GEOMETRIAN PERUSTEITA

Maria Lehtonen

Pro gradu -tutkielma
Joulukuu 2007

MATEMATIIKAN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Sisältö

1 Johdanto

Tämän opettajalinjan Pro Gradu -tutkielman tarkoituksena on luoda katsaus geometrian perusteisiin. Osa esille tulevista asioista kuuluu peruskoulun oppimäärään, osa tulee esille lukion pitkässä matematiikassa ja on joukossa myös muutama nämä kouluasteet ylittävä tieto.

Tutkielman päälähteinä on kaksi teosta: *Geometry - A High School Course*, jonka on kirjoittanut Lang S. ja Murrow G. (Springer-Verlag, New York, 1988), sekä K. Väisälän teos *Geometria* (WSOY, Porvoo, 1968). Tutkielman teksti on koottu edellä mainituista lähteistä käyttäen apuna myös muita lähdeluettelosta löytyviä teoksia. Kaikki kirjoitelmassa oleva teksti löytyykin siis lähdeluettelon teoksista ja tämä työ on kooste keräämistäni tiedoista. Tekstikappaleiden jälkeen tulevien harjoitustehtävien teossa on apuna käytetty soveltaen lukion pitkän matematiikan kirjoja *Laudatur 3 - Geometria*, Hautajärvi T., Ottelin J. ja Wallin-Jaakkola L. (Otava, Helsinki, 2005), *Lukion Calculus 2 - Geometria, Analyyttinen geometria*, Jäppinen P., Kupiainen A. ja Räsänen M. (Otava, Helsinki, 2005) ja *Matematiikan taito 3 - Geometria*, Silfverberg H., Viilo M-L. ja Pippola L. (WSOY, Porvoo, 1999).

Työssä esiintyvät kuvat on piirretty käyttäen MetaPost kuvanpiirto-ohjelmaa. Aluksi koin ohjelman käytön hankalaksi. Kuvien syöttäminen komentoina, näkemättä heti minkälainen valmiista kuvasta tulee, oli minulle uusi asia ja vaati pienen totuttelun. Työn edetessä kuitenkin huomasin ohjelman käytännöllisyyden ja hyödyt, huolimatta ohjelman pikku puutteista. Tulen varmasti myöhemmin opettajan työssä käyttämään ohjelmaa apuna piirtäessäni kuvia niin kokeisiin kuin tuntia varten.

Mielestäni kyseistä aineistoa voisi käyttää apuna geometrian opetuksessa sekä yläkoulussa, että lukiossa. Toisaalta materiaali on pyritty keräämään niin, että sen avulla olisi mahdollista omatoimisesti tutustua geometrian maailmaan. Työn tekeminen on avannut itselleni aivan uuden näkökulman geometriaan. Olen oppinnut jotain siitä, miten asiat kannattaa ilmaista jos niitä pitää opettaa ihmiselle, joka ei ole aiemmin asiaan tutustunut. Uskon geometrian kouluopetusta käsittelevästä gradusta olevan minulle hyötyä tulevaisuudessa opettaessani geometriaa niin yläkoulun kuin lukionkin puolella.

Geometrian juuret ovat pitkällä historiassa. Kautta aikojen geometriaa on käytetty apuna niin rakentamisessa kuin muussakin ympäristön hahmottamisessa. Geometriaa tulee käyttäneeksi arkipäivän elämässä huomaamattaan. Geometrisia muotoja on luonnossa paljon, saippuakuplien palloista suolakiteiden kuutioihin. Jo Egyptin pyramidien rakennuksessa on käytety apuna geometriaa. Geometriaa käytetään myös nykyään rakennuksia suunniteltaessa ja rakennettaessa, tähtitieteessä, mallien suunitellussa jne.

Geometria on saanut alkunsa arkipäivän elämään liittyvistä ongelmista. Sanana geometria on peräisin kreikkalaisilta. Sana *ge'* tarkoittaa maata ja *metrein* mittausta, geometriassa onkin aluksi ollut kyse maanmittauksesta. Geometrian juuret ovat Egyptissä, jossa sitä käytettiin ainoastaan käytännössä, mitään varsinaista oppirakennetta ei vielä muodostettu. Itsenäiseksi matematiikan osa-alueeksi geometria kehittyi antiikin Kreikassa. Tunnetuin kreikkalainen geometrikko oli Eukleides, joka keräsi sen aikaisen geometrisen ja muun matemaattisen tietämyksen kolmentoista kirjan kokoelmaksi, nimeltään *Alkeet* (n. 300 eKr.).

Eukleideen Alkeissa geometria esitettiin systemaattisena rakenteena, jossa geometrinen tieto rakennettiin pala palalta kokonaisuudeksi. Lähtökohtana ovat *peruskäsitteet*, kuten piste, suora ja taso. Näiden peruskäsitteiden välisiä itsestään selvinä pidettyjä yhteyksiä kutsuttiin *perusoletuksiksi* eli *aksioomiksi*. Eräs tällainen olettamus oli se, että kahden pisteen kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi suora. Nämä peruskäsitteet ja aksioomat muodostivat pohjan muulle geometrialle, joka rakennettiin määrittelemällä uusia käsitteitä peruskäsitteiden ja aiemmin määriteltyjen käsiteiden avulla, lisäksi todistettin *lauseita*, joilla osoitettiin uusia yhteyksiä käsitteiden välille. Nykyään euklidisen geometrian rinnalle on rakennettu muita ns. *epäeuklidisia geometrioita*, jotka ovat yhtä päteviä kuin euklidinen geometriakin. Geometrian aseman muuttuessa on uusien keinojen ja laskutapojen määrittäminen ollut pakollista.

2 Peruskäsitteitä

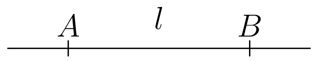
2.1 Piste, suora ja taso

Kolme seuraavaksi esiteltävää käsitettä ovat hyvin tärkeässä roolissa, kun määritellään muita geometrisia käsitteitä.

Piste on geometrinen suure, jolla on paikka, mutta ei ulottuvuutta. Pisteitä kuvataan tavallisesti pisteellä ($\cdot$), ristillä ($\times$) tai lyhyellä poikkiviivalla ($|$). Pisteet nimetään käyttämällä isoja kirjaimia $A, B, C, \ldots$

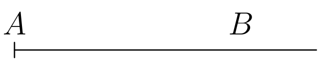
Äärettömän tiheästi peräkkäin olevat pisteet muodostavat *viivan*. Viiva voi olla suora, kaareva tai suoran ja kaarevan yhdistelmä. Suoraa viivaa joka jatkuu molempiin suuntiin rajattomasti kutsutaan *suoraksi*. Suoralla ei ole loppua, alkua eikä paksuutta. Suora nimetään minkätahansa kahden sillä olevan pisteen mukaan (esim. suora AB) tai pienellä kirjaimella $l, m, n, \ldots$

Lause 2.1. *Kahden eri pisteen A ja B kautta kulkee tarkalleen yksi suora l(A,B). Erityisesti kahdella eri suoralla on korkeintaan yksi leikkauspiste.*



Kuva 1: Suora

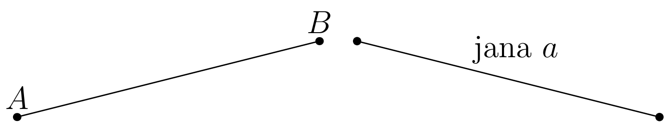
Puolisuora on suoran osa, jolla on alkupiste, mutta ei loppupistettä. Puolisuoraa merkitään alkupisteen ja puolisuoralle merkityn kirjaimen mukaan, esimerkiksi puolisuora AB.



Kuva 2: Puolisuora

Suoran osaa joka on kahden pisteen välillä, mukaanlukien kyseiset pisteet, kutsutaan *janaksi*. Jana nimetään päätepisteiden mukaan, jana AB, tai janalle merkityn pienen kirjaimen mukaan, jana a (kuva 3).

Janan pituutta merkitään $|AB|$. Kun janaa mitataan jollakin mitalla eli yksiköllä (esim. 1 cm, 1 mm jne.), niin lukua joka ilmoittaa montako ker-



Kuva 3: Janat

taa mitta sisältyy janaan, sanotaan mittaluvuksi. Jos esim. mitta on 1 cm ja mittaluku 5, niin janan pituus eli suuruus on 5 cm. Janan pituus on aina positiivinen. Jaettaessa jana kahteen yhtä suureen osaan, janan jakavaa pistettä kutsutaan *janan keskipisteeksi*.

Kaikkiin suuntiin rajoittamattomaksi ajateltua tasaista pintaa kutsutaan *tasoksi*.

Lause 2.2. *Kolmen pisteen kautta, jotka eivät ole samalla suoralla, voidaan asettaa vain yksi taso.*

Kolmen pisteen kautta, jotka ovat samalla suoralla, sitä vastoin voidaan asettaa äärettömän monta tasoa, ja ne sisältävät mainitun suoran kokonaan. Taso sisältää kokonaan jokaisen suoran, jonka kanssa sillä on kaksi yhteistä pistettä.

Geometria voidaan jakaa tasogeometriaan ja avaruusgeometriaan. Edellisessä tutkittavat kuviot ovat kokonaan samassa tasossa, jälkimmäisessä puolestaan kuvioilla ei ole tätä ominaisuutta. Jatkossa tekstissä kuvioiden ajatellaan olevan samassa tasossa ellei toisin mainita.

Tehtäviä:

2.1 Kun ajatellaan pistettä, suoraa ja tasoa, mitä niistä voidaan kuvailla

a) pöydän pinnalla,

b) piirtoheitin kalvolla,

c) viivottimen sivulla,

d) kireäksi venytetyllä kuminauhalla,

e) neulan kärjellä?

2.2 Piirrä suora l ja sille pisteet A, B, C ja D tässä järjestyksessä. Nimeä kaikki näiden pisteiden määräämät

a) janat, **b)** puolisuorat.

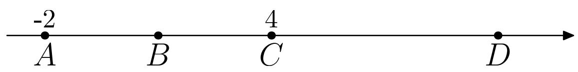
2.3 Lukusuoralle on merkitty pisteet A, B, C ja D, joista C on janan AD keskipiste ja B janan AC keskipiste.

a) Kuinka pitkä on jana CD?

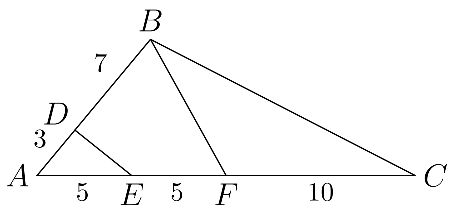
b) Mikä on pisteen D koordinaatti?

c) Kuinka pitkä on jana BC?

d) Mikä on pisteen B kordinaatti?



Kuva 4: Tehtävä 2.3



Kuva 5: Tehtävä 2.4

2.4 Määritä annettujen janojen pituudet ja keskipisteet kuvan 5 avulla.

a) Mitkä ovat janojen AB, AC ja AF pituudet?

b) Nimeä kuvasta kaksi keskipistettä.

2.2 Etäisyys

Etäisyys on yksi hyvin tärkeä käsite puhuttaessa tasosta. Kahden pisteen P ja Q etäisyys tasossa on pisteiden välisen janan pituus $|PQ|$. Kahden pisteen välinen jana on lyhyempi kuin kaikki muut pisteitä yhdistävät viivat. Seuraavat etäisyyttä koskevat asiat ovat selviä. Kahden pisteen etäisyys on joko suurempi kuin nolla tai nolla. Kyseinen etäisyys on suurempi kuin nolla vain jos pisteet ovat erilliset; nolla se on ainoastaan silloin, kun kaksi pistettä ovat samat eli eivät ole erilliset. Lisäksi etäisyys pisteestä P pisteeseen Q on sama kuin etäisyys pisteestä Q pisteeseen P.

Edellä esitetyt ominaisuudet voidaan kirjoittaa myös käyttämällä symboleita, näin on tehty seuraavassa lauseessa.

Lause 2.3. *Kaikille tason pisteille P ja Q on voimassa:*

$$\begin{aligned} &(1)\quad |PQ| \geq 0, \\ &(2)\quad |PQ| = 0 \Leftrightarrow P = Q, \\ &(3)\quad |PQ| = |QP|. \end{aligned}$$

Kohdassa (2) käytetty kaksisuuntainen nuoli $\Leftrightarrow$ tarkoittaa ekvivalenssia, eli kuten edellä jo mainittiin, kahden pisteen välinen etäisyys on nolla vain kun pisteet ovat samat. Toisaalta sama pätee toisinkin päin, jos pisteet ovat samat, niiden välinen etäisyys on nolla.

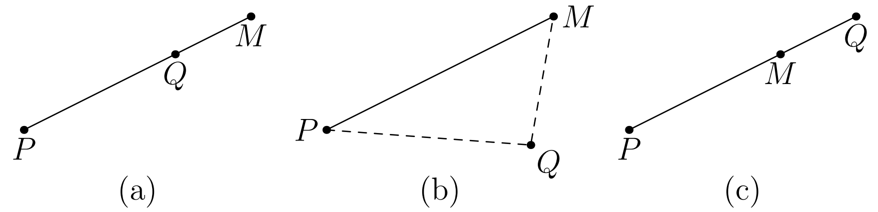
Koko janan pituus on sen osien summa. Mikään janan osista ei myöskään voi olla pidempi kuin koko jana.

Lause 2.4. *Kaikille tason pisteille P, Q, M on voimassa:*

$$|PQ| + |QM| = |PM|$$

jos ja vain jos Q on pisteiden P ja M välisellä janalla.

Edellisen lauseen väittämä on helposti havaittavissa, kun tarkastellaan seuraavaa kuvaa (kuva 6). (a) kohdassa piste Q on pisteiden P ja M välisellä janalla, kohdissa (b) ja (c) piste Q ei sijaitse kyseisellä janalla.



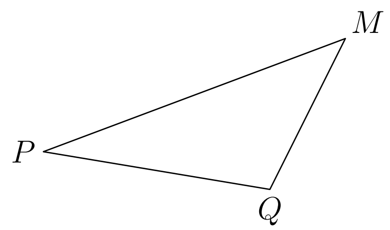
Kuva 6:

Etäisyyksille on voimassa myös niin kutsuttu *kolmioepäyhtälö*.

Lause 2.5. (**Kolmioepäyhtälö**) *Olkoon P, Q, M pisteitä. Silloin*

$$|PM| \leq |PQ| + |QM|.$$

Kun $|PM| < |PQ| + |QM|$, pisteeet P, Q, M muodostavat kolmion, joka esitetään kuvassa 7 tai kuvan 6 (c)-kohdan kaltaisen suoran.



Kuva 7:

Eli kolmiossa minkätahansa kahden sivun pituuksien summa on suurempi kuin kolmannen sivun pituus.

Lopuksi muistutettakoon vielä, että janan päätepisteen Q sijaitessa janalla PM, $Q \in PM$, saavat janan PQ pituudet arvoja nollan ja $|PM|$ väliltä. Jokaisella pisteellä on oma arvonsa, joka esiintyy vain kerran. Lisäksi toisen päätepisteen Q ollessa janalla PM janojen PQ pituudet saavat arvoja $|PQ| < |PM|$.

Tehtäviä:

2.5 Jos janan AB pituus $|AB| = 7$ ja janan AC pituus $|AC| = 4\frac{1}{2}$ ja piste C on janalla AB, niin kuinka pitkä on jana CB?

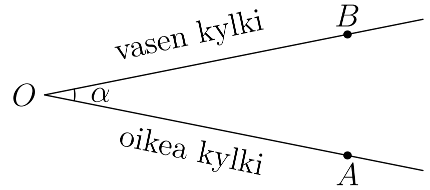
2.6 Mitkä seuraavista kolmen pituuden ryhmistä voivat olla kolmion sivujen pituuksia?
a) 4 cm, 4 cm, 4 cm **b)** 3 m, 4 m, 5 m **c)** 5 cm, 8 cm, 2 cm
d) 4 km, 4 km, 3 km **e)** 1 m, 5 m, 3 m **f)** 1,5 cm, 3,5 cm, 5,5 cm

2.7 Jos kolmion kaksi sivua ovat 15 cm ja 24 cm pitkät, niin kolmannen sivun pitää olla suurempi kuin ______ cm ja pienempi kuin ______ cm.

2.3 Kulma

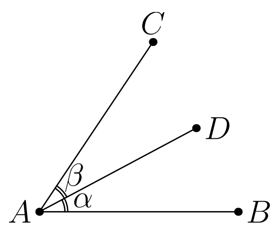
2.3.1 Kulman nimeäminen

Kulman aukeama eli *kulma* on kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajaama tason osa. Kulman kärjestä katsottuna oikean puoleinen puolisuora on *oikea kylki* ja vasemman puoleinen puolisuora on *vasen kylki*. Kulman kärkeen piirretään pieni kaari kulman merkiksi. Kulmaa merkitään joko kreikkalaisella aakkosella $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots)$, kreikkalaisen aakkosen ja kulmamerkin yhdistelmällä $(\sphericalangle\alpha)$, kärjen kirjaimella $(A, B, C \ldots)$ tai kolmikirjaimisella merkkijonolla $(\sphericalangle AOB)$. Kun kulma nimetään käyttämällä kolmen kirjaimen yhdistelmää, ensimmäiseksi kirjoitetaan oikealta kyljeltä valittu piste sitten kärki ja viimeisenä vasemmalta kyljeltä valittu piste. Edellä esitettyjä asioita on havainnollistettu kuvassa 8.



Kuva 8: $\sphericalangle AOB$, α, $\sphericalangle\alpha$ tai $\sphericalangle O$

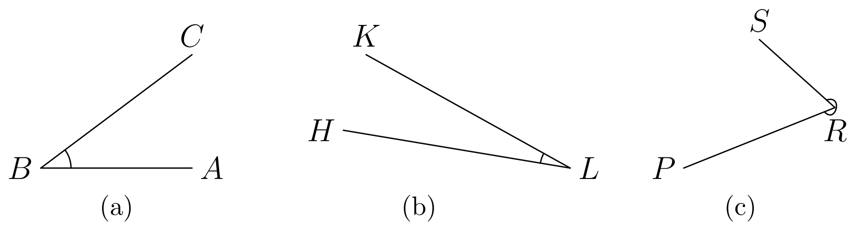
Kulman puolittaja on puolisuora, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan. Kuvassa 9 jana AD puolittaa kulman $\sphericalangle BAC$, jolloin $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta$. Yhtä suuret kulmat merkitään kuvaan piirtämällä yhtä monta kaarta kulmiin.



Kuva 9: Kulmanpuolittaja AD

Tehtäviä:

2.8 Nimeä annetut kulmat käyttäen kolmikirjaimista yhdistelmää.



Kuva 10: Tehtävä 2.8

2.3.2 Kulman mittaaminen

Kulman suuruus ilmoitetaan yleensä käyttämällä yksikköä *aste* (1°). Aste jakautuu *kulmaminuutteihin* (’) ja *kulmasekunteihin* (”).

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

Esimerkki 2.1. $67,30° = 67° + 0,30 \cdot 60' = 67°18'$

Toisinaan kulmamittana käytetään myös *radiaaneja*. Tällöin $90° = \frac{\pi}{2}$ radiaania, eli 1 radiaani $= 57,295\ldots$ astetta.

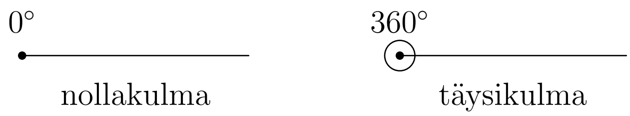
Tehtäviä:

2.9 Muunna asteiksi.
a) $12°30'$ **b)** $62°15'30''$ **c)** $123°12'45''$

2.10 Muunna asteiksi, minuuteiksi ja sekunneiksi.
a) $12,3°$ **b)** $54,42°$ **c)** $1,245°$

2.3.3 Kulmien luokittelu

Kulmaa jonka suuruus on 0° kutsutaan *nollakulmaksi*. Kun kulman suuruus on 360°, niin kulmaa sanotaan *täydeksi kulmaksi* ks. kuva 11.

