Fraktionaalinen Brownin liike rahoituksessa

LuK Eetu Lehtonen

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:
Prof. Jukka Lempa
FT Harto Saarinen

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma
Pääaine: Matematiikka
Tekijä: Eetu Lehtonen
Otsikko: Fraktionaalinen Brownin liike rahoituksessa
Ohjaaja: Prof. Jukka Lempa
Sivumäärä: 61 s., 3 liite s.
Aika: Toukokuu 2026

Toimiva rahoitusjärjestelmä luo pohjan terveelle taloudelle, joka puolestaan ylläpitää yhteiskunnan yleistä hyvinvointia ja kehitystä. Kaikki ponnistelut rahoitusmarkkinoiden lainalaisuuksien ymmärtämiseksi ovat tarpeen tämän tavoitteen saavuttamiseksi. Tässä pro gradu -tutkielmassa perehdytään fraktionaalisena Brownin liikkeenä tunnettuun stokastiseen prosessiin sekä motivoidaan ja tarkastellaan sen soveltamista rahoituksessa. Tarkastelussa keskitytään rahoitusinstrumenttien hinnoittelussa käytettävien mallien volatiliteettiprosessien arviointiin ja erityisesti fraktionaaliseen Brownin liikkeeseen perustuvien mallien osuuteen koko aihealueen tutkimuksen historiassa, kehityksessä ja nykytilanteessa.

Ensimmäisessä luvussa pohjustetaan aihealueen kehityksen historiaa, jonka jälkeen omistetaan kaksi lukua tutkielman kannalta keskeisten matemaattisten esitietojen kertaamiseen. Luvuissa 5 ja 6 esitetään laajasti käytetty Blackin–Scholesin malli, jonka jälkeen siirrytään tarkastelemaan fraktionaalista Brownin liikettä. Luvut 9–13 käsittelevät fraktionaaliseen Brownin liikkeeseen perustuvien mallien muunnelmia, haasteita ja mallien kykyä selittää empiirisiä havaintoja. Lukujen 11–13 ohessa esitetään myös markkinadataan perustuvia havaintoja, jotka auttavat selittämään aihealueen tutkimuksessa esitettyjen tulosten ristiriitoja. Lopuksi esitetään yhteenveto malleista ja niiden soveltuvuudesta.

Tutkielmassa tarkasteltavien fraktionaaliseen Brownin liikkeeseen perustuvien mallien huomataan olevan klassista Blackin–Scholesin mallia joustavampi, tarkempi ja useampaan tilanteeseen soveltuva kokonaisuus, joka pystyy, ainakin näennäisesti, selittämään markkinoilla havaittuja ilmiöitä hyvin. Tarkasteltujen mallien selittämiskyvyn todenperäisyyden kuitenkin huomataan olevan useasta syystä edelleen kiistelty aihe, jossa ei vielä kolme vuosikymmentä kestäneen tutkimuksen aikana olla saavutettu yksimielisyyttä keskeisiin tutkimyskysymyksiin.

Avainsanat: Fraktionaalinen Brownin liike, stokastinen volatiliteetti, karkea volatiliteetti, Blackin–Scholesin malli, volatiliteettipinta, hinnoittelu.

The calculus of probabilities will undoubtedly never be applied to the movement of stock prices, and the dynamics of the stockmarket will never be an exact science.

– Louis Bachelier, 1900

Sisällys

1 Johdanto

Tutkielmassa tarkastellaan fraktionaalisena Brownin liikkeenä tunnettuun stokastiseen prosessiin perustuvia matemaattisia malleja rahoitusinstrumenttien hinnoittelussa. Hintaprosessin epävarmuutta pyritään karakterisoimaan ja etsimään havaintoja vastaava malli. Sopivan mallin kehittäminen sujuvoittaa pääoman tehokasta ja tarkoituksenmukaista kohdistamista, joka puolestaan avustaa luonnonvarojen ja työvoiman tehokkaassa hyödyntämisessä. Rahoitusinstrumenttien epävarmuuden ymmärtäminen on täten konkreettisesti yhteiskunnan hyvinvointia tukeva ja aina ajankohtainen tutkimuskysymys.

Erään keskeisen rahoitusinstrumenttien osajoukon, optioiden, matemaattinen mallintaminen perustuu nykymuodossaan pitkälti Blackin ja Scholesin (1973) esittelemään, stokastiseen differentiaalilaskentaan perustuvaan, lähestymistapaan, jossa alla olevan kohde-etuuden hintadynamiikan määrää yhtälö

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t.$$

Blackin ja Scholesin vakioisen volatiliteetin jälkeen ehkä merkittävin joukko malleja on ollut stokastisen volatiliteetin mallit. Eri kohde-etuuksien hintaprosessien volatiliteetin ominaisuuksien tunnistaminen ja kvantitatiivinen määrittely on ollut 1970-luvun jälkeen alati kehittyvä tutkimusala.

Tutkielmassa pyritään määrittämään hintaprosessin volatiliteetin tyypillisiä ominaisuuksia ja tarkastelemaan pystyvätkö fraktionaalisen Brownin liikkeen mallit selittämään volatiliteetin havaittuja ominaisuuksia. Volatiliteetin mallintamisen yksi keskeisistä kysymyksistä on prosessin muistin, eli autokovarianssin määrittely. Fraktionaalisen Brownin liikkeen malleissa autokovarianssin määrittää Hurstin parametrina tunnettu muuttuja H, jonka arvo ja arvon estimoinnissa käytetyt menetelmät ovat edelleen avoimia tutkimuskysymyksiä. Sopivan mallin valitsemista varten esitetään useita kirjallisuudessa esiintyviä tuloksia, empiirisiä havaintoja markkinadatasta sekä vähäiselle huomiolle jäänyt volatiliteettia ennustavan VIX-indeksin ja Hurstin parametrin välinen yhteys.

2 Historiaa

Rahoitusinstrumenttien hinnoittelun historian tunteminen on tärkeää, jotta aihealueen kehityksen tunteva tutkija tai rahoitusalan ammattilainen voi välttää jo entuudestaan tunnetut teoreettiset kompastuskivet. Tässä luvussa annetaan lyhyt kuvaus tutkielman aihealueen historiallisesta kehityksestä.

2.1 Todennäköisyyslaskennan historiaa

Tarkastellaan tilannetta, jossa on kaksi pelaajaa. Molemmat asettavat yhtä suuren panoksen ja aloittavat pelin, jossa arvataan miten päin heitetty kolikko laskeutuu. Pelin voittaa pelaaja, joka ensimmäisenä saavuttaa entuudestaan sovitun määrän oikeita arvauksia. Peli kuitenkin keskeytyy ennen kuin kumpikaan pelaajista ehtii voittaa. Herää kysymys: miten potti jaetaan pelaajien kesken?

Kyseistä *keskeytyneen pelin ongelmaa* tarkasteli matematiikan työkaluilla ensimmäisenä italialainen matemaatikko Luca Pacioli [1]. Kolmannen asteen yhtälön kaavasta tunnettu Paciolin maanmies, Niccolò Tartaglia, ei ollut yhtä mieltä Paciolin ratkaisusta [2] ja esitti oman ratkaisunsa. Hän ei kuitenkaan ollut varma ongelman täydellisen ratkaisun olemassaolosta ja uskoi minkä tahansa jaon johtavan lopulta erimielisyyksiin.

Myöhemmin keskeytyneen pelin ongelmaan palasivat kirjeenvaihdossaan 1650-luvulla eurooppalaisen matematiikan suurmiehet Blaise Pascal ja Pierre de Fermat [3]. Kirjeenvaihdossaan Fermat ja Pascal saivat ratkaistua ongelman eri metodein. Tuottoisasta kirjeenvaihdosta syntyi Pascalin kehittämä käsitys odotusarvosta, jota Christiaan Huygens (1657) myöhemmin jalosti tarkempaan muotoon.

Keväällä 1809 eräs toinen matematiikan merkkihenkilö, Carl Friedrich Gauss, julkaisi teoksensa *Theoria Motus Corporum Coelestium*, jossa, monien muiden tärkeiden tulosten muassa, hän esittää normaalijakauman tiheysfunktion. Ei vuottakaan myöhemmin ranskalainen matemaatikko Pierre-Simon Laplace soveltaa normaalijakaumaa todistaessaan keskeisen raja-arvolauseen, joka luo vankan pohjan todennäköisyyslaskennan tulevalle kehitykselle [6].

2.2 Johdannaisista

Johdannaiset, eli sijoitusinstrumentit joiden arvo pohjautuu toisten omaisuusluokkien arvoon, ovat oleellinen osa taloudellisten riskien hallintaa. Johdannaisten tuoma synteettinen altistus muihin omaisuusluokkiin mahdollistaa suojaavien positioiden luomisen. Suojaavassa positiossa johdannaisen haltija voi vähentää oman portfolionsa herkkyyttä reagoida epäsuotuisasti markkinoilla tapahtuviin satunnaisiin ja odottamattomiin muutoksiin. Suojauksen lisäksi johdannaiset soveltuvat myös spekulointiin ja mahdollistavat osakekauppaa merkittävästi riskillisemmät sijoitukset.

Johdannaisten historia vie kauemmas kuin luotettavat ensikäden lähteet yltävät. Yksi ensimmäisistä maininnoista option kaltaisesta sopimuksesta löytyy Aristotleen kirjasarjasta *Politiikka*, jossa mainitaan sopimus, jossa ostetaan oikeus oliiviöljypuristimen vuokraamiseksi, kuitenkin ilman obligaatiota oikeuden toteuttamiseen. Euroopassa käytiin kauppaa moninaisilla johdannaisilla ainakin vuodesta 1600 eteenpäin

[14]. Optiokaupat olivat usein bilateraalisia ja niiden hinnoittelu perustui kokemukseen ja intuitioon [15].

Fischer Black ja Myron Scholes (1973) julkaisevat ensimmäisen, stokastiseen differentiaalilaskentaan perustuvan, analyyttisen mallin eurooppalaisten optioiden hinnoitteluun. Myöhemmin Cox et al. (1979) julkaisevat diskreetin menetelmän amerikkalaisten optioiden hinnoitteluun. Riittävä ymmärrys optioiden hinnoittelusta salli niiden täyden potentiaalin toteuttamisen ja yleisti niiden käytön tehden niistä yhden rahoitusmarkkinoiden kulmakivistä.

Listattujen osakkeiden yhteenlasketun markkina-arvon on arvoitu vuonna 2024 olevan noin 125 biljoonaa yhdysvaltain dollaria [16], kun taas avoimien optioiden alla olevien kohde-etuuksien yhteenlasketun markkina-arvon on arvioitu olevan noin 850 biljoonaa yhdysvaltain dollaria [17]. Edelleen Yhdysvaltain arvopaperi- ja pörssikomissio (SEC) arvioi, että optiot muodostavat suuren enemmistön toimeksiantoihin liittyvästä tietoliikenneviestinnästä, mistä voidaan päätellä optiomarkkinoiden kaupankäyntivolyymin ja tarjolla olevien instrumenttien määrän olevan suuri.

Likvidien johdannaismarkkinoiden kehittyminen on johtanut myös merkittävään muutokseen alla olevien kohde-etuuksien käytöksen mallinnuksessa. Johdannaismarkkinat antavat esimerkiksi katsauksen markkinoiden näkemyksestä alla olevan kohde-etuuden, tai monen muun instrumentin, hintaprosessin kehitykseen. Täten alla olevan kohde-etuuden käyttäytymisen mallintaminen ei perustu pelkästään historialliseen dataan, vaan sitä tukee nyt myös tieto markkinoiden odotuksista tulevaisuudelle.

2.3 Todennäköisyysteoria finanssimatematiikan työkaluna

Vuonna 1827 kasvitieteilijä Robert Brown huomioi siitepölyhiukkasten liikkuvan nesteessä satunnaisesti, ilman ilmeistä syytä. Brownin huomion formalisoi matematiikan kielelle Louis Bachelier väitöskirjassaan *Théorie de la Spéculation*. Brownin liikkeen kuitenkin teki tunnetuksi fysiikan julkaisut, joissa Albert Einstein (1905) postuloi teoreettisella mallilla atomien olemassaolon, ja sittemmin Jean Perrin (1909), joka kokeellisesti vahvisti atomien olemassaolon. Perrin palkittiin työstään fysiikan Nobelin palkinnolla vuonna 1926. Bachelierin väitöskirja jäi vuosikymmeniksi vähemmälle huomiolle, joskin hän sittemmin sai tunnustusta finanssimatematiikan pioneerina, sillä hänen väitöskirja antoi ensimmäiset stokastiikkaan perustuvat matemaattiset mallit osakkeiden ja optioiden hinnoittelulle ja loi perustan finanssimatematiikan tieteenalalle.

Vuonna 1923 Norbert Wiener osoitti Bachelierin kuvaileman Brownin liikkeen olemassaolon, minkä johdosta Brownin liikkeen ajamaa stokastista prosessia kutsutaan myös Wienerin prosessiksi. Finanssimatematiikan alalla saatiin kuitenkin seuraavia merkittäviä edistysaskelia odottaa vuosikymmeniä. Vuonna 1956 tilastotieteilijä Jimmy Savage lähetti avoimen kirjeen kollegoilleen, jossa hän esitteli Bachelierin työn [12][1]. Edelleen joitakin vuosia myöhemmin vuonna 1965 tunnettu amerikkalainen ekonomisti Paul Samuelson julkaisi jalostetun version Bachelierin mallista. Bachelier mallinsi osakkeen hintaa Brownin liikkeenä, joka kuitenkin mahdollistaa osakkeiden negatiiviset hinnat. Samuelsonin malli kiertää tämän soveltamalla geometrista Brow-

[1]Samuelson toteaa julkaisussaan luennoinneensa geometrisesta Brownin liikkeestä jo vuonna 1953.

nin liikettä. Samoihin aikoihin ranskalainen matemaatikko Benoit Mandelbrot (1963) tutki malleja, joissa satunnaisuutta ajavan muuttujan jakaumalla on paksu häntä ja itsesimilaarisuusominaisuus. Kyseisten mallien voidaan katsoa olevan fraktionaalisen Brownin liikkeen esiasteita.

Mittateoreettisen todennäköisyyslaskennan ottaessaan ensiaskeleita finanssimatematiikan työkaluna, stokastiikan alalla kehitystä tapahtuu nopeaan tahtiin. Ranskalainen Paul Lévy ja muut saavuttavat merkittäviä edistysaskelia tutkiessaan todennäköisyysjakaumia ja stokastisten prosessien polkuja ([21] [22]). Toisaalla amerikkalainen Joseph Doob (1953) kehitti martingaalien teoriaa ja syvensi jatkuva-aikaisten stokastisten prosessien ymmärrystä. Vankat pohjatiedot todennäköisyysteoriasta antavat japanilaiselle Kiyoshi Itôlle työkalut kehittää stokastisen integroinnin teoriaa, jonka hän esittää englanniksi käännettynä vuonna 1951 [24].

2.4 Fraktionaaliset mallit ja myöhempi kehitys

Fraktionaalisten mallien käyttö rahoitusalan instrumenttien dataan perustuvassa mallintamisessa yleistyi 1990-luvun lopussa, kun Ballie et al. (1996) sekä Bollerslev ja Ole (1996) esittivät pitkää muistia ilmentäviä GARCH mallin variaatioita. Myöhemmin Comte ja Renault (1998) tarkastelivat stokastisen volatiliteetin mallia, jossa myös volatiliteetti esitettiin stokastisena prosessina, joka ilmensi pitkää muistia. Volatiliteetin aikasarjoissa esiintyvän pitkän muistin saatua enemmän huomiota, Comte ja Renault (1998) esittivät stokastisen volatiliteetin mallin, jossa volatiliteettia ajaa fraktionaalinen Brownin liike pitkällä muistilla. Gatheral et al. (2018) tarkastelivat korkean frekvenssin datasta arvioitua volatiliteetin muistia ja argumentoivat lyhyen muistin, eli nopeasti vaimenevan autokorrelaation, puolesta. Tutkimus 2020-luvulla on edelleen keskittynyt muistin pituuden arviointiin pyrkien hienosäätämään malleja, jotka huomioivat volatiliteettidatassa esiintyvää kohinaa, jotta käsitys alla olevan volatiliteettiprosessin muistin pituudesta ja arviointiin tarvittavista metodeista tarkentuisi.

3 Matemaattisia esitietoja

Stokastiset prosessit ovat sijoitusinstrumenttien hinnoitteluun tarvittavan matemaattisen teorian keskiössä. Tässä kappaleessa kerrataan lyhyesti niiden tarkasteluun tarvittavat määritelmät sekä sovelletaan niitä joihinkin tutkielman aihealueen esimerkkeihin. Luku perustuu lähteissä ([36] [38] [83]) esitettyyn teoriaan.

3.1 Todennäköisyysavaruus

Olkoon Ω joukko ja $\mathcal{F}$ kokoelma sen osajoukkoja. Joukkoa $\mathcal{F}$ kutsutaan *sigma-algebraksi*, jos

i) $\Omega \in \mathcal{F}$,
ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
iii) $A_k \in \mathcal{F}$ kaikilla $k \in K$, missä K on numeroituva joukko, niin $\bigcup_{k \in K} A_k \in \mathcal{F}$.

Sigma-algebraa voidaan siis kuvailla perusjoukon osajoukoista koostuvaksi, leikkauksen, yhdisteen ja erotuksen suhteen suljetuksi, joukkoperheeksi.

