseen tällaisia representaatioita.

Visuaalinen, laskennallinen, käsitteellinen ja algebrallinen näkökulma geometriaan ovat eri aikoina olleet geometrian opetuksessa esillä erilaisin painotuksin (Dieudonné, 1981) ja geometrian kouluopetus etsii tässä suhteessa edelleen jatkuvasti paikkaansa. Tässä luvussa tarkastelun kohteena ovat erityisesti geometrisen käsitteenmuodostuksen kysymykset lähinnä euklidisen tasogeometrian näkökulmasta. Valinnalla ei kuitenkaan mitenkään haluta viestiä, että geometrisen laskutaidon opettamisen merkitys kouluoppimisen tavoitteena olisi jotenkin vähämerkityksellinen

edes käsitteenmuodostuksen kannalta. Rajauksen vuoksi artikkelissa ei esimerkiksi verrata geometrian oppimistuloksia suhteessa muihin matematiikan osa-alueisiin eikä tarkastella geometrian oppimisen tason muutosta suhteessa aikaisempiin ajankohtiin. Kansainväliset vertailevat tutkimukset kuten PISA ja TIMMS sekä eri maissa tehdyt kansalliset oppimissaavutusselvitykset tarjoavat tietoa tältä katsantokannalta.

On selvää, ettei geometriaa opeteta koulussa pelkästään geometrian oppisisältöjen oman merkittävyytensä tähden vaan myös, koska geometrian opiskelun kautta opitaan sellaista, millä on siirtovaikutusta muuntyyppisen matematiikan oppimiseen ja hallintaan. Osaksi juuri (koulu)geometrian konkreetista tulkintaperustasta johtuen geometria tarjoaakin esimerkiksi poikkeuksellisen monipuolisen oppimisympäristön yleistysten ja perusteltujen johtopäätösten tekoon sekä käsitteiden täsmentämisen harjoitteluun. Olettamusten pätevyyttä ja erilaisten määrittelyjen seuraamuksia voidaan testata monilla tavoilla. Apuna voidaan käyttää niin konkreettisia malleja, kokeiluun perustuvaa induktiivista päättelyä, laskuilla saatavaa informaatiota kuin deduktiotakin. Ns. dynaaminen geometria on tuonut geometriaan vielä uudentyyppisen kuviodien muunneltavuuden ja liikkeen aspektin. Näistä syistä geometriassa on erinomainen mahdollisuus yltää ymmärtävään oppimiseen, asioiden välisten yhteyksien hahmottamiseen ja tietokokonaisuuksien muodostumiseen. Alkuvaiheessa ymmärryksen perusta on reaali maailman havainnoissa ja käsitteenmuodostus epätarkkaa, myöhemmin ymmärryksen perusta on yhä enenevässä määrin geometrisen systeemin rakenteessa ja määrittelyn kautta tarkan merkityksensä saaneessa käsitteistössä.

2. Kolme lähestymistapaa koulugeometriaan

Eri kouluasteilla geometrinen suhteiden tarkastelun lähtökohta sekä tehtyjen havaintojen ja päätelmien perustelutapa on erilainen. Luonnollisesti nämä näkökulmaerot näkyvät silloin myös opetuksen tavoitteissa ja käytännön toteutustavoissa. Houdementin ja Kuzniakin (2003) ajatuksia mukaillen erotan tässä kolme koulugeometrian ilmentymää G1-G3, jotka pitkälti vastaavat myös niitä peruslähestymistapoja, joita geometrian opetukseen sovelletaan koulujärjestelmämme eri tasoilla.

G1. Konkreettien objektien geometria

Lähestymistapa nojaa siihen, että luonto on monissa suhteissa geometrisesti järjestynyt, ja geometriset suhteet ja käsitteet ikään kuin löydetään reaalityodellisuudesta. Geometriset totuudet perustellaan suorien havaintojen ja mittausten avulla. Opetuksen keskeisimpinä tavoitteina on geometristen muotojen hahmottaminen, muistaminen ja nimeäminen, suuruussuhteiden arviointi ja mittaaminen sekä laskeminen.

G2. Havainnoin perusteltu ideaalisten tasokuvioiden ja kappaleiden geometria

Tarkasteltavat geometriset käsitteet määritellään ja saavat periaatteessa merkityksensä tätä kautta, mutta käsitteiden tulkinnallinen perusta on edelleen vahvasti havainnoissa. Geometriset totuudet, lauseet esitetään osana matemaattista systeemiä, mutta perustellaan tai paremminkin tehdään uskottaviksi konkreettisten havaintojen, kokeilujen ja mittausten kautta. Opetuksen keskeisimpinä tavoitteina on geometristen käsitteiden tarkastelu havaintoperustaisina matemaattisina objekteina, määrällisten riippuvuussuhteiden esittäminen kaavoina ja näiden soveltaminen geometrisissa ja käytännön konteksteissa.

G3. Kvasiaksiomaattinen geometria

Peruskäsitteet ja perussuhteet oletetaan ja todetaan vastaavan intuitiotamme. Muut esille tulevat käsitteet määritellään peruskäsitteiden tai jo määriteltyjen käsitteiden avulla. Geometriset totuudet, lauseet todistetaan deduktiivisesti aiemmin perustellun tiedon avulla. Ymmärryksen rakentumisen kannalta keskeiseksi muodostuvat määrittelyn aseman ymmärtäminen matematiikassa, johdonmukaisen päättelyn ja perustelemisen taidot (todistaminen) sekä tiedon soveltaminen geometrisiin laskuihin.

Näkökulmat rakentuvat toistensa päälle limittäin niin, että aiemmin sovellettu näkökulma jää aina seuraavan tulkintaperustaksi. (Silfverberg, 1999; Houdement & Kuzniak, 2003; Parzysz, 2003).

Näkökulmien G1 ja G2 limittäisyys konkretisoituu geometrisissa kuvioissa; yhtäältä ne voi tulkita piirroksiksi tai kuviksi sinänsä (näkökulma G1) ja toisaalta representaatioiksi, malleiksi ideaalisista kuvioista ja kappaleista (näkökulma G2).

3. van Hielen teoria geometrisen ajattelun kehityksestä ja kehitystasoista

lakkään, mutta edelleen eniten siteeratun ja pääpiirteittäin validina pidetyn, geometrisen ajattelun kehittymistä kuvaavan teorian van Hielen teorian kehittivät opetustyössä tekemiensä havaintojen perusteella yhteistyössä hollantilainen aviopari Pierre van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof jo 1950-luvulla (van Hiele, 1957; van Hiele-Geldof, 1957). Sitten monet muut tutkijat ovat tarkentaneet teoriaa, soveltaneet sitä uusille alueille ja ajankohtaistaneet sen näkökulmia nykyisen koulugeometrian tavoitteistoihin paremmin sopivaksi (mm. Clements ym., 1999; Silfverberg, 1999; Blair, 2004; Atebe, 2008; Guven & Baki, 2010; Patsiomitou & Emvalotis, 2010). Vaikka van Hielen teoria on lähtökohdiltaan kiinnittynyt erilaiseen koulugeometrian tulkintaan kuin se, mikä nykyisin on vallalla, teorian perusolettamukset hyväksytään edelleen varsin yleisesti. Van Hielen teoriasta on eniten huomiota saanut sen deskriptiivinen osa, joka sisältää hypoteesin geometrisen ajattelun kehitykselle luonteenomaisten kehitystasojen olemassaolosta. Nämä viisi tasoa, joita on alettu kutsua *van Hielen tasoiksi*, ilmentävät geometriseen ajatteluun sisältyviä laadullisia muutoksia, jotka toistuvat eri yksilöiden geometrisen ajattelun kehityksessä samantapaisina ja samassa järjestyksessä joskaan eivät välttämättä samassa tahdissa. Geometrisen ajattelun yleispiirteet eri van Hielen tasoilla ovat Silfverbergin (1999, 27-28) kuvaamina tiivistetysti seuraavat:

Taso 1 (visualisoinnin taso)

Tällä perustasolla kuvioita käsitellään kokonaisuuksina ja visuaaliseen havaintomaailmaan kuuluvina. Kuvioden tunnistaminen, nimeäminen, lajittelu, vertailu, kuvailu yms. suoritetaan kuvion visuaalisen kokonaishahmon eikä kuvion ominaisuuksien perusteella. Geometristen peruskuvioden tavanomaiset esimerkkitapaukset osataan tunnistaa ja nimetä. Peruskuvioden malliesimerkit osataan visualisoida ja piirtää. Tällä tasolla esimerkiksi käsite suorakulmio saa

lapselle merkityksensä esimerkin kautta vaikka seuraavasti ”Suorakulmio on kuin ikkuna tai luokan taulu”.