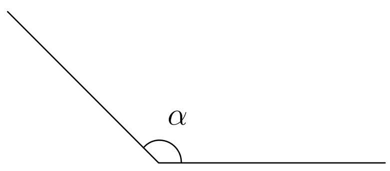


Kuva 11:

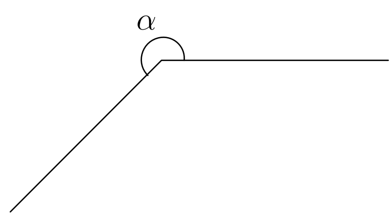
Oikokulma jakaa täyden kulman kahteen yhtäsuureen osaan, joten oikokulman suuruus on 180°. *Suorakulma* puolestaan on puolet oikokulmasta eli suoran kulman suuruus on 90°. Suoran kulman merkkinä kuvassa käytetään pientä väkästä ⌝.

Kuva 12:

Kulmat jaetaan suuruuden puolesta kahteen luokkaan, oikokulma rajana:
1) *koverat kulmat*, jotka ovat pienempiä kuin 180°,
2) *kuperat kulmat*, jotka ovat suurempia kuin 180°.



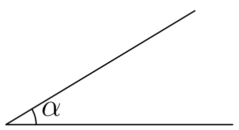
(a) kovera kulma $0° < \alpha < 180°$



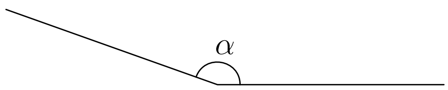
(b) kupera kulma $180° < \alpha < 360°$

Kuva 13:

Koverat kulmat jaetaan edelleen kahteen luokkaan, suora kulma rajana:
1) *terävät kulmat*, jotka ovat pienempiä kuin 90°,
2) *tylpät kulmat*, jotka ovat suurempia kuin 90°.



(a) terävä kulma $0° < \alpha < 90°$



(b) tylppä kulma $90° < \alpha < 180°$

Kuva 14:

Kulmille voidaan muodostaa summia ja erotuksia:

– kahden kulman summa muodostetaan siirtämällä kulmat vierekkäin siten, että kärkipisteet ja toiset erinimiset kyljet yhtyvät.

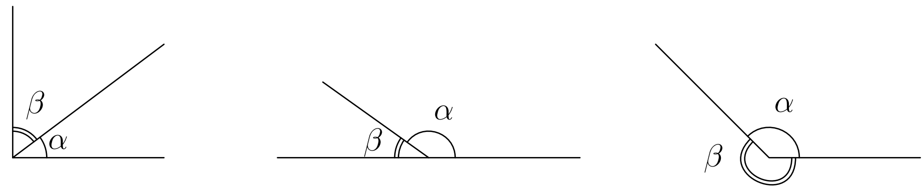
– kahden kulman erotus muodostetaan siirtämällä kulmat sisäkkäin siten, että kärjet ja toiset samannimiset kyljet yhtyvät.

Kahden kulman α ja β summaan liittyy seuraavia nimityksiä. Sanotaan, että kulmat α ja β ovat toistensa

komplementtikulmia, jos $\alpha + \beta = 90°$,

suplementtikulmia, jos $\alpha + \beta = 180°$,

eksplementtikulmia, jos $\alpha + \beta = 360°$.



(a) komplementtikulmat $\alpha + \beta = 90°$ (b) suplementtikulmat $\alpha + \beta = 180°$ (c) eksplementtikulmat $\alpha + \beta = 360°$

Kuva 15:

Tehtäviä:

2.11 Nimeä kulma suuruuden perusteella, kun asteluku on
a) 52° **b)** 185° **c)** 168° **d)** 354°

2.12 Kuinka suuren kulman viisarit muodostavat, kun kello on
a) 17.00 **b)** 9.30 **c)** 19.15

2.13 Kulmien α ja β suuruuksien suhde on $4 : 5$. Laske kulmien suuruudet, kun kulmat ovat toistensa
a) komplementtikulmia, **b)** suplementtikulmia,
c) eksplementtikulmia.

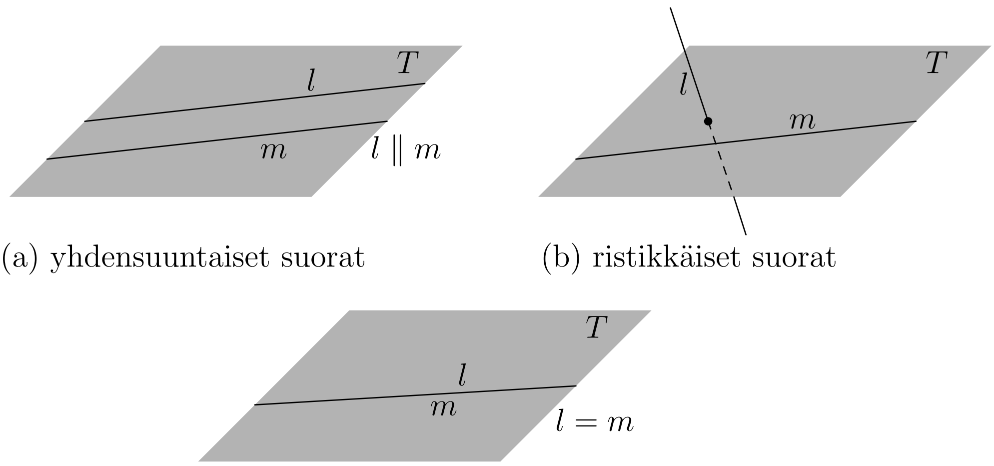
2.14 Kulman suplementtikulma on 40% suurempi kuin kulma itse. Määritä suplementtikulman suuruus.

2.15 Kalastusalus Roopen kurssi oli kaakkoon ja rahtilaiva Pontuksen kurssi oli pohjoisesta 21° itään. Rahtilaiva Pontus oli kalastusalus Roopesta katsottuna suoraan pohjoisessa. Missä kulmassa laivojen kurssit leikkasivat toisensa?

2.4 Suorien ja tasojen asema toisiinsa nähden

2.4.1 Suorat ja tasot

Kaksi samassa tasossa olevaa suoraa ovat *yhdensuuntaiset*, jos suorilla ei ole yhtään yhteistä pistettä. Yhdensuuntaisia suoria l ja m merkitään lyhyesti $l \parallel m$. Myöskään *ristikkäisillä* suorilla ei ole yhteisiä pisteitä, mutta tällaiset suorat kuuluvat aina eri tasoihin. Jos puolestaan kahdella suoralla on kaksi yhteistä pistettä, niin niillä on äärettömän monta yhteistä pistettä. Tällöin suorat *yhtyvät* eli ovat samat.



(a) yhdensuuntaiset suorat

(b) ristikkäiset suorat

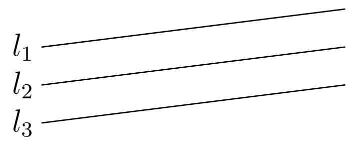
(c) yhtyvät suorat

Kuva 16:

Lause 2.6. (**Yhdensuuntaisuus- eli paralleeliaksiooma**)*Suoran l ulkopuolella olevan pisteen P kautta voidaan piirtää yksi ja vain yksi suoran l kanssa yhdensuuntainen samassa tasossa oleva suora.*

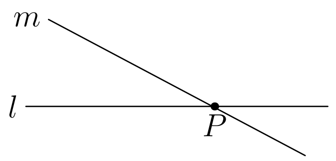
Lause 2.7. *Olkoon l_1, l_2 ja l_3 kolme suoraa. Jos suora l_1 on yhdensuuntainen suoran l_2 kanssa ja suora l_2 on yhdensuuntainen suoran l_3 kanssa, niin myös suorat l_1 ja l_3 ovat yhdensuuntaiset.*

Edellisen lauseen sisältöä on havainnolistettu kuvassa 17.



Kuva 17:

Jos puolestaan kahdella suoralla on yksi yhteinen piste, niin suorat *leikkaavat* toisensa ko. pisteessä. Koska toisensa leikkaavat suorat eivät ole yhdensuuntaisia, niille käytetään symbolia $\nparallel$.



Kuva 18:

Lause 2.8. *Kaksi samassa tasossa olevaa eri suoraa, jotka eivät ole yhdensuuntaiset kohtaavat toisensa täsmälleen yhdessä pisteessä.*

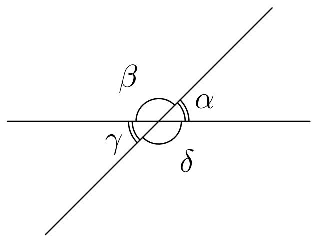
Suora leikkaa tason, jos suoralla ja tasolla on vain yksi yhteinen piste. Jos suoralla ja tasolla ei ole yhtään yhteistä pistettä, niin suora ja taso ovat *yhdensuuntaiset*. Jos taasen suora l on tason T suuntainen, niin tasossa T on äärettömän monta suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa. *Suora on tasossa*, jos suoralla ja tasolla on kaksi yhteistä pistettä, jolloin niillä on äärettömän monta yhteistä pistettä.

Kahden tason tapauksessa tasot *leikkaavat* toisensa, jos niiden yhteiset pisteet muodostavat suoran. Suoraa jota pitkin tasot leikkaavat kutsutaan *leikkaussuoraksi*. Kuten suorienkin tapauksessa myös kahden tason tapauksessa tasot ovat *yhdensuuntaiset*, jos niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä.

Samoin jos tason kaikki pisteet ovat samoja toisen tason pisteiden kanssa, tasot *yhtyvät*. Kahdella tasolla ei koskaan voi olla vain yhtä yhteistä pistettä.

2.4.2 Vieruskulmat, ristikulmat ja samankohtaiset kulmat

Kahden suoran leikkauspisteeseen muodostuu neljä koveraa kulmaa. Vierekkäin olevat kulmat (kuvassa 19 esimerkiksi kulmat α ja β) ovat *vieruskulmia* ja kahden suoran leikkauspisteen vastakkaisilla puolilla olevat kulmat (kuvassa 19 esimerkiksi kulmat α ja γ) ovat *ristikulmia*.



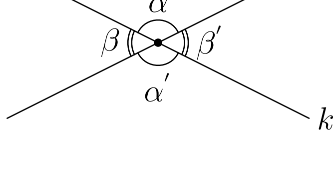
Kuva 19:

Vieruskulmien summa on 180°, joten ne ovat myös toistensa suplementtikulmia. Ristikulmat puolestaan ovat yhtä suuret.

Seuraavaksi käydään esimerkkinä läpi ristikulmien yhtäsuuruuden todistus, jotta todistusten rakenne selventyisi.

Esimerkki 2.2. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

Todistus. Todistuksen avuksi kannattaa piirtää kuva. Nyt kuva näyttää seuraavalta:



Kuva 20:

Suorat k ja l leikkaavat pisteessä P ja muodostavat kulmat α, α', β ja β'.

Koska kulmat α ja β yhdessä moudostavat oikokulman, saadaan

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Koska myös kulmat β ja α' muodostavat oikokulman, saadaan

$$\beta + \alpha' = 180°.$$

Kun yhdistetään edelliset laskutoimitukset nähdään, että

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha'.$$

Vähentämällä kulma β molemmilta puolilta, saadaan

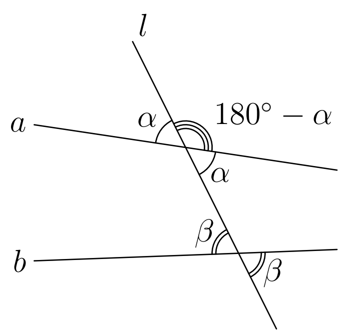
$$\alpha = \alpha'.$$

Näin väittämä on todistettu.

Kun suora l leikkaa kahta muuta suoraa a ja b, muodostuu kaksi ryhmää koveria kulmia. Kahta eri ryhmään kuuluvaa kulmaa sanotaan

samankohtaisiksi, jos leikkaava suora l on niillä samannimisenä kylkenä

erikohtaisiksi, jos leikkaava suora l on niillä erinimisenä kylkenä.



Kuva 21:

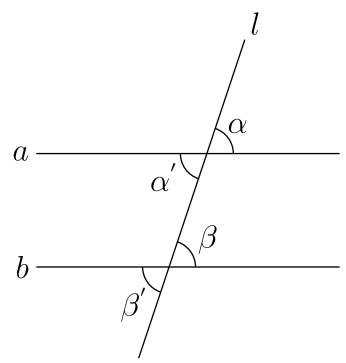
Kuvassa 21 suora l on oikeana kylkenä kaikilla kulmilla α ja β ja muilla kulmilla vasempana kylkenä. Näin ollen ovat kaikki kulmat α ja β samankohtaisia keskenään ja erikohtaisia kulman $180° - \alpha$ kanssa.

Lause 2.9. *Suoran leikatessa kahta muuta suoraa ovat samankohtaiset kulmat yhtä suuria täsmälleen silloin, kun leikatut suorat ovat yhdensuuntaisia.*

Edellinen lause sisältää kaksi tietoa:

– Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

– Jos suora leikkaa kahta muuta suoraa niin, että kaksi samankohtaista kulmaa ovat yhtä suuret, kyseiset suorat ovat yhdensuuntaiset.

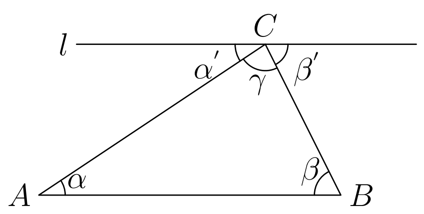


$\alpha = \alpha' = \beta = \beta'$, jos ja vain jos $a \parallel b$.

Kuva 22:

Lause 2.10. *Kolmion kulmien summa on* $180°$ *.*

Todistus. Piirretään kolmio ABC.

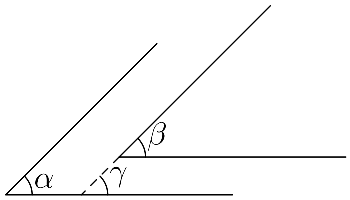


Kuva 23:

Olkoon kolmion ABC kulmat α, β ja γ. On siis osoitettava, että $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.
Paralleeliaksiooman mukaan kolmion kärkipisteen C kautta voidaan piirtää vain yksi kantasivun AB suuntainen suora l. Tällöin muodostuu kaksi paria samankohtaisia kulmia. Kulmat α ja α' ovat samankohtaiset ja yhtäsuuret ($l \parallel AB$), samoin kulmat β ja β'. Suoran l alapuolella oleva kulma on oikokulma, joten $\alpha'+\beta'+\gamma = 180°$ ja koska $\alpha = \alpha'$ ja $\beta = \beta'$, niin $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Näin ollen väite on todistettu.

Lause 2.11. *Kaksi koveraa kulmaa ovat yhtä suuria, jos niiden samannimiset kyljet ovat joko yhdensuuntaiset tai kohtisuorassa toisiaan vastaan.*

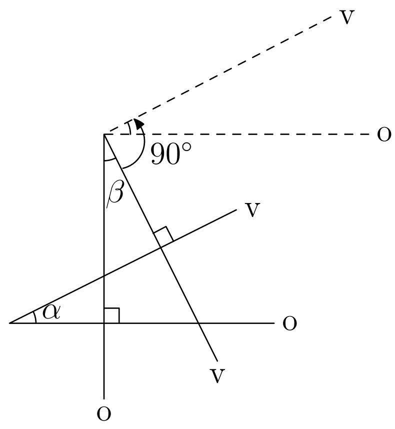
Todistus. Kun samannimiset kyljet ovat yhdensuuntaiset, voidaan piirtää kuvan 24 mukainen apukuva.



Kuva 24:

Jatkamalla kulman β kylkeä saadaan kolmas kulma γ. Kulmat α ja γ ovat yhtä suuret, koska suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa. Samoin ovat kulmat β ja γ yhtä suuret. Näin ollen ovat myös kulmat α ja β keskenään yhtä suuret. Nyt on siis todistettu lauseen ensimmäinen väittämä.

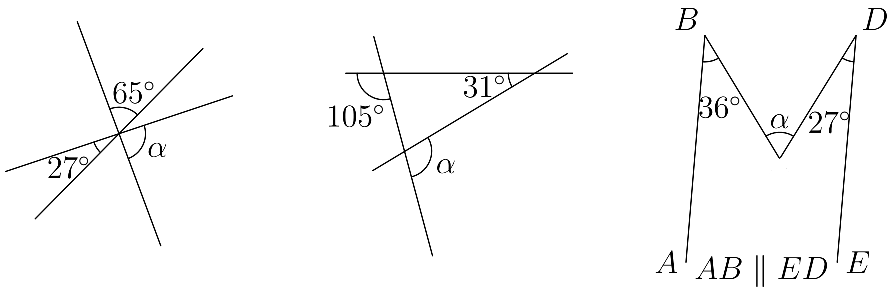
Kun samannimiset kyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, voidaan piirtää kuvan 25 sivu 19 mukainen apukuva. Nyt riittää kiertää kulmaa β kärkensä ympäri 90°, tällöin sen kyljet tulevat yhdensuuntaisiksi kulman α samannimisten kylkien kanssa. Kulmien yhtäsuuruus seuraakin nyt ensimmäisen kohdan todistuksesta.



Kuva 25:

Tehtäviä:

2.16 Määritä kulman α suuruus.

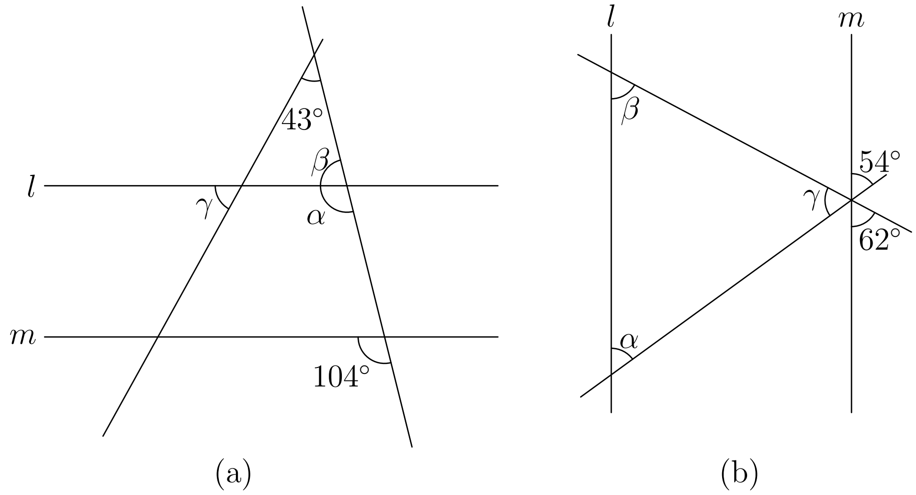


(a) (b) (c)

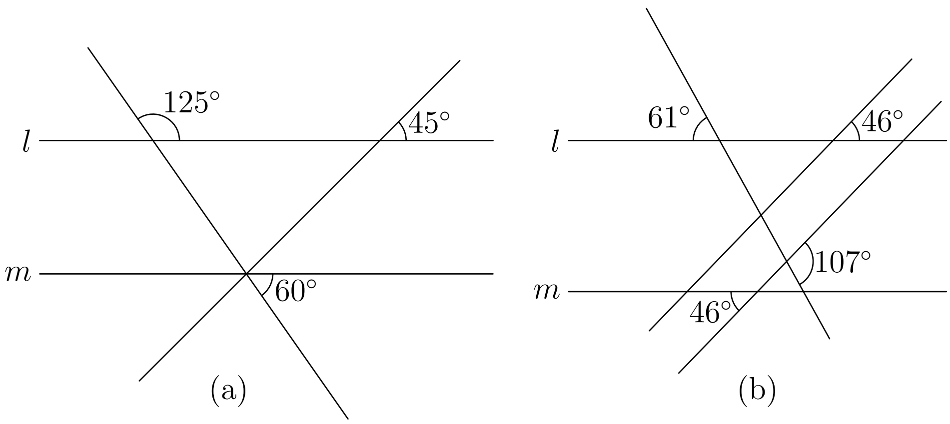
Kuva 26: Tehtävä 2.16

2.17 Määritä kuvasta 27 kulmien α, β ja γ suuruudet, kun suorat l ja m ovat yhdensuuntaisia.

2.18 Selvitä laskemalla, ovatko suorat l ja m yhdensuuntaisia (kuva 28).

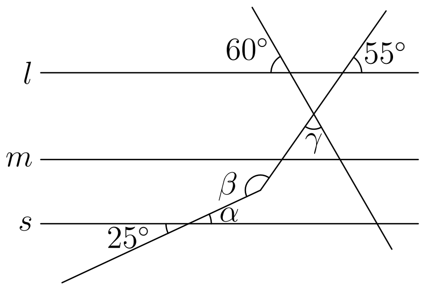


Kuva 27: Tehtävä 2.17



Kuva 28: Tehtävä 2.18

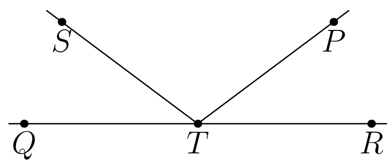
2.19 Määritä kulmien α, β ja γ suuruudet, kun tiedetään, että suorat l, m ja s ovat yhdensuuntaisia.