Määritelmä 1. Jos $\mathcal{S}$ on kokoelma avaruuden Ω osajoukkoja, niin joukon $\mathcal{S}$ *virittämä sigma-algebra* $\sigma(\mathcal{S})$ on pienin joukon $\mathcal{S}$ sisältävä sigma-algebra:

$$\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap \{\mathcal{G} \ : \ \mathcal{G} \ \ \textit{on sigma-algebra, joka sisältää joukon } \mathcal{S}\}.$$

Lause 1. *Olkoon Ω joukko ja $\mathcal{P}(\Omega)$ sen potenssijoukko. Jos $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, niin $\sigma(\mathcal{S})$ on olemassa ja yksikäsitteinen.*

Todistus.

i) Olkoon $\mathcal{F} = \{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathcal{G}$ on sigma-algebra ja $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}\}$. Koska $\mathcal{P}(\Omega)$ on määritelmällisesti sigma-algebra ja $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, niin tällöin ainakin $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathcal{F}$, joten sigma-algebrojen kokoelma $\mathcal{F}$ ei ole tyhjä. Määritellään nyt joukkoperhe $\Sigma := \bigcap_{\mathcal{G} \in \mathcal{F}} \mathcal{G}$. Suoraan määritelmistä nähdään, että $\mathcal{S} \subseteq \Sigma$. On myös suoraviivaista näyttää, että Σ täyttää kaikki sigma-algebran ominaisuudet.

ii) Olkoot Σ_1 ja Σ_2 molemmat joukon $\mathcal{S}$ virittämiä sigma-algebroja. Määritelmän (1) nojalla $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ ja $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$ eli $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

$\square$

Todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ on reaaliarvoinen funktio $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, jolle

i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
iii) Olkoot $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ pistevieraita. Tällöin $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Todennäköisyysmitta on kuvaus kaikkien mahdollisten tapahtumien muodostaman tapausavaruuden Ω osajoukoista välille $[0, 1]$. Herää kysymys, voidaanko todennäköisyysmitta määritellä tapausavaruuden kaikille osajoukoille eli koko potenssijoukolle? Äärellisille ja numeroituville Ω tällainen kuvaus on aina olemassa. Ylinumeroituvien avaruuksien koko potenssijoukolle voidaan määritellä tiettyjä yksinkertaisia todennäköisyysmittoja. Todennäköisyysteorian kannalta kiinnostavia, jatkuvia ja siirtoinvariantteja, mittoja ei kuitenkaan aina voida määritellä.

Määritelmä 2. Olkoon $\mathcal{F}$ sigma-algebra tapausavaruudella Ω ja $\mathbb{P}$ todennäköisyysmitta. Tällöin kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on *todennäköisyysavaruus.*

3.2 Satunnaismuuttujat

Epävarmuutta aiheuttavia muuttujia mallinnetaan todennäköisyysteoriassa satunnaismuuttujilla. Sijoitusinstrumenttien hintakehityksen epävarmaa kehitystä mallintavien prosessien satunnaisuus ja ominaisuudet määräytyvät siinä esiintyvien satunnaismuuttujien jakauman mukaisesti. Kappaleen tarkoituksena on palauttaa mieleen satunnaismuuttujien perusteet.

Määritelmä 3. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. *Satunnaismuuttuja* on mitallinen kuvaus $X : (\Omega,\mathcal{F}) \to (E,\mathcal{G})$. Todennäköisyys sille, että satunnaismuuttuja saa erään arvon mitallisesta joukosta $S \subseteq E$ on $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\}\right)$. Satunnaismuuttujaa X kutsutaan *$\mathcal{F}$-mitalliseksi*, jos kaikille $U \in \mathcal{G}$ pätee $X^{-1}(U) \in \mathcal{F}$

Satunnaismuuttujien jonojen suppenemista tarkastellessa tarvitaan seuraavia määritelmiä.

Määritelmä 4. Olkoon (X_n) kuten edellä. Jos on olemassa satunnaismuuttuja X, jolle

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$$

jokaiselle $\varepsilon > 0$, niin sanotaan jonon (X_n) *suppenevan todennäköisyysmielessä* satunnaismuuttujaan X ja merkitään $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Edellä olevan määritelmän mukaisessa satunnaismuuttujien jonossa eteenpäin edetessä todennäköisyys sille, että jonon jäsen poikkeaa satunnaismuuttujasta X vähenee jatkuvasti, kunnes ero on lopulta enää mielivaltaisen pieni.

Määritelmä 5. Olkoon (X_n) jono satunnaismuuttujia todennäköisyysavaruudella $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Jos on olemassa satunnaismuuttuja X, jolle $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$, niin sanotaan, että jono (X_n) suppenee satunnaismuuttujaan X *melkein varmasti*, ja merkitään $(X_n) \to X$ m.v.

Määritelmän mukaisessa jonossa sen jäsenet alkavat lopulta jakaumaltaan muistuttamaan satunnaismuuttujaa X ja jonon myöhemmät jäsenet eivät enää poikkea siitä. Saattaa kuitenkin olla olemassa tapausavaruuden alkioita ω, joiden realisoituessa edellä oleva kuvailtu suppeneminen ei toteutu. Tällaisten tapausten todennäköisyys on kuitenkin 0. Melkein varma suppeneminen on todennäköisyysmielessä suppenemista aina vahvempi ehto.

Määritelmä 6. Olkoon $p \in [1,\infty)$ ja (X_n) kuten edellä siten, että $\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] < \infty$ kaikilla n. Jos on olemassa satunnaismuuttuja X, jolle

i) $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] < \infty$,
ii) $\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \to 0$, $n \to \infty$,

niin sanotaan jonon (X_n) suppenevan satunnaismuuttujaan X *L_p-mielessä* ja merkitään $X_n \xrightarrow{L_p} X$.

Tällaisessa jonossa eron odotusarvo jäsenen ja satunnaismuuttujan X välillä, korotettuna potenssiin p, suppenee nollaan. On myös huomattava, että suppeneminen L_q-mielessä ei välttämättä tarkoita suppenemista L_p-mielessä, jos $p > q$.

3.2.1 Ehdollinen odotusarvo

Joukon $A \subseteq \Omega$ indikaattorifunktio on kuvaus $\Omega \to \{0,1\}$, joka saa arvon

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega \in A \\ 0, & \text{kun } \omega \notin A \end{cases}.$$

Määritelmä 7. Olkoon X integroituva satunnaismuuttuja (eli $\mathbb{E}[|X|] < \infty$). Satunnaismuuttujan X *ehdollinen odotusarvo* sigma-algebran $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ suhteen on satunnaismuuttuja $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}$, jolle pätee

i) $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ on $\mathcal{G}$-mitallinen,
ii) $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\mathbf{1}_G\big] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_G] \quad$ kaikille $G \in \mathcal{G}$.

3.2.2 Pysäytyshetket

Pysäytyshetki on satunnaismuuttuja, jonka arvo määrittää hetken, jolla stokastisen prosessin tila täyttää tietyt ehdot. Matemaattisen rahoituksen yhteydessä pysäytyshetket auttavat mallintamaan optimaalista hetkeä eräälle toimenpiteelle, kuten esimerkiksi hetkelle, jolloin amerikkalaisen option toteuttaminen antaa suurimman voiton. Edellä mainitun kaltaisia ongelmia kutsutaan optimaalisen pysäytyksen ongelmiksi.

Pysäytyshetkien matemaattinen määrittely tarvitsee filtraation käsitteen. Sigma-algebrojen joukkoa $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ kutsutaan filtraatioksi, jos $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$ kaikille $t_1 \leq t_2 \leq \ldots$. Intuitiivisesti joukon $\mathcal{F}_t$ voidaan kuvitella sisältävän kaiken hetkellä t tarjolla olevan informaation. Tässä työssä tarkastelluissa filtraatioissa oletetaan myös ehto oikealta jatkuvuudesta ja täydellisyydestä[2]. Itse *pysäytyshetki* $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ on satunnaismuuttuja, joka on määritelty filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ ehdolla $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla $t \in T$, missä T on tyypillisesti $[0,\infty)$.

[2]Oikealta jatkuva filtraatio toteuttaa ehdon $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ ja täydellisessä filtraatiossa kaikki joukot, joiden todennäköisyys on nolla, sisältyvät sigma-algebraan $\mathcal{F}_0$. Oikealta jatkuvassa filtraatiossa informaatio hetken t tapahtumista on tarjolla hetkellä t, eikä vasta hetkellä $t+\varepsilon$. Oikealta jatkuvuus ei siis salli esimerkiksi sisäpiiritiedon hyväksikäyttöä kaupankäynnissä.

Määritelmä 8. Olkoon $X = (X_t)_{t\geq 0}$ stokastinen prosessi todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Prosessin X *luonnollinen filtraatio*, jota merkitään $\mathcal{F}_t^X$, on kaikkien muotoa $(X_s)^{-1}(A)$ olevien joukkojen generoima sigma-algebra, missä $0 \leq s \leq t$ ja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on Borel-joukko. Matemaattisesti voidaan merkitä

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t).$$

Esimerkki 1. Tarkastellaan Brownin liikkeen luonnollista filtraatiota $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$. Oletetaan tilanne, jossa sijoittaja on määritellyt riskinottokyvykseen enintään 8 euron voiton ja korkeintaan 5 euron tappion. Saadaan pysäytyshetki, jonka määrittelee

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \mid W_t = 8 \text{ tai } W_t = -5\}.$$

Kyseessä on luonnollisen filtraation $\mathcal{F}_t^W$ suhteen määritelty pysäytyshetki (eli $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t^W$), koska osumisajan toteutuminen tai toteutumattomuus voidaan suoraan havainnoida markkinoilla hetkeen t mennessä havaitusta informaatiosta.

3.3 Stokastiset prosessit

Stokastisella prosessilla tarkoitetaan yleensä ajassa sattumanvaraisesti etenevän todellisen prosessin käytöstä mukailevaa matemaattista mallia. Arvopaperien hintojen, korkojen ja muiden taloudellisten tekijöiden satunnaisuutta mallinnetaan stokastisilla prosesseilla. Satunnaisuuden mallintaminen mahdollistaa tarkemman hinnoittelun ja tehokkaamman riskienhallinnan. Tässä luvussa annetaan stokastisten prosessien tarkasteluun tarpeellisia määritelmiä ja tuloksia.

Matemaattisesti ilmaistuna *stokastinen prosessi* on erään joukon T indeksoima kokoelma saman todennäköisyysavaruuden satunnaismuuttujia $X_t : \Omega \to E$, missä E on satunnaismuuttujien mahdollisista arvoista koostuva joukko. Stokastista prosessia voidaan merkitä $\{X_t(\omega) : \ t \in T\}$, missä indeksi t kuvaa tyypillisesti ajanhetkeä ja ω korostaa havaittujen polkujen satunnaisuutta.

Määritelmä 9. Olkoon $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ kasvava jono joukon Ω sigma-algebroita. Prosessin $X_t = X(t, \omega) \colon [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ sanotaan olevan $\mathcal{F}_t$-*adaptoitunut*, jos kaikille $t \geq 0$ kuvaus $\omega \mapsto X(t, \omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen.

Adaptoituneita prosesseja suppeampi käsite on *progressiivisesti mitalliset prosessit.* Stokastinen prosessi X_t, joka on määritelty filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P}\right)$ on progressiivisesti mitallinen filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suhteen, jos kuvaus $X(s, \omega) : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ on $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t$-mitallinen kaikille $t \geq 0$.

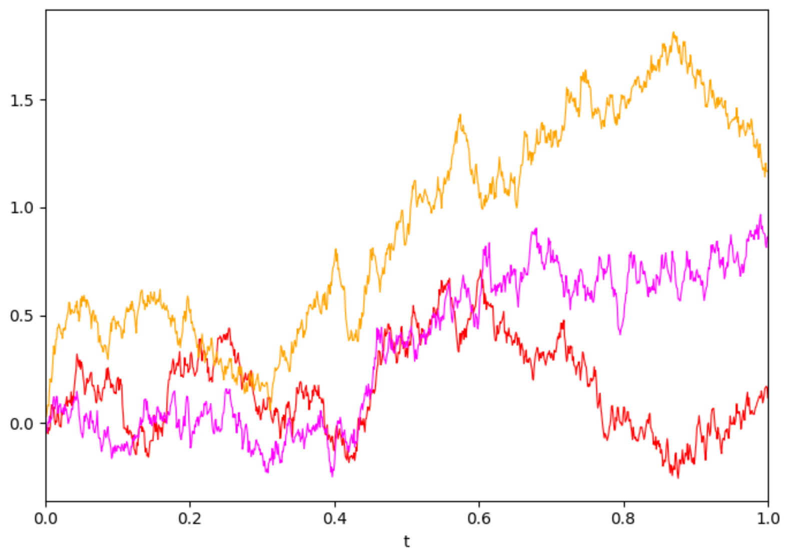
Eräälle $t \in T$ sanotaan, että X_t on prosessin tila. Eräälle $\omega \in \Omega$ sanotaan, että $X(\omega)$ on prosessin polku. Jos T on diskreetti, niin prosessia kutsutaan diskreetin ajan prosessiksi. Jos T on reaalilukujen joukon väli, niin prosessia kutsutaan jatkuvan ajan prosessiksi. Jatkuvilla prosesesseilla voidaan tarkemmin mallintaa finanssimatematiikan kannalta kiinnostavia ilmiöitä, ja jatkuvan ajan prosessien matemaattiseen tarkasteluun on tarjolla moninaisempia työkaluja, joita esitellään alla olevissa luvuissa.

Esimerkki 2. Jatkuva-aikaisen stokastisen prosessin $\{X_t : t \in T\}$ sanotaan olevan *Gaussin prosessi*, jos kaikille äärellisille joukoille indeksejä $t_1, t_2 \ldots t_n$ satunnaismuuttujalla $(X_{t_1}, X_{t_2} \ \ldots \ X_{t_n})$ on multinormaalijakauma. Edelleen jos kaikille $s, t \in T$ pätee $\mathbb{E}[X_t] = 0$ ja siis myös $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[X_s X_t]$, niin prosessin sanotaan olevan *keskeinen Gaussin prosessi*.

Määritelmä 10. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ filtraatiolla varustettu todennäköisyysavaruus. Avaruudessa $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ kaikkien vasemmalta jatkuvien ja adaptoituneiden prosessien generoimaa sigma-algebraa kutsutaan *ennustettavaksi sigma-algebraksi*.

Määritelmä 11. Olkoon $X_t : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastinen prosessi todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ja ς ennustettava sigma-algebra. Jos prosessi X on ς-mitallinen, sitä kutsutaan *ennustettavaksi prosessiksi*.

Esimerkki 3. Oletetaan, että sijoittaja on ostanut riskillistä kohde-etuutta, jonka arvo hetkellä t on S_t. Sijoittaja on myös laittanut määrän α_t käteisenä sukanvarteen. Hintaprosessi α_t on intuitiivisesti ennustettava, sillä sijoittaja tietää hetkellä t kuinka paljon rahaa hän aikoo pitää sukanvarressa hetkellä $t+1$. Hintaprosessi S_t on ennustettava vain, jos sen oletetaan olevan adaptoitunut ja vasemmalta jatkuva.



Kuva 1: 1000 simuloitua havaintoa erään jatkuva-aikaisen keskeisen Gaussin prosessin eri polkuista. Tämän kuvan ja muiden kuvien tuottamiseen käytetty koodi on tarjolla GitHub repositoriossa `https://github.com/EetuLehtonen/Gradu.git`

3.3.1 Wienerin prosessit

Stokastista prosessia $(W_t)_{t\geq 0}$, joka on määritelty todennäköisyysavaruudessa $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$, kutsutaan *Wienerin prosessiksi*[3], jos

[3]Tutkielman myöhemmissä luvuissa Wienerin prosessista käytetään nimitystä Brownin liike

i) $W_0 = 0$ melkein varmasti,
ii) Satunnaismuuttuja $W_{t+u} - W_t$ on riippumaton satunnaismuuttujista $W_s, s \leq t$,
iii) $W_{t+u} - W_t \sim \mathcal{N}(0,u)$,
iv) Kuvaus $t \to W_t$ on melkein varmasti jatkuva.

Määritelmä 12. Olkoon $\Delta_n := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ välin $[a, b]$ jako ja sen *pisin jakoväli* $\|\Delta\|_n := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$. Määritellään välillä $[a, b]$ stokastisen prosessin X *neliöheilahtelu* $[X]_{a,b}$ raja-arvona todennäköisyysmielessä yhtälöllä

$$[X]_{a,b} = \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right|^2 .$$

Jos summatermin eksponentti on 1, kyseessä on *kokonaisheilahtelu*.

Wienerin prosessin ominaisuuksia:

i) W_t on jatkuva mutta ei missään derivoituva $\mathbb{P}$-melkein varmasti (m.v.)
ii) Suurten lukujen lain nojalla

$$\lim_{t \to \infty} \frac{W_t}{t} = 0 \ \mathbb{P}\text{−m.v.}$$

iii) Wienerin prosessin neliöheilahtelu välillä $[a, b]$ on $b - a$ m.v.

Viimeisestä kohdasta huomataan Wienerin prosessin neliöheilahtelun olevan t. Tätä voidaan ilmaista merkitsemällä

$$(dW_t)^2 = dt. \tag{1}$$

Soveltamalla Wienerin prosessia stokastisen prosessin pohjana saadaan määriteltyä rahoituksessa esiintyvien satunnaisten prosessien malleja. Esimerkkejä niistä ovat ajautuva Brownin liike, geometrinen- ja fraktionaalinen Brownin liike sekä monet muut.

Esimerkki 4. Sähköakkuja moottoripyöräyhtiöille toimittavalla Virtakassa Oy:llä on jatkuva perusliiketoiminnan tuotto, joka kasvattaa kassaa odotusarvoisesti μt euroa ajassa t. Myynnin ja juoksevien kulujen päivittäinen satunnaisvaihtelu on empiirisesti havaittu ja sitä mallinnetaan Wienerin prosessilla, jonka volatiliteetti on σ. Tällöin yrityksen kassavarojen määrä hetkellä t seuraa ajautuvaa Wienerin prosessia $X_t = \mu t + \sigma W_t$.