Taso 2 (ominaisuuksien analysoinnin taso)

Toisella van Hielin tasolla kuviot tulkitaan ominaisuuksiensa ’kantajiksi’. Tällä tasolla kuvioita tarkastellaan niiden ominaisuuksien näkökulmasta. Ominaisuuksia käsitellään siinä mielessä erillisinä, että niiden keskinäisiin loogisiin riippuvuussuhteisiin ei kiinnitetä huomiota. Kuvioita osataan analysoida ja verrata keskenään ominaisuuksien avulla eikä pelkän visuaalisen samankaltaisuuden tai erilaisuuden perusteella. Ominaisuuksien analysoinnin tasolla löydetään ja käytetään hyväksi kaikkia tiettyyn kuvioluokkaan kuuluvia kuvioita yhdistäviä ominaisuuksia. Tällä tasolla esimerkiksi suorakulmio määrittyy edelleen visuaalisena mielikuvana kuvion tyypillisestä esimerkistä, mutta kuviota osataan kuvailla myös ominaisuuksiensa kautta esimerkiksi näin ”Suorakulmiossa on kaksi pitkää sivua ja kaksi lyhyttä sivua, sen kulmat ovat kaikki yhtä suuria.”

Taso 3 (ominaisuuksien järjestämisen taso)

Tällä tasolla kuvioden ominaisuuksilla on loogisten suhteiden luomaa sisäistä järjestystä. Deduktiota pystytään seuraamaan ja käyttämään hyväksi lyhyissä päättelyissä. Määritelmiä osataan muotoilla ja kuvioden määrittelevistä ominaisuuksista tunnistetaan riittävät ja välttämättömät ominaisuudet. Määritteleviä ominaisuuksia osataan käyttää hyödyksi tutkittaessa, sisältyykö kuvioluokka toiseen vai ei. Tällä tasolla esimerkiksi tiedetään, että neliökin on suorakulmio, ja osataan selittää, miksi näin on.

Taso 4 (formaalin päättelyn taso)

Päättelyn tasolla systemaattisen, deduktiivisen geometrian edellyttämä ajattelutapa hallitaan. Tällä tasolla kyetään annetusta tiedosta päättämään seurauksia ja todistamaan geometrisia lauseita itsenäisesti. Probleeman annetut tiedot ja osoitettavaksi edellytetyt tiedot osataan erottaa toisistaan.

Määritelmän, aksiomin ja lauseen välinen ero samoin kuin lauseen ja sen käänteislauseen sekä ehtojen välttämättömyyden ja riittävyyden ero ymmärretään. Tällä tasolla oppilas ymmärtää, miksi lause ”Suorakulmion lävistäjät ovat yhtä pitkät” vaatii euklidisessa geometriassa todistuksen ja miksi asiaa ei voi todentaa vain kuviosta. Hänen geometrinen tietonsa on niin hyvin jäsentynyt, että hän osaa itsekin laatia lauseelle todistuksen.

Taso 5 (aksiomisysteemin ymmärtämisen taso)

Ylimmällä van Hielin tasolla pystytään vertailemaan eri geometrioita keskenään tarkastelemalla niiden eroja ja yhtäläisyyksiä aksiomaattisina järjestelminä. Tällä tasolla henkilö kykenee esimerkiksi tutkimaan euklidisen geometrian suorakulmiokäsitteen mahdollisia vastineita muissa geometrioissa vaikkapa taksinkuljettajan geometriassa tai pallogeometriassa.

Van Hielin teoriaan sisältyvät seuraavat geometrian didaktiikan ja opetussuunnitelmien kehittämisen kannalta merkittävät perusolettamukset geometrisen ajattelun kehityskulusta (Silfverberg, 1999, 31-32)

1. Geometrisen ajattelun kehitys on epäjatkuva, mikä ilmenee peräkkäisinä van Hielin tasoina. Tasojen järjestys on kiinteä eikä mitään tasoa voi kokonaan ohittaa. Korkeammalle tasolle siirtyminen edellyttää aina ymmärrystä, joka on kehittynyt edeltävillä tasoilla.
2. Kehityskulku suuntautuu implisiittisestä eksplisiittiseen. Jokaisen tason toiminta on seuraavan tason analysoinnin kohteena ts. se, mikä edeltävän tason ajattelussa on implisiittistä, muuttuu seuraavalla tasolla eksplisiittiseksi.
3. Kullakin tasolla on sille ominainen symbolirakenteensa ja eri tasoilla olevien yksilöiden välillä vallitsee ymmärryskuilu. Jokaisella tasolla on juuri sille tasolle ominaiset kielelliset symbolinsa ja näiden symbolien välinen suhdeverkostonsa. Jos oppilaan ajattelu on eri van Hielin tasolla kuin mille opetus on suunnattu, niin toivotunlaista

edistymistä ei tapahdu. Erityisesti, jos opetus etenee oppilaan van Hielen tasoa ylemmän van Hielen tason mukaisesti, niin oppilas ei voi ymmärtää kunnolla opetusta. Ns. tason reduktio eli oppisisällön opettaminen todellista van Hielen tasoa alempaan ajatteluun kuuluvien menetelmin (esim. ulkomuistiin perustuen) on mahdollista, mutta se ei johda todelliseen ymmärrykseen eikä nosta oppilaan geometrisen ajattelun van Hielen tasoa.

5. van Hielen tasot ovat ensisijassa oppimisprosessista johtuvia. Oppilaan geometrisen ajattelun kehitys on enemmän riippuvainen käsitellyistä oppisisällöistä ja opetuksen tasosta kuin oppilaan iästä ja biologisesta kypsymisestä.
6. Geometrisen ajattelun kehitystä on mahdollista tukea ja edistää kehittymisen tasot huomioon ottavalla opetuksella.

Van Hielen teorian strukturalistinen näkemys näyttäytyy käsityksenä geometrisen ymmärryksen karttumisesta prosessina, jonka keskeisinä elementteinä ovat peräkkäiset, eri abstraktiotasojille sijoittuvat mutta samansuuntaisina esiintyvät oppimispolut. Kussakin vaiheessa oppimispolut koostuvat tutustumisesta ensin kokonaisvaltaisesti ja havainnollisesti tarkasteltaviin objekteihin, sitten analysoimalla näiden ominaisuuksia ja ominaisuuksien välisiä yhteyksiä. Kuten edellä todettiin, kunkin tason toiminta on seuraavan tason analysoinnin kohteena ts. se, mikä edeltävän tason ajattelussa on implisiittistä, muuttuu seuraavalla tasolla eksplisiittiseksi (vrt. kuvio 1).

= = = = =

Kuvio1 tähän.

= = = = =

Kuvio 1. Gawlickin (2005, 70) esittämä havainnollistus van Hielen tasojen kuvaamasta geometrisen ajattelun vaiheittaisesta kehityksestä.

4. Geometrisen käsitteenmuodostuksen erityispiirteistä

Fischbein (1993) on todennut, että visuaalisen ja käsitteellisen komponentin keskinäinen jännite leimaa juuri geometrisia käsitteitä ainutlaatuisella tavalla. Fischbein korostaa, että koulugeometrian tarkastelemat objektit ovat luonteeltaan niin sanottuja *figuraalisia käsitteitä*, joita ei voi pitää puhtaasti käsitteellisinä konstruktioina, sillä niihin liittyy aina samanaikaisesti kuvioden kautta syntyvä visuaalinen mielikuva että sanallisten kuvailujen, määrittelyjen kautta syntyvä käsitteellisen tulkinta (vrt. myös Fischbein & Nachlieli, 1998). Geometrisia käsitteitä on toki mahdollista tarkastella sanallisten määrittelyjen kautta kiinnitettynä vaadittavien ominaisuuden yhdistelmänä, mutta tällainen tarkastelutapa ei tavoita käsitteiden koko implisiittistä sisältöä. Alkeisgeometrian tarkasteleminen käsitteisiin liittyy niille määrittelyn kautta kiinnitetyn merkityssisällön ohella erottamattomasti, ja ehkä jopa ensisijaisesti, kokemuksellinen visuaalinen idea käsitteen tulkinnallisesta taustasta eli ns. käsitteen 'image' (vrt. esimerkiksi kuvion muoto, suoran suoruus).