Kuva 29: Tehtävä 2.19

2.20 Osoita, että vieruskulmien puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

2.21 Kuvassa 30 kulmat $\sphericalangle STQ$ ja $\sphericalangle RTP$ ovat yhtä suuret eli $\sphericalangle STQ = \sphericalangle RTP$. Osoita, että kulmat $\sphericalangle PTQ$ ja $\sphericalangle RTS$ ovat yhtä suuret eli $\sphericalangle PTQ = \sphericalangle RTS$.

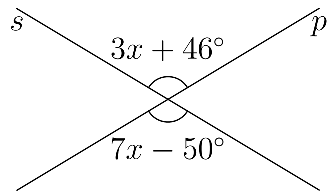


Kuva 30: Tehtävä 2.21

2.4.3 Suorien välinen kulma, suoran ja tason välinen kulma sekä tasojen välinen kulma

Kahden samassa tasossa olevan suoran leikatessa toisiaan, leikkauspisteeseen muodostuvista neljästä kulmasta *suorien väliseksi kulmaksi* valitaan kooltaan pienin kulma. Yhdensuuntaisten ja yhtyvien suorien välinen kulma on 0°.

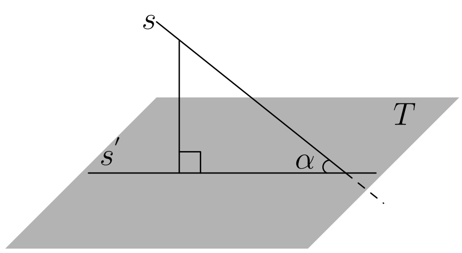
Esimerkki 2.3. Laske suorien s ja p välisen kulman suuruus.



Kuva 31:

Ratkaisu: Ristikulmina kyseiset kulmat ovat yhtä suuret, joten $3x + 46° = 7x - 50°$, josta ratkaisemalla saadaan $x = 24°$.
Tällöin kuviossa olevien ristikulmien suuruus on $3 \cdot 24° + 46° = 118°$.
Koska suorien välinen kulma on pienin leikkauspisteeseen muodostuvista kulmista, niin suorien s ja p välisen kulman suuruus on $180° - 118° = 62°$.

Kun suora leikkaa tasoa, *suoran ja tason välinen kulma* on suoran ja sen tasolla olevan projektiosuoran välinen kulma. Piste projisoidaan tasoon piirtämällä pisteestä tasolle normaali (ks. normaalin määrittely s.23 ja s.25). Pisteen projektio tasossa on normaalin ja tason leikkauspiste. Kuvion projektio saadaan projisoimalla kuvion jokainen piste tasoon. Määritettäessä suoran s ja tason T välistä kulmaa piirretään ensin suoran s projektiosuora s' tasoon T. Kyseinen kulma on suorien s ja s' välinen kulma.

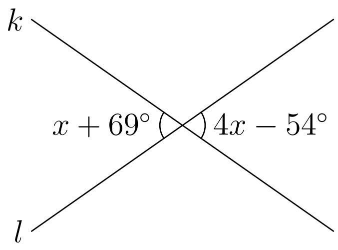


Kuva 32:

Kahden tason välinen kulma on tasojen leikkaussuoralle kumpaankin tasoon piirrettyjen normaalien välinen kulma. Yhdensuuntaisten tasojen välinen kulma on 0°.

Tehtäviä:

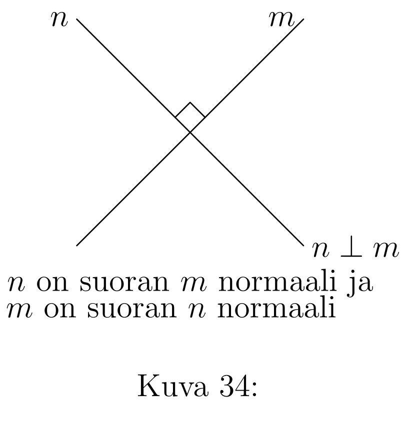
2.22 Laske suorien k ja l välisen kulman suuruus.



Kuva 33: Tehtävä 2.22

2.4.4 Suoran normaali, tason normaali ja normaalitaso

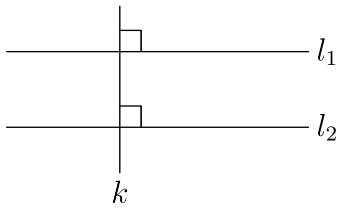
Jos kahden toisiaan leikkaavan suoran välinen kulma on suora, niin kaikki neljä suorien leikkauspisteeseen muodostuvaa kulmaa ovat suoria.Tällöin suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli ovat toistensa *normaaleja*. Kohtisuoria suoria merkitään $l \perp m$.



Kuva 34:

Lause 2.12. *Kun on annettu suora l ja piste P, on olemassa vain yksi suora joka kulkee pisteen P kautta ja on kohtisuorassa suoraa l vastaan.*

Lause 2.13. *Olkoot l_1 ja l_2 yhdensuuntaisia suoria. Jos suora k on kohtisuorassa suoraa l_1 vastaan, niin se on kohtisuorassa myös suoraa l_2 vastaan* (kuva 35).

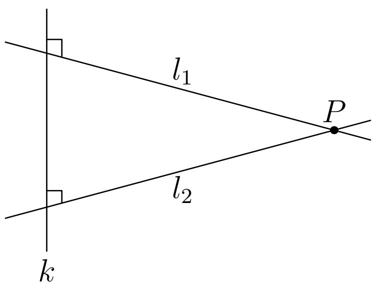


Kuva 35:

Edellä esitettyjen lauseiden 2.12 ja 2.13 avulla voidaan todistaa lause, joka yhdistää yhdensuuntaiset ja kohtisuorat suorat.

Lause 2.14. *Jos suora l_1 on kohtisuorassa suoraa k vastaan ja myös suora l_2 on kohtisuorassa suoraa k vastaan, niin suorat l_1 ja l_2 ovat yhdensuuntaiset* (kuva 35).

Todistus. On vain kaksi mahdollisuutta, joko suorat l_1 ja l_2 ovat yhdensuuntaiset tai sitten eivät ole. Oletetaan nyt että suorat eivät ole yhdensuuntaiset. Koska suorat eivät ole yhdensuuntaiset, lauseen 2.8 sivu 14 mukaan ne leikkaavat toisensa jossain pisteessä P. Tilanteesta voidaan piirtää seuraava kuva:



Kuva 36:

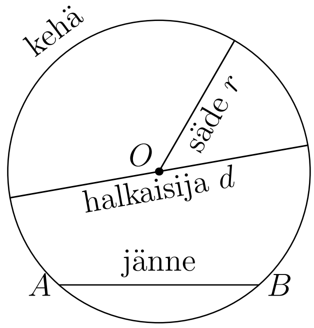
Huomataan, että nyt on kaksi suoraa, jotka leikkaavat toisensa ja ovat molemmat kohtisuorassa suoraa k vastaan (kohtisuoruus annettu lauseessa). Tilanne aiheuttaa ristiriidan lauseen 2.12 kanssa. Näin ollen suorien l_1 ja l_2 on oltava yhdensuuntaiset.

Tasoa leikkaava suora on *tason normaali*, jos se on kohtisuorassa jokaista leikkauspisteen kautta piirrettyä tason suoraa vastaan. Riittää osoittaa, että suora on kohtisuorassa kahta tason suoraa vastaan.

Tasot ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli ovat toistensa *normaalitasoja*, jos tasojen välinen kulma on suora.

2.5 Ympyrä

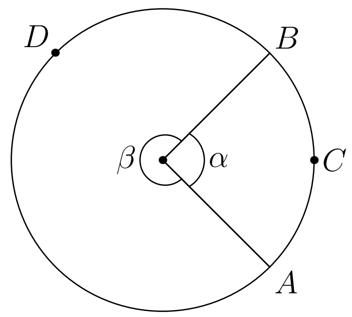
Ympyrä on niiden tason pisteiden muodostama joukko, jotka ovat samalla etäisyydellä tietystä kiinteästä pisteestä. Tämä tietty piste on ympyrän *keskipiste* ja vakio etäisyys on ympyrän *säde*. Ympyrä tarkoittaa siis ympyräviivaa, joka rajaa tasosta ympyräpinnan. Kyseistä pintaa kutsutaan myös yleisesti ympyräksi ja sen rajaavaa ympyräviivaa ympyrän *kehäksi*. *Jänne* on jana, joka yhdistää kaksi ympyrän kehän pistettä. *Halkaisija* on jänne, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta. Ympyrän halkaisija $d = 2\times$säde$= 2 \times r$.



Kuva 37:

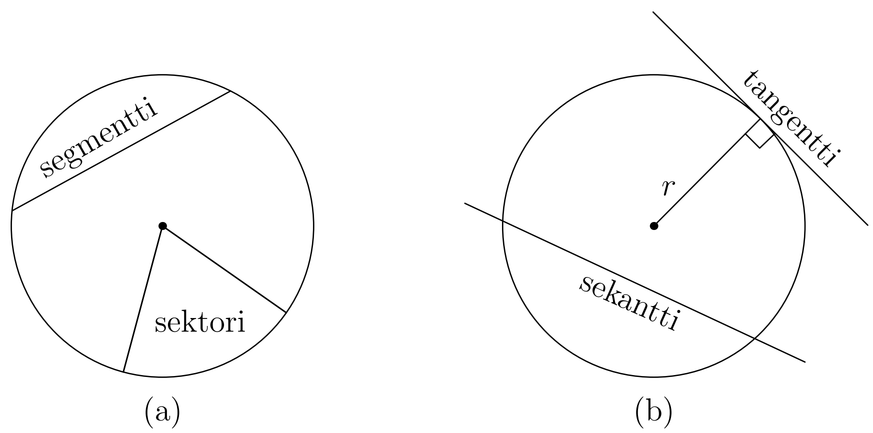
Ympyrän keskipistettä merkitään isolla kirjaimella, kuten kuvassa 37. Ympyrä nimetään keskipisteensä mukaan. Esimerkiksi ympyrä O tarkoittaa ympyrää, jonka keskipiste on piste O. Ympyrän sädettä merkitään yleisesti pienellä r kirjaimella ja halkaisijaa pienellä d kirjaimella. Jänne nimetään päätepisteidensä mukaan janana, kuvassa 37 jänne AB.

Kahden pisteen rajaamaa ympyrän kehän osaa kutsutaan ympyrän *kaareksi*. Usein kaari nimetään kolmen pisteen avulla, jotta tiedetään kumpaa päätepisteiden määräämistä kaarista tarkoitetaan. Kaaren merkkinä käytetään $\frown$ kirjainyhdistelmän yläpuolella. Kuvassa 38 on esitetty kaaret ACB ja ADB. Jos sekaannuksen vaaraa ei ole voidaan kaari nimetä pelkkien päätepisteidensä avulla, esim. kaari AB.



Kuva 38:

Kulmaa, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä, kutsutaan *keskuskulmaksi* (kuvassa 38 edellä kulmat α ja β). *Kaarta ACB vastaava keskuskulma α* saadaan yhdistämällä kaaren päätepisteet säteillä ympyrän keskipisteeseen. Vastaavasti voidaan puhua myös keskuskulmaa vastaavasta kaaresta.



Kuva 39:

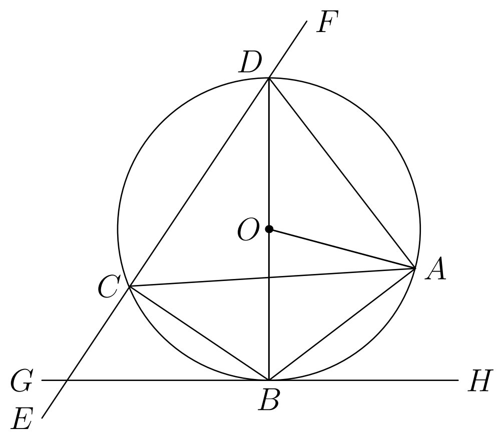
Ympyrän kaari ja kaksi sädettä rajaavat alueen, jota kutsutaan *sektoriksi*.

Jänne ja sen päätepisteitä yhdistävä kaari puolestaan rajaavat alueen, jota kutsutaan *segmentiksi.* (kuva 39 (a))

Suora, jolla on yksi yhteinen piste ympyrän kanssa, on ympyrän *tangentti* eli *sivuaja.* Sivuamispisteeseen piirretty ympyrän säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan. Suora, joka leikkaa ympyrän kehää kahdessa pisteessä, on *sekantti* eli *leikkaaja.* (kuva 39 (b))

Tehtäviä:

2.23 Yhdistä vasemmassa sarakkeessa olevat kuviosta 40 merkityt osat niitä vastaaviin oikeassa sarakkeessa oleviin nimityksiin.



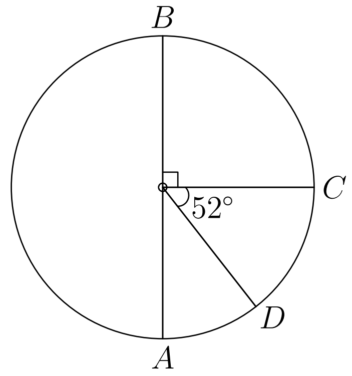
Kuva 40: Tehtävä 2.23

a) OA	**1.** tangentti
b) ABC	**2.** puoliympyrän kaari
c) AD	**3.** kaari
d) EF	**4.** säde
e) BD	**5.** sekantti
f) GH	**6.** halkaisija
g) BAD	**7.** jänne

2.24 Kaksi erisuuntaista suoraa l ja m kulkevat ympyrän keskipisteen kautta. Kuinka monta **a)** ympyrän jännettä, **b)** sektoria, **c)** segmenttiä kuvioon syntyy?

2.25 Voiko sektori olla joskus segmentti?

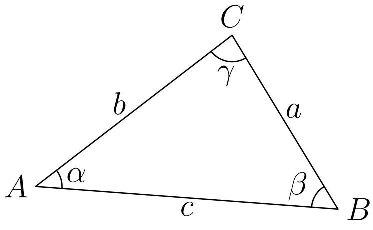
2.26 Määritä kaaria AB, ADC, AD ja BAD vastaavat keskuskulmat (AB on halkaisija). (kuva 41)



Kuva 41: Tehtävä 2.26

3 Kolmio

Kolmion kärjet merkitään vastapäivään aakkosjärjestykseen isoilla kirjaimilla A, B, C, ... Kolmio nimetään käyttäen näitä kärjissä olevia kirjaimia, esim. $\triangle ABC$. Kärjissä olevat kulmat merkitään kreikkalaisilla aakkosilla $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Kulman vastaisen sivun pituutta merkitään pienellä kirjaimella $a, b, c, \ldots$ Sivua merkitään yleensä samalla kirjaimella kuin vastakkaista kärkeä. (Kuva 42)



Kuva 42:

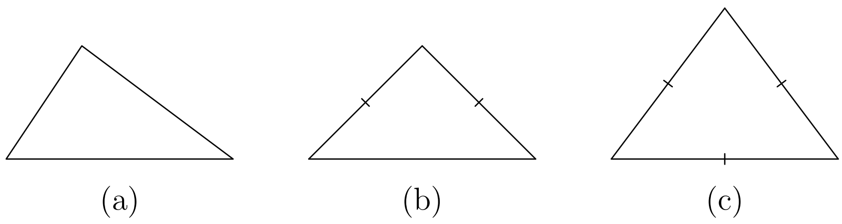
Kolmion piiri saadaan laskemalla yhteen kolmion sivujen pituudet,

$$p = a + b + c.$$

3.1 Kolmioiden luokittelu, erityiset suorat sekä sivujen ja kulmien suuruusjärjestys

Kolmiot voidaan luokitella joko yhtä pitkien sivujen lukumäärän tai suurimman kulman laadun perusteella.

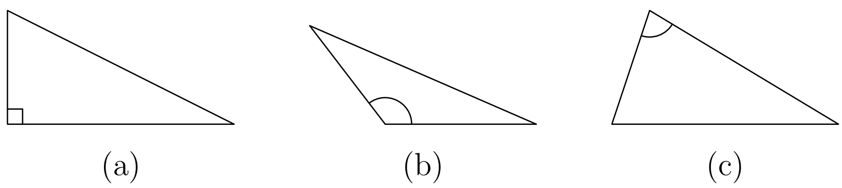
Yhtä pitkien sivujen lukumäärään perustuva luokitus:
1. Kolmiot joiden kaikki sivut ovat eripituiset (kuva 43 (a)).
2. *Tasakylkiset kolmiot*, joilla vähintään kaksi yhtä pitkää sivua (kuva 43 (b)). Tasakylkisen kolmion yhtä suuria sivuja kutsutaan *kyljiksi* ja kolmatta sivua *kannaksi*. Kannan ja kyljen välistä kulmaa sanotaan *kantakulmaksi* ja kylkien välistä kulmaa *huippukulmaksi*.
3. *Tasasivuiset kolmiot*, joilla kaikki sivut ovat yhtä pitkät (kuva 43 (c)).



Kuva 43:

Kuviossa on tapana merkitä keskenään samansuuruisia sivuja tai kulmia samanlaisin merkein.

Suurimman kulman laatuun perustuva luokitus:
1. *Suorakulmaiset kolmiot*, joilla suurin kulma $= 90°$ eli kolmiot joissa on suorakulma (kuva 44 (a)).
2. *Tylppäkulmaiset kolmiot*, joilla suurin kulma $> 90°$ eli kolmiot joissa on tylppä kulma (kuva 44 (b)).
3. *Teräväkulmaiset kolmiot*, joilla suurin kulma $< 90°$ eli kolmiot joissa on terävä kulma (kuva 44 (c)).



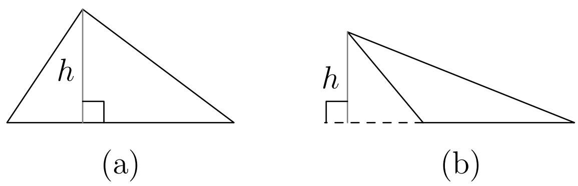
Kuva 44:

Kolmio, joka ei ole suorakulmainen, on *vinokulmainen.* Vinokulmainen kolmio on siis joko *terävä-* tai *tylppäkulmainen.*

Lause 3.1. *Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat yhtä suuret.*

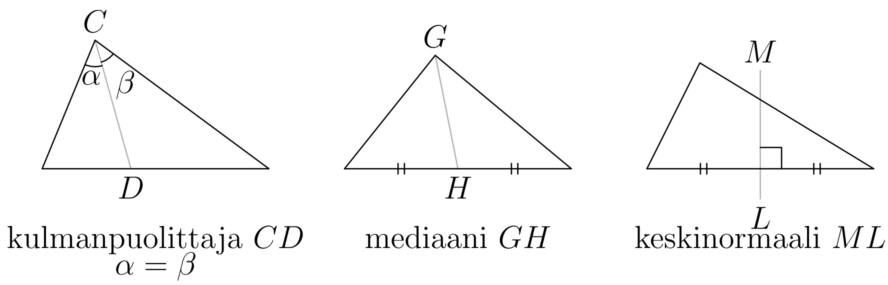
Lause 3.2. *Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuria, suuruudeltaan* $60°$*.*

Kolmion *korkeusjana* on kulman kärjestä vastakkaiselle sivulle tai sen jatkeelle kohtisuorasti piirretty jana eli normaali. Kuvan 45 (a)-kohdassa teräväkulmaisen kolmion yksi korkeusjana ja (b)-kohdassa tylppäkulmaisen kolmion yksi korkeusjana.



Kuva 45:

Kolmion *kulmanpuolittaja* on puolisuora, joka puolittaa kolmion kulman ja jatkuu vastakaiselle sivulle. Kolmion *keskijana* eli *mediaani* on kolmion kärjestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen piirretty jana. Kolmion sivun *keskinormaali* on suora, joka kulkee sivun keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa sivua vastaan. (kuva 46)



Kuva 46:

Edellä on jo todistettu (lause 2.10 sivulla 17), että kolmion kulmien summa on 180°. Seuraavaksi esitetään kolme lausetta, jotka ovat lauseen 2.10 seurauksia.

