



**TURUN
YLIOPISTO**

STOKASTISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT KORKOMARKKINOILLA:
WIENERIN PROSESSI JA SEN SOVELLUKSET

Joni Aarnio

LuK. -tutkielma
Toukokuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LuK. -tutkielma

Pääaine: Matematiikka

Tekijä: Joni Aarnio

Otsikko: Stokastiset differentiaaliyhtälöt korkomarkkinoilla: Wienerin prosessi ja sen sovellukset

Ohjaaja: Prof. Jukka Lempa

Sivumäärä: 17 sivua

Aika: Toukokuu 2026

Rahoitusmarkkinoilla korkojen ajallinen vaihtelu on satunnaista, minkä vuoksi niiden mallintamisessa ja korkojohdannaisten hinnoittelussa tarvitaan stokastista analyysiä. Tässä kandidaatintutkielmassa tarkastellaan stokastisten differentiaaliyhtälöiden matemaattista teoriaa ja sen soveltamista korkomarkkinoiden lyhytkorkomalleihin. Työn tavoitteena on esittää, kuinka puhtaasta satunnaiskulusta johdetaan työkaluja reaali maailman taloudellisten ilmiöiden kuvaamiseen.

Työn alkupuolella määritellään teorian fundamentaalinen rakennuspalikka, Wienerin prosessi (Brownin liike), sekä tutkitaan sen matemaattisia ominaisuuksia. Tämän pohjalta rakennetaan Itô-kalkyylin perusteet esittelemällä Itô-prosessit, joissa ajautumis- ja diffuusiokertoimet voivat yleisesti olla myös alkeistapauksesta riippuvia stokastisia prosesseja. Lisäksi esitellään Itôn lemman, joka toimii stokastisen analyysin ketjusääntönä. Tämän jälkeen määritellään stokastiset differentiaaliyhtälöt (SDY) ja käydään läpi ehdot niiden yksikäsitteisten ratkaisujen olemassaololle.

Tutkielman sovellusosassa teoria sidotaan riskineutraalin hinnoittelun viitekehykseen tarkastelemalla yksifaktorisia affiineja korkomalleja. Työssä analysoidaan ja vertaillaan yksityiskohtaisesti kahta klassista mallia: Vasicekin mallia ja Cox-Ingersoll-Ross-mallia (CIR). Molemmat mallit pystyvät kuvaamaan korkotasolle tyypillistä keskiarvohakuisuutta (mean reversion). Tutkielmassa osoitetaan mallien matemaattiset erot: lineaariseen Ornstein-Uhlenbeck-prosessiin perustuva Vasicekin malli sallii negatiiviset korot, kun taas CIR-mallin hyödyntämä neliöjuuridiffuusio takaa Fellerin ehdon vallitessa korkojen aidon positiivisuuden.

Yhteenvedon todetaan, että stokastiset differentiaaliyhtälöt tarjoavat johdonmukaisen, analyttisesti käsiteltävän ja taloudellisesti intuitiivisen tavan korkodynamiikan mallintamiseen, toimien välttämättömänä pohjana nykyaikaiselle rahoitusmatematiikalle.

Asiasanat: Wienerin prosessi, stokastiset differentiaaliyhtälöt, Itô-kalkyyli, Vasicekin malli, CIR-malli, lyhytkorko, rahoitusmatematiikka.

Sisällys

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Johdanto | 1 |
| 2 | Matemaattinen teoria | 2 |
| 2.1 | Wiener-prosessi ja Brownin liike | 2 |
| 2.2 | Itô-prosessi | 4 |
| 2.3 | Stokastiset differentiaaliyhtälöt | 6 |
| 3 | Sovellukset | 8 |
| 3.1 | Wiener-prosessi korkomarkkinoilla | 8 |
| 3.2 | Vasicek- ja CIR-mallit | 9 |
| 4 | Päätäntö | 11 |

1 Johdanto

Korot vaihtelevat finanssimarkkinoilla epädeterministisesti ajan kuluessa, ja niiden kehityksen mallintaminen edellyttää stokastisten prosessien käyttöä. Wienerin prosessi eli Brownin liike on tässä yhteydessä keskeinen stokastinen prosessi, joka toimii rakennuspalikkana monissa malleissa sekä osake- että korkomarkkinoilla. Erityisesti korkomarkkinoilla Wienerin prosessiin perustuvat stokastiset differentiaaliyhtälöt (SDY) ovat tulleet välttämättömiksi työkaluiksi: ne mahdollistavat korkojen ajallisen käyttäytymisen mallintamisen erilaiset epävarmuustekijät huomioon ottaen. Tämä on tärkeää esimerkiksi joukkolainojen hinnoittelussa sekä korkojohdannaisten, kuten koronvaihtosopimusten ja korko-optioiden arvioinnissa ja korkoriskin mittaamisessa. [1, 2]

1900-luvun lopulla kehittynyt matemaattinen rahoitusteoria osoitti Blackin ja Scholesin (1973) urauurtavan työn [3] myötä, kuinka stokastista laskentaa ja Wienerin prosessia voidaan hyödyntää johdannaisten hinnoittelussa. Pian tämän jälkeen huomattiin, että myös korkojen termiirakenteen mallintamisessa tarvitaan vastaavia menetelmiä. Korkojen tapauksessa on olennaista huomioida, että toisin kuin osakekurssit, ne pyrkivät palautumaan pitkän aikavälin tasapainoarvoonsa esimerkiksi keskuspankkien toimien seurauksena [2]. Tätä ilmiötä kutsutaan keskiarvohakuisuudeksi (engl. *mean reversion*).