Figuraalisille käsitteille on usein ominaista myös esimerkkitapauksiin liittyvä tyypillisyyssdimensio. Kaikki käsitteen alaan kuuluvat tapaukset eivät ole käsitteen merkityksen kannalta samanarvoisia, vaan toiset käsitteen alaan kuuluvat tapaukset ovat tyypillisempiä käsitteen edustajia kuin toiset. Tyypillisyyssdimensio ja tästä aiheutuva luokkarajojen epätäsmällisyys, sumeus on pyritty selittämään sillä, että käsitettä eivät määrääkään kaikkien sen piiriin kuuluvien kohteiden yhteiset ominaisuudet vaan kohteiden ns. *perheyhtäläisyys*, *family resemblance*. Samaan luokkaan kuuluvilla objekteilla ei tarvitse välttämättä olla kaikille yhteisiä ominaisuuksia lainkaan. Kuitenkin, mitä enemmän tietyllä objektilla on yhteisiä ominaisuuksia muiden objektien kanssa, sitä tyypillisempänä tätä objektia pidetään. (Rosch ja Mervis, 1975). Monissa tutkimuksissa (esim. Silfverberg, 1999; Okazaki & Fujita, 2007) on osoitettu, että sekä alakoulun että yläkoulun oppilaille on hyvin tyypillistä hahmottaa geometrian peruskäsitteet prototyyppisinä sumearajaisina konstruktioina. Esimerkiksi peruskouluikäiset oppilaat hyväksyvät usein kaarevasivuiset silitysraudan pohjan näköiset kuviot kolmioiksi ja suorakulmioiksi suunnikkaat, joiden kulmat ovat lähes suoria mutta selvästi kuitenkin siitä poikkeavia. Kiinnittyminen prototyyppiseen tulkintaan näkyy edellä luonnehditun liiallisen sallivuuden ohella myös tulkintojen rajoittuneisuutena, niin sanottuna karsinoivana luokitteluna. Neliöitä ei pidetä

suorakulmioina eikä suorakulmioita suunnikkaina. Vastaavasti monikulmioita ovat vain monikulmiot, joissa on vähintään viisi kulmaa, ja niin edelleen. (Silfverberg & Matsuo 2008b)

Geometrisen käsitteen oppimiseen liittyy opittavan sisällön näkökulmasta kolme keskeistä komponenttia, nimittäin varsinainen käsite, sen esimerkit ja käsitettä luonnehtivat ominaisuudet. Käsitteellistäminen sinänsä edellyttää samastuksen kautta tehtävää synteisiä, abstraktiota ja ominaisuuksien erottaminen analyysiä. Ns. hypoteesin testaus -teorioissa on katsottu, että oppija abstrahoi käsitteen esimerkkitapauksia analysoimalla niistä käsitettä luonnehtivat ominaisuudet ja konstruoi käsitteen näiden synteisinä. Käsitteenmuodostuksen prosessia voidaan kuvata tällöin kaaviolla

= = = = =

Tähän kuvio 2

= = = = =

Kuvio 2. Hypoteesin testaus –teorian mukainen käsitteenmuodostus

Näin tulkiten käsitteenoppiminen edellyttää oppijalta erityisesti kykyä tehdä induktiivisia yleistyksiä tarkastelemistaan tapauksista ja loogista päättelykykyä yhteisten, määrittelevien ominaisuuksien kombinoimiseksi käsitteen kuvaukseksi.

Ns. prototyyppiteorioissa käsitteen tai ehkäpä oikeammin sanottuna esikäsitteen ajatellaan syntyvän asiayhteyden yhteen liittämien esimerkkitapausten synteisinä ennen kuin käsitteelle karakteristiset ominaisuudet edes nousevat tietoiseen tarkasteluun. Oppimisprosessi on tällöin kuvattavissa kaaviolla

= = = = =

Tähän kuvio 3

= = = = =

Kuvio 3. Prototyyppinen käsitteenmuodostus

Koska koulugeometriassa tarkasteltavilla käsitteillä yleensä on hyvin konkreetti tausta, on luontevaa olettaa, että käsitteenoppiminen useissa tapauksissa johtaa aluksi juuri prototyyppisten käsitteiden syntyyn. Intuitiivinen prototyyppinen (esi)käsite pyritään geometrian opetuksessa jossakin vaiheessa täsmentämään määritellyksi käsitteeksi. Koska useimmissa tapauksissa molemmat käsitteenoppimisen prosessit ohjaavat käsitteenmuodostusta, oppilaan omaksuma geometrinen käsite sisältää useasti sekä hyvin määritellyn käsitteen piirteitä että prototyyppisen sumearajaisen käsitteen piirteitä.

Trzcieniecka-Schneiderin analyysi osoitti selkeästi, miten sekä induktiivisessa että deduktiivisessa käsitteenoppimisprosessissa molemmissa saattaa lopulta käydä niin, että käsite mielletään prototyyppisesti yksittäisten tyypillisten esimerkkitapaustensa ominaisuuksien kautta eivätkä käsitteen määrittelyn kannalta oleelliset piirteet erotu oppijalle.. Käsitteestä voidaan oppia sen ydinsisältö, muttei välttämättä sitä, millaisen vaihtelun käsitteen ydin sallii esimerkkitapauksille. (Trzcieniecka-Schneider, 1993).

5. Geometrian perustaidot

5.1 Kuvioden luokittelu ja nimeäminen

Eräs ilmentymä geometrisille käsitteille ominaisesta merkityksen määrittymisestä tyypillisten esimerkkien kautta on hierarkkisen luokittelun välttäminen käsitteenmuodostuksessa eli ns.

karsinoiva luokittelu. Kokeneille opettajille käytännöstä tuttu ilmiö on myös tutkimuksissa systemaattisesti saanut vahvistusta (esim. Silfverberg & Matsuo, 2008a ja b). Neliöitä ei pidetä suorakulmioina, koska ne eivät näytä tyypillisiltä suorakulmioilta. Vastaavasti suorakulmioita ei pidetä suunnikkaina eikä nelikulmioita pidetä monikulmioina, koska niissä ei ole (riittävän) montaa kulmaa. Samoin riittävästi kolmiota muistuttavaa kuviota voidaan pitää kolmiona, vaikka sen ”sivut” eivät ole suoraviivaisia, kun taas oikeaa kolmiota ei aina hyväksytä kolmioksi, jos sen muoto on riittävän pitkänomainen jne.

= = = = =

Tähän kuvio 4

= = = = =

Kuvio 4. Kolmioita vai ei?

Prototyyppisestä käsitteenmuodostuksesta juontuva karsinoiva luokittelu näyttää olevan yhteydessä kontekstiin, jossa luokittelu tehdään (Silfverberg & Matsuo, 2008a ja b). Silfverbergin ja Matsun tutkimuksessa ilmeni yllättävä ero suomalaisten ja japanilaisten oppilaiden luokittelussa. Vapaassa luokittelussa, jossa henkilö saa ryhmitellä annetut geometriset esimerkkikuviot, miten se hänen mielestään vain on sopivinta, karsinoiva luokittelu näytti japanilaisilla oppilailla olevan yleisempää kuin ns. pakotetussa luokittelussa, jossa oppilaita pyydetään luokittelemaan esimerkit etukäteen annettuihin luokkiin. Suomalaisilla oppilailla karsinoiva luokittelu taas oli yleisempää pakotetussa luokittelussa. Yleensäkin voi sanoa, että hierarkkisen käsitteenmuodostuksen oppiminen ja opettaminen on vaativa tehtävä (vrt. esim. Okazaki & Fujita, 2007), sillä se edellyttää tarkoituksellista irrottautumista siitä, miten asiat näyttävät visuaalisen ilmiönsä puolesta olevan, ja toimimista ikään kuin välitöntä näköhavaintoa vastaan. Hierarkkiset rakenteet voidaan tietysti oppia muistamaan pelkästään ulkoa opittuina faktoina, mutta matemaattisen selityksen antaminen niille edellyttää määrittelyn idean

ymmärtämistä ts. sen tajuamista, että matematiikassa jokin on jotakin siksi, että se on (tarkoituksella) sellaiseksi määritelty, eikä siksi, että se (siis sen representaatio) näyttää joltakin.