Lause 3.3. *Kolmion kahden kulman summa on yhtä suuri kuin kolmannen kulman vieruskulma.*

Lause 3.4. *Kolmion kulma on pienempi kuin molempien muiden kulmien vieruskulmat.*

Lause 3.5. *Kolmion kulmista vain yksi voi olla suora tai tylppä.*

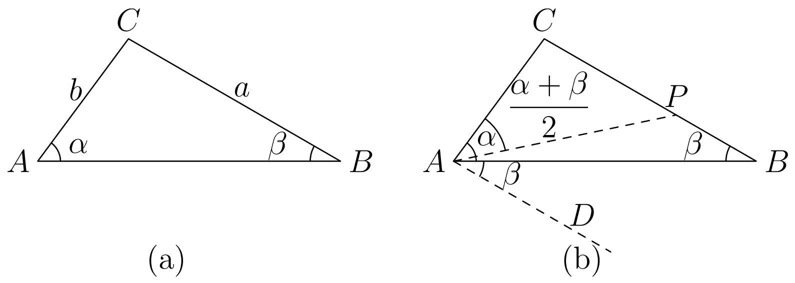
Viimeisen seuraus lauseen 3.5 perusteella kolmiot voidaan jakaa edellä esitetyllä tavalla terävä-, suora- ja tylppäkulmaisiin kolmioihin.

Kolmiossa sivuilla ja kulmilla on sama suuruusjärjestys. Jos tiedetään kulmien suuruusjärjestys, niin sivujen suuruusjärjestys voidaan päätellä ja päinvastoin.

Lause 3.6. *Kolmiossa suuremman kulman vastainen sivu on pidempi kuin pienemmän kulman vastainen sivu.*

Erityisesti kolmion suurimman kulman vastainen sivu on kolmion pisin sivu ja pienimmän kulman vastainen sivu on kolmion lyhin sivu.

Esimerkki 3.1. Kolmiossa ABC on $\alpha > \beta$ (kuva 47) Pitää todistaa seuraava sivuja koskeva väite: $a > b$.



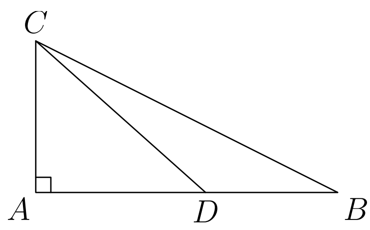
Kuva 47:

Todistus. Piirretään kulman α viereen kulman β suuruinen kulma DAB ja kulmalle $DAC = \alpha + \beta$ puolittaja (kuva 47 (b)). Koska $\alpha > \beta$, kulman $\alpha + \beta$ puolittaja sijoittuu kulman α sisään, joten se leikkaa sivun BC eräässä tämän sisäpisteessä P.

Kolmion CAP kulmien PAC ja CPA voidaan osoittaa olevan yhtä suuret seuraavalla tavalla. Koska AP puolittaa kulman $\alpha + \beta$, on $\sphericalangle PAC = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Osoitetaan, että myös $\sphericalangle CPA = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Koska $\sphericalangle BAP = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$, on lauseen 3.3 sivu 31 perusteella $\sphericalangle CPA = \sphericalangle BAP + \sphericalangle PBA = \frac{\alpha-\beta}{2} + \beta = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Koska siis $\sphericalangle PAC = \sphericalangle CPA$, on $\triangle CAP$ tasakylkinen. Täten $PC = b$. Koska P on janan BC sisäpiste, on jana a pidempi kuin b.

Tehtäviä:

3.1 Nimeä kuvasta 48 **a)** tylppäkulmainen kolmio, **b)** kaksi suorakulmaista kolmiota.



Kuva 48: Tehtävä 3.1

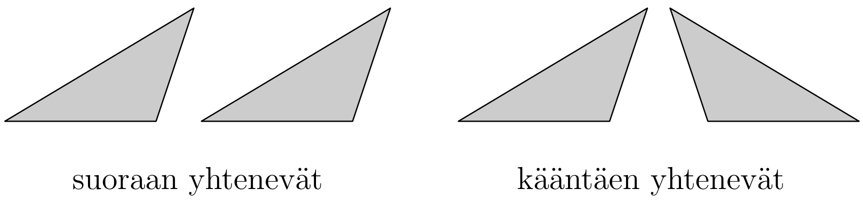
3.2 Piirrä kolmio, joka on
a) suorakulmainen ja tasakylkinen,
b) suorakulmainen ja tasasivuinen,
c) tasakylkinen ja tasasivuinen,
d) teräväkulmainen ja tasakylkinen,
e) teräväkulmainen ja tasasivuinen.
Perustele, jos kolmiota ei ole mahdollista piirtää.

3.2 Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus

3.2.1 Yhtenevyys

Kahta tasokuviota sanotaan *yhteneviksi*, jos ne voidaan asettaa päällekkäin siten, että ne täysin yhtyvät eli kun kuviot ovat samanmuotoiset ja samankokoiset. Yhtenevissä kuvioissa jokaista toisen kuvion osaa vastaa samanlainen osa toisessa kuvioissa. Päällekkäin osuvia kuvion osia kutsutaan toistensa *vastinosiksi*. Kuvioiden yhtenevyyttä merkitään symbolilla $\cong$.

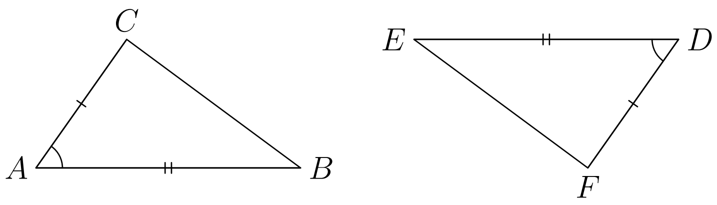
Kaksi kuviota ovat *suoraan yhteneviä*, jos ne saadaan yhtymään pelkästään tasossa siirtämällä. Jos kuvio täytyy kääntää tasossa eli peilata suoran suhteen ennen kuin se saadaan yhtymään toisen kanssa, sanotaan kuvioita *kääntäen yhteneviksi*.



Kuva 49:

Jos kaksi kolmiota $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhtenevät, merkitään

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$



Kuva 50:

Oletetaan nyt että kolmiot ovat yhtenevät ja kuvassa 50 kärki A vastaa kärkeä D, kärki B vastaa kärkeä E ja kärki C vastaa kärkeä F. Tällöin tiedetään, että:

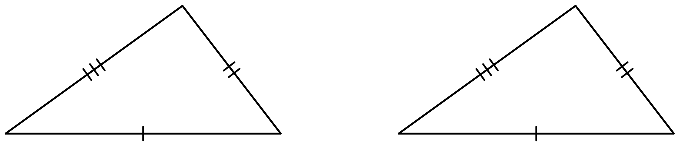
$$\begin{aligned}
\sphericalangle BAC &= \sphericalangle EDF, \quad |AB| = |DE|,\\
\sphericalangle CBA &= \sphericalangle FED, \quad |BC| = |EF|,\\
\sphericalangle ACB &= \sphericalangle DFE, \quad |AC| = |DF|.
\end{aligned}$$

Eli kun tiedetään, että kaksi kolmiota ovat yhtenevät, niin tiedetään ainakin kuusi asiaa, nimittäin että vastinsivut ja vastinkulmat ovat yhtä suuret. Kaikkien kuuden vastinosa parin suuruutta ei kuitenkaan tarvitse osoittaa, sillä kolmioiden yhtenevyyteen riittää, että kolmioilla on kolme sopivasti valittua yhtä suurta vastinosaa, joista ainakin yksi on sivu. Nämä yhtenevyysehdot esitetään *kolmioiden yhtenevyyslauseissa*, jotka ilmaisevat myös miten yhtä suurten vastinosien tulee sijoittua toisiinsa nähden.

Lause 3.7. (**Kolmioiden yhtenevyyslauseet**)

sss (sivu - sivu - sivu)

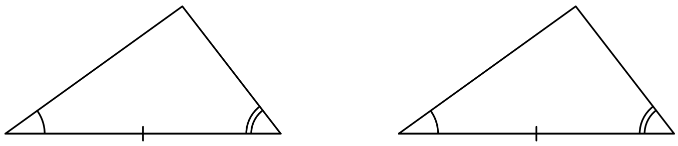
Jos kolmion kaikki sivut ovat yhtä suuret kuin vastinsivut toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.



Kuva 51:

ksk (kulma - sivu - kulma)

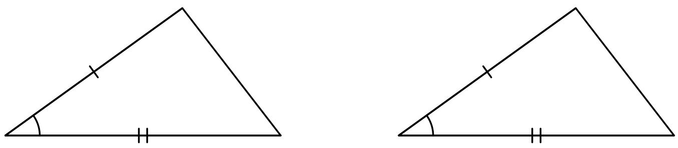
Jos kolmion kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.



Kuva 52:

sks (sivu - kulma - sivu)

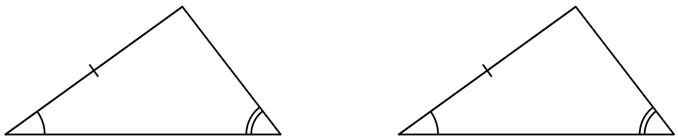
Jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.



Kuva 53:

kks (kulma - kulma - sivu)

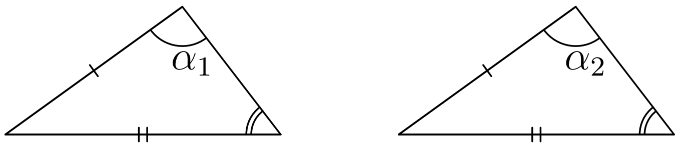
Jos kolmion kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.



Kuva 54:

ssk (sivu - sivu - kulma)

Jos kolmion kaksi sivua ja toisen vastainen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät sillä edellytyksellä, että toisten yhtä suurien sivujen vastaiset kulmat (kuvassa 55 kulmat α_1 ja α_2) ovat samanlaatuiset (molemmat teräviä, suoria tai tylppiä).

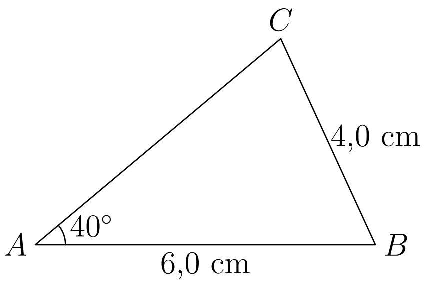


Kuva 55:

Yhtenevyyslauseessa **ssk** on lisäehtona, että toisten vastinsivujen vastaisten kulmien tulee olla samanlaatuiset. Seuraava esimerkki havainnollistaa hyvin, miksi kyseisen ehdon on oltava voimassa.

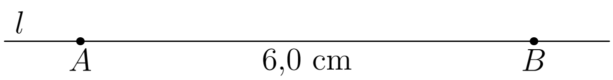
Esimerkki 3.2. Piirrä kolmio, jonka sivut ovat 6,0 cm ja 4,0 cm sekä jälkimmäisen vastainen kulma 40°. Onko kolmio yksikäsitteinen?

Ratkaisu:
Piirretään mallikuvio:



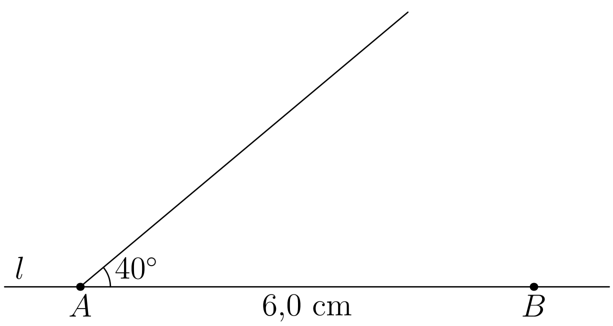
Kuva 56:

Piirretään suora l ja merkitään sille piste A. Piirretään jana $AB = 6cm$.



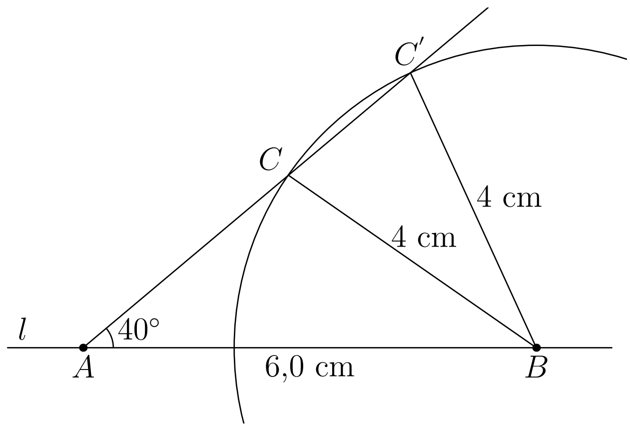
Kuva 57:

Piirretään pisteeseen A, jana AB oikeana kylkenä kulma $\alpha = 40°$.



Kuva 58:

Piirretään harpilla kärki B keskipisteenä 4,0 cm:n säteinen ympyrän kaari.

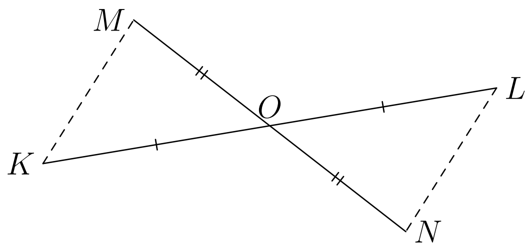


Kuva 59:

Ympyrän kaari leikkaa kulman $\alpha = 40°$ vasenta kylkeä kahdessa kohdassa, pisteet C ja C'. Näin ollen havaitaan, että syntyy kaksi erilaista kolmiota $\triangle ABC$ ja $\triangle ABC'$.

Vastaus: Kolmio ei ole yksikäsitteinen.

Esimerkki 3.3. Janat KL ja MN leikkavaat ja puolittavat toisensa pisteessä O, kuva 60. Osoita, että $\triangle KOM \cong \triangle LON$.



Kuva 60:

Todistus. Koska ristikulmat ovat yhtä suuret, niin

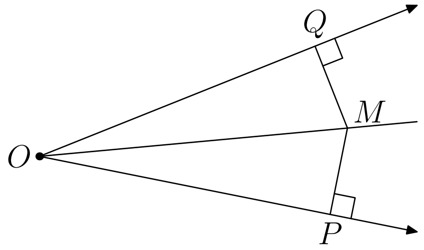
$$\sphericalangle MOK = \sphericalangle NOL.$$

Koska tiedetään, että piste O puolittaa janat KL ja MN, niin tiedetään, että

$$|MO| = |NO| \quad \text{ja} \quad |KO| = |LO|.$$

Nyt voidaan käyttää yhtenevyyslausetta **sks** ja saadaan, että $\triangle KOM \cong \triangle LON$.

Esimerkki 3.4. Puolisuora OM puolittaa kulman $\sphericalangle POQ$. Jana MQ on kohtisuorassa kulman $\sphericalangle POQ$ vasenta kylkeä vastaan ja jana MP on kohtisuorassa kulman $\sphericalangle POQ$ oikeaa kylkeä vastaan. Osoita, että $\triangle MOQ \cong \triangle MOP$.



Kuva 61:

Todistus. Koska puolisuora OM puolittaa kulman $\sphericalangle POQ$, niin

$$\sphericalangle POM = \sphericalangle QOM.$$

Kolmioilla $\triangle MOQ$ ja $\triangle MOP$ on yhteinen sivu OM eli

$$|OM| = |OM|.$$

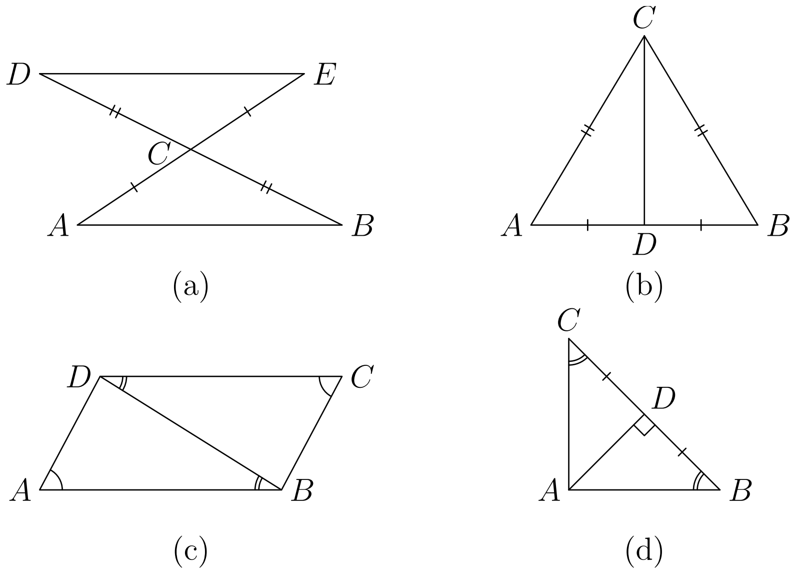
Lisäksi kulmat $\sphericalangle OQM$ ja $\sphericalangle OPM$ ovat suoriakulmia, eli

$$\sphericalangle OQM = \sphericalangle OPM.$$

Täten kolmioiden yhtenevyyslauseen **kks** nojalla $\triangle MOQ \cong \triangle MOP$.

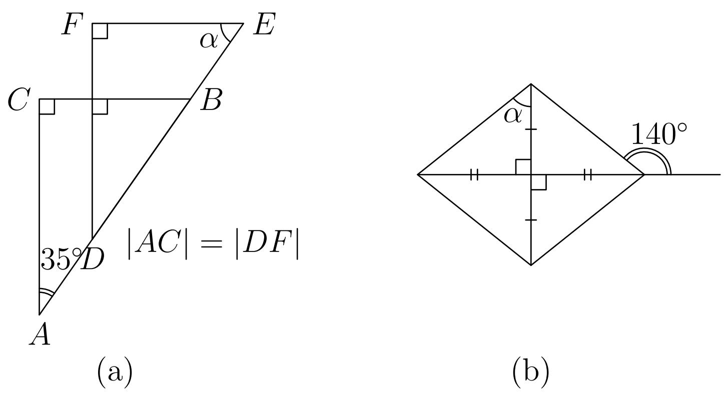
Tehtäviä:

3.3 Mitkä kuvioiden kolmioista (kuva 62) ovat keskenään yhtenevät? Perustele yhtenevyys.



Kuva 62: Tehtävä 3.3

3.4 Kuinka suuri on kulma α (kuva 63)? Perustele vastauksesi.



Kuva 63: Tehtävä 3.4

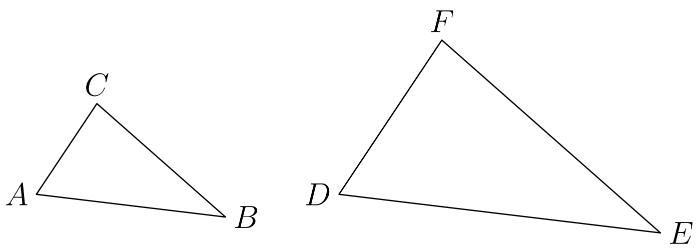
3.5 Osoita, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.

3.6 Osoita, että tasakylkisen kolmion huippukulman puolittaja yhtyy kannalle piirrettyyn keskijanaan.

3.2.2 Yhdenmuotoisuus

Kuvioiden yhdenmuotoisuus tarkoittaa sitä, että kuviot ovat samanmuotoiset, mutta eivät välttämättä samankokoiset. Yhdenmuotoisilla monikulmioilla täytyy olla yhtä monta kärkeä. Kaikki ympyrät ovat yhdenmuotoisia. Tarkastellaan esimerkkinä kolmioita.

Esimerkki 3.5. Verrattaessa kolmioiden ABC ja DEF (kuva 64) sivujen pituuksia ja kulmien suuruuksia on luontevaa asettaa vastinkärjet, -sivut ja -kulmat taulukon osoittamalla tavalla.



Kuva 64:

Vastinkärjet	Vastinsivut	Vastinkulmat
A ja D	AB ja DE	$\sphericalangle BAC$ ja $\sphericalangle EDF$
B ja E	BC ja EF	$\sphericalangle CBA$ ja $\sphericalangle FED$
C ja F	CA ja FD	$\sphericalangle ACB$ ja $\sphericalangle DFE$

Seuraavaksi esitetään yhdenmuotoisuuden yleinen määritelmä.