Tämän tutkielman tavoitteena on syventyä tarkasti Wienerin prosessin ja siihen perustuvan Itô-kalkyylin teoriaan sekä havainnollistaa, miten näitä käsitteitä sovelletaan korkomarkkinoilla yleisesti käytettyihin stokastisiin korkomalleihin. Työ rajataan yhden tekijän malleihin eli malleihin, joissa korkojen kehitys kuvataan yhden stokastisen muuttujan avulla. Tällöin monifaktorimallit ja niin sanotut hyppyprosessit jäävät tarkastelun ulkopuolelle. Työn matemaattisen teoriaosuuden keskeisinä lähteinä on hyödynnetty Øksendalin [4] stokastista analyysiä käsittelevää teosta sekä Shreven [5] rahoitusmatematiikan stokastista laskentaa käsittelevää oppikirjaa. Korkomallien ja riskineutraalin hinnoittelun osalta työ nojaa erityisesti Björkin [1], Hullin [2], Filipovićin [6] ja Veronesin [7] teoksiin. Lisäksi Vasicekin [8] sekä Coxin, Ingersollin ja Rossin [9] alkuperäisartikkeleita hyödynnetään klassisten lyhytkorkomallien esittelyssä. Tutkielmassa käsitellään ensin tarvittava matemaattinen teoria, erityisesti Wiener-prosessi, Itô-prosessi ja stokastiset differentiaaliyhtälöt, minkä jälkeen tarkastellaan sovelluksia korkomarkkinoilla keskittyen Vasicek- ja CIR-korkomalleihin.

2 Matemaattinen teoria

2.1 Wiener-prosessi ja Brownin liike

Wienerin prosessi eli standardi Brownin liike on jatkuva-aikainen stokastinen prosessi, joka mallintaa satunnaista liikettä ajan suhteen. Seuraava määritelmä pohjautuu yleiseen stokastisen analyysin kirjallisuuteen, kuten teoksiin [5] ja [4].

Määritelmä 1 (Standardi Wiener-prosessi). Stokastinen prosessi $W(t)$ on standardi Wiener-prosessi, jos se toteuttaa ehdot:

- (1) **Alkuarvo on nolla:** $W(0) = 0$.
- (2) **Riippumattomat lisäykset:** Prosessin lisäykset erillisillä aikaväleillä ovat riippumattomia. Jos $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, niin satunnaismuuttujat

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

ovat toisistaan riippumattomia.

- (3) **Normaalijakautuneet lisäykset:** Kaikilla $0 \leq s < t$ lisäys $W(t) - W(s)$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla 0 ja varianssilla $t - s$, eli

$$W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

- (4) **Jatkuvat polut:** Prosessin polut ovat jatkuvia todennäköisyydellä 1. Toisin sanoen, kuvaus $t \mapsto W(t)$ on jatkuva melkein kaikilla alkeistapauksilla.

Lause 1 (Wiener-prosessin jakauma ja kovarianssi). *Standardi Wiener-prosessi $W(t)$ on Gaussinen prosessi, jonka odotusarvo on 0. Sen kovarianssifunktio on*

$$\text{Cov}(W(t), W(s)) = E[W(t)W(s)] = \min(t, s).$$

Todistus. Määritelmän nojalla $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$, joten $E[W(t)] = 0$ kaikilla $t \geq 0$. Tarkastellaan kovarianssia. Olkoon $0 \leq s < t$. Voimme kirjoittaa $W(t)$ summana

$$W(t) = W(s) + (W(t) - W(s)).$$

Sijoitetaan tämä odotusarvon lausekkeeseen:

$$\begin{aligned} E[W(t)W(s)] &= E[(W(s) + (W(t) - W(s)))W(s)] \\ &= E[W(s)^2] + E[(W(t) - W(s))W(s)]. \end{aligned}$$

Koska Wiener-prosessin lisäykset ovat riippumattomia (Määritelmä 1, kohta 2), tuleva lisäys $W(t) - W(s)$ on riippumaton menneestä arvosta $W(s)$. Tällöin tulon odotusarvo on odotusarvojen tulo:

$$E[(W(t) - W(s))W(s)] = \underbrace{E[W(t) - W(s)]}_{=0} \cdot \underbrace{E[W(s)]}_{=0} = 0.$$