3.3.2 Martingaalit

Satunnaismuuttujien jonoa $(X_t)_{t \in T}$ kutsutaan *martingaaliksi* [23], jos

i) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, kaikilla $t \in T$,
ii) X_t on $\mathcal{F}_t$ mitallinen kaikilla t,
iii) $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$, kun $s \leq t$.

Määritelmä 13. Olkoot $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ filtraatiolla varustettu todennäköisyysavaruus ja $X:[0,\infty)\times\Omega\to S$ $\mathcal{F}_t$-adaptoitunut prosessi. Prosessin X sanotaan olevan *lokaali martingaali*, jos on olemassa jono pysäytyshetkiä $\tau_n:\Omega\to[0,\infty)$, joille

i) jono on melkein varmasti ei-vähenevä; $\mathbb{P}\left(\tau_n\leq\tau_{n+1}\right)=1$,
ii) jono hajaantuu melkein varmasti; $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\tau_n=\infty\right)=1$,
iii) pysäytetty prosessi $X_{t\wedge\tau_n}-X_0$ on martingaali kaikille n.

Muita martingaaleja yleistäviä prosesseja ovat esimerkiksi *submartingaalit* ja *supermartingaalit*, joissa nykyinen prosessin havaittu arvo ei välttämättä ole seuraavien arvojen odotusarvo, vaan niiden ylä- tai alaraja. Jatkuva-aikainen submartingaali toteuttaa ehdon

$$\mathbb{E}\left[X_t\mid F_s\right]\geq X_s,\ s\leq t,$$

kun taas supermartingaalille pätee

$$\mathbb{E}\left[X_t\mid F_s\right]\leq X_s,\ s\leq t.$$

Toinen stokastisten prosessien tarkastelussa hyödyllinen martingaalien yleistys on *semimartingaali*, joka on stokastinen prosessi muotoa

$$X_t=X_0+M_t+A_t,$$

missä M on lokaali martingaali ja A on adaptoitunut *càdlàg*[4] prosessi, jolla on lokaalisti rajoitettu kokonaisheilahtelu. Toisin sanoen melkein kaikille $\omega\in\Omega$ ja kaikille $I\subset[0,\infty)$ polulla $I\ni t\to A_t(\omega)$ on rajoitettu kokonaisheilahtelu.

3.3.3 Markovin prosessit

Stokastisella prosessilla $(X_t)_{t\geq 0}$ sanotaan olevan *Markovin ominaisuus*, jos sen tuleva arvo riippuu vain nykyhetken arvosta. Markovin ominaisuutta voidaan kutsua prosessin muistittomuudeksi; nykyhetkeä aiemmat arvot eivät vaikuta tuleviin arvoihin. Matemaattisesti ilmaistuna prosessilla X_t on Markov-ominaisuus, jos kaikille $s\leq t$ ja Borel-joukoille A pätee $\mathbb{P}(X_t\in A\mid\mathcal{F}_s)=\mathbb{P}(X_t\in A\mid X_s)$ melkein varmasti.

3.4 Fraktionaalinen Brownin liike

Määritelmä 14 (Fraktionaalinen Brownin liike)**.** Olkoot $0<H<1$ ja $s,t\in\mathbb{R}_+$. *Fraktionaalinen Brownin liike* on melkein varmasti jatkuva keskeinen Gaussin prosessi, jolla on kovarianssifunktio

$$\mathbb{E}\left[B_tB_s\right]=\frac{1}{2}\left(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H}\right).$$

Historiallisista syistä esitetään myös Mandelbrotin ja van Nessin fraktionaaliselle Brownin liikkeelle antaman, vakiota vaille aiemman kanssa ekvivalentin, eksplisiittisemmän määritelmän.

[4] càdlàg eli oikealta jatkuva prosessi, jolla on vasemmanpuoleiset raja-arvot.

Määritelmä 15 (Fraktionaalinen Brownin liike.)**.** Olkoot $0 < H < 1$, $b_0 \in \mathbb{R}$ mielivaltainen ja $\omega \in \Omega$ eräs polku, eli tapauksen ω kohdalla havaittu prosessi. Fraktionaalisen Brownin liikkeen $B_H(t,\omega)$ kaikille $t \geq 0$ määrittelee yhtälöt

$$\begin{aligned}
&B_H(t,\omega) = b_0,\\
&B_H(t,\omega) - B_H(0,\omega)\\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}\right] dB(s,\omega)\right.\\
&\qquad \left. + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}}\, dB(s,\omega)\right\},
\end{aligned}$$

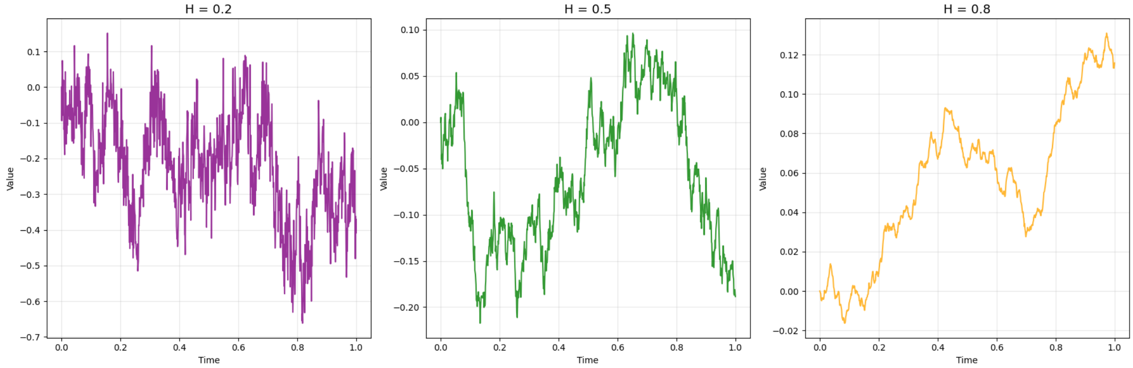
missä Γ on gammafunktio ja B standardi Brownin liike ja integrointi tapahtuu myöhemmässä luvussa esitettävän Itôn integraalin perusteella.

Hurstin parametri säätelee prosessin muistia, eli tulevien havaintojen korrelaatiota aiempiin arvoihin.

- Kun $H = 1/2$, niin kyseessä on tavallinen Brownin liike,
- kun $H > 1/2$, niin korrelaatio aiempiin arvoihin on positiivinen,
- kun $H < 1/2$, niin korrelaation aiempiin arvoihin on negatiivinen.

Suuremmilla arvoilla $H > 1/2$ prosessilla on positiivinen autokorrelaatio, eli molempiin suuntiin tapahtuvia muutoksia seuraa todennäköisesti muutos samaan suuntaan. Kun taas $H < 1/2$ autokorrelaatio on negatiivinen, ja muutoksia seuraa todennäköisesti muutos vastakkaiseen suuntaan. Tämä nähdään fraktionaalisen Brownin liikkeen lisäysten kovarianssista.

Käytännössä parametrin H eri arvot vaikuttavat prosessin "muistin" pituuteen ja epätasaisuuteen. Kun $H > 1/2$, niin prosessilla on pitkä muisti. Edelleen jos $H < 1/2$ prosessi menettää pitkän muistin ominaisuuden. Suuremmilla (pienemmillä) parametrin H arvoilla prosessin polku on (epä)tasaisempi.



Kuva 2: Fraktionaalinen Brownin liike tuhannella simuloidulla havaintopisteellä eri Hurstin parametrin arvoilla.

Lause 2. *Kun $H > 1/2$, niin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[B_H(1)(B_H(n+1) - B_H(n))] = \infty.$$

Todistus. Kovarianssin kaavan nojalla summan yksittäinen termi saadaan esitettyä muodossa

$$\mathbb{E}[B_H(1)(B_H(n+1) - B_H(n))] = \frac{1}{2}\left((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}\right).$$

Olkoon $f(x) = x^{2H}$. Funktion f Taylorin sarja pisteen n ympäristössä on

$$f(n \pm 1) = f(n) \pm f'(n) + \frac{1}{2}f''(n) \pm \frac{1}{6}f^{(3)}(n) + \mathcal{O}(n^{2H-4}).$$

Laskemalla yhteen termit $f(n+1)$ ja $f(n-1)$, saadaan sievennetty muoto

$$f(n+1) + f(n-1) = 2f(n) + f''(n) + \mathcal{O}(n^{2H-4}).$$

Siirtämällä $2f(n)$ vasemmalle puolelle ja jakamalla kahdella, saadaan

$$\frac{1}{2}\left(f(n+1) + f(n-1) - 2f(n)\right) = \frac{1}{2}f''(n) + \mathcal{O}(n^{2H-4}).$$

Koska $f''(n) = 2H(2H-1)n^{2H-2}$, niin kun $n \to \infty$, saadaan

$$\mathbb{E}[B_H(1)(B_H(n+1) - B_H(n))] \sim H(2H-1)n^{2H-2}.$$

Verratessa sarjaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} H(2H-1)n^{2H-2},$$

huomataan raja-arvotestin periaatteella sarjan hajaantuvan, kun $H > \frac{1}{2}$ ja vastaavasti suppenevan, kun $H \leq \frac{1}{2}$.

$\square$

Lemma 1. $\mathbb{E}\left[(B_H(t) - B_H(s))^2\right] = |t-s|^{2H}$.

Todistus. Suora lasku soveltamalla kovarianssia ja odotusarvon lineaarisuutta. □

Muistiominaisuuden lisäksi muita fraktionaalisen Brownin liikkeen oleellisia ominaisuuksia ovat

i) $B_H(at) \sim a^H B_H(t)$ (itse-similaarisuus),
ii) $B_H(t+s) - B_H(s) \sim B_H(t)$ (stationaariset lisäykset).

Todistus. i) Olkoon $a > 0$ ja B^H fraktionaalinen Brownin liike. Tarkastellaan prosessia $Z_t = B^H_{at}$, $t \geq 0$. Määritelmästä nähdään, että prosessin Z_t kovarianssi on sama kuin prosessin $a^H B^H_t$. Edelleen molemmilla on sama odotusarvo. Odotusarvo ja kovarianssi määrittelevät Gaussin prosessin yksikäsitteisesti [68], joten prosessit ovat samat jakaumaltaan.

ii) Kiinnitetään $t, s \geq 0$ ja $Y_t = B^H_{t+s} - B^H_s$. Kuten yllä, määritelmästä nähdään suoralla laskulla termien B^H_t ja Y_t kovarianssin yhtäsuuruus, jolloin termit ovat jakaumaltaan samat. □

4 Stokastinen integrointi

Luvussa esitellään stokastisen integroinnin käsite lähteitä ([37] [38] [39]) seuraten. Stokastisten prosessien tarkastelussa käytetty integraalin käsite, kuten Itôn integraali, mahdollistaa satunnaismuuttujan integroinnin toisen satunnaismuuttujan suhteen. Yksinkertainen, tätä konseptia havainnollistava, esimerkki rahoituksen alalta on osakeomistuksien arvon stokastista prosessia kuvaava satunnaismuuttuja, joka on määritelty stokastisen integraalin avulla.

Esimerkki 5. Mallinnetaan osakkeen satunnaista liikettä, kuten Bachelier, Brownin liikkeellä. Oletetaan, että sijoittaja tietää entuudesta kuinka paljon osakkeita H_s, hän haluaa pitää hallussaan hetkellä s. Portfolion arvo kehittyy jatkuva-aikaisesti, jolloin omistusten arvoa ei voida määrittää diskreetisti summaamalla arvonmuutoksia. Edelleen, koska hintaprosessilla ei ole äärellinen kokonaisheilahtelu, sitä ei voida laskea tavallisella Riemannin–Stieltjesin integraalilla. Tähän tarkoitukseen luodaan stokastinen integraali, jonka avulla omistusten tuottoprosessille saadaan esitys

$$V_t = \int_0^t H_s dW_s,$$

missä V_t kuvaa kertyineitä tuottoja/tappioita.

4.1 Itôn integraalin määrittely

Kuten tyypillistä, Itôn integraalin määrittely alkaa määrittelemällä yksinkertaiset tapaukset ja niistä edelleen laajentamalla integrandien joukkoa.

Määritelmä 16. Olkoon $W_t = W(t)$ Brownin liike eräällä sopivalla filtraatiolla $\mathcal{F}$. Prosessia V_t sanotaan *yksinkertaiseksi*, jos se voidaan esittää muodossa

$$V_t = \sum_{i=0}^{N-1} X_i \mathbf{1}_{(t_i,\ t_{i+1}]}(t),$$

missä $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < \infty$ ja X_i on $\mathcal{F}_{t_i}$-mitallinen.

Määritelmä 17. Yksinkertaiselle prosessille $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *Itôn integraali* määritellään kaavalla

$$I_t(V) = \int_0^t V_s dW_s := \sum_{i=0}^{N-1} X_i \left(W(t_{i+1} \wedge t) - W(t_i \wedge t)\right).$$

Jos polun $t \to W(t)$ kokonaisheilahtelu olisi äärellinen, niin yllä oleva vastaisi Lebesguen–Stieltjesin integraalia. Koska näin ei yleisesti ole, huomataan tarve laajemmalle integraalin käsitteelle.

Seuraus 1. *Yllä olevasta määritelmästä nähdään heti seuraavat ominaisuudet*

i) $I_t(aV + U) = aI_t(V) + I_t(U)$ *(lineaarisuus),*
ii) $I_t(V)$ *on adaptoitu filtraatioon* $\mathcal{F}$ *(mitallisuus),*
iii) $t \to I_t(V)$ *on jatkuva.*

4.2 Itôn prosessi ja Itôn kaava

Tässä luvussa palautetaan mieleen Itôn integraalin kannalta keskeisiä tuloksia.

Määritelmä 18. *Itôn prosessi* tai *stokastinen integraali* on filtraatioon $\mathcal{F}_t$ adaptoitunut stokastinen prosessi todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, joka voidaan esittää muodossa

$$X_t = X_0 + \int_0^t U_s ds + \int_0^t V_s dW_s,$$

missä U ja V ovat adaptoituneita prosesseja, jotka toteuttavat melkein varmasti ehdot $\int_0^t |U_s|\, ds < \infty$ ja $\int_0^t V_s^2 ds < \infty$ kaikille $t \geq 0$. Lyhyemmin ilmaistuna yhtälö voidaan merkitä stokastisena differentiaaliyhtälönä

$$dX_t = U_t dt + V_t dW_t.$$

Lause 3. (Itôn kaava). *Olkoot X_t Itôn prosessi kuten yllä ja $f(t, X_t) \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$ eli kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva joukossa $[0,\infty) \times \mathbb{R}$. Tällöin $Y_t = f(t, X_t)$ on Itôn prosessi, jolle*

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t) \cdot (dX_t)^2\,,$$

missä $(dX_t)^2 = dX_t \cdot dX_t$ voidaan laskea säännöillä

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0,\ dW_t \cdot dW_t = dt.$$

Todistus. Itôn alkuperäinen todistus löytyy lähteestä [25]. □

Esimerkki 6. *Geometrinen Wienerin prosessi* on yksinkertainen ja yleisin tapa mallintaa osakkeiden hinnan kehitystä stokastisena prosessina [28]. Mallinnettaessa geometrisella Wienerin prosessilla osakkeen hintaprosessi S_t on stokastisen differentiaaliyhtälön

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$$

ratkaisu, joka on muotoa

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right),$$

missä S_0 on osakkeen hinta hetkellä $t = 0$.

Esimerkki 7. Tarkastellaan esimerkin 6 stokastista differentiaaliyhtälöä

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{2}$$

Sovelletaan Itôn kaavaa, jolloin saadaan

$$d\ln(S_t) = \frac{\partial \ln(S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \ln(S_t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln(S_t)}{\partial S_t^2}(dS_t)^2\,.$$

Huomataan, että $\frac{\partial \ln(S_t)}{\partial t} = 0$, sillä $f(x,t) = \ln(S_t)$ on vakio muuttujan t suhteen. Sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned} d\ln(S_t) &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2S_t^2}(dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2S_t^2}\left(S_t^2\sigma^2 dt\right) \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t, \end{aligned} \tag{3}$$

josta edelleen

$$S_t = S_0 e^{\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)}.$$

Tässä (3) saadaan sijoittamalla S_t yhtälöstä (2) ja huomaamalla, että edellä mainittujen laskusääntöjen nojalla

$$(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 = (\mu S_t dt)^2 + 2\mu\sigma S_t^2 dt dW_t + \sigma^2 S_t^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Kokonaisvaltainen johdatus stokastiseen differentiaalilaskentaan löytyy lähteestä [37].

4.3 Girsanovin lause

Rahoitusmatematiikan useimmat kvantitatiiviset menetelmät nojautuvat joko fyysiseen mittaan $\mathbb{P}$ tai riskineutraaliin todennäköisyysmittaan $\mathbb{Q}$. Girsanovin lauseena tunnettu tulos mahdollistaa sujuvan siirtymisen näiden eri todennäköisyysmittojen välillä. Mahdollisuus vaihtaa todennäköisyysmitta toiseen, ekvivalenttiin todennäköisyysmittaan, osoittautuu keskeiseksi ominaisuudeksi rahoitusinstrumenttien hinnoittelussa.

Yksinkertaistetusti tässä työssä tarkasteltavaa tapausta varten Girsanovin lause kertoo riskittömän todennäköisyysmitan olemassaolon tiettyjen ehtojen täyttyessä. Geometrinen Brownin liike ei selvästikään aina ole martingaali, mutta sopivan todennäköisyysmitan alla prosessi voi olla martingaali. Geometrisen prosessin tapauksessa martingaaliominaisuus täyttyy, kun ajautuvuutta määrittelevä termi μt saadaan nollaksi.