Määritelmä 3.1. *Kaksi kuviota ovat yhdenmuotoiset, jos niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivujen pituuksien suhteet ovat yhtä suuret eli vastinsivut ovat verrannolliset. Yhdenmuotoisuuden merkkinä käytetään* $\sim$.

Eli kuviot A_1 ja A_2 ovat yhdenmuotoiset

$$A_1 \sim A_2 \Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_1^{'}} = \frac{a_2}{a_2^{'}} = \ldots = \frac{a_n}{a_n^{'}} \quad \text{ja}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1^{'}, \alpha_2 = \alpha_2^{'}, \ldots, \alpha_n = \alpha_n^{'}.$$

Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen pituuksien suhdetta kutsutaan mittakaavaksi (k).

Palataan taas takaisin kolmioon. Kolmioiden yhdenmuotoisuus voidaan osoittaa yhdenmuotoisuuslauseilla sss, sks, kk ja ssk, jotka ovat vastaavanlaisia kuin edellä esitetyt yhtenevyyslauseet. Yleisimmin näistä käytetään yhdenmuotoisuuslausetta kk, joka vastaa yhtenevyyslauseita ksk ja kks.

Lause 3.8. *Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuret kuin toisen kolmion kaksi kulmaa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*

Lause on selvä, koska kolmion kulmat määräävät täysin kolmion muodon. Kolmion kulmien summa on 180°, näin ollen jos tiedetään kaksi kulmaa, kolmaskin on määritetty, eli jos tiedetään että kahdella kolmiolla on kaksi yhtä suurta kulmaparia, on kaikkien vastinkulmien oltava yhtä suuret.

Esimerkki 3.6. Olkoon K ja K' kaksi kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset. Kolmion K 4 cm pitkän sivun vastinsivu kolmiossa K' on 12 cm pitkä. Kolmion K yhden sivun pituus on 7cm, mikä on tämän sivun vastinsivun pituus kolmiossa K'?

Ratkaisu: Merkitään sivua, jonka pituutta kysytään, kirjaimella x. Muodostetaan nyt lauseke sivujen suhteista.

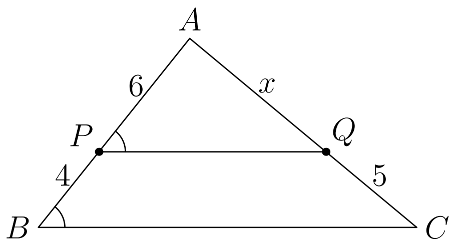
$$\frac{4}{12} = \frac{7}{x}$$

Kun ratkaistaan x, saadaan

$$x = \frac{7 \cdot 12}{4} = 21.$$

Vastaus: Kysytty sivun pituus kolmiossa K' on 21 cm.

Esimerkki 3.7. Kolmion ABC sivulla AB on piste P ja sivulla AC piste Q. Oletetaan, että jana PQ on yhdensuuntainen janan BC kanssa. Lisäksi tiedetään, että $|AP| = 6$, $|PB| = 4$, $|QC| = 5$. Ratkaise $|AQ|$ (kuva 65).



Kuva 65:

Ratkaisu: Lauseen 2.9 sivu 17 mukaan tiedetään, että $\sphericalangle QPA = \sphericalangle CBA$ ja $\sphericalangle AQP = \sphericalangle ACB$. Näin ollen $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ (kk). Joten tiedetään, että

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}.$$

Annettujen sivujen pituuksien perusteella $|AP| = 6$ ja $|AB| = 6 + 4 = 10$. Myös sivuille $|AQ|$ ja $|AC|$ voidaan kirjoittaa lausekkeet. $|AQ| = x$, $|AC| = x + 5$. Eli nyt suhde voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{6}{10} = \frac{x}{x+5}.$$

Ratkaistaan x. Kerrotaan ristiin, jolloin saadaan

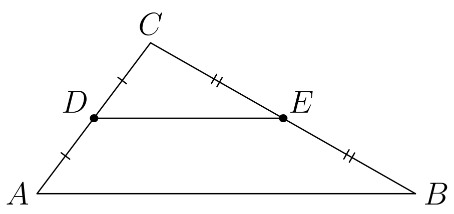
$$\begin{aligned} 6x + 30 &= 10x \\ 4x &= 30 \\ x &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Vastaus: $|AQ| = \frac{15}{2} = 7,5$.

Seuraavaksi esitetään kaksi lausetta, joiden todistuksessa käytetään hyväksi kolmioiden yhdenmuotoisuutta.

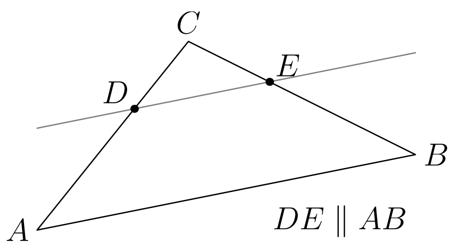
Lause 3.9. *Kolmion kahden sivun keskipisteiden yhdysjana on kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet siitä.*

Todistus. Merkitään kolmion ABC sivun AC keskipistettä D:llä ja sivun BC keskipistettä E:llä (kuva 66). Koska $DC : AC = EC : BC = 1 : 2$ ja $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ACB$, on $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ (sks). Silloin $\sphericalangle EDC = \sphericalangle BAC$, joten $DE \parallel AB$. Yhdenmuotoisten kolmioiden DEC ja ABC vastinsivujen suhde on sama, joten $DE : AB = 1 : 2$ eli $DE = \frac{1}{2}AB$.



Kuva 66:

Lause 3.10. *Kolmion yhden sivun suuntainen ja kahta muuta sivua leikkaava suora jakaa leikkaamansa sivut verrannollisiin osiin.*



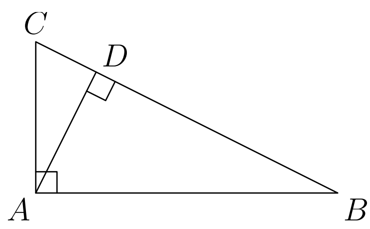
Kuva 67:

Todistus. Oletetaan, että kolmion ABC sivun AB suuntainen suora leikkaa sivut AC ja BC pisteissä D ja E (kuva 67). Väitetty osien verrannollisuus voidaan ilmoittaa esimerkiksi verrantona $AD : DC = BE : EC$. Koska $DE \parallel AB$, ovat kolmioiden DEC ja ABC kulmat pareittain yhtä suuret, joten $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ (kk). Tällöin $AC : DC = BC : EC$, josta saadaan

$$\begin{aligned}(AD + DC) : DC &= (BE + EC) : EC \\ AD : DC + 1 &= BE : EC + 1 \\ AD : DC &= BE : EC.\end{aligned}$$

Lause 3.11. *Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle (pisin sivu) piirretty korkeusjana jakaa kolmion kahdeksi kolmioksi, jotka ovat yhdenmuotoisia sekä alkuperäisen kolmion kanssa että keskenään.*

Todistus. Tarkasteltavat kolmiot ovat yhdenmuotoiset lauseen **kk** perusteella, sillä jokaisessa kolmiossa on suorakulma ja sen lisäksi eri kolmiois-



Kuva 68:

sa sijaitsevat kulmat $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle ABC$ ja $\sphericalangle CAD$ ovat yhtä suuret (kuva 68). Edellä mainitut kulmat ovat yhtä suuret, koska kaikkien kulmien samannimiset kyljet joko yhtyvät tai ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (Lause 2.11 sivu 18).
Siis

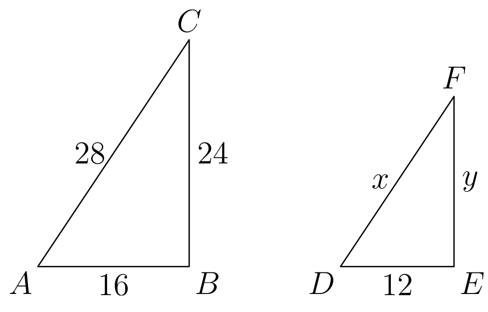
$$\triangle DAC \sim \triangle DBA \sim \triangle ABC.$$

Lopuksi mainittakoon vielä yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteesta. Erilaisten kuvioiden pinta-aloista lisää sivulla 47.

Lause 3.12. *Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittaakaavan neliö (k^2).*

Tehtäviä:

3.7 Kolmiot ABC ja DEF ovat yhtenevät ($\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$ ja $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FED$). Ratkaise x ja y (kuva 69).

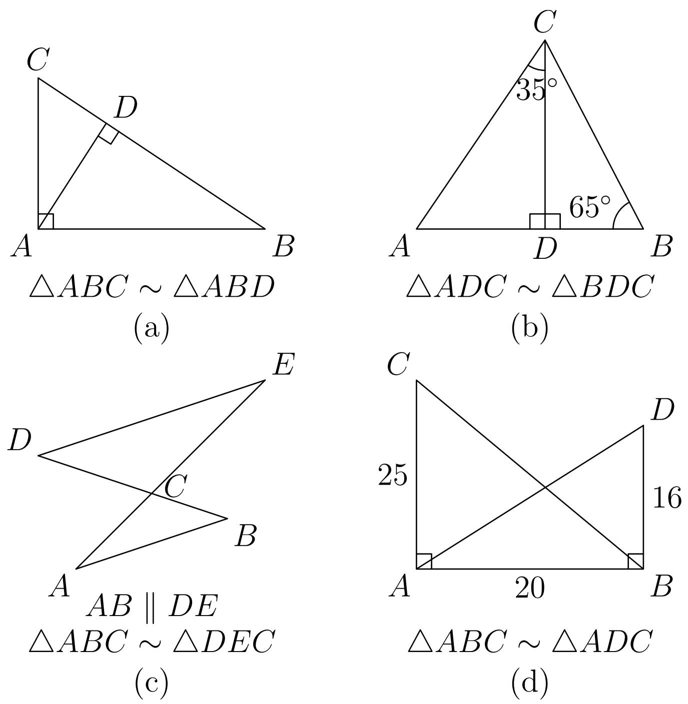


Kuva 69: Tehtävä 3.7

3.8 Kirkkaassa kuunvalossa vesitornin varjon pituus oli 60 m ja kuutamokävelyllä olleen Pasin varjon pituus oli 2,5 m. Kuinka korkea on vesitorni, kun Pasin pituus on 175 cm?

3.9 Kaisu oli melomassa joella. Kotiin palattuaan hän mittasi melomansa matkan pituudeksi kartalta 90 cm. Kuinka pitkän matkan Kaisu meloi todellisuudessa? Kartan mittakaava oli 1:30 000.

3.10 Ovatko annetut kolmiot yhdenmuotoiset (kuva 70)? Perustele.



Kuva 70: Tehtävä 3.10

3.3 Pinta-ala

Pinta-alan yksikkö määräytyy, valitun pituusyksikön mukaan. Jos valitaan pituusyksiköksi senttimetri (cm), niin pinta-alan yksikkö on neliösenttimetri (cm^2). Yksi neliösenttimetri on neliön, jonka sivujen pituudet ovat $1cm$, sisään jäävän alueen pinta-ala. Samoin määritellään kaikki muutkin pinta-ala yksiköt.

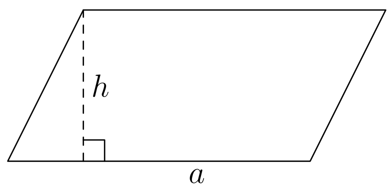
Kuten tiedetään suorakulmion pinta-ala

$$A = ah = kahden\ vierekkäisen\ sivun\ tulo.$$

Suunnikkaan pinta-ala

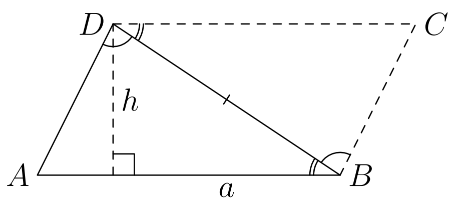
$$A = ah = kannan\ ja\ korkeuden\ tulo.$$

Suunnikashan on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.



Kuva 71: Suunnikas

Kolmion pinta-ala puolestaan saadaan johdettua suunnikkaan pinta-alasta. Kun suunnikas $ABCD$ (kuva 72) jaetaan lävistäjällä BD kahteen kolmioon,



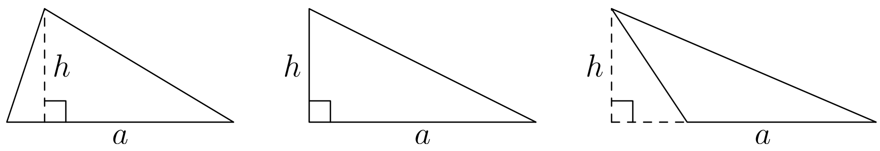
Kuva 72:

niin näillä kolmioilla on lävistäjä yhteisenä sivuna ja lävistäjän viereiset kulmat ovat vastaavasti yhtä suuret. Kolmiot ovat siis yhtenevät (ksk).

$\triangle ABD$ on niin ollen puolet suunnikkaasta $ABCD$, jonka kanta ja korkeus ovat samat kuin kolmion kanta a ja korkeus h. Näin on saatu kolmion pinta-alan lauseke,

$$A = \frac{1}{2}ah = \textit{kannan ja korkeuden tulon puolikas.}$$

Suorakulmaisessa kolmiossahan korkeusjana on toinen kateeteista, toisen ollessa kanta ja pinta-ala on näin ollen kateettien tulon puolikas. Terävä- ja tylppäkulmaisilla kolmioilla korkeusjana on ensin piirrettävä kuvaan ja sen korkeus määritettävä. Kuvassa 73 on esitettynä korkeusjana (h) erilaisten kolmioiden tapauksessa.

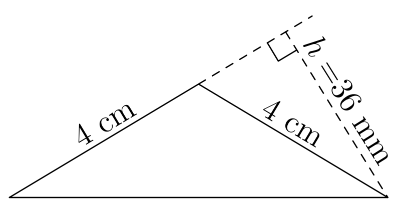


Kuva 73:

Terävä- ja tylppäkulmaisten kolmioiden tapauksessa kannan voi valita itse ja korkeusjana on siis valitulta kannalta tai sen jatkeelta vastakkaiseen kulmaan piirretty normaali.

Esimerkki 3.8. Tasakylkisen kolmion kylki on 4,0 cm ja kylkeä vastaan piirretty korkeus 36 mm. Laske kolmion pinta-ala ja anna vastaus neliösenttimetreinä.

Ratkaisu:



Kuva 74:

Kolmion pinta-ala

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{4,0cm \cdot 3,6cm}{2} = 7,2\ cm^2.$$

Vastaus: Kolmion pinta-ala on $7,2\ cm^2$.

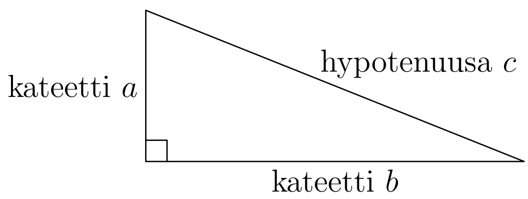
Tehtäviä:

3.11 Tylppäkulmaisen kolmion yhden sivun pituus on 3,0 cm ja sitä vastaan piirretty korkeus on $2\sqrt{3}$ cm. Mikä on kolmion pinta-ala?

3.12 Kuinka monta kukkasen tainta tarvitaan tasasivuisen kolmion muotoiseen kukkapenkkiin, jonka sivun pituus on 4,0 m ja korkeus on $\sqrt{12}$ m? Kukantaimia tarvitaan 40 kappaletta 1 m^2 kohti.

3.4 Suorakulmainen kolmio

Suorakulmainen kolmio on siis kolmio, jossa on suorakulma (90°). Suorakulmaisen kolmion suorasta kulmasta lähteviä sivuja kutsutaan *kateeteiksi* ja suoran kulman vastaista sivua *hypotenuusaksi*.



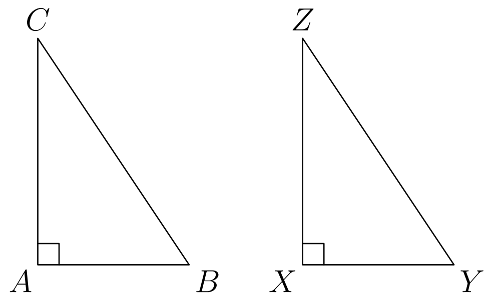
Kuva 75:

Lause 3.13. *Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle XYZ$ kaksi suorakulmaista kolmiota* (kuva 76)*, joiden vastinkateetit ovat yhtäpitkät, eli*

$$|AB| = |XY| \quad ja \quad |AC| = |XZ|.$$

Tällöin myös näiden kolmioiden hypotenuusat ovat yhtäpitkät, vastinkulmat ovat yhtä suuret ja kolmioilla on sama pinta-ala. Toisin sanoen

$$|BC| = |YZ|, \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle XZY, \quad \sphericalangle CBA = \sphericalangle ZYX.$$

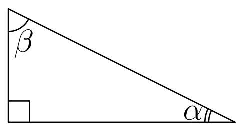


Kuva 76:

Kaikki lauseessa mainitut ominaisuudet seuraavat kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle XYZ$ yhtenevyydestä (sks).

Lause 3.14. *Jos α ja β ovat kaksi suorakulmaisen kolmion ei-suoraa kulmaa, niin*

$$\alpha + \beta = 90^\circ \qquad \text{(kuva 77).}$$



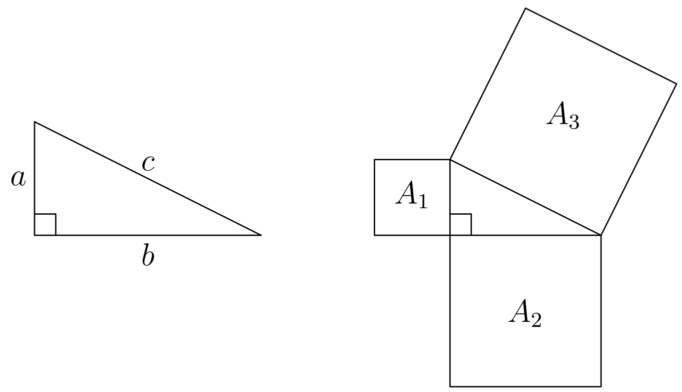
Kuva 77:

3.4.1 Pythagoraan lause

Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien neliöiden summa on yhtä suuri, kuin hypotenuusan neliö. Toisaalta, jos kolmiossa kahden sivun neliöiden summa on kolmannen sivun neliö, kolmio on suorakulmainen. Tulosta kutsutaan *Pythagoraan lauseeksi.*

Lause 3.15. *Olkooon $\triangle ABC$ suorakulmainen ja sen kateettien pituudet a ja b sekä hypotenuusan pituus c. Silloin*

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{(kuva 78 (a)).}$$



(a) (b)

Kuva 78:

Geometrisesti tulkittuna Pythagoraan lause väittää, että kun piirretään neliöt suorakulmaisen kolmion jokaiselle sivulle, niin kahden pienemmän neliön (kateeteille piirretyt neliöt) alojen summa on isomman neliön ala (hypotenuusalle piirretty neliö) eli $A_1 + A_2 = A_3$ (kuva 78 (b)).

Pythagoraan lauseelle on esitetty useita todistuksia, joista seuraavaksi tarkastellaan muutamaa.