Jäljelle jää termi $E[W(s)^2]$, joka on määritelmän (kohta 3) mukaan varianssi s . Täten $E[W(t)W(s)] = s = \min(t, s)$. \square

Nämä ehdot karakterisoivat standardin Wienerin prosessin. Intuitiivisesti $W(t)$ voidaan ajatella rajatapauksena satunnaiskulusta, jossa jokaisena pienenä aikavälinä Δt tapahtuu pieni satunnainen muutos. Ehdot (2) ja (3) tarkoittavat, että muutokset yhtä pitkillä aikaväleillä ovat eri aikoina sekä identtisesti jakautuneita että korreloimattomia (itse asiassa riippumattomia). Tämä tekee Wienerin prosessista *Markovin prosessin*, mikä tarkoittaa, että nykyinen arvo sisältää kaiken olennaisen informaation tulevasta kehityksestä.

Lisäksi Wienerin prosessi on *martingaali*. Tämä tarkoittaa, että prosessin ehdollinen odotusarvo tulevasta hetkestä t aiemman historian (hetkeen $s < t$ saakka) huomioiden on tismalleen sen nykyinen arvo, eli $E[W(t) | \mathcal{F}_s] = W(s)$. Tällöin nähdään, että kyseinen prosessi ei systemaattisesti ajautu ylös- tai alaspäin. Jos $\sigma > 0$ on volatilitteettiparametri, prosessin $X(t) = \sigma W(t)$ varianssi on $\sigma^2 t$. Tällöin $X(t)$ kuvaa satunnaisliikettä, jonka heilahtelun voimakkuutta säätelee parametri σ . Tätä parametria kutsutaan fysiikassa ja stokastisessa analyysissä usein *diffuusio kertoimeksi*.

Wienerin prosessin keskeisiä piirteitä edellä mainittujen määritelmien lisäksi ovat sen skaalausominaisuus ja ajallinen homogeenisuus. Skaalausominaisuudella (ns. Brownin skaalaus) tarkoitetaan, että jos $c > 0$, niin prosessi

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct)$$

on myös standardi Wiener-prosessi. Rahoitusteoriassa standardimalliin lisätään tyyppillisesti aikaan sidottu ajautumistermi (drift), sekä heilahtelua skaalaava diffuusio-termi.

Historiallisesti Brownin liikkeen käsite juontaa juurensa fysikaaliseen ilmiöön: Robert Brown havaitsi vuonna 1827 mikroskooppisten hiukkasten jatkuvaa satunnaista liikettä nesteessä. Myöhemmin Albert Einstein (1905) antoi teoreettisen perustelun tälle ilmiölle käyttäen satunnaiskulun mallia, ja lopulta Norbert Wiener osoitti vuonna 1923, että tällainen prosessi voidaan määritellä tarkasti matemaattisesti [10]. Tästä syystä prosessia kutsutaan Wienerin prosessiksi. Brownin liike on siten sekä fysikaalinen ilmiö että sen matemaattinen mallinnus. Rahoitusteoriassa se on vakiinnuttanut paikkansa satunnaisten hintaliikkeiden perustavana mallina. Esimerkiksi Bachelier käytti Brownin liikettä jo vuonna 1900 finanssiaineistoissa, ja myöhemmin Black-Scholes-Merton-malli hyödynsi sitä osakekurssien dynamiikassa [5].

Yhteenvetona Wiener-prosessi on keskeinen jatkuva-aikainen stokastinen prosessi, jolla on riippumattomat, normaalijakautuneet lisäykset. Sillä ei ole “muistia” menneestä (Markovin ominaisuus), ja se kuvaa puhdasta satunnaisheilahtelua ilman determinististä trendiä. Seuraavaksi työssä käsitellään, kuinka tästä peruspalikasta voidaan rakentaa yleisempiä malleja lisäämällä prosessiin ajautumistermi ja tarkastelemalla yleisempiä Itô-prosesseja.

2.2 Itô-prosessi

Pelkkä Wienerin prosessi kuvaa odotusarvoltaan muuttumatonta satunnaista liikettä. Usein kuitenkin halutaan kuvata prosessia, jolla on jokin suunta tai trendi (eli tässä yhteydessä ajautuminen tai ns. driftti) sekä satunnainen osa. Itô-prosessi onkin yleisempi stokastinen prosessi, joka sisältää sekä ajautumiskomponentin että satunnaisen Wiener-komponentin. Yleisessä tapauksessa myös ajautumis- ja diffuusiokerroimet voivat olla stokastisia prosesseja.