Määritelmä 19. Olkoot μ ja ν todennäköisyysmittoja mitta-avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$. Olkoot niiden nollamitalliset joukot

$$\mathcal{N}_\mu = \{E \in \mathcal{F} \mid \mu(E) = 0\}$$

ja

$$\mathcal{N}_\nu = \{E \in \mathcal{F} \mid \nu(E) = 0\}.$$

Todennäköisyysmittojen μ ja ν sanotaan olevan *ekvivalentit*, jos ja vain jos $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{N}_\nu$. Jos $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$, niin sanotaan mitan ν olevan *absoluuttisesti jatkuva* mitan μ suhteen ja merkitään $\nu \ll \mu$.

Määritelmä 20 (Radonin–Nikodymin derivaatta)**.** Olkoot ν, μ mitta-avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ määriteltyjä todennäköisyysmittoja. Jos $\nu \ll \mu$, niin on olemassa μ-melkein varmasti yksikäsitteinen $\mathcal{F}$-mitallinen funktio $f : \Omega \to [0, \infty)$, jolle

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

kaikille mitallisille $A \in \mathcal{F}$. Kuvausta f kutsutaan *Radonin–Nikodymin derivaataksi* ja sitä merkitään $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Esimerkki 8. Jos hetkellä 0 sijoitetaan yksi euro riskittömään arvopaperiin, sen arvo hetkellä t on e^{rt} riskittömällä korolla r. Oletetaan, että riskillisen kohde-etuuden hinta noudattaa geometrista Brownin liikettä, jonka arvo hetkellä t on $S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$. Fyysisen todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ alla hinnan odotusarvo on

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S(t)] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\sigma W(t)}\right] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_0 e^{\mu t}.$$

Arbitraasittomilla markkinoilla on olemassa ekvivalentti riskineutraali todennäköisyysmitta $\mathbb{Q}$, jonka alla diskontattu hintaprosessi $e^{-rt}S(t)$ on martingaali. Girsanovin lauseen nojalla voimme määritellä uuden Brownin liikkeen $W^{\mathbb{Q}}(t) = W(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} t$, jolloin hintaprosessi saa mitan $\mathbb{Q}$ alla muodon $S(t) = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t)}$.
Riskineutraalille mitalle $\mathbb{Q}$ toteutuu martingaaliehto, sillä diskontatun hinnan odotusarvo hetkellä 0 laskettuna on

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rt}S(t)\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rt} S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t)}\right] \\
&= S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t)}\right] \\
&= S_0 \cdot 1 = S_0.
\end{aligned}$$

Esimerkissä Girsanovin lause takaa juuri tämän riskineutraalin todennäköisyysmitan olemassaolon muuntamalla alkuperäisen ajautumistermin μ riskittömäksi koroksi r.

Lause 4 (Girsanovin lause)**.** *Olkoon W_t Brownin liike todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja X_t Brownin liikkeen luonnolliseen filtraatioon $\mathcal{F}_t$ adaptoitunut jatkuva lokaali martingaali. Määritellään prosessin X_t stokastinen eksponentti*

$$Z_t = \mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}[X]_t).$$

Jos Z_t on martingaali, niin voidaan määritellä todennäköisyysmitta $\mathbb{Q}$ avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ siten, että Radonin–Nikodymin derivaatalle pätee

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t = \mathcal{E}(X)_t.$$

Tällöin kaikille t mitta $\mathbb{Q}$ on ekvivalentti mitan $\mathbb{P}$ kanssa sigma-algebralla $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s :\ 0 \leq s \leq t)$. Jos lisäksi Y_t on $\mathbb{P}$-lokaali martingaali, niin tällöin

$$Y_t - [Y, X]_t$$

on $\mathbb{Q}$-lokaali martingaali filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$.

4.4 Riskineutraali mitta

Riskineutraalien sijoittajien hyötyfunktio on lineaarinen ja he keskittyvät vain kassavirtojen odotetun nykyarvon maksimointiin. Markkinat, joissa kaikki sijoittajat ovat riskineutraaleja, hinnoittelevat osakkeen arvoksi tulevien kassavirtojen nykyarvon. Useimmat sijoittajat ovat kuitenkin riskiä karttavia [62] ja vaativat riskin ottamisesta preemion; korkeamman tuotto-odotuksen korkeammalle riskille. Riskin huomiointi hinnoittelussa monimutkaistaa asiaa. Oletetaan kaksi osaketta, joiden tulevien kassavirtojen odotetut nykyarvot ovat samat. Jos toinen osakkeista on volatiliteetiltaan selvästi korkeampi, riskiä karttavat sijoittajat valitsevat kahdesta osakkeesta vähemmän riskillisen. Tämä heijastuu osakkeen hintaan; riskillisempi osake on halvempi.

Riskin huomiointi osakkeen hinnottelussa voidaan tehdä hyödyntämällä *riskineutraalia todennäköisyysmittaa*. Riskineutraali todennäköisyysmitta ratkaisee tietyn tyyppisen inversio-ongelman, jossa pyritään löytämään todennäköisyysmitta, jonka alaisuudessa osakkeiden havaittu hinta vastaa niiden tulevien kassavirtojen odotettua nykyarvoa.

Esimerkki 9. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vallitseva todennäköisyysavaruus. Tarkastellaan osaketta, jonka hinta ajanhetkellä 0 on S_0. Tulevista satunnaisista tapahtumista riippuen osakkeen hinta S_1 ajanhetkellä 1 voi saada arvon S^y tai S^a. Olkoon lisäksi $r > 0$ riskitön tuottotaso. Jotta markkinat olisivat arbitraasittomat, on oltava [26]

$$S^a \leq (1+r)\, S_0 \leq S^y.$$

Todennäköisyysmittaa $\mathbb{Q}$ kutsutaan riskineutraaliksi, jos $S_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1}{1+r}\right] = \frac{qS^y + (1-q)S^a}{1+r}$. Yhtälöstä voidaan ratkaista q, jonka perusteella riskineutraali todennäköisyys saadaan määriteltyä.

Numéraire on arvon yksikkö, jonka suhteen omaisuuserien hinta voidaan esittää. Yksinkertaisin esimerkki numérairesta lienee raha, jonka suhteen hyödykkeet voidaan hinnoitella. Finanssimatematiikassa usein tarkastellaan tilannetta, jossa numéraire on riskitön tuotto.

Esimerkki 10. Oletetaan omenan maksavan yhden euron ja appelsiinin maksavan kaksi euroa. Jos valitaan arvon yksiköksi appelsiini, niin silloin omena maksaa $0,5$ appelsiinia.

4.5 Rahoituksen peruslauseet

Arbitraasin määritteli ensimmäisen kerran ranskalainen matemaatikko Mathieu de la Porte vuonna 1704. Hänen löyhästi käännetyssä määritelmässään *Arbitraasi on tapa käydä kauppaa, jossa hyödynnetään otollisia hetkiä ostaa ja myydä sama kohde-etuus*, viitataan eri valuuttakurssien hyödyntämiseen saman kohde-etuuden kaupankäynnissä. Yleisemmin määriteltynä arbitraasi on tilanne, jossa voidaan saada riskitöntä tuottoa ilman alkupääomaa. Todellisuudessa arbitraasista ei voida päästä täysin eroon [63], mutta oletus arbitraasittomuudesta on perusteltu, sillä jos arbitraasistrategia on voitollinen, markkinat hyödyntävät sitä, kunnes hinta-ero ja sen myötä mahdollisuus arbitraasiin häviää.

Hinnoittelussa arbitraasin lisäksi keskeinen käsite on markkinoiden täydellisyys. Markkinoiden täydellisyydellä viitataan tilanteeseen, jossa muiden muassa

i) ei ole kaupankäyntikuluja,
ii) kaikilla on täydellinen informaatio,
iii) jokaisella omaisuuserällä on hinta kaikissa mahdollisissa maailmantiloissa.

Arbitraasittomuutta, markkinoiden täydellisyyttä ja riskitöntä todennäköisyysmittaa sitoo toisiinsa *rahoituksen peruslauseet.* Tarkastellaan rahoituksen peruslauseita diskreeteillä ja äärellistilallisilla markkinoilla. Tulokset yleistyvät intuitiivisesti jatkuva-aikaiseen tapaukseen [69]. Jatkuvassa ajassa ekvivalentin riskineutraalin mitan puute ei takaa arbitraasittomuutta, mutta sallii strategian, joka antaa *tuottoa häviävällä riskillä.* Tällä tarkoitetaan tilannetta, jossa on mahdollista saada voittoa ilman alkupääomaa positiivisella todennäköisyydellä samalla, kun tappion todennäköisyys on melkein varmasti nolla. Eksakti matemaattinen muotoilu sivuutetaan tässä tutkielmassa ja tilanteeseen viitataan jatkossa arbitraasina.

Lause 5 (Ensimmäinen rahoituksen peruslause)**.** *Diskreetti ja äärellistilainen markkina todennäköisyysavaruudella* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *on arbitraasiton, jos ja vain jos on olemassa alkuperäisen todennäköisyysmitan kanssa ekvivalentti riskineutraali todennäköisyysmitta.*

Lause 6 (Toinen rahoituksen peruslause)**.** *Arbitraasittomat markkinat* (S, B)*, missä* S *on joukko osakkeita ja* B *on riskitön sijoitus, ovat täydelliset, jos ja vain jos on olemassa yksikäsitteinen alkuperäisen todennäköisyysmitan kanssa ekvivalentti riskineutraali todennäköisyysmitta, jolla on numéraire* B*.*

Markkinoiden arbitraasittomuus on hinnoittelumallien keskeinen oletus ja vain arbitraasittomien markkinoiden mallit ovat saaneet suosiota käytännön sovelluksissa [28]. Rahoituksen ensimmäisen peruslauseen mukaan markkinat eivät ole arbitraasittomat, jos ei ole olemassa (riskineutraalia) todennäköisyysmittaa, jonka alla osakkeiden hinta on yhtä suuri kuin sen tulevien kassavirtojen nykyarvo.

5 Blackin–Scholesin malli

Tunnettu Blackin–Scholesin malli (BS-malli) optioiden hinnoitteluun vaatii lähtökohdikseen joukon oletuksia, joista useimpia pidetään finanssimatemaattisissa tarkasteluissa kanonisina. BS-mallin oletukset koskevat kohde-etuuksia eli riskillistä kohde-etuutta, riskitöntä kohde-etuutta ja riskillisen kohde-etuuden optiota sekä itse markkinoita.

5.1 Oletuksista

Tässä luvussa tarkastellaan ja kommentoidaan mallin oletuksia sellaisena kun Black ja Scholes (1973) ovat sen esittäneet.

5.1.1 Riskillisen kohde-etuuden hinnan jakauma

Riskillisen kohde-etuuden, tässä osakkeen, hinnan oletetaan olevan log-normaalisti jakautunut. Jos log-tuotto $\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$ on normaalisti jakautunut erään ajanjakson yli, niin voidaan todeta hintaprosessin olevan muotoa $S_t = S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right)$. On huomion arvoista, että log-normaalisti jakautuneiden tuottojen oletus tarkoittaa samalla myös oletusta tuoton varianssin vakioudesta.

Multiplikatiivisesti kasvaville prosesseille log-normaali jakauma on suosiossa johtava kandidaatti tilastolliselle mallille [29]. Osakkeen hintaa ei myöskään ole mielekästä mallintaa normaalijakaumalla, sillä tämä malli mahdollistaisi negatiiviset hinnat. Lisäksi kohtuullisen yksinkertainen log-normaalius mahdollistaa myös helpohkot matemaattiset tarkastelut.

5.1.2 Osingottomuus

Osinkojen jakaminen johtaa yleensä osakkeen hinnan putoamiseen osakekohtaisen osingon määrällä. Tämä rikkoisi ensimmäistä oletusta osakkeen hinnan kehityksestä. Maksettavien osinkojen sivuuttaminen johtaisi optioiden virheelliseen hinnoitteluun ja mallia onkin mahdollista laajentaa huomioimaan osakkeiden maksua. Osinkoja voidaan yrittää huomioida pienentämällä ajautumistermiä μ osinkoja vastaavalla määrällä, mutta vahvemmat oletukset osinkojen maksun yksityiskohdista lisäävät mallin monimutkaisuutta [42].

5.1.3 Riskittömän koron olemassaolo

BS-mallissa riskittömällä kohde-etuudella on vakioinen tuotto. Riskitön kohde-etuus voi olla esimerkiksi valtion velkakirja, pankkitalletus, joka maksaa korkoa tai pankkilaina, josta maksetaan korkoa. Riskittömän koron oletetaan olevan sama lainalle ja omistukselle, joskin todellisuudessa niiden ero, osto-myynti spredi, on usein huomionarvoinen. Myöskään lainan tai omistuksen koko ei vaikuta riskittömään korkoon.

5.1.4 Rajoitus eurooppalaisiin optioihin

BS-malli hinnoittelee eurooppalaisia optioita, joita voidaan toimeenpanna vain ennalta sovittuna päivämääränä. Amerikkalainen option, joka voidaan toimeenpanna milloin tahansa solmimisesta maturiteettin, on lähtökohtaisesti kalliimpi kuin euroop-palainen optio. Mahdollisuus toimeenpanna optio saattaa tuoda lisäarvoa, mutta ei käytännössä tarpeettomanakaan vähennä option arvoa. BS-malli ei sellaisenaan sovellu amerikkalaisten optioiden hinnoitteluun.

5.1.5 Markkinoiden kitkattomuus, syvä likviditeetti ja arbitraasittomuus

Arvopapereilla tehtyyn kaupankäyntiin liittyy melkein poikkeuksetta kustannuksia, joita ei kuitenkaan oteta Blackin–Scholesin mallissa huomioon. Tällaisessa tapauksessa puhutaan markkinoiden kitkattomuudesta. Kuten osingoilla, kaupankäyntikulujen mallintaminen tuo lisää monimutkaisuutta malliin. BS-malli myös olettaa markkinoiden olevan täydellisen likvidit, eli osaketta voidaan ostaa tai myydä koska tahansa ja kuinka paljon tahansa, esimerkiksi 0,31415 osaketta kerrallaan.

5.1.6 Rajoittamaton mahdollisuus lyhyeksi myyntiin

BS-malli olettaa rajoittamattoman lyhyeksi myymisen olevan mahdollista. Oletuksen nojalla sijoittaja voi koska vaan löytää vastapuolen mille tahansa osakkeelle luodakseen itselleen negatiivisen altistuman.

5.2 Blackin–Scholesin kaavan johtaminen

Tässä luvussa johdetaan Blackin–Scholesin osittaisdifferentiaaliyhtälö ja siitä seuraava hinnoittelukaava replikoivan portfolion strategian kautta.

Tarkastellaan erästä johdannaista A, jonka hinta hetkellä t on

$$V(t) = f(S(t), t),$$

missä f on kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio ja $S(t)$ on kohde-etuuden B hinta hetkellä t. Oletetaan kohde-etuuden hintaprosessin olevan ajautuva geometrinen Brownin liike

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0.$$

Oletetaan sijoittajalla olevan portfolio P, joka koostuu kohde-etuudesta B, johdannaisesta A ja riskittömästä sijoituksesta C. Riskittömän sijoituksen (esim. Saksan valtion velkakirja) jatkuvasti kumuloituvan tuoton oletetaan olevan vakio r. Itôn kaavan nojalla johdannaisen arvon muutos on

$$dV(t) = f_t dt + f_S dS(t) + \frac{1}{2} f_{SS} (dS(t))^2.$$

Sijoittamalla $dS(t)$:n lauseke ja soveltamalla yhtälöä (1), saadaan

$$dV(t) = f_t dt + f_S\big(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\big) + \frac{1}{2} f_{SS}\sigma^2 S(t)^2 dt.$$

Järjestelemällä termit uudelleen, saadaan

$$dV(t) = \left(f_t + f_S \mu S(t) + \frac{1}{2} f_{SS} \sigma^2 S(t)^2 \right) dt + f_S \sigma S(t) dW(t).$$

Määritellään nyt muuttujat μ_V ja σ_V siten, että

$$\mu_V V(t) = f_t + f_S \mu S(t) + \frac{1}{2} f_{SS} \sigma^2 S(t)^2 \quad \text{ja} \quad \sigma_V V(t) = f_S \sigma S(t).$$

Tällöin johdannaisen hintaprosessin dynamiikka voidaan esittää muodossa

$$dV(t) = \mu_V V(t) dt + \sigma_V V(t) dW(t).$$

Portfolion arvo määräytyy yhtälön

$$P(t) = N_1(t) S(t) + N_2(t) V(t) + Q(t)$$

mukaan, missä $N_1(t)$ on alla olevan kohde-etuuden lukumäärä, $N_2(t)$ johdannaisten lukumäärä ja $Q(t)$ riskittömään kohteeseen sijoitettu määrä. Oletetaan, että strategia on itserahoittava. Tämä tarkoittaa, että portfolion omistusosuuksia voidaan muuttaa dynaamisesti salkkua tasapainotettaessa, mutta salkkuun ei tuoda ulkopuolelta lisäpääomaa eikä sieltä nosteta varoja. Tällöin portfolion arvon muutos jatkuvassa ajassa muodostuu pelkästään siinä olevien instrumenttien hintojen muutoksista, mikä on matemaattisesti ilmaistuna $dP(t) = N_1(t) dS(t) + N_2(t) dV(t) + dQ(t)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} dP(t) &= N_1(t) dS(t) + N_2(t) dV(t) + dQ(t) \\ &= N_1(t) \big(\mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \big) + N_2(t) \big(\mu_V V(t) dt + \sigma_V V(t) dW(t) \big) \\ &\quad + r Q(t) dt. \end{aligned}$$