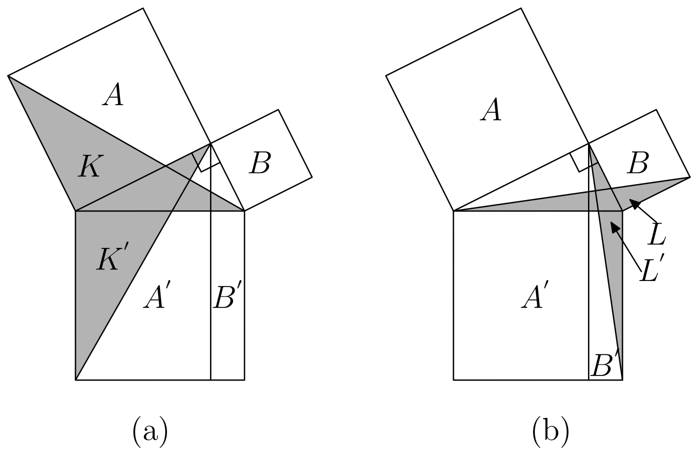
Todistus. Olkoot kateeteille piirretyt neliöt A ja B ja hypotenuusalle piirretty neliö C (kuva 79 (a)). Jaetaan suoran kulman kärjestä piirretyllä hypotenuusan normaalilla neliö C kahteen suorakulmioon A' ja B' ja piirretään (varjostetut) kolmiot K ja K'. Kummallakin kolmiolla on yhteinen sivu neliön A ja neliön C kanssa ja kolmioiden tylpät kulmat = suorakulma + sama terävä kulma. Siis $K \cong K'$ (*sks*). Edelleen kolmio K on puolet samakantaisesta ja yhtä korkeasta neliöstä A ja samoin kolmio K' on puolet suorakulmiosta A'. Koska

$$K \cong K', \quad K = \frac{1}{2}A \quad \text{ja} \quad K' = \frac{1}{2}A'$$

ja tiedetään, että yhtenevien kolmioiden alat ovat samat, niin

$$A = A'.$$

Piirretään nyt kolmiot (varjostettu) L ja L' (kuva 79 (b)). Nyt kummallakin kolmiolla on yhteinen sivu neliön B ja neliön C kanssa ja kolmioiden tylpät



Kuva 79:

kulmat = suorakulma + sama terävä kulma. Siis $L \cong L'$ (sks). Edelleen kolmio L on puolet samakantaisesta ja yhtä korkeasta neliöstä B ja samoin kolmio L' on puolet suorakulmiosta B'. Koska

$$L \cong L', \quad L = \frac{1}{2}B \quad \text{ja} \quad L' = \frac{1}{2}B'$$

ja tiedetään, että yhtenevien kolmioiden alat ovat samat, niin

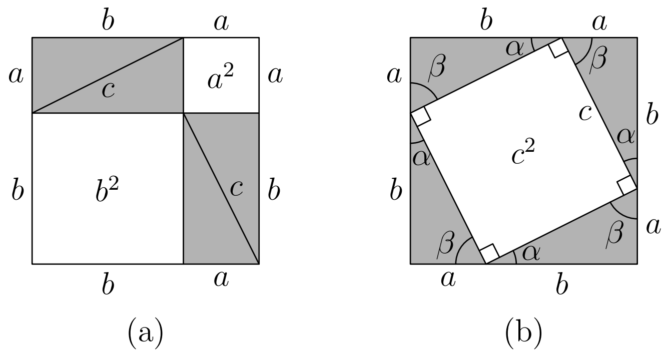
$$B = B'.$$

Nyt laskemalla yhteen saadut tulokset $A = A'$ ja $B = B'$ saadaan

$$A + B = A' + B' = C.$$

Edellä esitetty todistus on esitetty jo Eukleideen alkeissa. Seuraavaksi esitettävä todistus on hyvin havainnollinen.

Todistus. Piirretään kaksi yhtäsuurta neliötä, joiden sivut ovat $a + b$. Erotetaan sitten kummastakin neliöstä pois tummennettuina esitetyt neljä suorakulmaista kolmiota, joiden kateetit ovat a ja b ja hypotenuusa c (kuva 80).
Neliöissä olevat kolmiot ovat yhteneviä, koska niissä kaikissa on kaksi yhtä pitkää sivua (a ja b) ja niiden välinen kulma on suora (**sks**).



Kuva 80:

Kun molemmista isoista neliöistä on erotettu neljä yhtenevää kolmiota, jäljelle jääneet pinta-alat ovat yhtä suuret.

Kuvan 80 (a) pienten neliöiden pinta-alat ovat a^2 ja b^2.

Kuvan 80 (b) jäljelle jäänyt nelikulmio on neliö, koska jokainen kulma on

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad \Big\| \ \alpha + \beta = 90^\circ, \\ \gamma &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

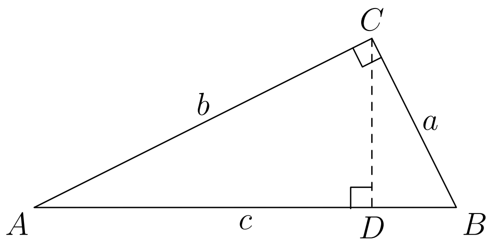
Kuvassa 80 (b) neliön sivu on c, koska se on sellaisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, jonka kateetit ovat a ja b. Neliön pinta-ala on c^2.

Molempiin kuvioihin kolmioiden poistamisen jälkeen jääneet alat ovat yhtä suuret, joten

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Katsotaan vielä kolmas todistus, jossa tarvitaan apuna kahta aikaisemmin esitettyä Lausetta.

Todistus. Piirretään suoran kulman kärjestä C kohtisuora hypotenuusalle (kuva 81). Merkitään leikkauspistettä D:llä. Olkoon kolmion ABC ala A, kolmion CBD ala A_1 ja kolmion ACD ala A_2. Lauseen 3.11 sivu 44 mukaan $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ ja $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.



Kuva 81:

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö (Lause 3.12 sivu 45), niin

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{ja} \quad \frac{A_2}{A} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}.$$

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan

$$\frac{A_1 + A_2}{A} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Koska $A_1 + A_2 = A$, niin

$$1 = \frac{a^2 + b^2}{c^2},$$

josta saadaan

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pythagoraan lause on monikäyttöinen ja sen opettelu on hyvin tärkeää. Seuraavaksi katsotaan muutama esimerkki joista on apua asian ymmärtämisessä.

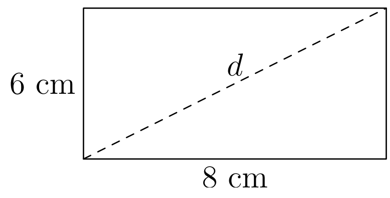
Esimerkki 3.9. Mikä on suorakulmion, jonka sivujen pituudet ovat 6 cm ja 8 cm (kuva 82), halkaisijan pituus?

Ratkaisu:

Nyt on $d^2 = 6^2 + 8^2$, josta ratkaisemalla

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

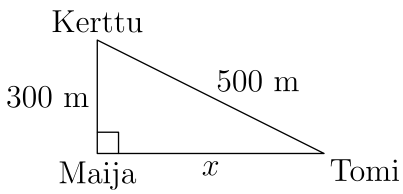
Vastaus: Halkaisijan pituus on 10 cm.



Kuva 82:

Esimerkki 3.10. Maija, Kerttu ja Tomi asuvat suorakulmaisen kolmion kärjissä. Maijan koti on suoran kulman kärjessä. Maijalta Kertulle on matkaa 300 m ja Kertulta Tomille 500 m. Kuinka paljon lyhyempi matka Maijalta on Tomille suoraan heidän kotiensa välistä katua pitkin kuin kiertämällä Kertun kautta?

Ratkaisu:



Kuva 83:

Lasketaan ensin suora matka Maijalta Tomille pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} x^2 &+ 300^2 = 500^2 \\ x^2 &= 500^2 - 300^2 \\ x &= \sqrt{500^2 - 300^2} = 400 \end{aligned}$$

Nyt kun tiedetään, että matka suoraan Maijalta Tomille on 400 m pitää vielä laskea mikä on matka Maijalta Tomille Kertun kautta.

$$300\ m + 500\ m = 800\ m$$

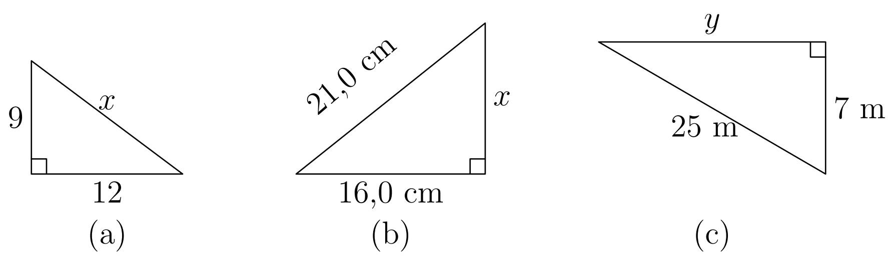
Lopuksi lasketaan vielä saatujen matkojen erotus.

$$800\ m - 400\ m = 400\ m$$

Vastaus: Matka suoraan Maijalta Tomille on 400 m lyhyempi kuin matka kiertäen Kertun kautta.

Tehtäviä:

3.13 Laske tuntemattoman sivun pituus seuraavista suorakulmaisista kolmioista.



Kuva 84: Tehtävä 3.13

3.14 Ovatko seuraavin sivun pituuksin varustetut kolmiot suorakulmaisia?

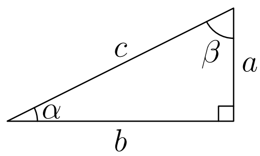
a) 2, 14 ja 16, **b)** 7, 24 ja 25, **c)** 1,5; 6,0 ja 6,1.

3.15 Oviaukon mitat ovat 120 cm $\times$ 200 cm. Mahtuuko 280 cm $\times$ 240 cm:n suuruinen kipsilevy kokonaisena oviaukosta sisään?

3.16 Kolmiossa ABC on sivun AB pituus $5\sqrt{2}$, sivun AC pituus 20 ja kulma ABC tylppä. Laske sivun BC pituus, kun B:stä piirretty korkeus on 5.

3.4.2 Trigonometriaa

Jos kahdella kolmiolla on kaksi yhtä suurta kulmaa, niin kolmioiden kolmannetkin kulmat ovat yhtä suuret. Kuten aikaisemmin on jo käynyt ilmi tällaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Näin ollen kaikki suorakulmaiset kolmiot, joilla suoran kulman lisäksi toinen terävistä kulmista on sama sanottaakoon α, ovat yhdenmuotoiset. Jokaisessa tällaisessa kolmiossa on siis kahden sivun suhde yhtä suuri kuin vastinsivujen suhde kaikissa muissa tällaisissa kolmioissa.



Kuva 85:

Suorakulmaisen kolmion sivujen suhteet riippuvat siis vain terävän kulman α suuruudesta, mutta eivät kolmion suuruudesta. Näitä suhteita kutsutaan kulman α *trigonometrisiksi funktioiksi*. Eri trigonometrisiä funktioita on kuusi kappaletta, mutta yleisimmin niistä käytetään seuraavia neljää (ks. kuva 85).

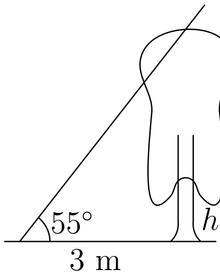
$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\text{vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}} = \frac{a}{c} \\
\cos\alpha &= \frac{\text{viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}} = \frac{b}{c} \\
\tan\alpha &= \frac{\text{vastaisen kateetin pituus}}{\text{viereisen kateetin pituus}} = \frac{a}{b} \\
\cot\alpha &= \frac{\text{viereisen kateetin pituus}}{\text{vastaisen kateetin pituus}} = \frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Kun suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on α, niin toinen on sen komplementtikulma $90^\circ - \alpha$. Trigonometristen funktioiden määritelmistä seuraa tämän perusteella:

$$
\begin{aligned}
\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha \qquad & \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot\alpha \\
\cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \qquad & \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan\alpha
\end{aligned}
$$

Esimerkki 3.11. Laske puistossa olevan lehmuksen korkeus, kun puun varjon pituus on 3 metriä. Auringon säteet muodostavat 55° kulman maanpintaan nähden.

Ratkaisu: Piirretään kuvio, johon merkitään laskussa tarvittavat osat (kuva 86). Puun korkeus h on tunnetun kulman vastaisen kateetin pituus. Viereisen kateetin pituus on varjon pituus.



Kuva 86:

Muodostetaan tangentin määritelmän perusteella yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned}\frac{h}{3} &= \tan 55^\circ \\ h &= 3 \cdot \tan 55^\circ \approx 4,3\end{aligned}$$

Vastaus: Lehmuksen korkeus on 4,3 metriä.

Trigonometristen funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan *arkusfunktioiksi*. Arkusfunktioita käytetään, kun tiedetään sivujen välinen suhde ja halutaan laskea kulman suuruus asteina.

Esimerkki 3.12. Jos tiedetään, että $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, saadaan kulma α ratkaistua sinifunktion käänteisfunktion arcsin avulla seuraavasti:

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ.$$

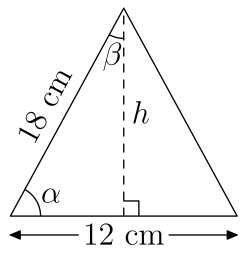
Laskimissa arkusfunktiot on merkitty käyttämällä potenssia -1, eli arcsin $=$ $\sin^{-1}$, arccos $= \cos^{-1}$ ja arctan $= \tan^{-1}$.

Esimerkki 3.13. Tasakylkisen kolmion kanta on 12,0 cm ja kylki 18,0 cm. Laske kolmion kulmien suuruudet sekä korkeusjanan pituus.

Ratkaisu: Piirretään mallikuvio, johon merkitään tunnetut ja laskettavat osat (kuva 87).

Korkeusjana jakaa tasakylkisen kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, joiden toinen kateetti on 6 cm ja toinen korkeusjana sekä hypotenuusa 18 cm. Tällöin

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{6,0}{18,0} = \frac{1}{3} \\ \alpha &= \arccos\frac{1}{3} \approx 70,5^\circ.\end{aligned}$$



Kuva 87:

Huippukulman puolikas $\beta \approx 90° - \alpha \approx 90° - 70,5° \approx 19,5°$, jolloin huippukulma $2\beta \approx 39,0°$.

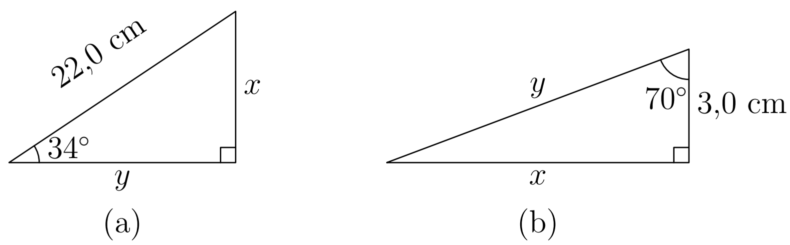
Korkeusjana saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} \frac{h}{6,0} &\approx \tan 70,5°, \text{ josta} \\ h &\approx 6 \cdot \tan 70,5° \approx 16,9. \end{aligned}$$

Vastaus: Kolmion kantakulmat ovat $70,5°$, huippukulma $39,0°$ ja korkeusjanan pituus 16,9 cm.

Tehtäviä:

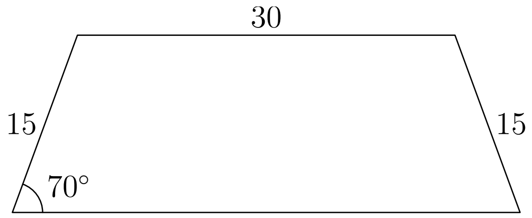
3.17 Laske sivujen x ja y pituudet seuraavista suorakulmaisista kolmioista.



Kuva 88: Tehtävä 3.17

3.18 Lintutorniin pitää rakentaa portaat, jotka muodostavat 60° kulman maahan nähden. Kuinka pitkät portaista tulee, kun niiden pitää yltää 15 metrin korkeudella olevalle tasanteelle?

3.19 Laske tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus ja pidemmän kannan pituus.



Kuva 89: Tehtävä 3.19

3.20 Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat x ja $x + 3$ sekä hypotenuusa $3x + 1$. Määritä sivujen tarkat pituudet ja niiden 2-desimaaliset likiarvot sekä kulmien suuruudet kahden desimaalin tarkkuudella.

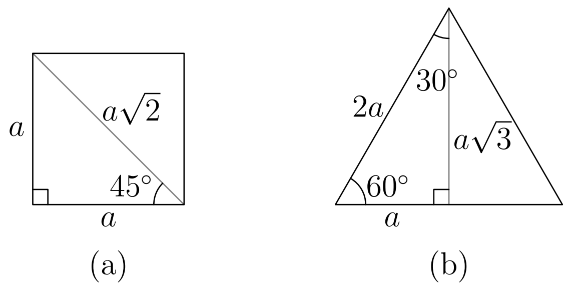
3.4.3 Muistikolmiot

Joidenkin kulmien sinille, kosinille, tangentille ja kotangentille saadaan tarkat arvot. Apuna voidaan käyttää muistikolmioita, jotka ovat suorakulmaisen kolmion erikoistapauksia. Toinen käytettävä muistikolmio on neliön puolikas. Kun a sivuinen neliö jaetaan puoliksi lävistäjällä, saadaan kaksi yhtenevää suorakulmaista kolmiota. Muodostuvat kolmiot ovat tasakylkisiä, huippukulman ollessa 90° ja kantakulmien 45°. Neliön lävistäjän pituus $= \sqrt{2}a$ saadaan ratkaistua Pythagoraan lauseen avulla. Kolmion sivujen pituuksien suhteet ovat $1 : 1 : \sqrt{2}$ (kuva 90 (a)).

Kolmiosta (kuva 90 (a)) nähdään, että

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 45^\circ &= 1 & \cot 45^\circ &= 1. \end{aligned}$$

Toinen muistikolmio saadaan tasasivuisen kolmion puolikkaasta. Kun piirretään korkeusjana $2a$ sivuisen tasasivuisen kolmion kannalta, se jakaa kolmion kahdeksi yhteneväksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Korkeusjana siis puolittaa



Kuva 90:

kannan ja huippukulman. Näin ollen kummankin muodostuneen suorakulmaisen kolmion terävät kulmat ovat 30° ja 60°, kateettien pituudet a ja $\sqrt{3}a$ sekä hypotenuusan pituus $2a$. Siis sivujen pituuksien suhteet ovat $1 : \sqrt{3} : 2$ (kuva 90 (b)).

Kolmiosta (kuva 90 (b)) nähdään, että

$$
\begin{aligned}
\sin 30^\circ &= \frac{1}{2} & \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \\
\tan 30^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}} & \tan 60^\circ &= \sqrt{3} \\
\cot 30^\circ &= \sqrt{3} & \cot 60^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Aina kun vain on mahdollista kannattaa käyttää tarkkoja arvoja trigonometrisille funktioille. Lisää tarkkoja arvoja löytyy taulukkokirjasta.

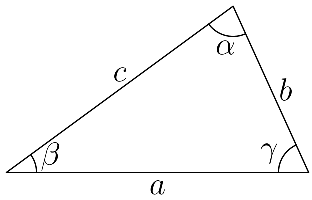
Tehtäviä:

3.21 Tasakylkisen kolmion kylkeä vastaan piirretty korkeus on 15,0 cm ja kantakulman suuruus 30°. Laske **a)** kannan pituus, **b)** kyljen pituus, **c)** kolmion pinta-ala. Anna vastauksena tarkka arvo sekä likiarvo.

3.5 Vinokulmaisen kolmion trigonometriaa

Edellä trigonometriaa käytettiin vain suorakulmaisen kolmion sivujen ja kulmien ratkaisemiseen. Trigonometriaa voidaan kuitenkin soveltaa myös vinokulmaisiin (eli terävä- tai tylppäkulmaisiin) kolmioihin.

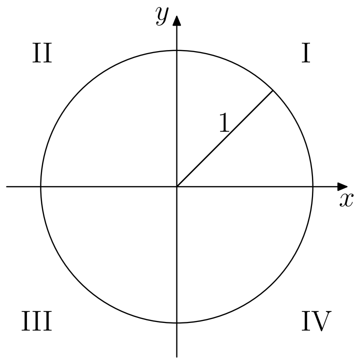
Yleisesti merkitään kolmion sivuja kirjaimilla a, b ja c sekä niiden vastaisia kulmia kirjaimilla α, β ja γ.



Kuva 91:

3.5.1 Tylpän kulman sini ja kosini

Osa vinokulmaisista kolmioista on tylppäkulmaisia, joten on tarpeellista laajentaa sinin ja kosinin määrittely koskemaan myös tylppiä kulmia. Edellähän trigonometriset funktiot määriteltiin suorakulmaisen kolmion avulla, jolloin määritelmä käsitti vain terävät kulmat ($0° < \alpha < 90°$). Suorakulmaisessa kolmiossa kulma ei koskaan voi olla tylppä, joten tylpille kulmille määritelmä on laadittava toisin.