Määritelmä 2 (Itô-prosessi [4, s. 44, Def. 4.1.1]). Olkoon $W(t)$ standardi Wiener-prosessi todennäköisyysavaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) ja olkoon $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ siihen liittyvä suodatus, joka kuvaa ajanhetkeen t mennessä saatavilla olevaa informaatiota. Yksiuotteinen Itô-prosessi on stokastinen prosessi $X(t)$, joka voidaan esittää muodossa

$$dX(t) = \mu(t, \omega) dt + \sigma(t, \omega) dW(t), \quad (1)$$

missä $\mu(t, \omega)$ ja $\sigma(t, \omega)$ ovat aikaan ja alkeistapaukseen $\omega \in \Omega$ riippuvia adaptoituneita stokastisia prosesseja. Niiden oletetaan toteuttavan integroituvuusehdot melkein varmasti kaikilla $T > 0$:

$$P \left(\int_0^T |\mu(t, \omega)| dt < \infty \right) = 1$$

ja

$$P \left(\int_0^T \sigma(t, \omega)^2 dt < \infty \right) = 1.$$

Yhtälö (1) on lyhennysmerkintä integraaliyhtälölle aikavälillä $[0, T]$:

$$X(T) = X(0) + \int_0^T \mu(t, \omega) dt + \int_0^T \sigma(t, \omega) dW(t).$$

Ensimmäinen integraali kuvaa ajautumista ja jälkimmäinen on *Itô-integraali*. Koska kertoimet voivat riippua alkeistapauksesta ω , ne voivat itsessään olla satunnaisia prosesseja. Itô-integraalin matemaattinen rakentaminen on esitetty yksityiskohtaisesti esimerkiksi lähteessä [4, s. 26-29].

Määritelmä 3 (Itô-integraali). *Itô-integraali* poikkeaa tavallisesta integraalista, sillä integrandi voi olla satunnainen prosessi. Jos $f(t, \omega)$ on sopivat integroituvuusehdot toteuttava adaptoitunut stokastinen prosessi, sen Itô-integraali määritellään raja-arvona summista, joissa integrandia arvioidaan osavälin *alkupisteessä*:

$$\int_0^T f(t, \omega) dW(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega) (W(t_{i+1}) - W(t_i)),$$

missä $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ on välin jako. Alkupisteessä arviointi takaa, että integrandi ei riipu tulevista Wiener-prosessin lisäyksistä.

Itô-integraalilla on kaksi keskeistä ominaisuutta, jotka tekevät siitä hyödyllisen rahoitusteoriassa olettaen, että integrandi on neliöintegroituva:

Lemma 1 (Itô-isometria [4, s. 26, Lemma 3.1.5]). *Olkoon $f(t, \omega)$ adaptoitunut stokastinen prosessi, jolle*

$$E \left[\int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty.$$

Tällöin Itô-integraalille pätee isometria

$$E \left[\left(\int_0^T f(t, \omega) dW(t) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right].$$

Lause 2 (Martingaaliominaisuus ja nollaodotusarvo [4, s. 33, Cor. 3.2.6]). *Olkoon $f(t, \omega)$ adaptoitunut stokastinen prosessi, jolle*

$$E \left[\int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty.$$

Tällöin prosessi

$$M(t) = \int_0^t f(s, \omega) dW(s)$$

on martingaali. Erityisesti Itô-integraalin odotusarvo on nolla:

$$E \left[\int_0^T f(t, \omega) dW(t) \right] = 0.$$

Wienerin prosessi on Itô-prosessin erikoistapaus, jossa $\mu \equiv 0$ ja $\sigma \equiv 1$. Toisaalta, jos $\sigma \equiv 0$ ja ajautumistermi μ on deterministinen ajan funktio, prosessi palautuu tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi $X'(t) = \mu(t)$. Itô-prosessien käsittelyssä keskeisin työkalu on Itôn lemma (Itô's formula), jota voidaan pitää stokastisen analyysin vastineena differentiaalilaskennan ketjusäännölle [1]. Koska Wienerin prosessin polut ovat hyvin heilahtelevia (niillä on ääretön variaatio), Taylorin sarjakehitelmässä on huomioitava toisen kertaluvun termit.

Lause 3 (Itôn lemma [4, s. 44-45, Thrm. 4.1.2]). *Olkoon $X(t)$ Itô-prosessi*

$$dX(t) = \mu(t, \omega) dt + \sigma(t, \omega) dW(t),$$

ja olkoon $F(x, t)$ kahdesti jatkuvasti derivoituva muuttujan x suhteen ja kerran jatkuvasti derivoituva ajan t suhteen. Tällöin prosessi $Y(t) = F(X(t), t)$ on myös Itô-prosessi.

Sijoittamalla $dX(t)$:n lauseke ja käyttämällä stokastisen laskennan sääntöjä

$$(dt)^2 = 0, \quad dt \cdot dW(t) = 0, \quad (dW(t))^2 = dt,$$

saadaan stokastisen ketjusäännön mukaisesti seuraava differentiaalimuoto.