Asetetaan sijoitusten suhteelliset painotukset portfoliossa:

$$\pi_1 = \frac{N_1 S(t)}{P(t)}, \quad \pi_2 = \frac{N_2 V(t)}{P(t)}, \quad \text{ja} \quad \pi_3 = 1 - \pi_1 - \pi_2 = \frac{Q(t)}{P(t)}.$$

Nyt portfolion suhteellinen arvonmuutos voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \pi_1 \big(\mu dt + \sigma dW(t) \big) + \pi_2 \big(\mu_V dt + \sigma_V dW(t) \big) + \pi_3 r dt.$$

Ryhmittelemällä termit saadaan

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \left[\pi_1 \mu + \pi_2 \mu_V + r(1 - \pi_1 - \pi_2) \right] dt + \left[\pi_1 \sigma + \pi_2 \sigma_V \right] dW(t).$$

Valitaan nyt salkun painot $(\pi_1, \pi_2) = (\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2)$ siten, että sijoitus on täysin immuuni omistuksien hinnan muutoksille, eli salkun arvon muutoksen stokastinen dW-termi nollautuu. Kaikille $t \geq 0$ on siis pädettävä:

$$\overline{\pi}_1 \sigma + \overline{\pi}_2 \sigma_V = 0 \implies \frac{\overline{\pi}_1}{\overline{\pi}_2} = -\frac{\sigma_V}{\sigma}. \tag{4}$$

Riskittömän portfolion tuoton on arbitraasittomuuden oletuksen nojalla oltava yhtä suuri kuin riskitön korko r:

$$\mathbb{E}_t\left[\frac{dP(t)}{P(t)}\right] = \left[\overline{\pi}_1\mu + \overline{\pi}_2\mu_V + r(1-\overline{\pi}_1-\overline{\pi}_2)\right]dt = rdt.$$

Tästä seuraa

$$r = \overline{\pi}_1\mu + \overline{\pi}_2\mu_V + r - r\overline{\pi}_1 - r\overline{\pi}_2,$$

josta edelleen

$$0 = \overline{\pi}_1(\mu - r) + \overline{\pi}_2(\mu_V - r) \implies \frac{\overline{\pi}_1}{\overline{\pi}_2} = -\frac{\mu_V - r}{\mu - r}.$$

Yhdistämällä yhtälössä (4) johdettu riskittömyyden ehto ja tästä seurannut arbitraasittomuuden ehto, saadaan

$$-\frac{\sigma_V}{\sigma} = -\frac{\mu_V - r}{\mu - r} \implies \frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_V - r}{\sigma_V}.$$

Tästä huomataan, että riskipreemio yhtä riskin yksikköä kohden on markkinoilla sama kaikille samaan riskinlähteeseen sidotuille instrumenteille. Sijoittamalla aiemmin määritellyt lausekkeet muuttujille $\mu_V V(t)$ ja $\sigma_V V(t)$, saadaan

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\frac{f_t + f_S\mu S(t) + \frac{1}{2}f_{SS}\sigma^2 S(t)^2}{V(t)} - r}{\frac{f_S\sigma S(t)}{V(t)}} = \frac{f_t + f_S\mu S(t) + \frac{1}{2}f_{SS}\sigma^2 S(t)^2 - rV(t)}{f_S\sigma S(t)},$$

josta edelleen

$$(\mu - r)f_S S(t) = f_t + f_S\mu S(t) + \frac{1}{2}f_{SS}\sigma^2 S(t)^2 - rV(t).$$

Termi $\mu f_S S(t)$ kumoutuu ja jäljelle jää hintaprosessin ajautumistermistä μ riippumaton lauseke

$$-rf_S S(t) = f_t + \frac{1}{2}f_{SS}\sigma^2 S(t)^2 - rV(t).$$

Järjestelemällä termit uudelleen ja huomioimalla, että $V(t) = f(S,t)$, saadaan

$$f_t(S,t) + rSf_S(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS}(S,t) - rf(S,t) = 0.$$

Jos kyseessä on eurooppalainen osto-optio, jonka toteutushinta on K ja maturiteetti T, reunaehdot ovat

$$\begin{aligned} f(0,t) &= 0, \\ f(S,T) &= \max\{0, S-K\}. \end{aligned}$$

Tämän osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisu annetuilla reunaehdoilla antaa Blackin–Scholesin hinnoittelukaavan:

$$C(S,t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

missä $\Phi(x)$ on standardinormaalijakauman kertymäfunktio

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

ja parametrit d_1 sekä d_2 ovat

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

6 Blackin–Scholesin mallin oletuksista

Blackin–Scholesin malli oli ensimmäinen onnistunut stokastiseen differentiaalilaskentaan perustuva tapa hinnoitella optioita [30]. Luonnollisesti aihealueen tutkimus on kehittynyt tästä eteenpäin, sillä vaikka BS-malli on ollut erityisen menestynyt, sen vaatimat oletukset ovat tiukat. Paremmin todellisuutta kuvaavien oletusten asettaminen johtaa yleensä monimutkaisempiin, mutta tarkempiin malleihin. Oletuksista voidaan tunnistaa heti useita kohtia, jotka eivät selvästikään pidä paikkaansa oikeilla markkinoilla. Tässä luvussa tarkastellaankin BS-mallin valittuihin oletuksiin kohdistuvaa kritiikkiä.

6.1 Tuottojen log-normaali jakautuminen

Mustaan joutseneen viittaava latinankielinen sanonta *rara avis in terris nigroque simillima cygno* tarkoittaa vapaasti käännettynä jonkin olevan *yhtä harvinainen kuin maanpäällinen musta joutsen.* Sanontaa ehdittiin käyttää ainakin 1500 vuotta [32], ennen kuin se lakkasi olemasta mielekäs vuonna 1697 hollantilaisen tutkimusmatkailijan Willem de Vlaminghin löytäessä eurooppalaisille entuudestaan tuntemattoman mustan joutsenlajin.

Musta joutsen sai sittemmin uuden merkityksen [33] kuvailemaan arvaamattomia ja hyvin epätodennäköisiä tapahtumia, joilla on suuret seuraukset. Vuoden 1987 mustan maanantain pörssiromahdusta puhutaan usein esimerkillisenä mustana joutsenena. Empiiriset tutkimukset ovat näyttäneet ääritapahtumien frekvenssin olevan huomattavasti log-normaalin mallin ennustamaa yleisempiä [34].

6.2 Implisiittinen volatiliteetti ja volatiliteettihymyt

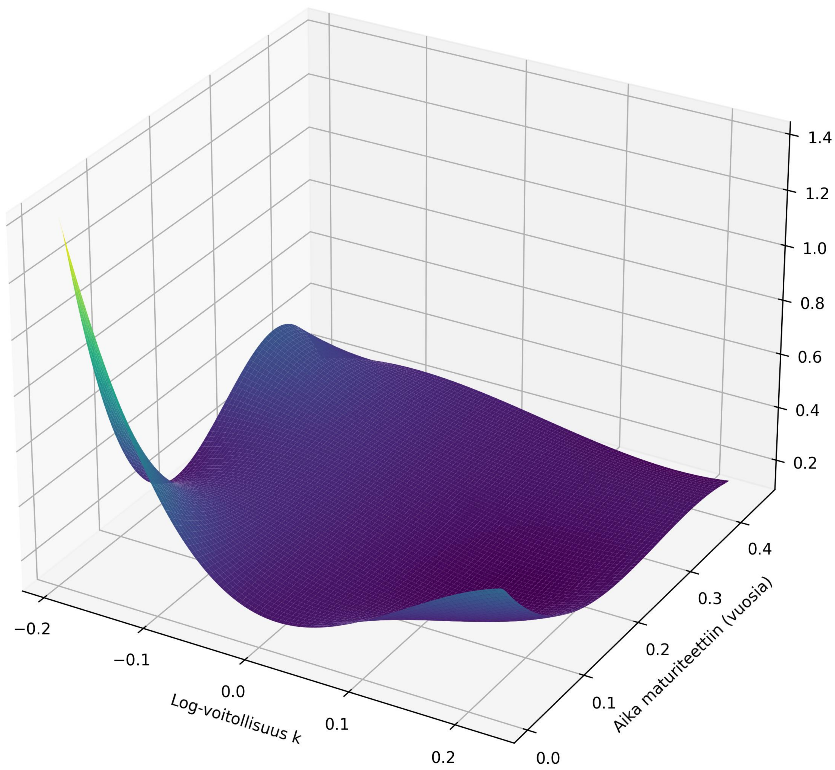
Volatiliteetti kuvaa kuinka paljon ja kuinka nopeasti sijoituskohteen, kuten osakkeen tai valuutan, hinta vaihtelee tietyllä ajanjaksolla. BS-malli ei sellaisenaan ota kantaa volatiliteettiparametrin arvoon, mutta mallin perusteella on johdettavissa *implisiittinen volatiliteetti.*

Implisiittinen volatiliteetti on optioiden havaituista hinnoista johdettava mittari, joka kertoo markkinoiden odotuksista osakekurssien tai muiden sijoituskohteiden tulevasta hinnanvaihtelusta. Jos volatiliteetti on tunnettu, voidaan BS-mallilla johtaa option hinta. Vastavuoroisesti jos option markkinahinta on tunnettu, voidaan BS-mallista johtaa implisiittinen volatiliteetti.

Olkoon $V(S, K, T)$ erään option havaittu hinta. Implisiittinen volatiliteettipinta $\sigma(K, T)$ optiolle on sen toteutushinnan K ja ajan toteutuspäivään T funktio, joka ratkaistaan yhtälöstä

$$V\left(S,K,T\right) = BS\left(S,T,r,K,\sigma\left(K,T\right)\right),$$

missä BS on option hinnan kaava. Toisin sanoen $\sigma(K, T)$ on se volatiliteetti, jolla BS-malli antaa havaitun hinnan. BS-mallin oletuksen mukaan $\sigma(K, T) = \sigma$, eli vakio. Empiirisissä tutkimuksissa [31] kuitenkin ollaan huomattu, että tämä ei pidä paikkaansa ja implisiittinen volatiliteetti muuttuu sekä toteutushinnan ja ajan maturiteettiin mukaan.



Kuva 3: Approksimaatio S&P-500 -indeksiä seuraavan pörssilistatun SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY) optioiden implisiittinen volatiliteettipinta. 21/11/2025. Lähde: Yahoo Finance.

7 Volatiliteetin mallintaminen

I can calculate the motion of heavenly bodies, but not the madness of people.[5]

– Sir Isaac Newton

Option hinnoittelussa volatiliteetin rooli on selkeä; riskiä karttavan sijoittajan silmissä tuotto-odotusten ollessa muuttumaton, matalamman volatiliteetin instrumentti on arvokkaampi. Volatiliteetin käyttäytymisen ennustaminen tarkasti on optioiden hinnoittelun kannalta ratkaisevan tärkeää. Liian tasainen ennuste volatiliteetista ei osaa odottaa suuria muutoksia volatiliteetissa, jolloin esimerkiksi osto-option hinta voi nousta suhteettoman korkeaksi, koska äkkinäistä markkinahinnan putoamista mallinnetaan liian pienellä todennäköisyydellä.

Volatiliteetille on tyypillistä olla koholla poikkeuksellisten markkinaolosuhteiden vallitessa ja matalalla vakaiden jaksojen aikana [47]. Olisi siis suotavaa, että volatiliteetin malli huomioi sen keskittymät. Volatiliteetti ei ole riippumaton menneestä [76], joten volatiliteetti ei ole muistiton Markovin prosessi. Yksittäisten osakkeiden hintaprosessi ei kehity tyhjiössä, vaan on riippuvainen markkinoiden keskimääräisestä kehityksestä [56]. Tällöin useita instrumentteja mallintaessa on huomioitava niiden keskinäinen vaikutus.

BS-malli on eurooppalaisten optioiden hinnoittelun kulmakivi, joka on säilyttänyt suosionsa myös pidemmälle jalostettujen mallien kehittämisen jälkeen. Edellä mainittuja volatiliteetin ominaisuuksien puutetta voidaan kuitenkin pyrkiä korjaamaan muuttamalla mallin varianssiparametrin käyttäytymistä. Mallin teoreettisen puutteellisuuden lisäksi myös empiiristen havaintojen mukaan BS-malli alihinnoittelee in-the-money optiot ja ylihinnoittelee out-of-the-money optiot, etenkin kun aika maturiteettiin on pitkä [40]. Systemaattinen virhe osoittaa tarpeen vaihtoehtoisille menetelmille.

7.1 Lokaalin volatiliteetin mallit

Vakioisen volatiliteetin tilalle on ehdotettu useita vaihtoehtoja. Lokaalin volatiliteetin mallit (LV-mallit) olettavat volatiliteetin seuraavan ennalta määrättyä kohde-etuuden hinnan ja ajan funktiota $\sigma(S_t, t)$. Tällöin LV-mallissa kohde-etuuden satunnaisuus seuraa stokastista differentiaaliyhtälöä

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma\left(S_t, t\right) S_t dW_t.$$

LV-malli mahdollistaa empiirisesti määritetyn volatiliteettipinnan tarkan seuraamisen. On kuitenkin epärealistista olettaa volatiliteettipinnan pysyvän muuttumattomana, toisin sanoen LV-mallit eivät huomioi volatiliteetin itsensä varianssia. Kiinteä volatiliteettipinta altistaa mallin ylisovitukselle[6], eikä sellaisenaan pysty ottamaan

[5]Newtonin kerrotaan sanoneen näin puhuessaan Etelänmeren komppanian osakkeen arvosta [49]. Vaikka Newton saattoi kokea markkinoiden (volatiliteetin) tulkitsemisen ylitsepääsemättömänä, se ei ole estänyt myöhempiä tutkijoita tekemästä isoja harppauksia tähän pyrkiessään.

[6]Ylisovituksella viitataan tilanteeseen, jossa mallin parametrit arvoidaan sopimaan erääseen datajoukkoon hyvin tarkasti kuitenkin siten, että malli ei kyseisillä parametreilla enää sovi yleisempään dataan.

huomioon volatiliteetin keskittymiä tai häntäriskiä, eli harvinaisia ääritapahtumia; mustia joutsenia. Yhden ensimmäisistä lokaalin volatiliteetin malleista esitti Dupire (1994).

7.2 Stokastisen volatiliteetin mallit

Stokastisen volatiliteetin mallit olettavat volatiliteetin olevan stokastinen prosessi. Eräs eniten käytetyistä stokastisen volatiliteetin malleista, Hestonin malli [64], olettaa kohde-etuuden hinnan stokastisen prosessin olevan muotoa

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^S, \tag{5}$$

missä

$$d\nu_t = \kappa \left(\theta - \nu_t\right) dt + \xi \sqrt{\nu_t} dW_t^{\nu}.$$

Edelleen W_t^S, W_t^{ν} ovat Brownin liikkeitä korrelaatiokertoimella ρ. Mallin muut parametrit ovat

i) ν_0, alkuhetken varianssi,
ii) θ, arvo, hinnan pitkäaikainen varianssi; $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\nu_t\right] = \theta$,
iii) κ, tahti, jolla ν_t pyrkii kohti arvoa θ,
iv) ξ, volatiliteetin volatiliteetti; määrittää termin ν_t varianssin.

Mikäli parametrit toteuttavat Fellerin ehtona tunnetun epäyhtälön $2\kappa\theta > \xi^2$, tiedetään termin ν_t olevan positiivinen [35]. Muuttujan ν_t negatiivisuus, esimerkiksi numeerisen approksimaation virheen takia, johtaa mallin hajoamiseen reaaliakselilla. On kuitenkin huomattava, että stokastisen volatiliteetin mallien oletuksilla markkinat eivät voi olla täydellisiä, sillä jos ei ole olemassa volatiliteetin kanssa täydellisesti korreloitunutta kohde-etuutta, ei markkinat voi olla täydellisiä[7] rahoituksen toisen peruslauseen nojalla.

Kuten lokaalin volatiliteetin mallit, Hestonin malli huomioi volatiliteettipinnan tarkemmin ja suoriutuu BS-mallia paremmin etenkin kun option aika maturiteettiin on pitkä tai keskipitkä [44]. Volatiliteettiparametrin ξ kasvattaminen tekee hintaprosessin hännistä paksumpia, kun parametri κ ei ole liian suuri. Parametrin ρ arvo vaikuttaa jakauman vinouteen, joka mahdollistaa volatiliteettipinnan myötäilyn. Nämä mallin kalibroinnin vaihtoehdot eivät kuitenkaan pysty ottamaan huomioon markkinoiden ääriliikkeille tyypillisiä ominaisuuksia, kuten volatiliteettipiikkejä ja -keskittymiä. Huomataan yksinkertaisten stokastisen volatiliteetin mallien tarvitsevan jalostusta, jotta ääritapahtumien laatu näkyy hinnoittelussa paremmin.

7.3 Hyppyprosessit

Kohde-etuuden hintakehityksen mallilta on suotavaa jakautuman paksujen häntien eli ajoittaisten ääritapahtumien huomioinen. Stokastisen volatiliteetin malliin voidaan

[7] Oletetaan, että stokastisen volatiliteetin malli noudattaa yhtälöä (5). Volatiliteetin muuttaminen on mahdollista vaikuttamatta hinnan S_t martingaali ominaisuuteen. Tällöin osakkeella voi olla volatiliteetista riippuen eri arvo ja useampi ekvivalentti martingaalimitta.

lisätä termi, joka ottaa huomioon ajoittaiset ja äkilliset, kohde-etuuden hintaan merkittävästi vaikuttavat tapahtumat, kuten äkilliset kurssiromahdukset tai positiivista tulosvaroitusta seuraavat nousut.