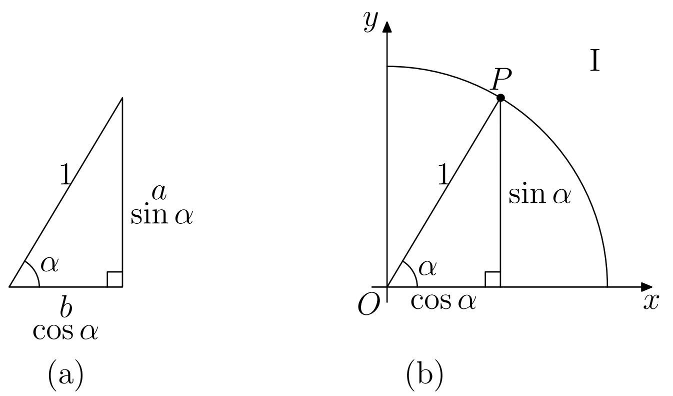
Kuva 92:

Siirrytään suorakulmaiseen koordinaatistoon, joka jakaa tason neljään *neljännekseen.* Neljännekset nimetään käyttäen roomalaisia numeroita $I-IV$, numerointi kiertää vastapäivään (ks. kuva 92). Suurempien kuin $90°$ olevien kulmien sinin ja kosinin arvojen laskemista varten piirretään *yksikköympyrä* suorakulmaiseen koordinaatistoon. Yksikköympyrän keskipiste on origossa ja sen säde on yksi.

Kuten suorakulmaisen kolmion tapauksesta muistetaan, trigonometrisen funktion arvohan riippuu vain kulman suuruudesta eikä esimerkiksi kolmion koosta. Seuraavaksi tarkastellaan kolmiota, jonka hypotenuusan pituus on yksi. Hypotenuusan pituudeksi valitaan yksi, jotta kolmio voidaan sijoittaa yksikköympyrään. Jos tämän kolmion kateettien pituudet ovat a ja b, niin kuten kuvasta 93 (a) voidaan huomata

$$\sin\alpha = \frac{a}{1} = a \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = \frac{b}{1} = b.$$

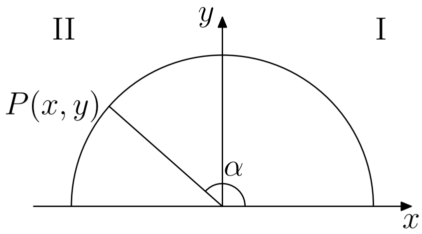
Tällaisessa kolmiossa kateettien pituudet siis ilmoittavat suoraan sinin ja kosinin arvot.



Kuva 93:

Kun edellä esitetty kolmio sijoitetaan yksikköympyrään, niin kulma α laitetaan origoon siten, että sen oikeakylki tulee x-akselille jolloin kulman vasenkylki eli hypotenuusa muodostaa yksikköympyrän säteen. Pistettä P joka on yksikköympyrän kaarella kutsutaan *kehäpisteeksi.* Pisteen P koordinaatit ovat $x =\cos\alpha$ ja $y =\sin\alpha$. Eli sinin ja kosinin arvot saadaan suoraan kehäpisteen koordinaateista (kuva 93 (b)).

Kun kehäpiste P siirtyy toiseen neljännekseen, positiivisen x-akselin (kulman oikea kylki) ja pisteestä P piirretyn yksikköympyrän säteen välinen kulma α on tylppä (kuva 94). Nyt saadaankin siis sini ja kosini määriteltyä kaikille kulmille $0° < \alpha < 180°$.



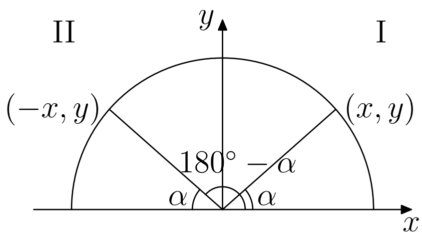
Kuva 94:

Määritelmä 3.2.

$$\begin{aligned} sin\ \alpha &= \textit{kehäpisteen } y\textit{-koordinaatti ja} \\ cos\ \alpha &= \textit{kehäpisteen } x\textit{-koordinaatti} \end{aligned}$$

Kulmien sinin ja kosinin arvoja määritettäessä tulee ottaa huomioon, että kosini on positiivinen ensimmäisessä mutta negatiivinen toisessa neljänneksessä ja sini on positiivinen sekä ensimmäisessä että toisessa neljänneksessä.

Symmetrian nojalla voidaan tylpän kulman trigonometristen funktioiden arvot aina lausua terävän kulman avulla (kuva 95).



Kuva 95:

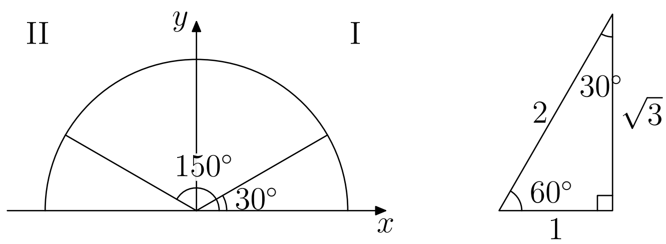
Suplementtikulmina kulmien α ja $180° - \alpha$ sinit ovat yhtä suuret, koska sinin arvo on kehäpisteen y-koordinaatti. Suplementtikulmien α ja $180° - \alpha$ kosinit ovat puolestaan toistensa vastalukuja, koska kosini on kehäpisteen x-koordinaatti.

Määritelmä 3.3.

$$\begin{aligned} sin(180° - \alpha) &= sin\ \alpha \\ cos(180° - \alpha) &= -cos\ \alpha \end{aligned}$$

Edellä esitettyjä kaavoja kutsutaan *palautuskaavoiksi.*

Esimerkki 3.14. Määritä lausekkeiden $\sin 150°$ ja $\cos 150°$ tarkat arvot.
Ratkaisu: Käytetään apuna palautuskaavoja ja muistikolmioita (kuva 96).



Kuva 96:

$$\begin{aligned} \sin 150° &= \sin 30° = \frac{1}{2} \\ \cos 150° &= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Vastaus: $\sin 150° = 1/2$ ja $\cos 150° = -\sqrt{3}/2$.

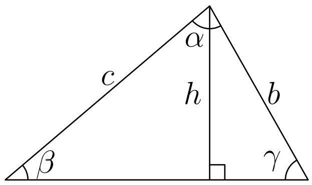
Tehtäviä:

3.22 Määritä tarkat arvot käyttäen hyväksi muistikolmioita.
a) $\sin 45°$ **b)** $\cos 45°$ **c)** $\sin 135°$ **d)** $\cos 135°$

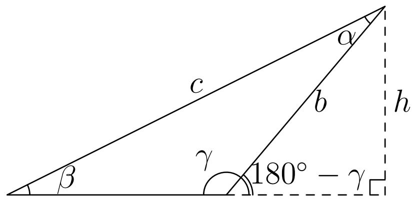
3.23 Määritä kulma α, kun sen kehäpisteen P koordinaatit ovat
a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **c)** $(1, 0)$ **d)** $(0, 1)$.

3.5.2 Pinta-ala

Aikaisemmin on käsitelty miten kolmion pinta-ala lasketaan, kun sen kanta ja korkeus ovat tiedossa. Pinta-alahan opetettiin laskemaan jakamalla kannan ja korkeuden tulo kahdella. Suorakulmaisen kolmion tapauksessa kanta ja korkeus ovat helposti määritettävissä, vinokulmaisilla kolmioilla näin ei kuitenkaan aina ole. Vinokulmaisille kolmioille pinta-alan laskukaava saadaan muokattua trigonometriseen muotoon. Seuraavaksi kolmion pinta-alan laskukaavan trigonometrisen muodon johtamista tutkitaan erikseen teräväkulmaisen ja tylppäkulmaisen kolmion tapauksissa.



(a) teräväkulmainen kolmio



(b) tylppäkulmainen kolmio

Kuva 97:

(1) Teräväkulmainen kolmio (kuva 97 (a)):
Sinin määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{h}{b} \quad \Big\| \cdot b \neq 0 \\ h &= b\sin\gamma \end{aligned}$$

Näin ollen kolmion pinta-ala

$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

(2) Tylppäkulmainen kolmio (kuva 97 (b)):
Sinin määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \gamma) &= \frac{h}{b} \quad \Big\| \cdot b \neq 0 \\ h &= b\sin(180^\circ - \gamma) \\ &= b\sin\gamma \quad \text{(palautuskaava)} \end{aligned}$$

Näin ollen kolmion pinta-ala

$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

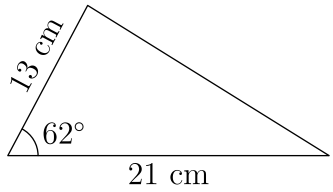
Kuten huomataan kolmion pinta-ala on sama sen muodosta riippumatta. Vastaava tulos saadaan, valitsemalla kolmion kannaksi a:n asemasta jokin muu kolmion sivuista.

Määritelmä 3.4. *Kolmion pinta-ala*

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

eli puolet kahden sivun ja niiden välisen kulman tulosta.

Esimerkki 3.15. Kolmion kaksi sivua ovat 21 cm ja 13 cm sekä niiden välinen kulma 62°. Laske kolmion pinta-ala.
Ratkaisu:



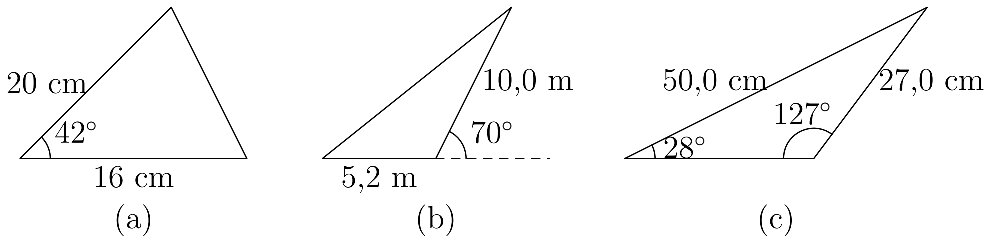
Kuva 98:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 13\cdot \sin 62^\circ \approx 121$$

Vastaus: Kolmion pinta-ala on 121 cm^2.

Tehtäviä:

3.24 Laske kolmion pinta-ala.



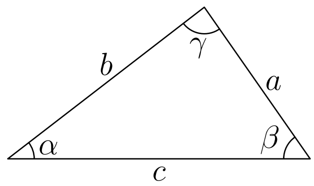
Kuva 99: Tehtävä 3.24

3.25 Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat 52° ja kyljet 17 cm. Laske kolmion pinta-ala.

3.5.3 Sinilause

Edellä esitettyä kolmion pinta-alan trigonometristä laskukaavaa käyttämällä, kolmion pinta-ala voidaan laskea kolmella eri tavalla. Kolmion pinta-alahan on sama laskettiinpa se sitten mistä kulmasta katsottuna tahansa, joten merkitään kaikki kolme pinta-alan lauseketta yhtä suuriksi (kuva 100).

$$A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$



Kuva 100:

Sievennetään nyt yhtälöä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma \quad & \Big\| \cdot \frac{2}{abc} \\ \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}, & \end{aligned}$$

joka tavallisesti esitetään muodossa

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

saatua tulosta kutsutaan *sinilauseeksi.*

Lause 3.16. (Sinilause)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

eli kolmiossa sivun suhde vastaisen kulman siniin on vakio.

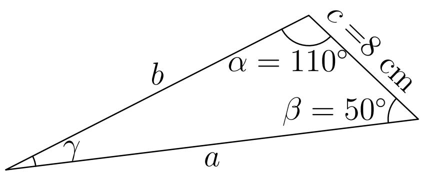
Kun kolmiosta tiedetään yksi sivu-kulma-vastinpari ja sen lisäksi jokin sivu tai kulma, niin kolmio voidaan ratkaista sinilauseen avulla.

Esimerkki 3.16. Kolmion ABC kahden kulman suuruudet ovat 110° ja 50°, ja kolmion pienintä kulmaa vastaavan sivun pituus on 8 cm. Ratkaise kolmio.
Ratkaisu: Kolmion ratkaiseminen tarkoittaa, että määritetään kolmion kaikkien sivujen pituudet ja kulmien suuruudet sekä lasketaan kolmion pinta-ala.

Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin kolmion kolmas kulma

$$\gamma = 180^\circ - (110^\circ + 50^\circ) = 20^\circ.$$

Koska kolmion pienintä kulmaa vastaava sivu oli 8,00 cm, niin silloin se on 20° kulmaa vastaava sivu.



Kuva 101:

Vielä pitää ratkaista sivut a ja b sekä kolmion pinta-ala.
Sivu a:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{c}{\sin\gamma} && \Big\| \ \alpha = 110^\circ,\ \gamma = 20^\circ,\ c = 8,00 \text{ cm} \\
\frac{a}{\sin 110^\circ} &= \frac{8,00}{\sin 20^\circ} && \Big\| \ \cdot \sin 110^\circ \\
a &= \frac{8,00 \cdot \sin 110^\circ}{\sin 20^\circ} \\
a &\approx 21,98
\end{aligned}$$

Sivu b:

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\sin\beta} &= \frac{c}{\sin\gamma} && \Big\| \ \beta = 50^\circ,\ \gamma = 20^\circ,\ c = 8,00 \text{ cm} \\
\frac{b}{\sin 50^\circ} &= \frac{8,00}{\sin 20^\circ} && \Big\| \cdot \sin 50^\circ \\
b &= \frac{8,00 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \\
b &\approx 17,92
\end{aligned}$$

Pinta-ala:

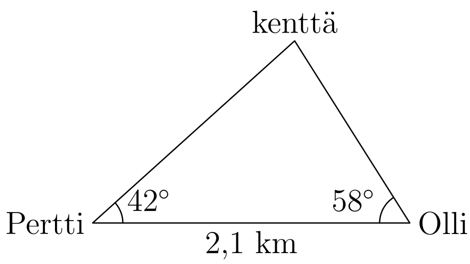
$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} bc \sin\alpha && \Big\| \ b = \frac{8,00 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ},\ c = 8,00,\ \alpha = 110^\circ \\
A &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8,00 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot 8,00 \cdot \sin 110^\circ \approx 67,35
\end{aligned}$$

Vastaus: Kolmion sivut ovat 21,98 cm, 17,92 cm ja 8,00 cm, kulmat 110°, 50° ja 20° sekä pinta-ala 67,4 cm^2.

Tehtäviä:

3.26 Kolmion ABC kahden kulman suuruudet ovat 41° ja 68° sekä näiden välisen sivun pituus on 14,00 cm. Ratkaise kolmio.

3.27 Pertti ja Olli asuvat 2,1 km päässä toisistaan. Tie jalkapallokentälle lähtee 42° kulmassa Pertin luota ja 58° kulmassa Ollin luota (kuva 102). Kummalla pojista on pidempi matka kentälle ja kuinka paljon pidempi matka on?

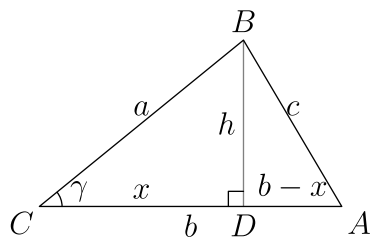


Kuva 102: Tehtävä 3.27

3.28 Suoralla laivareitillä peräkkäin kulkevat laivat havaitsevat samaan aikaan suoraan edessään majakan. Edellä kulkeva alus näkee majakan 6° kulmassa ja perässä tuleva 3° kulmassa. Majakan tiedetään olevan 32 m korkea. Kuinka kaukana laivat ovat toisistaan?

3.5.4 Kosinilause

Kosinilause on Pythagoraan lauseen laajennus vinokulmaisille kolmioille.



Kuva 103:

Korkeusjana BD jakaa kolmion ABC kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi $\triangle BCD$ ja $\triangle ABD$ (kuva 103). Näiden kahden suorakulmaisen kolmion ja Pythagoraan lauseen avulla saadaan johdettua yhteys vinokulmaisen kolmion sivujen pituuksien ja yhden kulman välille.

Kolmiosta BCD nähdään, että

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{x}{a} \qquad \Big\| \cdot a,\ a \neq 0 \\ x &= a\cos\gamma \end{aligned}$$

ja Pythagoraan lauseen nojalla

$$x^2 + h^2 = a^2.$$

Kolmiosta ABD puolestaan saadaan Pythagoraan lauseella

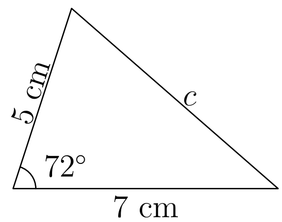
$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b-x)^2 \\ c^2 &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ c^2 &= x^2 + h^2 + b^2 - 2bx && \Big\| \; x^2 + h^2 = a^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2bx && \Big\| \; x = a\cos\gamma \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Lause 3.17. (Kosinilause) *Kun γ on sivun c vastainen kulma, niin*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Sama yhteys voidaan johtaa vastaavasti tylppäkulmaisille kolmioille. Jos puolestaan $\gamma = 90°$ eli kolmio on suorakulmainen, niin $\cos\gamma = 0$ ja päädytään Pythagoraan lauseeseen.

Esimerkki 3.17. Kolmion kaksi sivua ovat 5,0 cm ja 7,0 cm ja niiden välinen kulma 72°. Laske annetun kulman vastainen sivu.
Ratkaisu:



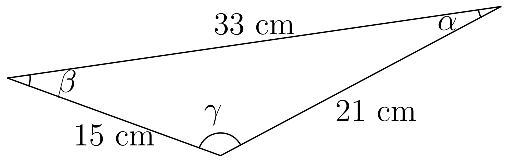
Kuva 104:

Sivun c pituus saadaan ratkaistua kosinilauseen avulla.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ c^2 &= 5,0^2 + 7,0^2 - 2 \cdot 5,0 \cdot 7,0 \cdot \cos 72° \\ c^2 &= 74,0 - 70,0 \cdot \cos 72° && \Big\| \; \sqrt{}, \; c > 0 \\ c &= \sqrt{74,0 - 70,0 \cdot \cos 72°} \\ c &\approx 7,2 \end{aligned}$$

Vastaus: Kolmion kolmas sivu on 7,2 cm.

Esimerkki 3.18. Kolmion sivujen pituudet ovat 15,0 cm, 21,0 cm ja 33,0 cm. Laske kolmion kulmien suuruudet.
Ratkaisu:



Kuva 105:

Ratkaistaan ensin kulma γ käyttäen kosinilausetta.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ \cos\gamma &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ \cos\gamma &= \frac{15,0^2+21,0^2-33,0^2}{2\cdot 15,0\cdot 21,0} \\ &= \frac{-423}{630} \\ &\approx -0,671 \\ \gamma &\approx \arccos(-0,671) \approx 132^\circ \end{aligned}$$

Kulmat α ja β voidaan nyt helposti ratkaista sinilauseen avulla.

$$\begin{aligned} \frac{15,0}{\sin\alpha} &= \frac{33,0}{\sin 132^\circ} \\ \sin\alpha &= \frac{15,0\cdot\sin 132^\circ}{33,0} \approx 0,340 \end{aligned}$$

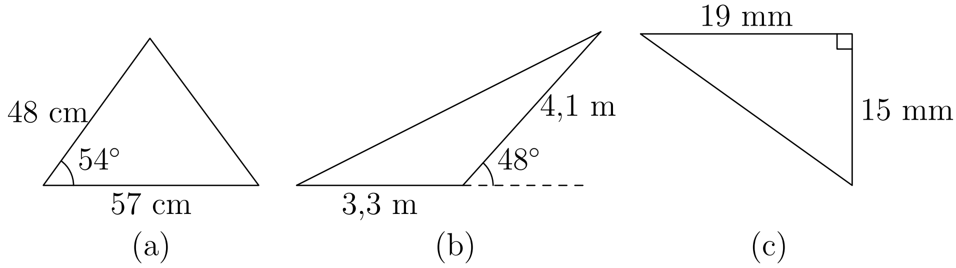
Kulmalle α saadaan kaksi arvoa 20° ja $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$, koska $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ \approx 0,340$. Arvo 160° ei kuitenkaan kelpaa, koska kolmion kulmien summa on 180°.
Kulma β saadaan nyt lausekkeesta

$$\beta \approx 180^\circ - 132^\circ - 20^\circ = 28^\circ.$$

Vastaus: Kolmion kulmat ovat 20° , 28° ja 132°.