Merkitään lyhyesti

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Tällöin

$$dY(t) = \left(F_t(X(t), t) + \mu(t, \omega) F_x(X(t), t) + \frac{1}{2} \sigma(t, \omega)^2 F_{xx}(X(t), t) \right) dt + \sigma(t, \omega) F_x(X(t), t) dW(t). \quad (2)$$

Kaavassa (2) termi $\frac{1}{2}\sigma(t, \omega)^2 F_{xx}(X(t), t)$ on ns. Itô-korjaustermi, joka puuttuu tavallisesta differentiaalilaskennasta. Se johtuu siitä, että $(dW(t))^2$ on suuruusluokkaa dt , eikä se häviä raja-arvossa. Itôn lemman yksityiskohtainen todistus löytyy esimerkiksi Øksendalilta [4] ja Björkiltä [1], ja yllä esitetty kaava tiivistää tuloksen työn tarvitsemassa yksiulotteisessa tapauksessa. Itôn lemman avulla voidaan johtaa esimerkiksi Black-Scholesin differentiaaliyhtälö johdannaiselle valitsemalla F kohde-etuuden hinnan funktioksi [2]. Yhteenvetona Itô-prosessit laajentavat Wiener-prosessin käsittämään tilanteet, joissa mukana on sekä ajautumistermi että diffuusio-termi. Yleisessä tapauksessa nämä kertoimet voivat olla stokastisia prosesseja, mutta rahoitussovelluksissa tarkastellaan usein myös deterministisiä ajan ja tilan funktioita.

2.3 Stokastiset differentiaaliyhtälöt

Kuten luvussa 2.2 määriteltiin, Itô-prosessit voidaan yleisessä muodossa esittää differentiaalimuodossa $dX(t) = \mu(t, \omega) dt + \sigma(t, \omega) dW(t)$. Kun tällaista esitystä tarkastellaan yhtälönä, jossa kertoimet on ennalta annettu ja itse prosessi $X(t)$ on tuntematon, puhutaan *stokastisesta differentiaaliyhtälöstä* (SDY). Yleisessä muodossa kertoimet voivat riippua ajasta, tilasta ja alkeistapauksesta:

$$dX(t) = \mu(X(t), t, \omega) dt + \sigma(X(t), t, \omega) dW(t). \quad (3)$$

Monissa rahoitussovelluksissa tarkastellaan erityistapauksia, joissa kertoimet ovat deterministisiä ajan ja tilan funktioita. Tällöin yhtälö kirjoitetaan usein muodossa

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t). \quad (4)$$

SDY:n ratkaiseminen tarkoittaa sellaisen satunnaisprosessin $X(t)$ löytämistä, joka toteuttaa kyseisen yhtälön Itô-integraalin mielessä annetulla alkuehdolla $X(0)$. Matemaattisen teorian kannalta on ensiarvoisen tärkeää tietää, millä ehdoilla tällainen ratkaisu on olemassa ja yksikäsitteinen. Seuraava klassinen olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulos koskee erityisesti tilannetta, jossa kertoimet ovat deterministisiä ajan ja tilan funktioita.

Lause 4 (Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys [4, s. 66, Thrm. 5.2.1]). *Oletetaan, että funktiot $\mu(x, t)$ ja $\sigma(x, t)$ ovat jatkuvia ja toteuttavat seuraavat ehdot kaikille $x, y \in R$ ja $t \in [0, T]$:*

(1) **Lipschitz-ehto:** *On olemassa vakio $K > 0$ siten, että*

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq K|x - y|.$$

(2) **Lineaarisen kasvun ehto:** *On olemassa vakio $C > 0$ siten, että*

$$|\mu(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \leq C(1 + |x|^2).$$

Tällöin stokastisella differentiaaliyhtälöllä on olemassa alkuehdolla $X(0)$ yksikäsitteinen vahva ratkaisu $X(t)$, jolla on jatkuvat polut.

Vaikka numeeriset menetelmät ovat usein tarpeen monimutkaisempien yhtälöiden kohdalla, tietyille tärkeille erikoistapauksille tunnetaan analyttiset ratkaisut. Seuraavaksi esitellään kaksi klassista esimerkkiä.

Esimerkki 1 (Aritmeettinen Brownin liike). Yksinkertaisin SDY on vinosti kulkeva Brownin liike, jossa μ ja σ ovat vakioita:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

Integroimalla saadaan suoraan ratkaisu $X(t) = X(0) + \mu t + \sigma W(t)$. Tämä prosessi on normaalijakautunut: $X(t) \sim \mathcal{N}(X(0) + \mu t, \sigma^2 t)$.

Esimerkki 2 (Geometrinen Brownin liike). Osakkeiden hintojen mallinnuksessa keskeinen perusmalli on geometrinen Brownin liike, joka toteuttaa yhtälön

$$dS(t) = \alpha S(t) dt + \sigma S(t) dW(t),$$

missä α ja σ ovat vakioita. Luvussa 2.2 esitellyn Itô'n lemmän avulla voidaan osoittaa (ks. esim. [2, Luku 13.1]), että tämän yhtälön yksikäsitteinen ratkaisu on

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right). \quad (5)$$

Ratkaisusta nähdään suoraan, että hinnan luonnollinen logaritmi $\ln S(t)$ on normaalijakautunut.