5.2 Määrittelyn taidot ja käsitteiden täsmentyminen

Todettuaan aikaisemmassa tutkimuksessaan kuinka yllättäviä käsityksiä alaluokkien oppilailla voi olla siitä, mitä tarkoitetaan kulman suuruudella, Silfverberg ja Joutsenlahti testasivat em. tutkimuksen jatkoksi tekemässään selvityksessä (Silfverberg & Joutsenlahti, 2007), kuinka yhdenmukaisesti aineen ja luokanopettajiksi opiskelevat yliopisto-opiskelijat tulkitsevat kaikille tutun käsitteen kulma käyttäen mm. seuraavaa testiosiota:

Mitkä pisteistä A, B, C, D, E, F, G, H ja I kuuluvat kulmaan α ?

=====

Tähän kuvio A (ilman kuvan otsikointia ja numeroa)

=====

Tulokset osoittivat yllättävästi mutta selvästi, miten opettajaopiskelijatkin tulkitsivat kulmakäsitteen monella eri tavalla. Kirjavuutta esiintyi siinä, pitäisikö kulma tulkita kahdesta janasta tai puolisuorasta koostuvana viivana vai tämän viivan määräämänä alueena. Toisaalta tulkintaeroja esiintyi siinä, jatkuuko kulma piirroksen määräämässä suunnassa siitä piirretyn osan ulkopuolelle vai ei. Kulma tulkittiin myös kierroksi, jolloin koko kysymys tuntui väärin asetetulta. Tulokset osoittivat myös, että vaikka opiskelijoilla oli takanaan peruskoulu- ja lukio-opinnot ja useilla näiden lisäksi myös matematiikan yliopisto-opintoja, hyvinkin erilaiset käsitykset (uskomukset) kulman tapaisista alkeismatematiikan peruskäsitteistä voivat vuosia säilyä elinvoimaisina aiheuttamatta suurempaa ristiriitaa kommunikoinnissa. Selitys tälle voi löytyä koulumatematiikan opetuskäytännöistä. Tyypilliset koulumatematiikalle ominaiset tehtävän asettelut, kuten ”laske ...”, ”piirrä ...”, ”luokittele...”, ”määritä suuruus...” jne. näyttävät olevan sellaisia, että kommunikointi tarkasteltavista asioista ja tehtävien oikea suoritus on mahdollista,

vaikka peruskäsitteet, kuten tässä kulma, ymmärretään oleellisesti eri tavoin. Sosiokonstruktivistisen oppimisen hengessä tulkintaerojen tarkoituksellisella esiin nostamisella käyttäen sopivia erot paljastavia tehtäviä sekä tulkintamahdollisuuksista keskustelemalla ja neuvottelemalla on kuitenkin mahdollista pyrkiä parempaan käsitysten yhdenmukaistumiseen ja käsitteiden tarkentumiseen.

Monet tutkimuksemme osoittavat, että käsitteiden määrittely ja ennen kaikkea määrittelyn idean ymmärtäminen on usein ylivoimaista niin perusasteen kuin lukiotason oppilaillekin ja jopa yliopisto-opiskelijoille (Silfverberg, 1999; Silfverberg & Matsuo, 2008a,b; Silfverberg & Joutsenlahti, 2007, Matsuo & Silfverberg, 2011). Osasyynä tähän on se, että määritelmät tarjotaan oppimateriaaleissa valmiina eikä niiden riittävään analysointiin koeta olevan ehkä tarvetta eikä ainakaan aikaa. Määritelmien muistamista tärkeämpää on kuitenkin ymmärtää, mikä merkitys määrittelyllä on matemaattisessa käsitteenmuodostusprosessissa.

Tutkimuksen kannalta määrittelyn idean ymmärtäminen on moninainen tehtävä. Analyysi voi kohdistua esimerkiksi siihen (1) kuinka oikein standarditulkintaan verraten oppilaan antama määritelmä käsitteen rajaa, (2) kuinka hyvin annetun määritelmän muoto vastaa matemaattiselle määritelmälle asetettuja kriteerejä (Hershkowitz, 1990; Leikin & Winicki-Landman, 2000a ja 2000b; de Villiers, 1995), (3) kuinka hyvin oppilaan antama määritelmä vastaa sitä käsitekuvaa, joka hänellä käsitteen soveltamistilanteiden kautta näyttää olevan (Tall & Vinner, 1981; Vinner, & Dreyfus 1989; Vinner, 1991) tai (4) millainen lingvistinen muoto vastaajan antamalla määrittelytekstillä on (Bambrook, 2002).

Käytännön opetustyön kannalta ongelma on ainakin periaatteessa helposti ratkaistavissa: määrittelyä oppii laatimalla määrittelemiä, tutkimalla eri vaihtoehtoja ja pohtimalla minkälaiseen käsitteen rajaukseen määritelmän tekijä pyrkii ja miksi juuri tähän. Ennen kaikkea oppimateriaaleihin tarvitaan siis tehtäviä, joilla määrittelyä ja käsitteen rajausta voi harjoitella. Alla

on esimerkki tällaisesta tehtävästä¹, jonka tarkoituksena virittää luokassa keskusteluja erilaisten määrittelyjen mahdollisuudesta ja eri tavoin tehtyjen määrittelyjen keskinäisestä paremmuudesta.

Esimerkki 1. Kuvien avulla voit päätellä, millaisia ominaisuuksia *kaksikoksi* kutsutulla kuviolla on. Muodosta niiden perusteella kaksikon määritelmä. Vertailkaa luokassa annettuja määritelmiä. Mikä ehdotetuista määritelmistä on paras ja miksi?

=====

Tähän kuvio B

=====

Jokainen uuden käsitteen käyttöönotto opetuksessa tarjoaa tietenkin tilaisuuden keskustella, miten käsite tulisi rajata, kuvailla sanallisesti ja määritellä ja miksi se yleensä tehdään niin kuin tehdään. Alla vielä esimerkki tehtävästä², jossa määritelmä on annettu ja tehtävänä on tutkia, mitä seuraamuksia siinä tehdyllä sopimuksella on.

Esimerkki 2.

Leija voidaan määritellä nelikulmioksi, jossa on kaksi paria yhtä pitkiä vierekkäisiä sivuja.

- a) Piirrä kolme keskenään erilaista leijaa.
- b) Mitkä seuraavista ominaisuuksista ovat voimassa kaikille leijoille
 - i. Lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
 - ii. Kaksi kärkeä on yhtä etäällä kahden muun kärjen määräämästä lävistäjästä.

¹ Lähde: Oppikirja Silfverberg, Viilo & Pippola. Matematiikan Taito 3. Geometria, Weilin+Göös, s. 48.

² Lähde: Oppikirja Silfverberg, Viilo & Pippola. Matematiikan Taito 3. Geometria, Weilin+Göös, s. 47.

iii. Kaikki sivut ovat erisuuntaiset.

- c) Täydennä lause todeksi lisäämällä aukkoon jokin vaihtoehtoista *on aina, voi olla, ei ole koskaan*.

Neliö _____ leija.

Suorakulmio _____ leija.

Neljäkäs _____ leija.

Suunnikas _____ leija.

Puolisuunnikas _____ leija.