Bates (1996) esitteli kohde-etuuden hintaprosessin hyppyjä huomioivan mallin, Batesin mallin. Malli olettaa hintaprosessin käyttäytyvän seuraavanlaisesti

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \lambda\mu_J)\, S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^S + J S_t dN_t, \\ d\nu_t &= \kappa\,(\theta - \nu_t)\, dt + \sigma_\nu \sqrt{\nu_t} dW_t^\nu, \\ dW_t^S dW_t^\nu &= \rho dt, \end{aligned}$$

missä $\mu_J = \exp(\mu_S + \sigma_S^2/2) - 1$. Volatiliteettiprosessi ν_t on sama kuin Hestonin mallissa, kuten myös Brownin liikkeet. Prosessi N_t on mallin Brownin liikkeestä riippumaton Poissonin prosessi, jolla on intensiteetti λ. Intensiteettiparametri määrittelee kohde-etuuden hinnassa tapahtuvien hyppyjen tiheyden ajan suhteen. Hyppyjen prosentuaalinen koko seuraa log-normaalia jakaumaa

$$ln(1 + J) \sim \mathcal{N}\left(\mu_S, \sigma_S^2\right).$$

Luonnollisesti Batesin malli perii Hestonin mallissa esiintyvien parametrien ominaisuudet. Lisäksi on selvää, että hyppyjen lisääminen hintaprosessiin lisää sen varianssia ja tekee jakauman hännistä entistä paksumpia. Hyppyjä määrittelevän parametrin μ_S positiiviset (negatiiviset) arvot johtavat oikealle (vasemmalle) vinoon jakaumaan, kun taas parametrin σ_S arvo vaikuttaa jakauman huipukkuuteen.

7.4 Volatiliteetin keskittymät ja fraktionaalinen Brownin liike

Puolassa syntynyt ranskan-amerikkalainen matemaatikko Benoit B. Mandelbrot (1924–2010) vakiinnutti sanan *fraktaali* ja omisti ison osan tieteellisestä urastaan niiden tutkimiseen. Fraktaali on löyhästi määriteltynä geometrinen kuvio, jolla on yksityiskohtaista rakennetta ja on näennäisesti samanlainen jokaisessa mittakaavassa [46]. Mandelbrot (1963) toteaa useiden yleisten optioiden kohde-etuuksien hintaprosessien käyrien muistuttavan fraktaaleja. Mandelbrot ja van Ness (1968) ehdottavat fraktaalisen prosessin malliksi *fraktionaalista Brownin liikettä*. Fraktionaalisen Brownin liikkeen mallissa hintaprosessi seuraa dynamiikkaa[8].

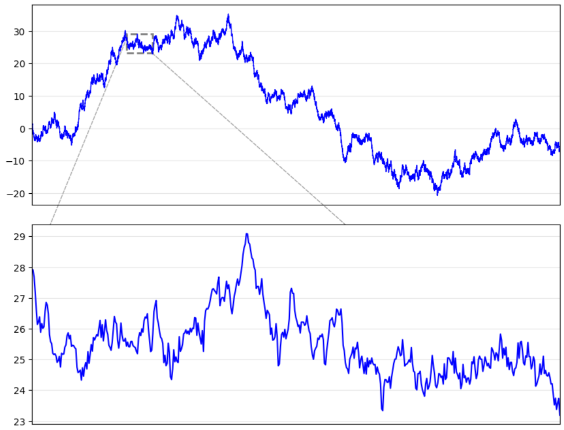
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^H,$$

jossa W_t^H on luvussa 3.4 määritelty fraktionaalinen Brownin liike.

Toisin kuin BS-malli, lokaalin volatiliteetin mallit ja stokastisen volatiliteetin mallit, fraktionaalinen Brownin liike ei yleisesti ole Markovin prosessi [53], eikä edes martingaali, lokaali martingaali tai semimartingaali [54]. Mandelbrot ja van Ness (1968) huomioivat fraktionaalista Brownin liikettä ehdottaessaan kuinka kohde-etuuksien suuret hinnanmuutokset seuraavat suuria hinnanmuutoksia, ja pienet

[8]On huomioitava, että fraktionaalinen Brownin liike ei ole Itô integroituva, joten sen suhteen integrointi vaatii toisenlaisen stokastisen integraalin

muutokset seuraavat pieniä muutoksia. Hintaprosessi ei siis ole muistiton ja sen tulevat arvot ovat riippuvaisia jo havaituista arvoista. Asian ovat myöhemmin vahvistaneet empiirisissä tutkimuksissaan muiden muassa Greene ja Fielitz (1977), Lo ja Mackinlay (1988), Willinger et al. (1999).



Kuva 4: Brownin liikkeen 10000 simuloidun havaintopisteen muodostama käyrä, joka demonstroi fraktaaliominaisuutta.

7.5 GARCH -tyyppiset mallit

Bollerslev (1986) esitteli toisen muistillisen volatiliteetin mallin, yleistetyn autoregressiivisen ehdollisen heteroskedastisuuden mallin (GARCH-mallin). Diskreetti malli on yksinkertaisimmillaan muotoa

$$r_t = \mu + \epsilon_t,$$

missä r_t on (log)tuotto, μ sen odotusarvo ja ϵ_t volatiliteettitermi, missä

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \mathcal{N}(0,1), \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Mallin vakioisia parametreja ovat ω, α ja β. Myöhempi volatiliteetti riippuu sen aiemmasta arvosta siten, että tuoton kasvaessa tai laskiessa äkillisesti, volatiliteetti kasvaa. Muistin nojalla malli onnistuu huomioimaan volatiliteetin keskittymiä ja ääritapahtumia. Toisin kuin fraktionaalinen Brownin liike, GARCH-tyypin mallit eivät ole stokastisen volatiliteetin malleja, sillä tulevan hetken volatiliteetti tiedetään havaitsemalla nykyhetken volatiliteetti.

Mallin teoreettisia puutteita paikkaamaan on kehitetty lukuisia jalostettuja versioita. GARCH-malli olettaa, että positiiviset ja negatiiviset liikkeet vaikuttavat volatiliteettiin symmetrisesti. Se ei siis sellaisenaan pysty huomioimaan empiirisesti havaittua vipuvaikutusta (engl. leverage effect) [59], jossa negatiiviset muutokset tuotossa kasvattavat volatiliteettia enemmän kuin vastaavansuuruiset positiiviset muutokset.

Engle ja Ng (1993) esittelivät epälineaarisen asymmetrisen GARCH-tyypin mallin, NAGARCH-mallin. Tässä mallissa ehdolliseen varianssiin lisätään asymmetriaa kuvaava parametri θ, jolloin yhtälö saa muodon:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\epsilon_{t-1} - \theta\sigma_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2.$$

Tässä parametri θ kontrolloi mallin epäsymmetriaa. Jos $\theta > 0$, negatiiviset muutokset tuotossa kasvattavat seuraavan jakson volatiliteettia voimakkaammin kuin positiiviset muutokset tuotossa. Muita variaatioita GARCH -tyypin malleista löytyy lähteistä ([61] [65] [66] [67]).

8 Fraktionaalinen Brownin liike ja arbitraasi

Arbitraasi on fraktionaalisen Brownin liikkeen mallien suurin kompastuskivi ja siksi niiden soveltamisesta akateemisen tarkastelun ulkopuolella on hyvin vähän näyttöä. Luvussa seurataan lähteessä [54] esitettyä todistusta arbitraasin olemassaolosta ja esitetään joitakin todistuksesta poisjätettyjä vaiheita.

Määritelmä 21. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $T : \Omega \to \Omega$ mitallinen kuvaus. Kuvauksen T sanotaan olevan *mittainvariantti*, jos kaikille $A \in \mathcal{F}$ pätee

$$\mathbb{P}\left(T^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}(A),$$

tai ekvivalentisti jos kaikille satunnaismuuttujille $X \in L^1$ pätee

$$\mathbb{E}[X \circ T] = \mathbb{E}[X].$$

Nelikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ kutsutaan mittainvariantiksi dynaamiseksi systeemiksi.

Määritelmä 22. Olkoon T mittainvariantti kuvaus todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tapahtumaa $A \in \mathcal{F}$ kutsutaan kuvauksen T suhteen *invariantiksi*, jos $T^{-1}(A) = A$. Kaikkien T-invarianttien tapahtumien muodostamaa $\mathcal{F}$:n ali-sigma-algebraa $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{F} \mid T^{-1}(A) = A\}$ kutsutaan invariantiksi sigma-algebraksi. Jos $\mathcal{J}$ sisältää vain tapahtumia, joiden todennäköisyys on 0 tai 1, niin kuvauksen T sanotaan olevan *ergodinen*.

Olkoon T mittaa säilyttävä kuvaus todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ergodisen prosessin voidaan sanoa ainakin lopulta vierailevan kaikkialla perusjoukossa Ω. Matemaattisesti ilmaistuna todetaan prosessin T olevan ergodinen, kun mille tahansa tapahtumalle $A \in \mathcal{F}$, jolla on positiivinen todennäköisyys, tiedetään alkukuvien yhdisteen $\bigcup_{k=1}^{n} T^{-k}(A)$ todennäköisyyden lähestyvän ykköstä iteraatioaskelten n kasvaessa rajatta. Havainnollistavana esimerkkinä ergodisesta prosessista toimii akvarellivärin sekoittuminen vesimukiin. Kun vettä sekoitetaan, väri leviää ja värjää lopulta veden kokonaan käyden jokaisessa astian osassa.

Lause 7 (Birkhoffin ergodilause)**.** *Jos T on ergodinen mittainvariantti kuvaus avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, niin jokaiselle satunnaismuuttujalle $X \in L^1$ pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i = \mathbb{E}[X].$$

Todistus. Alkuperäinen todistus löytyy lähteestä [41]. □

Lause 8. *Fraktionaalinen Brownin liike ei ole semimartingaali, jos $H \neq \frac{1}{2}$.*

Todistuksen ytimessä on intuitiivinen havainto suppenemisesta $B^H_{t+\delta} - B^H_t \sim \delta^H B^H_1$ jakaumamielessä itse-similaarisuuden nojalla. Stationaarisuuden nojalla summatessa 2^n kappaletta termejä $\left|B^H(j2^{-n}) - B^H((j-1)2^{-n})\right|^p$, summa saa jakaumaltaan muodon $\left|B^H(1)\right|^p 2^n \cdot (2^{-n})^{pH} = \left|B^H(1)\right|^p (2^n)^{1-pH}$.

Todistus. Olkoot $H \in (0,1)$ Hurstin parametri, B^H fraktionaalinen Brownin liike ja $p > 0$ vakio. Määritellään välillä $[0,1]$ satunnaismuuttuja

$$V_{n,p} := \sum_{j=1}^{2^n} \left| B^H(j2^{-n}) - B^H((j-1)2^{-n}) \right|^p .$$

Fraktionaalisen Brownin liikkeen itse-similaarisuuden nojalla lisäys $B^H(j2^{-n}) - B^H((j-1)2^{-n})$ on jakaumaltaan sama kuin $2^{-nH}(B^H(j) - B^H(j-1))$. Näin ollen satunnaismuuttuja $V_{n,p}$ voidaan esittää jakaumamielessä seuraavasti

$$V_{n,p} \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{2^n} \left| 2^{-nH}(B^H(j) - B^H(j-1)) \right|^p = 2^{n(1-pH)} \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \left| B^H(j) - B^H(j-1) \right|^p .$$

Määritellään satunnaismuuttuja $\tilde{Y}_{n,p}$

$$\tilde{Y}_{n,p} := \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \left| B^H(j) - B^H(j-1) \right|^p .$$

Tämä on aritmeettinen keskiarvo jonosta $X_j = |B^H(j) - B^H(j-1)|^p$. Koska fraktionaalisen Brownin liikkeen lisäykset muodostavat stationaarisen Gaussin prosessin ja niiden autokovarianssi suppenee nollaan viiveen kasvaessa (kuten nähdään Lauseen 2 todistuksesta), kyseinen jono on ergodinen [72].

Birkhoffin ergodilauseen 7 nojalla otoskeskiarvo $\tilde{Y}_{n,p}$ suppenee melkein varmasti (ja siten myös todennäköisyysmielessä) kohti odotusarvoaan, kun $n \to \infty$

$$\tilde{Y}_{n,p} \xrightarrow{\text{m.v.}} \mathbb{E}\left[|B^H(1) - B^H(0)|^p \right] = \mathbb{E}\left[|B^H(1)|^p \right] =: c_p > 0.$$

Koska $\tilde{Y}_{n,p}$ suppenee todennäköisyysmielessä positiiviseen vakioon c_p ja $V_{n,p} \overset{d}{=} 2^{n(1-pH)} \tilde{Y}_{n,p}$, lausekkeen $V_{n,p}$ asymptoottinen käyttäytyminen todennäköisyysmielessä riippuu vain kertoimen eksponentista $1 - pH$. Saadaan siis

$$V_{n,p} \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} 0, & \text{jos } pH > 1, \\ \infty, & \text{jos } pH < 1. \end{cases}$$

Oletetaan, että fraktionaalinen Brownin liike B^H on semimartingaali. Jatkuvalla semimartingaalilla on todennäköisyydellä 1 äärellinen neliöheilahtelu, eli sen on oltava äärellinen, kun $p = 2$ [38]. Lisäksi, jos jatkuvan semimartingaalin neliöheilahtelu on tasan nolla, sen lokaali martingaaliosa on vakio ja prosessin on siten oltava äärellisen kokonaisheilahtelun prosessi [83].

Tarkastellaan tapausta $H \neq 1/2$

- Oletetaan, että $H < 1/2$. Valitaan $p = 2$, jolloin $pH = 2H < 1$. Yllä olevan perusteella neliöheilahtelu $V_{n,2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$. Ääretön neliöheilahtelu on ristiriita semimartingaalin määritelmän kanssa.

- Oletetaan, että $H > 1/2$. Valitaan $p = 2$, jolloin $pH = 2H > 1$. Tällöin neliöheilahtelu $V_{n,2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Neliöheilahtelun ollessa nolla prosessilla tulisi säännön mukaan olla äärellinen kokonaisheilahtelu. Valitaan kokonaisheilahtelun tutkimiseksi $p = 1$, jolloin oletuksesta seuraa $pH = H < 1$. Tästä puolestaan seuraa, että kokonaisheilahtelu $V_{n,1} \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$. Ääretön kokonaisheilahtelu on jälleen ristiriita.

Kummassakin tapauksessa päädytään ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä. Fraktionaalinen Brownin liike ei ole semimartingaali, kun $H \neq 1/2$. Rahoituksen peruslauseen nojalla tämä mahdollistaa arbitraasin. $\square$

Intuitiivisesti mallin ongelmallisuuden voi tulkita seuraavasti. Oletetaan, että kohde-etuuden hinta seuraa fraktionaalista Brownin liikettä Hurstin parametrilla $\frac{2}{3}$. Tällöin havaitessa nousua kohde-etuuden hinnassa, voidaan välittömästi ostaessa hyödyntää positiivista autokorrelaatiota hintaprosessissa saadaksemme positiivisen todennäköisyyden voitolle.

9 Arbitraasittomuus Wickin tulolla

Arbitraasiominaisuuden ja -strategian olemassaolo eivät ole hinnoittelumallin toivottuja ominaisuuksia. Vaikka fraktionaalisen Brownin liikkeen mallit sallivat arbitraasin, tarkastelu akateemisessa asiayhteydessä kuitenkin jatkui arbitraasin todistamisen jälkeenkin. Hu ja Oksendal (2003) esittelivät vaihtoehtoiseen stokastiseen integraaliin perustuvan fraktionaalisen Brownin liikkeen mallin, jossa ei ole arbitraasia Hurstin parametrin arvoilla $\frac{1}{2} < H < 1$. Vaihtoehtoisen stokastisen integraalin keskeinen idea on määritellä satunnaismuuttujien tulo *Wickin tulon* avulla. Integraalia kutsutaankin Wickin-Itôn integraaliksi. Wickin tulo ”pakottaa” fraktionaaliselle Brownin liikkeelle ominaisuudet, jotka mahdollistavat fraktionaalisen Girsanovin lauseen soveltamisen ja Wickin-Itôn vastineen Itôn kaavalle.

Määritelmä 23. Olkoot X ja Y keskeisiä Gaussin satunnaismuuttujia, joilla on äärelliset momentit. Satunnaismuuttujien X ja Y Wickin tulo on

$$X \diamond Y = XY - \mathrm{Cov}(X, Y)$$

Seuraus 2. *Keskeisille Gaussin satunnaismuuttujille pätee*

$$X \diamond Y = XY - \mathbb{E}[XY].$$

Tästä nähdään Wickin tulolle ominainen tulos; keskeisille Gaussin satunnaismuuttujille tulon $X \diamond Y$ odotusarvo on nolla.

Määritelmä 24. Luonnollisille luvuille n Wickin eksponentti on

$$X^{\diamond n} = X \diamond X \diamond \cdots \diamond X,$$

siten, että tulossa on n tulontekijää.
Edelleen eksponenttifunktio saadaan yhtälöstä

$$\exp^{\diamond}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^{\diamond n}.$$

Wick-malli ei kuitenkaan ole ongelmaton ja sen soveltaminen rahoitusalan ammattilaisten keskuudessa on jäänyt vähäiseksi. Björk ja Hult (2005) tutkivat Wick-mallin tulkinnallisia haasteita ja luvun loppu seuraa heidän esille tuomiaan havaintoja.