Korkomarkkinoilla erityisen tärkeitä ovat affiiniset diffuusiomallit, joissa prosessin dynamiikka on muotoa

$$dX(t) = (a + bX(t))dt + c\sqrt{X(t)}dW(t)$$

tai vastaava. Tällaisten mallien vahvuus piilee siinä, että niille johdettavat joukkolainojen hintakaavat ovat eksponentiaalis-affineja funktioita ajasta ja tilasta, mikä yksinkertaistaa laskentaa huomattavasti [6]. Näitä sovelletaan tarkemmin tutkielman seuraavassa luvussa.

3 Sovellukset

3.1 Wiener-prosessi korkomarkkinoilla

Korkomarkkinoilla keskeinen suure on lyhytkorko (short rate) r_t , joka kuvaa hetkelistä riskitöntä korkotasoa. Obligaatioiden ja muiden korkoinstrumenttien arvo määräytyy tulevien kassavirtojen nykyarvosta, joka diskontataan lyhytkoron mukaisesti. Koska korot vaihtelevat satunnaisesti talouden tilan ja markkinaodotusten muuttuessa, lyhytkorkoa mallinnetaan jatkuva-aikaisena stokastisena prosessina. Seuraava määritelmä pohjautuu lähteeseen [1, Luku 23].

Määritelmä 4 (Yksifaktorinen lyhytkorkomalli). Yksifaktorinen stokastinen lyhytkorkomalli määritellään Itô-prosessina

$$dr_t = \mu(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) dW_t, \quad (6)$$

missä W_t on standardi Wiener-prosessi *riskineutraalissa todennäköisyyssmitassa* Q , $\mu(t, r_t)$ on ajautumistermi ja $\sigma(t, r_t)$ on volatilitteettitermi.

Tässä mallissa oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat. Tällöin hinnoittelu voidaan suorittaa siirtymällä fyysisestä todennäköisyyssmitasta riskineutraaliin mittaan Q Girsanovin lauseen avulla (ks. esim. [1, Luvut 10 ja 11.1]). Ajautumistermi määrää korkojen ehdollisen keskimääräisen suunnan lyhyellä aikavälillä, ja volatilitteettitermi määrittää, kuinka herkästi satunnaiset tekijät liikuttavat korkoa. Riskineutraalissa mitassa johdannaisten hinnat voidaan laskea suoraan odotusarvoina. Seuraava nollakuponkilainan hinnoittelua koskeva lause pohjautuu lähteeseen [1, Luku 23.2].

Lause 5 (Nollakuponkilainan hinnoittelu). *Oletetaan, että lyhytkorko r_t noudattaa yhtälöä (6). Tällöin ajanhetkellä T erääntyvän nollakuponkilainan (jonka nimellisarvo on 1) hinta $P(t, T)$ ajanhetkellä $t \leq T$ on*

$$P(t, T) = E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (7)$$

missä E^Q on odotusarvo *riskineutraalissa mitassa* ja \mathcal{F}_t on markkinainformaatio hetkeen t saakka.

Historiallisesti ensimmäiset stokastiset lyhytkorkomallit kehitettiin 1970- ja 1980-luvuilla. Toisin kuin osakekursseilla, korkotasolla on taipumus palautua pitkän aikavälin tasapainoonsa esimerkiksi keskuspankkien toimien ja talouden makrofundamenttien seurauksena. Tätä ilmiötä kutsutaan *keskiarvohakuisuudeksi* (mean reversion). Malleissa tämä ominaisuus saadaan aikaan valitsemalla ajautumistermi $\mu(t, r_t)$ siten, että se on positiivinen koron ollessa matala ja negatiivinen koron ollessa korkea.

Tässä työssä keskitytään Vasicek- ja CIR-malleihin, jotka ovat luonteeltaan ns. affineja korkomalleja [6, 7]. Affiinisuus tarkoittaa mallin matemaattista rakennetta, jossa yllä olevan Lauseen 5 mukainen joukkovelkakirjan hinta voidaan ratkaista eksplisiittisesti muodossa $P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r_t)$ [1, s. 379 Prop 24.2]. Seuraavassa alaluvussa nämä mallit esitellään yksityiskohtaisesti.

3.2 Vasicek- ja CIR-mallit

Vasicekin malli [8] on yksi ensimmäisistä stokastisista korkomalleista, ja se on muodoltaan lineaarinen keskiarvohakeutuva (mean reversion) malli.

Määritelmä 5 (Vasicek-malli). Vasicekin lyhytkorkomallissa hetkellisen koron r_t dynamiikkaa riskineutraalissa mitassa Q kuvaa stokastinen differentiaaliyhtälö

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t, \quad (8)$$

missä $a > 0$ on palautumisnopeus, $b \in R$ on pitkän aikavälin keskimääräinen korkotaso ja $\sigma > 0$ on korkoprosessin volatilitiiteetti.