5.3 Todistamisen taidot

Jo Eukleides aikanaan käytti silloisen geometrisen tiedon kokoamiseen aksiomaattista menetelmää. Lähtökohtina olivat tietyt peruskäsitteet eli perusobjektit kuten piste ja suora, joita ei määritellä, ja niitä koskevat väitteet eli aksioomat, jotka hyväksytään tosiksi sellaisenaan. Geometristen perusobjektien avulla määritellään uusia käsitteitä, joiden avulla määritellään edelleen uusia käsitteitä. Aksioomien ja määritelmien avulla todistetaan lauseita eli teoreemoja, joiden avulla todistetaan edelleen uusia lauseita. Lauseissa esitetään tarkasteltavien käsitteiden ominaisuuksia ja ominaisuuksien välisiä suhteita, jotka todistuksella osoitetaan tosiksi.

Geometriassa olemme tottuneet, että geometrisen lauseen todistaminen esitetään päättelyketjuna, jossa jo tiedetyn perusteella askel askeleelta oletuksesta päädytään väitökseen. Kokemuksesta tiedämme, että todistamistekniikan opettelu on oppilaille vaativa tehtävä eikä sitä opita hetkessä. Valmiina annetun todistuksen ymmärtäminen ja varsinkin todistuksen laatiminen edellyttävät jäsentynyttä käsitystä siihen asti käsitellyn geometrisen tiedon rakenteesta ja todistamisen idean ymmärtämistä. Tähän tavoitteeseen pääsyä helpottaa, jos oppilaita on pitkin matkaa totutettu esittämään matematiikassa väitteillensä perusteluja ja argumentoinnin taitoja on harjoitettu myös vähemmän vaativassa kontekstissa kuin varsinaisten todistusten yhteydessä. Harel ja Sowder (1998) tähdentävät sitä, että jonkin asian todenperäisyydestä vakuuttuminen ja asian todistaminen

tehdään eri konteksteissa eri perustein ja kriteerein. Kaiken kaikkiaan Harel ja Sowder erottavat kaksitoista eriasteista tosiasiasta vakuuttumisen tapaa vaihdellen auktoriteettiuskoisesta luottamuksesta aksiomaattisessa järjestelmässä perustuvaan deduktiiviseen todistamiseen.

Vastaavasti Mason ym. (1983) esittivät didaktisena ohjeena perustelemisen harjoitteluun kolmivaiheisen tavan testata väitteen uskottavuutta: Convince yourself - Convince a friend - Convince an enemy. Varsinkin yhteistoiminnallisissa ryhmätyötilanteissa ja dynaamisen geometrian kokeellisessa työskentelyssä itse olen käyttänyt vakuutu – vakuuta – todista vaiheistusta muodossa

Vakuutu itse (havaintojen testaus)

Uskooko kaverisi? (esittely pienryhmälle)

Uskooko kuka tahansa? (esittely luokalle ja opettajalle).

Perusopetuksessa varsinaisten todistusten sijaan väitteitä yleensä testataan tekemällä uskottavia, induktiivisia yleistyskäytöksi useasta tutkitusta erikoistapauksesta ja vertaamalla esimerkiksi mittauksin saatuja tuloksia. Toinen tavallinen vaihtoehto on esittää havainnollistus, jossa esimerkiksi kuviota tai kuvioita sopivasti muuntelemalla todetaan väitetyn ominaisuuden, esimerkiksi invarianssin olemassaolo. Tutkitun ominaisuuden ei tietenkään tarvitse olla geometrinen. Usein geometrisin mallein perustellaan algebrallisia suhteita. Esimerkiksi Pythagoraan lauseelle tunnetaan satoja tällaisia kuvioiden geometrisiin ominaisuuksiin perustuvia 'visuaalisia todistuksia'. On myös väitetty, että monesti havainnollistavan mallin ymmärtäminen voi olla jopa vaikeampaa, kuin itse asian ymmärtäminen. Havainnollistusten ymmärtämisen taitoakin voi tuki harjaannuttaa. Alla on esimerkkejä tehtävistä, jotka linkittävät algebrallista ja geometrta näkökulmaa ja joihin tutustuessaan lukija voi pohtia, missä määrin geometrinen havainnollistus näissä auttaa algebrallisen sisällön ymmärrystä ja missä määrin se asettaa lisähaasteita ymmärrykselle. Tällainen visuaalisen ja algebrallisen ajattelun vuoropuhelu on keskeinen keino silloin kun koetetaan perustella matemaattisia tosiasioita ilman lauseen formaalia todistamista. Visuaalinen "todistus" (The proof without words) voi sekä staattisena kuvana että dynaamisena kokeilualustana auttaa oppijaa ymmärtämään, miksi kuvan esittämä väite pitää paikkansa, tai parhaassa tapauksessa auttaa

hän­tä alkuun myös varsinaisen todistuksen laadinnassa. (Bell, 2011; Nelsen 1993, 2000, 2015; Sigler, Segal & Stupel, 2016).

Tehtävä 1 a) Selosta, miten kuvio a havainnollistaa kaavaa

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \dots = \frac{1}{3}.$$

b) Selosta, millä periaatteella kuvioon b merkityt suorakulmiot on piirretty. Muodosta yhtälö (kaava), jota kuvio b havainnollistaa?

=====

Tähän vierekkäin kuvio a ja kuvio b

=====

Kuvio b

Kuvio a

Tehtävä 2. Selitä, miten oheinen kuvio havainnollistaa Pythagoraan lausetta $a^2 + b^2 = c^2$.

=====

Tähän kuvio C

=====

6. Kohti perinteisen ja dynaamisen geometrian vuoropuhelua

Tietotekniikka ja erityisesti niin sanotut dynaamisen geometrian ohjelmistot, kuten esimerkiksi GeoGebra, ovat tuoneet geometrian opetuksen käytännön toteutukseen verrattomasti uusia mahdollisuuksia ja uskoakseni kehitys on vasta aluillaan. Padit ja uusi laskinteknologia mahdollistavat dynaamisen geometrian käytön normaalissa luokkatilassa myös ilman tietokoneita, mutta käyttäjäystävällisyydessä nämä eivät vielä yllä tietokoneympäristöjen tasolle. Dynaamisilla

geometriaohjelmilla kuviot konstruoidaan näytölle määrittelevien ominaisuuksiensa kautta. Itse konstruktiotapa jäljittelee yleensä geometrasta harpilla ja viivaimella piirtämistä ja harppi-viivain – konstruktoiden tuntemisesta on selvä etu opeteltaessa dynaamisen geometrian toimintoja. Piirroksen dynaamisuus tarkoittaa, että kerran konstruointia kuviota voidaan jälkikäteen muunnella ns. tartu ja vedä –periaatteella (dragging) tarttumalla kiinni johonkin kuvion vapaaseen pisteeseen, esimerkiksi monikulmion tapauksessa sen kärkeen, ja liikuttelemalla pistettä vetämällä. Kuvion muoto muuntuu niissä rajoissa, joissa konstruktion kautta kuviolle annetut määrittelyt sen sallivat. Tämä mahdollistaa kuvion invarianssien ja muuttuvien ominaisuuksien tarkastelun kokeellisesti, toisin sanoen geometrsten lauseiden löytämisen ja koettelun kokeellisesti. Ohjelman käyttäjän ei tarvitse tyytyä pelkästään silmämääräiseen ominaisuuksien tarkasteluun, sillä kehittyneemmät geometriaohjelmat sisältävät myös lukuisan joukon mittaus- ja laskentatyökaluja, vaikkakin tarkastelut luonnollisesti joka tapauksessa ovat likimääräisiä. Maailmanlaajuinen GeoGebra-instituuttien verkosto ylläpitää sovelluskokoelmaa <https://www.geogebra.org/institutes>, jonka avulla lukija voi vapaasti tutustua niin dynaamisen geometrian ohjelmistoon GeoGebra kuin sillä laadittuihin valmiisiin sovelluksiinkin.