Mallinnetaan osakkeen hintaa geometrisen fraktionaalisen Brownin liikkeen avulla, joka tässä on ratkaisu yhtälöön

$$dS_t = S_t \diamond dB_t^H, \quad S_0 = s_0.$$

Tämän differentiaaliyhtälön toteuttava prosessi on muotoa

$$S_t = s_0 \exp\left(B_t^H - \frac{1}{2} t^{2H}\right).$$

Oletetaan, että portfolio sisältää hetkellä 1 määrän $S_1 - s_0$ osaketta. Tarkastellaan nyt joukkoa

$$\Omega' = \left\{ \omega \in \Omega \ : \ B_1^H(\omega) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}.$$

Selvästi $\mathbb{P}(\Omega') > 0$ ja $S_1 = s_0 \exp\left(B_1^H - \frac{1}{2}\right)$. Huomataan, että $S_1 - s_0 > 0$, mutta

$$\begin{aligned} (S_1 - s_0) \diamond S_1 &= S_1 \diamond S_1 - s_0 S_1 \\ &= s_0^2 \left(\exp\left(2B_1^H - 2\right) - \exp\left(B_1^H - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Toisin sanoen on mahdollista luoda portfolio, jolla on positiivisella todennäköisyydellä negatiivinen arvo, vaikka omistuksien lukumäärä ja arvo ovat positiivisia. Tulkinnallisesti tilanne on hyvin ongelmallinen.

Olkoon nyt m_t riskillisen osakkeen määrä hetkellä t. Kiinnitetään nyt jokin ajanhetki t. Oletetaan, että hetkellä t sijoittajalla on 10 kappaletta tarkasteltavaa osaketta. Ulkopuolinen tarkastelija ei kuitenkaan pysty määrittämään sijoittajan omistusten arvoa

$$V_t = m_t \diamond S_t$$

tietämättä koko satunnaismuuttujaa m_t. Jotta arvo voitaisiin havaita, tarkasteljan tulisi tietää kuinka paljon osakkeita sijoittajalla on $\mathbb{P}$-melkein varmasti jokaisessa mahdollisessa maailmantilanteessa.

Wick-mallin tulkinta johtaa erikoisiin ja epärealistisiin tilanteisiin. Björk ja Hult kuitenkin muistuttavat, että ei ole a priori mitään syytä sille, etteikö Wickin tulon mallilla olisi mielekkäitä sovelluksia rahoitusmatematiikassa.

10 Kaupankäyntikulut ja arbitraasittomuus

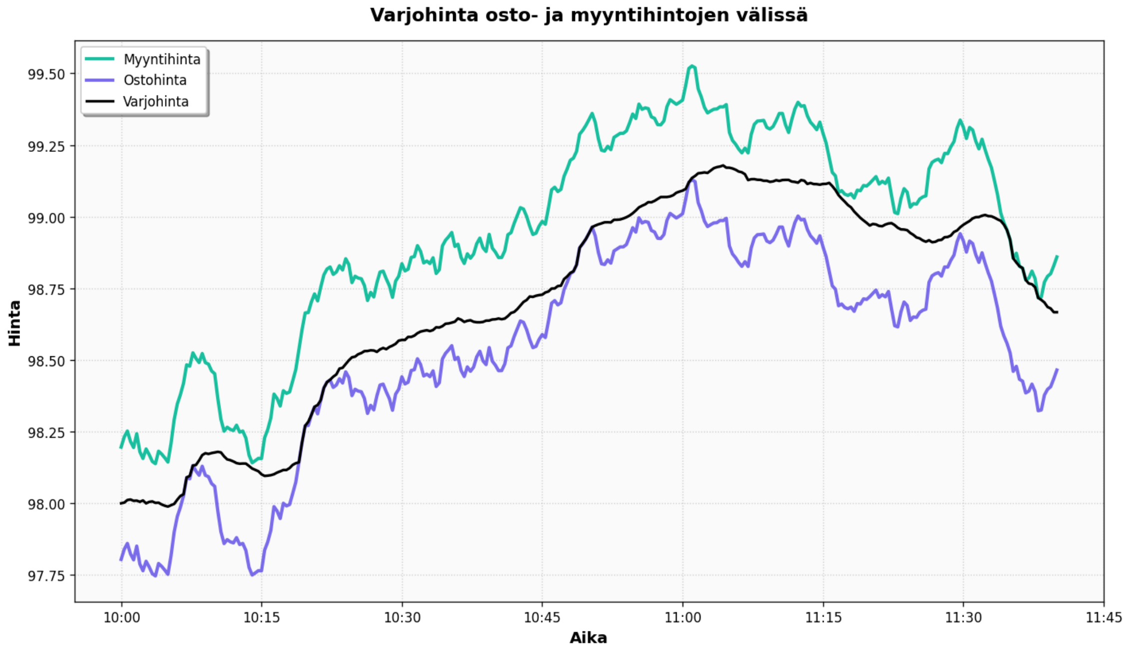
Hinnoittelumallien tärkein kriteeri ei ole matemaattinen estetiikka, vaan niiden kyky replikoida havaintoja realististen oletusten vallitessa. Mallit, jotka eivät ole semimartingaaleja, on helppo hylätä kitkattomilla markkinoilla arbitraasiin nojaten. On suotavaa, että mallin kyky myötäillä todellisuutta säilyy myös oletuksia keventäessä. Guasoni (2006) näytti, että kun luovutaan kitkattomuuden oletuksesta ja lisätään kaupankäyntikulut tarkasteluun, fraktionaalisen Brownin liikkeen mallien arbitraasi häviää. Luvussa esitetään Guasonin argumentti pääpiirteissään.

10.1 Mallin alustus

Oletetaan, että sijoittaja haluaa hyväksikäyttää fraktionaalisen Brownin liikkeen mallin arbitraasistrategiaa. Hurstin parametrin pienentyessä, hänen on tällöin tihennettävä kaupankäyntinsä frekvenssiä, jolloin strategia olisi tehokkaimmillaan. Oletetaan, että markkinantakaajan asettama kohde-etuuserän ostohinta eräällä hetkellä on 101 rahaa ja myyntihinta 99 rahaa. Sijoittajan ostaessa ja melkein välittömästi myydessä hän tekee strategiallaan kaupankäyntikulujen johdosta noin kaksi rahaa tappiota. Markkinoilla vallitseva osto- ja myyntihinnan välinen erotus luo suhteellisen kaupankäyntikulun, joka ilmenee taloudellisena haittana sijoittajalle ja vaikeuttaa arbitraasistrategian toteuttamista.

Oletetaan nyt, että prosessi $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ on jatkuva, melkein varmasti positiivinen kaikille $t > 0$ ja todennäköisyysavaruuden filtraatioon adaptoitunut kaikilla t. Mallinetaan tällä prosessilla riskillisen kohde-etuuden hintaa ja oletetaan riskittömän kohde-etuuden olevan numéraire. Sijoittajalla on eräs strategia $(\theta_t)_{t\in[0,\infty)}$, joka määrittää hallussa olevien osakkeiden määrän. Oletetaan, että $(\theta_t)_{t\in[0,\infty)}$ on yksinkertainen ja koostuu äärellisestä määrästä toimeksiantoja hetkillä $(\tau_i)_{i=1}^{n}$, missä τ_i on pysäytyshetki. Tällöin $\theta = \sum_{i=1}^{n-1} \theta^{(i)} \mathbf{1}_{(\tau_i,\tau_{i+1}]}$ satunnaismuuttujille $\left(\theta^{(i)}\right)_{i=1}^{n}$, missä $\theta^{(i)}$ on $\mathcal{F}_{\tau_i}$-mitallinen ja $\theta^{(0)} = 0$.

Osto- ja myyntihinnan erotus jo itsessään luo markkinoille sisäänrakennetun kaupankäyntikulun, jota merkitään positiivisella vakiolla k. Tässä tarkastelussa oletetaan kuitenkin kaupankäyntikulun olevan mielivaltaisen pieni, mutta kuitenkin suhteellinen kohde-etuuden hintaan. Esitetään nyt käyrä $\tilde{X}$, jolle asetetaan ehdoiksi jatkuvuus ja rajoitettu etäisyys $\left|X_t - \tilde{X}_t\right| \leq kX_t$ seurattavasta käyrästä X_t. Kutsutaan käyrää *varjokäyräksi*, jonka voidaan intuitiivisesti ajatella asettuvan seurattavan käyrän osto- ja myyntihintojen väliin.



Kuva 5: Varjohinnan käyrä kaupankäyntikulujen välissä.

Tällöin, jos portfoliossa ei ole alkupääomaa, sen myyntiarvo hetkellä t on

$$V_t(\theta) = \sum_{\tau_i < t} \theta^{(i)} \left(X_{\tau_{i+1} \wedge t} - X_{\tau_i} \right) - k \sum_{\tau_i < t} X_{\tau_i} \left| \theta^{(i)} - \theta^{(i-1)} \right| - k X_t \left| \theta_t \right|,$$

missä ensimmäinen termi on myyntivoitto (tappio), toinen termi on kaupankäyntikulut strategian aikana ja viimeinen on osakkeiden likvidointikustannus. Guasoni näyttää, että kun siirrytään diskreetistä prosessista jatkuva-aikaiseen prosessiin, myyntiarvo suppenee muotoon

$$V_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dX_s - k \int_0^t X_s d\|D\theta\|_s - k X_t \left| \theta_t \right|, \tag{6}$$

missä $D\theta$ on prosessin θ heikko derivaatta[9] mittamielessä ja $\|D\theta\|$ sen kokonaisheilahtelu. Huomataan kuitenkin, että integraalia $\int_0^t \theta_s dX_s$ ei voida esittää Itôn integraalina, jos X ei ole semimartingaali. Koska tarkastelemme vain integrandeja, joilla on äärellinen kokonaisheilahtelu, voidaan soveltaa seuraavaa määritelmää.

Määritelmä 25. Olkoon X càdlàg ja $\theta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\theta_{0^-} = 0$, vasemmalta jatkuva sekä kokonaisheilahtelultaan rajoitettu. Määritellään funktion θ integraali funktion X suhteen kaavalla

$$\int_{[0,t]} \theta_s dX_s = \theta_t X_t - \theta_{0^-} X_{0^-} - \int_{[0,t]} X_s dD\theta_s,$$

missä oikean puolen integraali ymmärretään Lebesguen–Stieltjesin integraalina. Käytetään määritelmän mukaisesta integraalista merkintää $(\theta \cdot X)_t$.

Huomionarvoista on, että määritelmä on yhtäpitävä Itôn integraalin kanssa, kun prosessi, jonka suhteen integroidaan, on semimartingaali [90].

[9]Heikkoa derivaattaa käsitellään liitteessä A.

10.2 Arbitraasin olemattomuus

Olkoon $\tilde{X}$ prosessin X osto-myynti erotuksen tasojen välissä. Seuraava intuitiivinen lemma osoittaa, että kaupankäynti hintaprosessilla X kaupankäyntikuluineen ei ole tuottoisampaa, kuin kaupankäynti prosessilla $\tilde{X}$ ilman kaupankäyntikuluja.

Lemma 2. *Olkoot $X, \tilde{X} : [0, \infty) \to (0, \infty)$ càdlàg ja deterministisiä funktioita siten, että*

$$\left| X_t - \tilde{X}_t \right| < kX_t \tag{7}$$

kaikille $t \geq 0$. Olkoon lisäksi $\theta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ vasemmalta jatkuva funktio, jolla on äärellinen kokonaisheilahtelu. Tällöin kaikille $t \geq 0$

$$V_t(\theta) \leq (\theta \cdot \tilde{X})_t,$$

missä yhtäsuuruus pätee jollekin arvolle t jos ja vain jos $\theta_s = 0$ kaikille $s \leq t$.

Todistus. Huomataan, että yhtälöstä (6) saadaan muoto

$$V_t(\theta) = \left(\theta \cdot \tilde{X}\right)_t + \left(\theta \cdot \left(X - \tilde{X}\right)\right)_t - \int_{[0,t]} kX_s d\|D\theta\|_s - kX_t |\theta_t| .$$

Koska $\theta_{0-} = 0$, soveltamalla määritelmää 25 saadaan

$$\left(\theta \cdot \left(X - \tilde{X}\right)\right)_t = \left(\theta_t \left(X_t - \tilde{X}_t\right)\right) - \int_{[0,t]} \left(X_s - \tilde{X}_s\right) dD\theta_s.$$

Epäyhtälöstä (7) seuraa

$$\theta_t \left(X_t - \tilde{X}_t\right) - |\theta_t| kX_t \leq 0 \tag{8}$$

ja

$$-\int_{[0,t]} \left(X_s - \tilde{X}_s\right) dD\theta_s - \int_{[0,t]} kX_s d\|D\theta\|_s \leq 0. \tag{9}$$

Oletuksen (7) nojalla epäyhtälöiden (8) ja (9) yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $\theta = 0$ välillä $[0, t]$. □

Määritellään nyt stokastiselle prosessille ominaisuus, tahmeus (engl. stickiness).

Määritelmä 26. Progressiivisesti mitallinen prosessi Y on *tahmea* filtraation $\mathcal{F}_t$ suhteen, jos kaikilla $\varepsilon, T > 0$ ja kaikilla pysähtymisajoilla τ, joille $P(\tau < T) > 0$, pätee

$$P\left(\sup_{t\in[\tau,T]} |Y_t - Y_\tau| < \varepsilon, \tau < T\right) > 0.$$

Lemmaan 2 nojaten Guasoni (2006) näytti, että mielivaltaisen pienet kaupankäyntikulut ovat riittävä ehto sille, että jatkuvan ajautumistermin geometrisella fraktionaalisella Brownin liikkeellä ei ole arbitraasimahdollisuutta. Tämä tulos esitetään formaalisti seuraavassa lauseessa, joka esitetään tässä ilman todistusta.

Lause 9. *Olkoon* $Y_t = f_t + \sigma B_t^H$*, missä* $\sigma > 0$ *ja* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *on jatkuva funktio. Tällöin* Y *on tahmea ja siten kaikilla* $k, T > 0$ *prosessi* $X_t = X_0 e^{f_t + \sigma B_t^H}$ *on äärellisellä välillä* $[0, T]$ *arbitraasiton kaupankäyntikustannuksilla* k*.*

Myöhemmin Czichowsky el al. (2018) näyttivät, että edellä mainitulle hintaprosessille voidaan konstruoida varjoprosessi, joka on semimartingaali.

11 Comten–Renaultin malli

Comte ja Renault (1997) esittelivät mallin, jossa hintaprosessin S_t satunnaisuus riippuu vain tavallisesta Brownin liikkeestä, mutta volatiliteettiprosessi määräytyy fraktionaalisen Brownin liikkeen mukaan. Mallin keskeisiä ominaisuuksia ovat pitkä muisti ja arbitraasittomuus.

Merkitään kohde-etuuden tuottoa ajanhetkien t ja $t+h$ välillä osamäärällä $\frac{S_{t+h}}{S_t}$. Oletetaan tässä luvussa, että tuoton odotusarvo ja varianssi ovat äärelliset, kun tunnetaan markkinoilla hetkellä t tiedossa oleva informaatio $\mathcal{F}_t$. Huomataan, että odotettua hintakehitystä vastaava jatkuva tuottoaste voidaan ilmaista muodossa $h^{-1}\ln\left(\mathbb{E}\left[\frac{S_{t+h}}{S_t} \mid \mathcal{F}_t\right]\right)$. Oletetaan lisäksi jatkuvasti kumuloituvan tuoton markkinainformaatiolla ehdollistetun odotusarvon suppenevan melkein varmasti äärelliseen arvoon μ_t, kun $h \to 0$ oikealta. Tilannetta voidaan intuitiivisesti kuvailla differentiaaliesityksellä

$$\mathbb{E}[dS_t \mid \mathcal{F}_t] = \mu_t S_t dt.$$

Yhtä lailla varianssille voidaan saman heuristisen prosessin avulla antaa differentiaaliesitys

$$\operatorname{Var}[dS_t] = \sigma_t^2 S_t^2 dt.$$

Tarkastellaan hintaprosessia, jonka määrää seuraava dynamiikka

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\left(t,S_t\right)dt + \sigma_t dW_t^1,$$

missä S_t on hintaprosessi ja σ_t on *volatiliteettiprosessiksi* kutsuttu stokastinen prosessi. Volatiliteettiprosessin valinta mahdollistaa ominaisuuksiltaan erilaisten mallien luomisen, joita kirjallisuutessa on esitetty monia, esimerkiksi edellä esitelty Hestonin malli, sekä ([71] [78] [79]). Kun valitaan $\mu(t,S_t) = \mu$ ja $\sigma_t = \sigma$, saadaan Blackin–Scholesin yksinkertainen malli. Comte ja Renault ehdottivat volatiliteettiprosessiksi Ornsteinin–Uhlenbeckin prosessia [70], joka on muotoa

$$d\left(\ln\left(\sigma_t\right)\right) = k(\theta - \ln\left(\sigma_t\right))dt + \gamma dW_t^H. \tag{10}$$

Yllä olevan dynamiikan mallilla on pitkä muisti, eikä odotusarvo tai varianssi muutu ajan kanssa (stationaarisuus) [20]. Luonnollisesti volatiliteetin määrittävä stokastinen prosessi kuitenkin vaikuttaa tarkastellun option hintaan. Comte ja Renault painottavat, että vaikka fraktionaalinen Brownin liike ei ole semimartingaali, option hintaprosessin semimartingaaliominaisuus säilyy, koska fraktionaalinen Brownin liike on eristetty esiintymään vain volatiliteettiprosessissa. Volatiliteettiprosessilla ei käydä kauppaa ja se esiintyy vain deterministisessä muodossa, sillä σ_t on tiedossa, kun tarjolla on informaatio $\mathcal{F}_t$. Hintaprosessi siis integroidaan Itô-mielessä vain W^1 suhteen.