Tulkinnallisesti ajautumistermi $a(b - r_t)$ aiheuttaa sen, että kun $r_t > b$, termi on negatiivinen ja korko pyrkii laskemaan. Vastaavasti kun $r_t < b$, korko pyrkii nousemaan. Satunnaistermi σdW_t on vakio, eli korko vaihtelee samalla absoluuttisella voimakkuudella korkotasosta riippumatta. Vasicekin malli on matemaattisesti Ornstein-Uhlenbeck-prosessi, jolle tunnetaan suljetun muodon ratkaisu. Tämän ratkaisun yksityiskohtainen johtaminen Itô'n lemmän avulla sekä jakauman ominaisuudet on esitetty esimerkiksi lähteessä [5, s. 150-151].

Lause 6 (Vasicek-mallin ratkaisu ja jakauma). *Vasicek-mallin yhtälöllä (8) on yksikäsitteinen ratkaisu*

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s.$$

Korko r_t on normaalijakautunut odotusarvolla $E[r_t] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$ ja varianssilla $\text{Var}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$. Kun $t \rightarrow \infty$, prosessi lähestyy stationaarista normaalijakaumaa $\mathcal{N}(b, \sigma^2/(2a))$.

Normaalijakaumaoletus mahdollistaa joukkovelkakirjojen hintojen laskemisen suljetussa muodossa. Vasicekin mallissa ajanhetkellä T erääntyvän nollakuponkilainan hinta on affinia muotoa:

$$P(t, T) = \exp\{-A(t, T) - B(t, T)r_t\}, \quad (9)$$

missä $B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$ ja $A(t, T)$ on funktio parametreista a, b ja σ (ks. tarkemmin [2]). Vasicekin mallin matemaattinen haittapuoli on, että normaalijakauman vuoksi korot voivat saada myös negatiivisia arvoja. Tämän rajoitteen korjaamiseksi Cox, Ingersoll ja Ross [9] kehittivät mallin, jossa volatilitiiteetti skaalautuu koron neliöjuuren mukaisesti.

Määritelmä 6 (CIR-malli). Coxin, Ingersollin ja Rossin lyhytkorkomallissa (CIR-malli) koron r_t dynamiikka määritellään stokastisella differentiaaliyhtälöllä

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t, \quad (10)$$

missä parametrit $a, b, \sigma > 0$.

Volatiliteetin riippuvuus neliöjuuresta tarkoittaa, että koron lähestyessä nollaa myös satunnaisvaihtelu vaimenee, estäen koron painumisen negatiiviseksi. Lisäksi malli olettaa heteroskedastisuutta: korkojen volatiliteetti kasvaa korkotason kasvaessa.

Lause 7 (Fellerin ehto ja CIR-mallin jakauma [7, Luku 15.4.1]). *Jos CIR-mallin parametrit toteuttavat ns. Fellerin ehdon $2ab \geq \sigma^2$, niin prosessin arvo pysyy aidosti positiivisena, eli $r_t > 0$ melkein varmasti kaikilla $t \geq 0$. Prosessin r_t siirtymäjakauma on epäkeskinen χ^2 -jakauma.*

Kuten Vasicekin mallissa, myös CIR-mallissa joukkovelkakirjan hinta on affiinia muotoa $P(t, T) = \exp\{-A_{\text{CIR}}(t, T) - B_{\text{CIR}}(t, T)r_t\}$. Kertoimet A_{CIR} ja B_{CIR} on esitettävissä hyperbolisten funktioiden avulla neliöjuuririippuvuudesta johtuen (esim. [7]).

Vasicekin ja CIR-mallit jakavat useita ominaisuuksia: molemmat ovat yksiulotteisia diffuusiomalleja, niissä on ajautuminen kohti keskiarvoa ja ne kuuluvat affiinien korkomallien perheeseen. Matemaattisesti ja taloudellisesti niissä on kuitenkin kolme keskeistä eroa [7, Luku 15]:

- (1) Vasicekin mallissa volatiliteetti on vakio σ , kun taas CIR-mallissa se on tilariippuvainen $\sigma\sqrt{r_t}$.
- (2) Vasicekin mallin arvojoukko on koko reaaliakseli R , joten se sallii negatiiviset korot. CIR-mallin arvojoukko on $[0, \infty)$ tai Fellerin ehdolla $(0, \infty)$, mikä takaa ei-negatiivisuuden.
- (3) Vasicekin prosessi on lokaalisti ja globaalisti normaalijakautunut (symmetrinen). CIR-prosessi noudattaa epäkeskistä χ^2 -jakaumaa (oikealle vino), mikä usein vastaa paremmin historiallisia havaintoja.