Perinteisillä tavoilla eli kynällä ja paperilla työskenneltäessä lähtökohtana on, että toimija tietää tilanteesta, miten mikäkin kuvio ja asetelma ovat muunneltavissa niiden määritysten perusteella, mitä kuviosta tiedetään. *Visuaalisella varioinnilla* tarkoitetaan yksilön taitoa luoda tarkoituksellisesti mielikuvia erilaisista käsitteen alaan kuuluvista esimerkkitaapauksista siten, että tähän käsitteeseen liittyvää muodon tai muiden geometrsten ominaisuuksien vaihtelua voidaan hallita kuvittelemalla (Silfverberg, 1999, 92). Lukija voi testata visuaalisen varioinnin roolia omassa ajattelussaan vaikka pohtimalla mielessään, miten tasakylkinen kolmio voi olla suorakulmainen tai miten kolmion voi tulkita puolisuunnikkaaksi. Dynaamisen geometrian on toivottu tarjoavan oppijalle tukea visuaalisen varioinnin taidon kehittymiseen, joka sitten vahvistaisi käsitteenoppimisprosessia yleisemminkin mentaalina toimintona. Monet muutkin geometrialle tyypilliset oppimisprosessit, kuten prototyyppisten käsitysten koettelu, määrittelytaitojen kehittäminen ja päättelytaitojen harjaannuttaminen, korostuvat tämäntyyppisessä oppimisympäristössä. Parhaimmillaan toiminta dynaamisessa

oppimisympäristössä kehittää yleistysten koetteluun ja hypoteesien tuottamisen taitoa mielikuvien tasollakin ilman tietokoneympäristöä.

Geometrisen ajattelun ja geometrisen käsitetiedon kehittymisen kannalta tarkastellen dynaamisilla geometriaohjelmilla työskentely tarjoaa erinomaisen oppimisympäristön geometristen käsitteiden merkityssisältöjen oppimiseen ja käsitteiden välisten suhteiden tarkasteluun. Työskentely dynaamisen geometrian ympäristössä on luontevaa yhdistää oppilas-keskeiseen ja tutkivaan lähestymistapaan geometrian opiskelussa (Hannafin & Scott, 2001; Erbas, & Yenmez, 2011). Tutkimukset osoittavat, että dynaaminen geometria taitavasti käytettynä on myös tehokas tapa oppia geometriaa. Esimerkiksi Chanin ja Leungin (2014) meta-analyysissä kävi selväksi, että jo varsin lyhytkestoisillakin dynaamisen geometrian harjoitteilla saatiin tilastollisesti merkitsevä parannus oppilaiden oppimistuloksiin. Perinteinen geometria paperille piirrettyine mallikuvioineen ja dynaaminen geometria eivät kuitenkaan ole toistensa vastakohtia, ennemminkin ne tulisi nähdä toisiaan täydentävinä vaihtoehtoina geometrisen ymmärryksen kehittämiseen (vrt esim. Patsiomitou & Emvalotis, 2010).

7. Geometria ja oppimisvaikeudet

Geometriaan liittyviä oppimisvaikeuksia on tutkittu selvästi vähemmän kuin matematiikan numeerisella ja algebrallisella osa-alueella havaittavia oppimisvaikeuksia. Kuitenkin monet oppimisvaikeuksia aiheuttavat tekijät ovat samoja molemmilla matematiikan alueella.

Eräs koulugeometriaa luonnehtiva ominaisuus on sen käsite rakenteiden hierarkkisuus ja käsitteistön runsaus. Opittavaa ja muistettavaa on runsaasti varsinkin, jos oppija ei hahmota käsitteiden välisiä loogisia suhteita. Myös työmuisti on kovilla erityisesti silloin, kun tehtävä edellyttää samanaikaisesti mielessä pidettäväksi monenlaista informaatiota (Bobis, Sweller, & Cooper 1993). Osa tarvittavasta tiedosta voi olla kerrottu tekstimuotoisena, osa symbolisesti ja osa merkittynä tehtävässä annettuun kuvaan. Esimerkiksi Silfverbergin (1999) tutkimuksessa osoitettiin, että oppilaan geometrisen ymmärryksen tason luokitteluun käytettyjen van Hielén tasojen ja oppilaan työmuistikapasiteetin välillä oli selvä yhteys.

Toinen tunnusomainen piirre koulugeometrialle on sen vahva visuaalisuus. Geometriassa visuaalista informaatiota käytetään hyväksi sekä suoraan hahmottamisen välineenä että epäsuorasti, kun tarvittavaa tietoa ei ole suoraan annettu vaan se on pääteltävä muista kuvassa annetuista tiedoista. Kuva itsessään voi olla joko staattinen tai tietokoneen näytöllä dynaamisesti muunneltavissa oleva kuva. Oppimisprosessia voivat vaikeuttaa samantapaiset visuaalisen prosessoinnin häiriöt (visual processing disorder) kuin numeerisissa tehtävissäkin (ks. esim. Gal & Linchevski, 2010). kuten esimerkiksi visualisoitaessa murtolukuja erilaisilla kuvallisilla representaatioilla ja opittaessa ymmärtämään osa–kokonaisuus –relaatioita visuaalisten mallien avulla. Visuaalisen prosessoinnin häiriöt voivat ilmetä vaikeutena spatiaalisten relaatioiden tunnistamisessa, vajavaisena visuaalisen informaation erottelukykynä, vaikeutena tunnistaa kuvasta tuttujakin kohteita tai hahmottaa kuvista osia ja kokonaisuuksia (NCLD, 1999) .

Kun oppilaalla on haasteita geometrian oppimisessa, on hyvä muistaa, että hyvin monet tekijät voivat aiheuttaa nämä haasteet. Yhtäältä oppimisvaikeuksien taustalla voivat olla oppilaan yleiset non-verbaaliset oppimisvaikeudet, kuten visuo-spatiaalisen työmuistin (Visuospatial working memory) rajoittuneisuus (Mammarella, Giofrè, Ferrara & Cornoldi 2013), muut visuaalisen prosessoinnin häiriöt (Gal & Linchevski, 2010) tai myös verbaalisen kehityksen häiriöt. Toisaalta geometria itsessään voi paikkapaikoin osoittautua oppilaalle sisällöllisesti haastavaksi varsinkin, kun siirrytään deduktiiviseen geometriaan. Perinteinen euklidinen geometria määritelmien, teoreemojen ja todistuksien edellyttäen näet van Hielin tason 3 ja 4 ajattelua ja riittäviä loogisen päättelyn perustaitoja. Unohtaa ei sovi sitäkään, että geometrian opetus voi sekä tiedollisesti että didaktisesti olla vaativaa myös opettajalle itselleen. Esimerkiksi Kuzniak ja Rauscher (2011) osoittavat esimerkeillään havainnollisesti, miten erilaiset didaktiset lähestymistavat geometriassa tarkasteltaviin asioihin voivat olla eritavoin alttiita oppimisvaikeuksien syntymiselle.

Yhteenveto

Liian usein koulussa opittavaan geometriaan suhtaudutaan ikään kuin kyse olisi pelkästään geometrisen tietovarannon määrällisestä kartuttamisesta uusilla sisällöillä. Houdementin ja Kuzniakin (2003) samoin kuin van Hielen teorian (1957) mukaisesti geometria näyttäytyy eri ikävaiheissa oppijoille hyvin erilaisena sisäalueena. Varhaislapsuudesta aikuisuuteen kestävä geometrisen ajattelun vähittäinen mutta kokonaisvaltainen muutos ja geometrisen tietämyksen karttuminen johdattavat oppijat asteittain geometriatulkinnasta toiseen kuten esimerkiksi edellä mainitut geometriatulkinnat G1-G3 osoittavat.

On selvää, että geometriaa opettavan opettajan tulee kaikilla kouluasteilla tuntea pääpiirteet geometrisen ajattelun kehityksestä ja sopeuttaa opetuksensa kulloinkin meneillään olevaan kehitysvaiheeseen. Pedagogisesti tehtävä on silti haasteellinen. Oppilaan geometrasta ajattelua tulisi ohjata tehtävillä ja aktiviteeteilla, jotka ovat oppijalle samanaikaisesti ymmärrettäviä sillä tasolla, jolla hänen geometrinen ajattelunsa on, ja jotka kuitenkin antavat mahdollisuuden ja haastavat laadullisesti korkeamman tason tarkastelutapaan. Edellä esitetyillä esimerkeillä pyrimme osoittamaan, miten geometrisen ajattelun peruselementit, kuten se, miten käsitteet tulevat ymmärrettäviksi visuaalisen sisältönsä tai määrittelynsä kautta, tai se, millaiset perustelut tekevät tosiasioina esitetyt väitteet uskottaviksi, ovat perustavalla tavalla erilaisia eri geometriatulkintoissa.