Tehtäviä:

3.29 Laske kolmannen sivun pituus kuvan 106 kolmioista.



Kuva 106: Tehtävä 3.29

3.30 Kolmion sivut ovat 5, 8 ja $\sqrt{19}$. Laske kolmion pienin kulma.

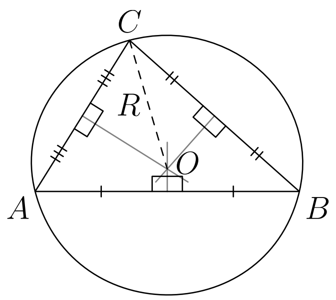
3.31 Joen rantaan rakennetaan kolmionmuotoista lammasaitausta. Mutkitteleva joki rajaa aluetta kahdelta sivulta, näille sivuille ei tarvita aitaa. Kuinka paljon aitaverkkoa tarvitaan aitauksen kolmatta sivua varten, kun joen mutka on 122° ja joen rajaamien sivujen pituudet 72 m ja 54 m?

3.32 Kolmion yksi kulma on 37° ja sen viereinen sivu 7,3 cm. Kolmion pinta-ala on 19,4 cm^2. Määritä kolmion muiden kulmien suuruudet ja sivujen pituudet.

3.6 Merkilliset pisteet

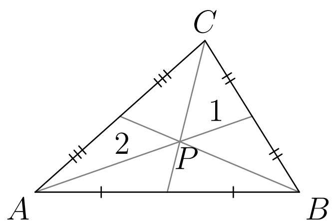
Kolmion merkillisiksi pisteiksi kutsutaan pisteitä, jotka muodostuvat kolmion keskinormaalien, keskijanojen, kulmanpuolittajien ja korkeusjanojen leikkauspisteisiin.

Lause 3.18. *Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Leikkauspiste on yhtä kaukana kaikista kolmion kärjistä, joten leikkauspisteestä mihin tahansa kolmion kärkeen piirretty jana on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde, R* (kuva 107)*.*



Kuva 107:

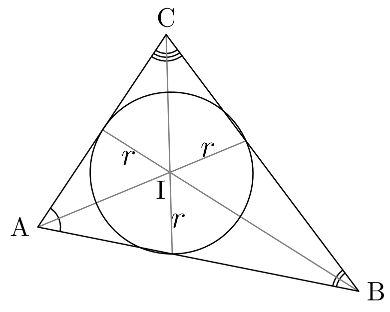
Lause 3.19. *Kolmion keskijanat eli mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa mediaanit kärjestä lukien suhteessa 2:1* (kuva 108)*.*



Kuva 108:

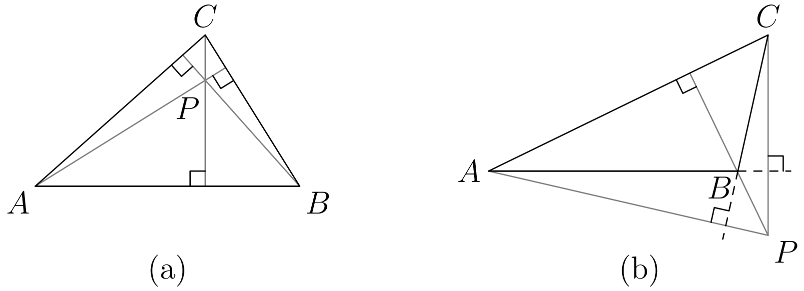
Kolmion keskijanojen leikkauspistettä kutsutaan *kolmion painopisteeksi.*

Lause 3.20. *Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste* (kuva 109)*.*



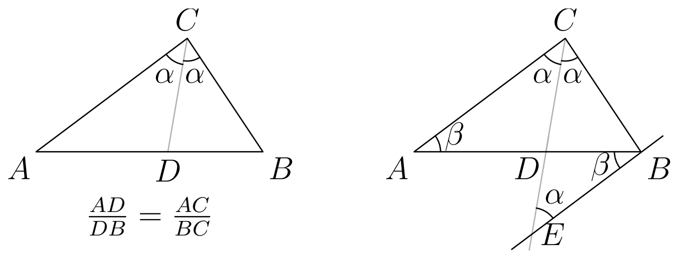
Kuva 109:

Lause 3.21. *Kolmion korkeusjanat* (kuva 110 (a)) *tai niiden jatkeet* (kuva 110 (b)) *leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*



Kuva 110:

Lause 3.22. (**Kolmion kulman puolittajalause**) *Kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.*



Kuva 111:

Todistus. Olkoon D piste, jossa kulman ACB puolittaja leikkaa sivun AB. Piirretään pisteen B kautta suoran AC suuntainen suora ja merkitään sen ja suoran CD leikkauspistettä E:llä. Koska $AC \parallel BE$ ovat kulmat BED ja ACD samankohtaisina kulmina yhtä suuret. Samoin $\sphericalangle DBE = \sphericalangle DAC$. Näin ollen $\triangle BDE \sim \triangle ADC$ (kk). Tiedetään, että yhdenmuotoisten kolmioiden sivut ovat verrannolliset, joten

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BE}.$$

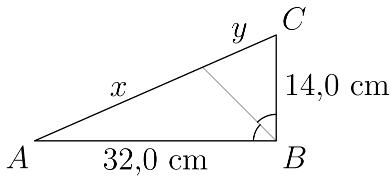
Koska $\sphericalangle BED = \sphericalangle ACD$ ja lisäksi oletuksen mukaan $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$, on $\sphericalangle BED = \sphericalangle DCB$ ja täten $\triangle EBC$ on tasakylkinen, eli $EB = BC$. Kun sijoitetaan $EB = BC$ verrantoon $AD : DB = AC : BE$ saadaan väittämä

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}.$$

Esimerkki 3.19. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 32,0 cm ja 14,0 cm. Kuinka suuriin osiin suoran kulman puolittaja jakaa hypotenuusan?
Ratkaisu: Hypotenuusan pituus saadaan Pythagoraan lauseella.

$$AC = \sqrt{32,0^2 + 14,0^2} = 34,9.$$

Kulman puolittajalauseen mukaan $\frac{x}{y} = \frac{32{,}0}{14{,}0}$. Sijoittamala $y = 34,9 - x$



Kuva 112:

edelliseen lausekkeeseen saadaan

$$\frac{x}{34,9 - x} = \frac{32,0}{14,0}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä x

$$\begin{aligned}
\frac{x}{34,9-x} &= \frac{32,0}{14,0} \\
14x &= 32 \cdot (34,9-x) \\
14x &= 1116,8 - 32x \\
46x &= 1116,8 \\
x &\approx 24,3.
\end{aligned}$$

Näin ollen $y \approx 10,6$.

Vastaus: Hypotenuusan osat ovat 24,3 cm ja 10,6 cm.

Tehtäviä:

3.33 Piirrä kolmio ja määritä sen merkilliset pisteet.

3.34 Kolmion sivujen pituudet ovat 4,0 cm, 5,0 cm ja 6,0 cm. Kuinka suuriin osiin pienimmän kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun?

3.35 Osoita, että kolmio on tasakylkinen, jos mediaani on kohtisuorassa sivua vastaan.

3.36 Tasakylkisen kolmion kyljen pituus on 10 cm ja kannan 12 cm. Kuinka pitkä on kolmion sisään piirretyn ympyrän säde?

3.37 Kolmion piirin pituus on 36,0 cm. Kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun 5,0 cm ja 7,0 cm pitkiin osiin. Laske kolmion sivujen pituudet.

3.7 Heronin kaava

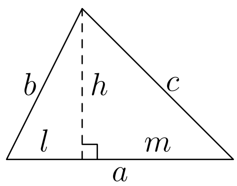
Kolmion sivujen pituudet määräävät sen pinta-alan, *Heronin kaava* kolmion pinta-alan laskemiseksi kertoo miten.

Lause 3.23. (Heronin kaava) *Olkoon kolmion sivujen pituudet a, b ja c ja olkoon $p = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ puolet sen piirin pituudesta. Tällöin*

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Katsotaan seuraavaksi yksi tapa todistaa Heronin kaava.

Todistus. Olkoon kolmion sivut a, b ja c sekä korkeus h (kuva 113).



Kuva 113:

Lisäksi $a = l+m$, $b^2 = h^2+l^2$ ja $c^2 = h^2+m^2$. Vähentämällä toisena mainittu lauseke viimeisestä saadaan $l^2 - m^2 = b^2 - c^2$. Kun jaetaan molemmat puolet tekijällä $a = l + m$, saa edelllä esitetty yhtälö muodon

$$l - m = \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

Kun lisätään molemmille puolille $l + m = a$, saadaan ratkaistuksi l

$$l = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Tiedetään, että kolmion pinta-ala saadaan lausekkeesta $A = \frac{ah}{2}$, lisäksi kyseisestä kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla saadaan $h = \sqrt{b^2 - l^2}$. Sijoitetaan seuraavaksi saatu l:n lauseke h:n lausekkeeseen ja tämä edelleen pinta-alan lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} A = \frac{ah}{2} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \end{aligned}$$

Kun edellinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla 4 ja korotetaan toiseen potenssiin, saadaan

$$16A^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Muutamalla laskutoimituksella edellinen yhtälö saadaan muokattua muotoon

$$16A^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2],$$

joka edelleen on ekvivalentti muodon

$$16A^2 = (a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)$$

kanssa. Kun nyt kirjoitetaan saatu yhtälö muotoon

$$A^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2}$$

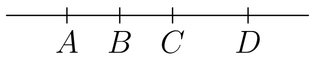
ja määritellään p seuraavasti $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, niin kolmion pinta-alan lauseke saadaan Heronin kaavan muotoon

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

VASTAUKSET:

2.1 **a)** tasoa **b)** tasoa **c)** suoraa **d)** suoraa **e)** pistettä

2.2 **a)** AB $(= BA)$, AC, AD, BC, BD ja CD
b) Koska pisteet ovat annetussa järjestyksessä suoralla, ovat puolisuorat $AB = AC = AD$, $BC = BD$, BA, CD, $CB = CA$ ja $DC = DB = DA$.



Kuva 114: Tehtävä 2.2

2.3 **a)** 6 **b)** 10 **c)** 3 **d)** 1

2.4 **a)** $|AB| = 3+7 = 10$, $|AC| = 5+5+10 = 20$, $|AF| = 5+5 = 10$
b) Janan AF keskipiste on piste E, janan AC keksipiste on piste F.

2.5 $|CB| = 7 - 4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

2.6 **a)** voi olla, **b)** voi olla, **c)** ei voi olla, $5 + 2 = 7 < 8$, **d)** voi olla, **e)** ei voi olla, $1 + 3 = 4 < 5$, **f)** ei voi olla, $1,5 + 3,5 = 5 < 5,5$.

2.7 Kolmannen sivun on oltava pienempi kuin kahden annetun sivun summa eli $15 + 24 = 39$ ja suurempi kuin kahden annetun sivun erotus $24-15 = 9$. Näin on oltava, koska kolmiossa minkätahansa kahden sivun summan on oltava suurempi kuin kolmannen sivun pituus.

2.8 **a)** $\sphericalangle ABC$, **b)** $\sphericalangle KLH$, **c)** $\sphericalangle PRS$

2.9 **a)** $12,5°$ **b)** $(62\frac{31}{120})° \approx 62,26°$ **c)** $(123\frac{17}{80})° \approx 123,21°$

2.10 **a)** $12°18'$ **b)** $54°25'12''$ **c)** $1°14'42''$

2.11 **a)** terävä/kovera, **b)** kupera, **c)** tylppä/kovera, **d)** kupera

2.12 **a)** $\frac{5}{6} \cdot 180° = 150°$ **b)** $90° + \frac{1}{2} \cdot 30° = 105°$
c) $120° + \frac{1}{4} \cdot 30° = 127,5°$

2.13 **a)** $\begin{cases} \alpha = 40° \\ \beta = 50° \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \alpha = 80° \\ \beta = 100° \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \alpha = 160° \\ \beta = 200° \end{cases}$

2.14 $105°$

2.15 $114°$

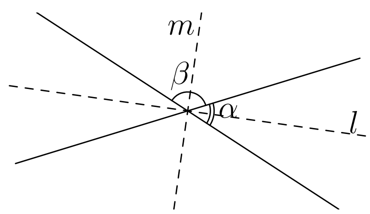
2.16 **a)** $\alpha = 88°$ **b)** $\alpha = 106°$ **c)** $\alpha = 63°$

2.17 **a)** $\alpha = 104°$, $\beta = 76°$, $\gamma = 61°$ **b)** $\alpha = 54°$, $\beta = 62°$, $\gamma = 64°$

2.18 **a)** eivät ole, **b)** ovat

2.19 $\alpha = 25°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 65°$

2.20 **Todistus:** Kulmat α ja β ovat vieruskulmia. Katkoviiva l puolittaa kulman α ja katkoviiva m puolittaa kulman β. Tällöin suora l jakaa kulman α kahteen $\frac{1}{2}\alpha$ suuruiseen osaan ja suora m kulman β kahteen $\frac{1}{2}\beta$ suuruiseen osaan. Koska α ja β ovat vieruskulmia, $\alpha + \beta = 180°$. Siispä on oltava $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.



Kuva 115: Tehtävä 2.20

2.21 **Todistus:** Tiedetään, että $\sphericalangle STQ = \sphericalangle RTP$. Lisäämällä $\sphericalangle PTS$ yhtälön molemmille puolille, saadaan:

$$\sphericalangle STQ + \sphericalangle PTS = \sphericalangle RTP + \sphericalangle PTS.$$

Koska

$$\sphericalangle STQ + \sphericalangle PTS = \sphericalangle PTQ$$

ja

$$\sphericalangle RTP + \sphericalangle PTS = \sphericalangle RTS,$$

sijoittamalla nämä ensimmäiseen yhtälöön, saadaan:

$$\sphericalangle PTQ = \sphericalangle RTS.$$

Näin väittämä on todistettu.

2.22 70°

2.23 **a)** 4 **b)** 3 **c)** 7 **d)** 5 **e)** 6 **f)** 1 **g)** 2

2.24 **a)** 2 **b)** 12 uutta sektoria **c)** 4 uutta segmenttiä

2.25 Voi, kun säteet jotka rajaavat sektorin muodostavat halkaisijan, eli kun jänne on halkaisija.

2.26 AB 180°, ADC 90°, AD 38°, BAD 218°

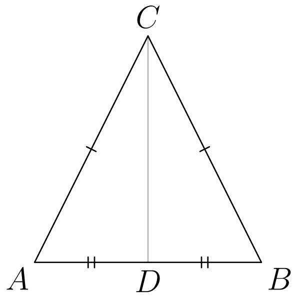
3.1 **a)** $\triangle CDB$ **b)** $\triangle ADC$ ja $\triangle ABC$

3.2 Mahdollisia a), c) ja d).

3.3 **a)** $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ (sks) **b)** $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (sss)
c) $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (kks) **d)** $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (ksk)

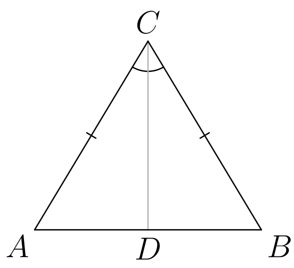
3.4 **a)** $\alpha = 55°$ **b)** $\alpha = 50°$

3.5 **Todistus:** Kolmio ABC on tasakylkinen eli $AC = BC$ (kuva 116). Nyt pitäisi osoittaa, että kantakulmat $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA$ ovat yhtä suuret. Merkitään kannan keskipistettä kirjaimella D ja yhdistetään se kolmion kärkipisteeseen C. Nyt tiedetään siis, että $AD = BD$. Näin ollen $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (sss), koska $AC = BC$, $AD = BD$ ja DC on yhteinen sivu. Yhtenevien kolmioiden ADC ja BDC vastinkulmina kantakulmat $\sphericalangle BAC$ ja $\sphericalangle CBA$ ovat yhtä suuret.



Kuva 116: Tehtävä 3.5

3.6 **Todistus:** Oletetaan, että kolmio ABC on tasakylkinen yhtä pitkinä kylkinä sivut AC ja BC. Lisäksi CD on huippukulman ACB puolittaja, jolloin $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. Nyt pitää siis todistaa, että huippukulman puolittaja CD puolittaa kannan AB. Huippukulman puolittaja CD jakaa kolmion ABC kolmioihin ACD ja BCD, joissa oletusten mukaan $AC = BC$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ ja CD on yhteinen sivu. Näin ollen $\triangle ACD = \triangle BCD$ (sks). Janat AD ja BD ovat yhtenevien kolmioiden vastinsivuina yhtä pitkät. Näin väite on todistettu.



Kuva 117: Tehtävä 3.6

3.7 $x = 21$ ja $y = 18$

3.8 Vesitornin korkeus on 42 m.

3.9 Kaisun meloman matkan pituus oli 27 km.

3.10 **a)** kyllä (kk) **b)** ei **c)** kyllä (kk) **d)** kyllä (sks)

3.11 $3\sqrt{3}$ cm $\approx 5,2$ cm

3.12 277 kukkasen tainta

3.13 **a)** $x = 15$ **b)** $x = 13,6$ cm **c)** $y = 24$ m

3.14 **a)** ei **b)** kyllä **c)** ei

3.15 Ei mahdu.

3.16 $5\sqrt{10} \approx 15,81$

3.17 **a)** $x = 12,3$ cm ja $y = 18,2$ cm
b) $x = 8,2$ cm ja $y = 8,8$ cm

3.18 17,32 m

3.19 Korkeus $h = 14,10$ ja pidempi kanta 40,26.

3.20 $x = 2\sqrt{\frac{2}{7}} \approx 1,07$, $x+3 = 2\sqrt{\frac{2}{7}}+3 \approx 4,07$ ja $3x+1 = 6\sqrt{\frac{2}{7}}+1 \approx 4,21$. Kulmat $14,72°$ ja $75,28°$.

3.21 **a)** 30 cm, **b)** $10\sqrt{3}$ cm$\approx 17,3$ cm, **c)** $75\sqrt{3}$ cm$^2 \approx 129,9$ cm^2

3.22 **a)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

3.23 **a)** 60° **b)** 120° **c)** 0° **d)** 90°

3.24 **a)** 107 cm^2 **b)** 24,4 m^2 **c)** 285,3 cm^2

3.25 140 cm^2

3.26 71°; 9,71 cm; 13,73 cm; 63,05 cm^2

3.27 Pertillä on 400 m pidempi matka kentälle.

3.28 915 m

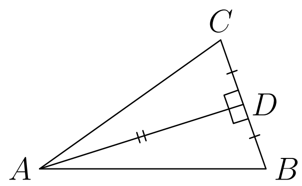
3.29 **a)** 48 cm **b)** 6,8 m **c)** 24 mm

3.30 29°

3.31 111 m

3.32 56°; 87°; 8,8 cm ja 5,3 cm

3.34 1,8 cm ja 2,2 cm



Kuva 118: Tehtävä 3.35

3.35 **Todistus:** Kolmiot ABD ja ACD ovat yhtenevät (sks), sillä $BD = CD$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ ja sivu AD on kolmioille yhteinen (kuva 118). Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivuina $AB = AC$. Näin ollen on todistettu, että kolmio ABC on tasakylkinen.

3.36 3 cm

3.37 10 cm, 12 cm ja 14 cm

Lähteet

[1] Barnett R.: *Schaum's Outline of Theory and Problems of Geometry*. The McGraw-Hill Companies, United States of America, 2000.

[2] Bogomolny A.: *Pythagorean Theorem*. Internet lähde. http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml, 4.6.2007.

[3] Coxeter H.S.M. ja Greitzer S.L.: *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.

[4] Harju T.: *Geometria - lyhyt kurssi*. Matematiikan laitos, Turun yliopisto, 2005.

[5] Hautajärvi T., Ottelin J. ja Wallin-Jaakkola L.: *Laudatur 3 - Geometria*. Otava, Helsinki, 2005.

[6] Jäppinen P., Kupiainen A. ja Räsänen M.: *Lukion Calculus 2 - Geometria, Analyyttinen geometria*. Otava, Helsinki, 2005.

[7] Lang S. ja Murrow G.: *Geometry - A High School Course*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[8] Math Pages: *Heron's Formula and Brahmaguptas Generalization*. Internet lähde. http://www.mathpages.com/home/kmath196.htm, 21.8.2007.

[9] Silfverberg H., Viilo M-L. ja Pippola L.: *Matematiikan taito 3 - Geometria*. WSOY, Porvoo, 1999.

[10] Tarnanen H.:*Matematiikan historia*. Matematiikan laitos, Turun yliopisto.

[11] Väisälä K.: *Geometria*. WSOY, Porvoo, 1968.

[12] Weisstein E.W.: *Pythagorean Theorem*. Internet lähde. MathWorld - A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html, 4.6.2007.

LIITE: MetaPost -tiedostot