4 Päätäntö

Tässä kandidaatintutkielmassa on käsitelty Wienerin prosessin ja stokastisten differentiaaliyhtälöiden (SDY) matemaattisia perusteita sekä näiden teorioiden soveltamista korkomarkkinoiden mallintamiseen. Työn alkuosassa määriteltiin formaalisti standardi Wienerin prosessi ja esitettiin sen keskeiset ominaisuudet: nollassa lähtevä, normaalijakautunut ja jatkuvapolkuinen prosessi, jolla on riippumattomat lisäykset. Itön lemma ja Itô-isometria osoittautuivat välttämättömiksi työkaluiksi, joiden avulla Wienerin prosessin kuvaamaan satunnaisvaihteluun voidaan yhdistää ajautumis- ja diffuusiokertoimia, jotka voivat yleisessä tapauksessa olla myös alkeistapauksesta riippuvia stokastisia prosesseja. Tällöin saadaan analysoitavaksi yleisempiä Itô-prosesseja.

Sovellusosassa teoria kytkettiin käytäntöön tarkastelemalla yksifaktorisia lyhytkorkomalleja. Stokastiset differentiaaliyhtälöt tarjoavat luonnollisen ja matemaattisesti eksaktin tavan mallintaa korkojen satunnaista vaihtelua ajassa. Riskineutraalin hinnoittelun kehikossa nollakuponkilainojen arvot voitiin esittää suoraan diskontatun korkoprosessin odotusarvona. Tutkielmassa analysoitiin tarkemmin kahta klassista affiinia mallia. Ensin tarkasteltiin Vasicekin mallia, joka perustuu lineaariseen Ornstein-Uhlenbeck-prosessiin. Malli on matemaattisesti yksinkertainen ja lokaalisti normaalijakautunut, mikä mahdollistaa suljetun muodon hintakaavat, mutta se sallii teoreettisesti myös negatiiviset korot. Toisena käsiteltiin CIR-mallia, joka hyödyntää neliöjuuridiffuusiota. Fellerin ehdon vallitessa malli takaa korkojen aidon positiivisuuden ja tekee prosessin varianssista tilariippuvaisen, tuottaen epäkeskisen χ^2 -siirtymäjakauman. Molemmat mallit tavoittavat onnistuneesti korkomarkkinoille tyypillisen keskiarvohakuisuuden (mean reversion) ominaisuuden. Ne osoittavat selkeästi, miten syvällinen matemaattinen teoria ja taloudellinen intuitio voidaan yhdistää hallittavaksi analyttiseksi kokonaisuudeksi.

Matemaattisen rahoituksen saralla riittää runsaasti jatkotutkimusaiheita, joihin tässä työssä esitelty teoria luo vahvan pohjan. Luonnollisia laajennuksia ovat *monifaktorimallit* (ks. esim. [7, Luku 22]), joissa korkorakenteen dynamiikkaa ohjaa useampi riippumaton Wienerin prosessi. Tämä mahdollistaa korkokäyrän monimuotoisempien liikkeiden mallintamisen, kuten esimerkiksi käyrän jyrkkenemisen tai kiertymisen. Toinen merkittävä suuntaus on *Heath-Jarrow-Morton (HJM) -kehikko* (ks. esim. [1, Luku 25.1]), jossa mallinnuksen kohteena on lyhytkoron sijaan koko termiinkororakenne. Vaikka HJM-mallit sovittavat nykyhetken korkokäyrän täydellisesti, ne ovat matemaattisesti huomattavasti raskaampia käsitellä. Lisäksi Wienerin prosessin jatkuvuusoletuksesta voidaan luopua siirtymällä *Lévy-prosesseihin* ja hypypymalleihin, jotka kykenevät mallintamaan markkinoiden äkillisiä epäjatkuvuuskoh-tia ja kriisejä. Myös stokastisen volatilitietin mallit ja LIBOR-markkinamallit ovat tuoneet uusia ulottuvuuksia moderniin koronlaskentaan.

Yhteenvetona voidaan todeta, että Wiener-prosessiin ja Itô-kalkyyliin pohjautuva stokastinen analyysi on korkomarkkinoiden matemaattisen mallinnuksen ehdoton kulmakivi. Vaikka rahoitusmarkkinoiden monimutkaistuminen vaatii jatkuvasti kehittyneempiä malleja, Vasicekin ja CIR-mallin kaltaiset affiinit perusmallit toimivat yhä vertaansa vailla olevana pedagogisena ja analyttisena lähtökohtana uusien menetelmien kehitykselle.

Viitteet

- [1] Tomas Björk. *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press, 2009.
- [2] John Hull et al. *Options, futures and other derivatives/John C. Hull*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall,, 2009.
- [3] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 1973.
- [4] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer, 2003.
- [5] Steven E Shreve et al. *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, volume 11. Springer, 2004.
- [6] Damir Filipovic. *Term-structure models: A graduate course*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [7] Pietro Veronesi. *Fixed income securities: Valuation, risk, and risk management*. John Wiley & Sons, 2010.
- [8] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2):177–188, 1977.
- [9] John C Cox, Jonathan E Ingersoll, Stephen A Ross, et al. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, 1985.
- [10] Alain-Sol Sznitman. *Brownian motion and stochastic calculus*. Luentomoniste, ETH Zürich, 2013.