Vaikka geometria, jota koulussa opetetaan, perustuu vuosisatoja vanhaan tietoon, niin on tärkeää huomata, että geometrian didaktiikka elää näinä aikoina kuitenkin voimakasta murrosvaihetta. Nykyään geometriaa opiskellaan yhä useammin dynaamisen geometrian oppimisympäristöissä, joiden keskeinen osa muodostuu oppilaiden tutkivasta ja kokeilevasta työskentelystä. Toistaiseksi melko vähän tiedetään siitä, tuottaako tällainen nykyaikainen, sosio-konstruktivistisen suuntauksen mukainen yhteistoiminnallisuuteen ja tutkivaan lähestymistapaan perustuva geometrian opetus oppilaille paremmat spatiaalisen ja geometrisen ajattelun taidot kuin perinteinen geometrian opetus. Myös välineitä, joilla tätä arvioidaan, tulisi kehittää sekä teorian että käytännön tasolla. Kuten Mammarella, Giofrè ja Caviola (2017) ovat aiheellisesti todenneet, geometrisen ajattelun kehitystä kuvaavat teoriat ovat yli 30 vuotta vanhoja. Tosiasiassa teoriat tulivat yleisemmin tunnetuiksi tuolloin, mutta esimerkiksi tunnetuin teorioista van Hielen teoria

on peräisin 1950-luvulta eli ajalta, jolloin geometrian opetuksen asema koulujen opetussuunnitelmissa ja geometrian opetuksen tapa oli tyystin erilainen kuin nykyään.

Lähteet

- Atebe, H.U. (2008). *Students' van Hiele levels of geometric thought and conception in plane geometry: A collective case study of Nigeria and South Africa*. PhD thesis. Rhodes University, South Africa. (Luettu 8.12.2011 eprints.ru.ac.za/1505/1/atebe-phd-vol1.pdf).
- Bell, C. (2011). Proofs with out Words: A Visual Application of Reasoning and Proof. *The Mathematics Teacher*, 104(9), 690-695.
- Barnbrook, G. (2002). *Defining language. A local grammar of definition sentences*. Philadelphia, PA, USA: John Benjamin's Publishing Company.
- Bergeron, J.C. & Herscovics, N. (1990). *Psychological aspects of learning early arithmetic*. Teoksessa P. Nesher & J. Kilpatrick (toim.) *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the psychogy of mathematics education* (ss. 31-69). ICMI Study Series,.
- Blair, S. (2004). *Describing undergraduates' reasoning within and across Euclidean, taxicab, and spherical geometries*, Ph.D. diss., Portland State University.
- Bobis, J., Sweller, J., & Cooper, M. (1993). Cognitive load effects in a primary-school geometry task. *Learning and Instruction*, 3(1), 1-21. [http://doi.org/10.1016/S0959-4752\(09\)80002-9](http://doi.org/10.1016/S0959-4752(09)80002-9).
- Chan, K.K., & Leung, S.W. (2014) Dynamic geometry software improves mathematical achievement: Systematic review and meta-analysis. *Journal of Educational Computing Research* 51(3), 311-325.
- Clements, D.H., Swaminathan, S., Hannibal, M.A.Z., Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2), 192-212.
- de Villiers, M. (1995). The handling of geometry definitions in school textbooks. Editorial, appeared in PYTHAGORAS 38, pp. 3-4, Dec 1995. Saatavana myös <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/geomdef.htm>.

- Erbaş, A.K. & Yenmez, A.A. (2011). The effect of inquiry-based explorations in a dynamic geometry environment on sixth grade students' achievements in polygons. *Computers & Education* 57(4), 2462-2475.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24(2), 139-162.
- Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education* 20(10), 1193-1211.
- Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 163–183.
- Gawlick, T. (2005). Connecting arguments to actions –Dynamic geometry as means for the attainment of higher van Hiele levels. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(5), 361-370.
- Güven, B. & Baki, A. (2010). Characterizing student mathematics teachers' levels of understanding in spherical geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 41(8), 991–1013.
- Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen, T. & Viilo, M.-L. (2005). *Matematiikan Taito 3. Geometria*. Helsinki:WSOY.
- Hannafin, R.D. & Scott, B.N. (2007). Teaching and Learning with Dynamic Geometry Programs in Student-Centered Learning Environments. A Mixed Method Inquiry. *Computers in the Schools*. 17(1-2), 121–141.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies. Teoksessa A.H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (toim.) *CBMS Issues in Mathematics Education Vol. 7, Research in Collegiate Mathematics Education III*, 234–283, Rhode Island: American Mathematical Society.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. Teoksessa P. Nesher & J. Kilpatrick (toim.) *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 70-95.

- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. Teoksessa M.A. Mariotti (toim.) *Proceedings of CERME 3*. Belaria, Italy. <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/>
- Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 129–147. <http://doi.org/10.1007/s10649-011-9304-7>.
- Leikin, R. & Winicki-Landman, G. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics* 20(1), 17-21.
- Leikin, R. & Winicki-Landman, G. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 2. *For the Learning of Mathematics* 20(2), 24-29.
- Mammarella, I.C., Giofrè, D., & Caviola, S. (2017). Learning geometry: the development of geometrical concepts and the role of cognitive processes. In D.C. Geary, D.B. Ochsendorf, R. Mann, & K.Koepke (Eds.) *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts. Mathematical cognition and learning*, Vol. 3. London: Academic Press, 221–246.
- Mammarella, I.C., Giofrè, D., Ferrara, R. & Comoldi, C. (2013). Intuitive geometry and visuospatial working memory in children showing symptoms of nonverbal learning disabilities. *Child Neuropsychology* 19(3), 235–249.
- Markovits, Z., & Hershkowitz, R. (1997). Relative and Absolute Thinking in Visual Estimation Processes. *Educational Studies in Mathematics* 32, 29-47.
- Matsuo, N. & Silfverberg, H. (2011). Some aspects of the Japanese and Finnish 8th graders' geometrical knowledge: Focusing on two concepts and one relation. Teoksessa *The Proceedings of 44th Annual Research Conference of Japan Society of Mathematical Education*. Tokyo: Japan Society of Mathematical Education.
- Nelsen, R.B. (1993) *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, Washington: MAA.
- Nelsen, R.B. (2000) *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, Washington: MAA.
- Nelsen, R.B. (2015) *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking (Classroom Resource Materials)* Washington: MAA.

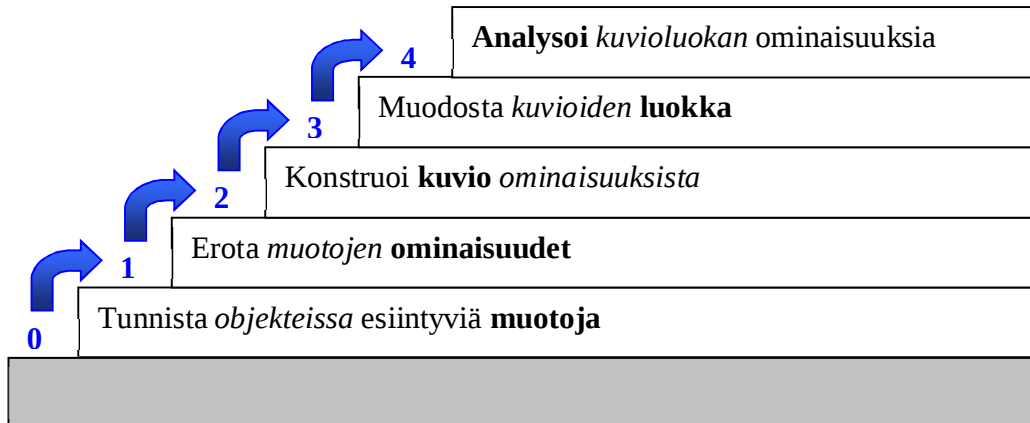
- NCLD (1999) *National Center for Learning Disabilities (NCLD) (1999)*
<http://www.ldonline.org/article/6390#anchor520397>. [Luettu 20.11.2017].
- Okazaki, M. & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. Teoksessa J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park, & D.Y. Seo (toim.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (ss. 41-48). Seoul: PME.
- Patsiomitou, S. & Emvalotis, A. (2010). Students movement through van Hiele levels in a dynamic geometry guided reinvention process. *Journal of Mathematics and Technology*, 2010(1-3), 18-48, [www.ijar.lit.az/pdf/jmt/1/JMT2010\(1-3\).pdf](http://www.ijar.lit.az/pdf/jmt/1/JMT2010(1-3).pdf).
- Parzysz, B. (2003). Pre-service elementary teachers and the fundamental ambiguity of diagrams in geometry problem-solving. Teoksessa M.A. Mariotti (toim.) *Proceedings of CERME 3*. Belaria, Italy. <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/>
- Rosch, E. & Mervis, C.B. (1975). Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. *Cognitive Psychology* 7, 573-605.
- Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010). The effects of GeoGebra on mathematics achievement: Enlightening Coordinate Geometry learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8(5), 686–693. <http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.095>
- Sigler, A., Segal, R., & Stupel, M. (2016). The standard proof, the elegant proof, and the proof without words of tasks in geometry, and their dynamic investigation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(8), 1226–1243.
- Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun oppilaan geometrinen käsitetieto*. Acta Universitatis Tamperensis; 710. Tampereen yliopisto.
- Silfverberg, H. & Joutsenlahti, J. (2007). Miten opettajaopiskelijat ymmärtävät käsitteen kulma? Teoksessa K. Merenluoto, A. Virta & P. Carpelan (toim.) *Opettajankoulutuksen muuttuvat rakenteet*. Ainedidaktinen symposium 9.2.2007. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:77 (239-247). Turku: Turun yliopisto..
- Silfverberg, H. & Matsuo, N. (2008a). Comparing Japanese and Finnish 6th and 8th Graders' Ways to Apply and Construct Definitions. Research Paper. Teoksessa O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (toim.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME32*

(International group for the Psychology of Mathematics Education) and PME-NA XXX, Morelia Mexico, July 17-12, 2008. Vol.4 (ss. 257-264). Morelia: PME

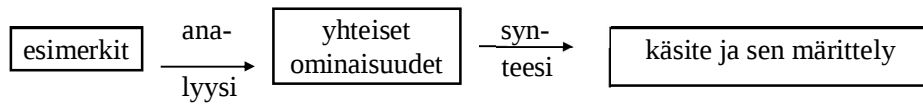
- Silfverberg, H. & Matsuo, N. (2008b). Comparative study of Finnish and Japanese students' understanding of class inclusion and defining in a geometrical context. Teoksessa A. Kallioniemi (toim.) *Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka. Ainedidaktinen symposiumi 8.2.2008 Helsingissä. Osa 2. Tutkimuksia* 299 (ss. 608-620). Helsinki: University of Helsinki.
- Tall, D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12(2), 151-169.
- van Hiele, P. M. (1957). *De problematiek van het inzicht*. Unpublished thesis. Utrecht: University of Utrecht.
- van Hiele-Geldof, D. (1957). *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O..* Unpublished thesis. Utrecht: University of Utrecht.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning mathematics. Teoksessa D. Tall (toim.) *Advanced mathematical thinking*. Mathematics Education Library. Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 65-81.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20(4), 356-366.

KUVAT:

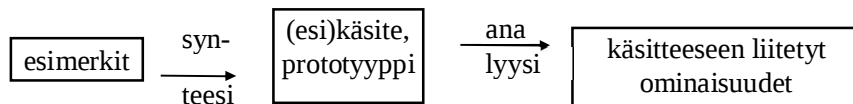
Kuvio 1



Kuvio 2



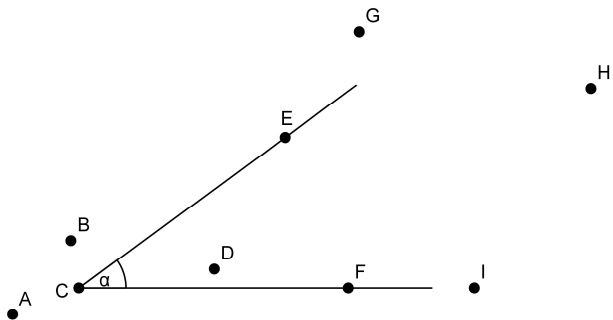
Kuvio 3



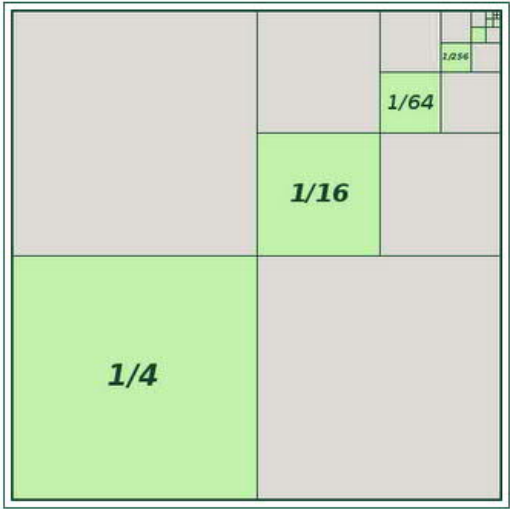
Kuvio 4



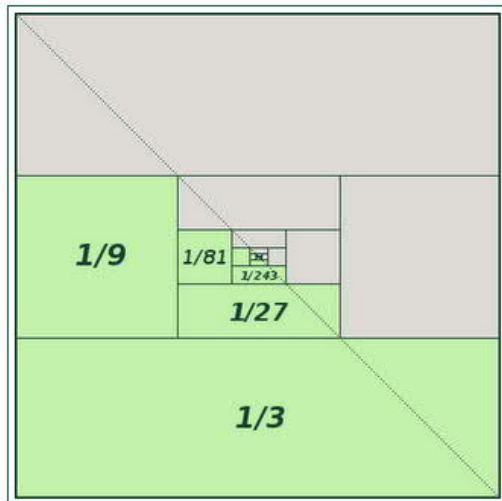
Kuvio A



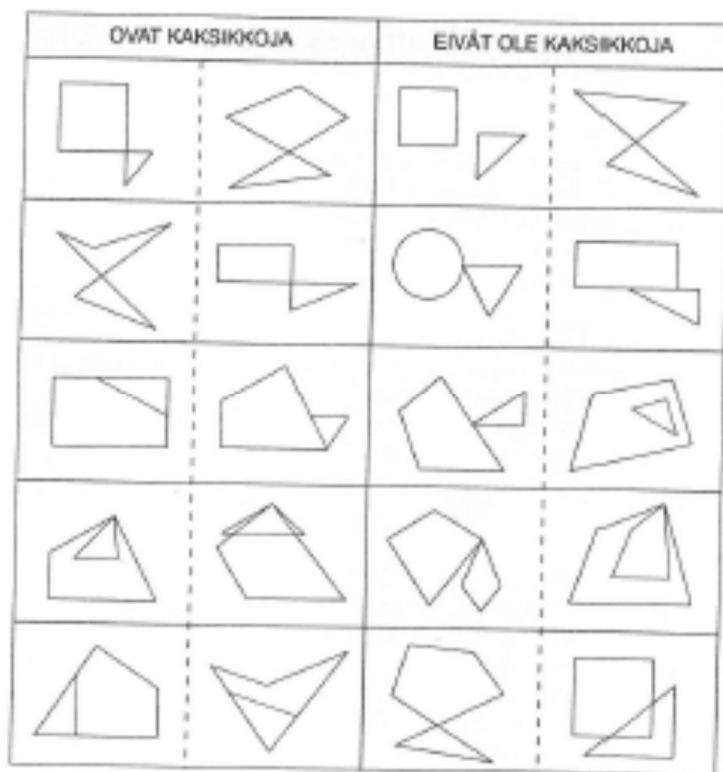
Kuvio a



Kuvio b



Kuvio B



Kuvio C