Tarkastellaan nyt eurooppalaista osto-optiota, jossa kohde-etuuden hintaprosessi on S_t, toteutushinta K ja maturiteetti T. Oletetaan, että kohde-etuus ei maksa osinkoja, markkinat ovat kitkattomat ja korko r_t hetkellä t on deterministinen. Tällöin nollakuponkivelkakirjan hinta maturiteetilla T hetkellä t on $B(t,T) = e^{-\int_t^T r(u)du}$.Näistä lähtökohdista Comte ja Renault saavuttavat eurooppalaisen option hinnaksi

$$C_t = S(t)\left\{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\Phi\left(\frac{m_t}{U_{t,T}}+\frac{U_{t,T}}{2}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] - e^{-m_t}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\Phi\left(\frac{m_t}{U_{t,T}}-\frac{U_{t,T}}{2}\right) \mid \mathcal{F}_t\right]\right\},$$

missä

$$m_t = \ln\left(\frac{S(t)}{K \cdot B(t,T)}\right),\ U_{t,T} = \sqrt{\int_t^T \sigma^2(u)\,du},\ \text{ja}\ \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{s^2}{2}}ds.$$

Termiä $U_{t,T}$ ei luonnollisesti pysty esittämään analyyttisessä muodossa, jolloin sitä on approksimoitava joko numeerisesti tai monte-carlo simulaatiolla [20] hetkellä t tarjolla olevan informaation $\mathcal{F}_t$ avulla. Comte ja Renault muistuttavat, että juuri volatiliteettiprosessin sileyttä lisäävä integroinnilla saavutettu keskiarvo koko option juoksuajan yli säilyttää sen hintaprosessin semimartingaaliominaisuuden. Volatiliteettikäyrän simulointi on laskennallisesti raskasta, mutta laskentateho ei enää 2020-luvulla ole pullonkaula menetelmälle. On kuitenkin maininnan arvoista huomioida rahoitusinstrumentit, kuten havaitun volatiliteetin indeksin, VIX-indeksin, futuurit. Nämä jokseenkin eksoottiset instrumentit mahdollistavat markkinaehtoisen volatiliteettiennusteen seuraamisen eräille kohde-etuuksille.

11.1 Comten–Renaultin malli lyhyellä muistilla

Empiiristen havaintojen pohjalta volatiliteetin autokorrelaatiofunktion on pitkään tiedetty olevan positiivinen. Sen suppenemisnopeudesta on kuitenkin esitetty erinäisiä tuloksia ([19] [73] [75] [77] [80]). Gatheral et al. (2014) esittävät empiiristä todistusaineistoa volatiliteetin lyhyen muistin ominaisuuden puolesta. He ehdottavat tilastollisen analyysinsä tuloksen Hurstin parametrille arvoa 0,1. Kutsutaan malleja, joissa $H < \frac{1}{2}$, *karkean volatiliteetin malleiksi.*

Gatheral et al. näyttävät empiirisen tutkimuksen viittavaan log-volatiliteetin lisäysten olevan lähestulkoon normaalisti jakautuneita ja skaalautuvan vakioisen, sileyttä määräävän parametrin suhteen. He ehdottavat log-lisäysten luonnollisimmaksi malliksi

$$\ln(\sigma_{t+\Delta}) - \ln(\sigma_t) = \gamma\left(W_{t+\Delta}^H - W_t^H\right), \tag{11}$$

missä γ on vakio. On kuitenkin helppo huomata, että malli ei ole stationaarinen, eikä siten mallin matemaattinen käsittely ja tulkinta ole mielekkäitä pitkiä maturiteetteja tarkastellessa. Täten Gatheral et al. palaavat mallintamaan volatiliteettiprosessia Ornsteinin–Uhlenbeckin prosessilla (10). Prosessin yleisesti tunnettu ratkaisu on muotoa

$$X_t^k = \gamma\int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)}dW_s^H + \theta. \tag{12}$$

Kuten aiemmin, integraali on Riemannin–Stieltjesin integraali tunnettua polkua pitkin. Volatiliteettiprosessi saa nyt muodon

$$\sigma_t = \exp\left(X_t^k\right)$$

joillekin yhtälössä (12) esiintyville positiivisille vakioille $k, \gamma,\ \theta \in \mathbb{R}$ ja $H < \frac{1}{2}$. Gatheral et al. osoittavat mallille tulkinnallisesti oleellisen tuloksen, joka esitetään formaalisti seuraavassa lauseessa.

Lemma 3. *Olkoon W_t^H fraktionaalinen Brownin liike, X_t^k kuten yhtälössä* (12) *ja $k > 0$. Kun $k \to 0$, niin*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^k - X_0^k - \gamma W_t^H\right|\right] \to 0.$$

Tulkinnallisesti lemma näyttää, että termin k ollessa hyvin pieni, malli lähestyy käyttäytymiseltään yksinkertaista fraktionaalisen Brownin liikkeen mallia (11).

Seuraus 3. *Olkoot $t, \Delta > 0$. Kun $k \to 0$, niin*

$$\mathbb{E}\left[\left(X_{t+\Delta}^k - X_t^k\right)^2\right] \to \gamma^2\Delta^{2H}.$$

Lemman 3 ja seurauksen 3 todistukset löytyvät lähteestä [76]. Tuloksista seuraa elegantti esitys log-volatiliteettiprosessin autokovariansille.

Lause 10. *Olkoot $t, \Delta > 0$. Kun k lähestyy nollaa oikealta, niin*

$$Cov\left[X_t^k, X_{t+\Delta}^k\right] = Var\left[X_t^k\right] - \frac{1}{2}\gamma^2\Delta^{2H} + o\left(1\right).$$

Todistus. Sovelletaan tunnettua varianssin ominaisuutta, jolloin saadaan

$$\mathrm{Var}\left[X_{t+\Delta}^k - X_t^k\right] = \mathrm{Var}\left[X_{t+\Delta}^k\right] + \mathrm{Var}\left[X_t^k\right] - 2\mathrm{Cov}\left[X_t^k, X_{t+\Delta}^k\right].$$

Soveltamalla Ornsteinin–Uhlenbeckin prosessin stationaarisuutta, saadaan

$$\mathrm{Cov}\left[X_t^k, X_{t+\Delta}^k\right] = \mathrm{Var}\left[X_t^k\right] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}\left[X_{t+\Delta}^k - X_t^k\right].$$

Edelleen seurauksen 3 nojalla, kun $k \to 0$, saadaan

$$X_{t+\Delta}^k - X_t^k \xrightarrow{L^2} \gamma\left(W_{t+\Delta}^H - W_t^H\right).$$

Stationaaristen lisäysten ja itsesimilaarisuuden nojalla saadaan

$$W_{t+\Delta}^H - W_t^H \overset{d}{=} W_\Delta^H \overset{d}{=} \Delta^H W_1^H.$$

Sijoittamalla varianssin kaavaan, saadaan

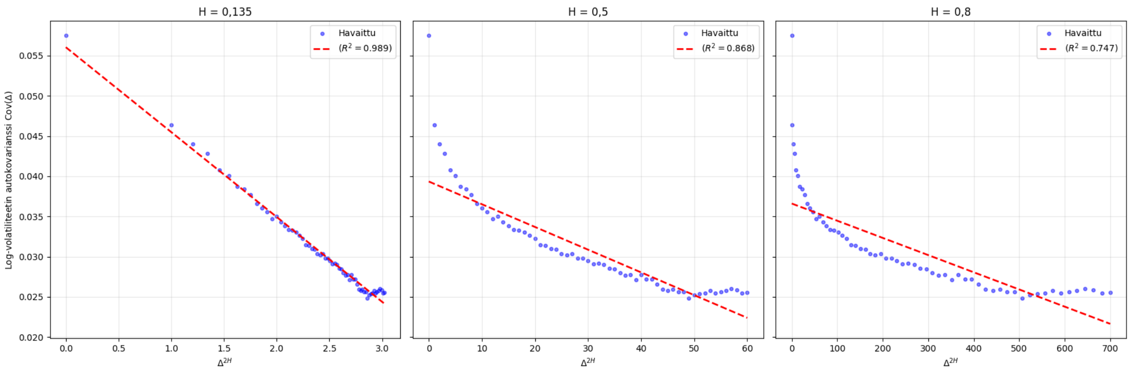
$$\mathrm{Var}\left[X_{t+\Delta}^k - X_t^k\right] = \mathrm{Var}\left[\gamma\Delta^H W_1^H\right] = \gamma^2\Delta^{2H}.$$

Viimeinen termi $o(1)$ on erotuksesta

$$\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[\left(X_{t+\Delta}^k - X_t^k\right)^2\right] - \gamma^2\Delta^{2H}\right),$$

joka lähestyy nollaa kun $k \to 0$. □

Tulos kertoo log-volatiliteetin olevan lineaarinen sileysparametrin γ suhteen ja mahdollistaa kuvassa 6 tarkastellun käyrän sovituksen oikeaan dataan ja sileysparametrin soveltuvuuden arvioinnin.



Kuva 6: DAX-indeksissä havaittu autokovarianssi. Lähde: Yahoo Finance.

12 Karkean volatiliteetin mallit

Tämän luvun johdannossa seurataan lähteen [76] mukaista tarkastelua. Tarkastellaan nyt *implisiittisen volatiliteetin vinoumaa* (vinouma), joka määritellään Blackin–Scholesin implisiittisen volatiliteetin derivaattana option log-rahaisuuden (engl. log-moneyness) $k = log(K/S_t)$ suhteen, kun aika maturiteettiin on $\tau = T - t$

$$\psi(\tau) := \frac{\partial}{\partial k}\sigma_{BS}(k,\tau)\bigg|_{k=0}.$$

Kun aika maturiteettiin lähestyy nollaa, voidaan myös implisiittisen volatiliteetin vinouman odottaa kasvavan jyrkästi, kuten nähdään myös kuvassa 3. Kuvassa 7 tarkastellaan S&P 500 indeksiä seuraavan SPY-indeksin myyntioptioiden vinoumaa 13 kaupankäyntipäivän ajalta, kun data on kerätty tunneittain. Huomataan, että empiirinen data osoittaa vinouman noudattavan likimain potenssilakia

$$\psi(\tau) \sim \tau^{H-\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

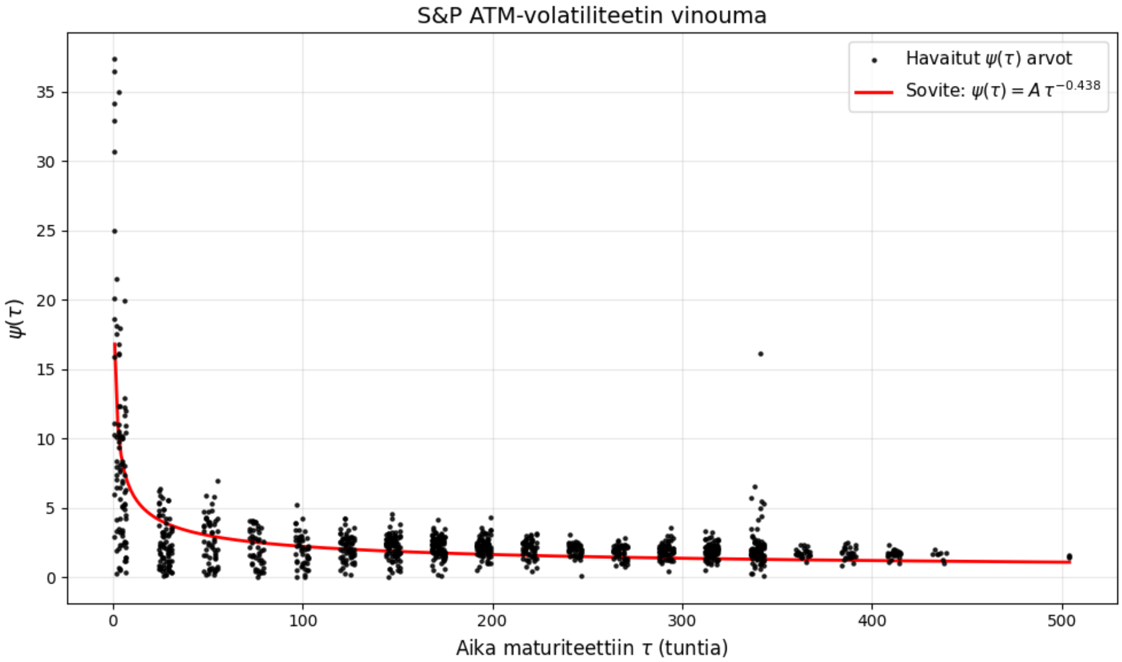
missä $H - \frac{1}{2} = -0,438$.

Tarkastellaan nyt stokastisen volatiliteetin mallia, jolla on seuraava dynamiikka

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_{1,t} \\ d\sigma_t &= a(t,\sigma_t)\,dt + \nu\sigma_t dW_{2,t}. \end{aligned}$$

Sallitaan satunnaisuutta ajaville Brownin liikkeille mielivaltainen korrelaatio $\mathrm{Corr}(W_{1,t}, W_{2,t}) = \rho$. Olkoon nyt aika maturiteettiin τ pieni. Tällöin kohde-etuuden hinnan ja volatiliteetin odotusarvoiset muutokset ovat molemmat kokoluokkaa $\sqrt{\tau}$. Tällöin implisiittisen volatiliteetin vinouman kokoluokka lakkaa olemasta riippuvainen aikaparametrista ja on raja-arvoltaan vakio, $\lim_{\tau \to 0} \psi(\tau) = \frac{\rho\nu}{2}$ [86]. Tulos on ilmeisessä ristiriidassa empiirisen datan kanssa.

Kantaaottavasti nimetyssä artikkelissaan *Volatility has to be rough* (suom. *Volatiliteetin on oltava karkea*) Fukasawa (2021) argumentoi volatiliteetin olevan karkea arbitraasistrategiaan vetoamalla. Seuraava esimerkki taustoittaa Fukasawan arbitraasiin perustuvaa argumenttia.



Kuva 7: SPY-myyntioptioiden havaittu vinouma aikavälillä 2026-02-03 - 2026-02-20. Lähde: Databento.

Esimerkki 11. Tiedetään, että kohde-etuuden hinnan muuttuessa myös osto- ja myyntioptioiden hinta muuttuu. Oletetaan, että sijoittaja omistaa myyntioption. Jotta portfolio voidaan suojata kohde-etuuden hinnan muutoksilta, sijoittaja ostaa kohde-etuutta siten, että option hinnan muutos ja kohde-etuuden hinnan muutos kumoavat toisensa. Tätä suojausstrategiaa kutsutaan *delta-suojaukseksi*. Kun kohde-etuuden hinta muuttuu, sijoittajan on tasapainotettava portfolionsa uudestaan ollakseen suojassa kohde-etuuden tulevilta hinnan muutoksilta.

Portfolion delta-suojaukseen sisältyy kuluja. Sijoittaja joutuu hinnan muuttuessa ostamaan ja myymään kohde-etuutta itselleen epäedulliseen hintaan. Fukasawan arbitraasistrategiassa tarkastellaan juuri delta-suojauksen aiheuttamia kuluja. Oletetaan, että optioiden hinta seuraa havaittua potenssilakia (13), ja että kohde-etuuden hintaprosessin satunnaisuutta ajaa tavallinen Brownin liike. Fukasawa näyttää, että kun aika maturiteettiin lähestyy nollaa, delta-suojauksen odotusarvoinen hinta pienenee nopeammin kuin optioista maksettu preemio. Sijoittajalla olisi siis mahdollisuus hyödyntää suojauksen hinnan ja optiosta maksetun preemion välistä erotusta edukseen.

Kuten Gatheral et al. (2014) toteavat, kirjallisuudessa on esitetty at-the-money optioiden (ATM-optioiden) vinouman mallintamisen vaativan hyppymalleja. Esimerkiksi Carr ja Wu (2003) esittävät, että ATM-option vinouman eksponentiaalinen kasvu, kun $\tau \to 0$, implikoi hyppyjä kohde-etuuden hintaprosessissa. Myöhemmin Fukasawa (2011, p. 647, eq. 3.4) näytti, että kun tarkasteltavan stokastisen volatiliteetin mallin satunnaisuutta ajava prosessi on fraktionaalinen Brownin liike, sen volatiliteettipinta saa muodon

$$\sigma_{BS}(k,\tau) = A_1\tau^{H-\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{K}{S}\right) + \sigma + A_2\tau^{H+\frac{1}{2}} + o\left(1\right),$$

Derivoimalla log-rahaisuuden mukaan, saadaan vinouma, jota dominoi termi

$$\psi\left(\tau\right) \sim A_1\tau^{H-\frac{1}{2}},$$

kun τ on pieni. Fraktionaalisen Brownin liikkeen mallit eivät siis vaadi hyppyjä ollakseen yhteneviä havaitun potenssilakia seuraavan vinouman kanssa. Fukasawan tulokset yhdessä empiiristen havaintojen kanssa motivoivat tutkimaan hinnoittelumalleja, joissa volatiliteettia ajava prosessi on karkea.

12.1 Katkaistu fraktionaalinen Brownin liike

Ajatellaan tarkastelevamme valtameren aallokkoa, joka on vellonut merellä aikojen alusta asti. Tänään havaituilla aalloilla on samat tilastolliset ominaisuudet kuin aalloilla miljoona vuotta sitten. Mielikuvissa voimme kuvitella aaltojen satunnaisen käytöksen ilmentävän lisäysten stationaarisuutta. Analogian kaltaista satunnaisuutta kuvaa hyvin Mandelbrotin ja van Nessin määritelmä fraktionaalisesta Brownin liikkeestä, jonka muistissa on prosessin kulku ajan alusta saakka.

Kuvitellaan nyt vastaava tilanne tyynessä altaassa, johon aletaan aaltokoneella tuottaa aaltoja. Aallot ovat lyhyessä ajassa käytökseltään jo lähellä valtameren aallokkoa, mutta systeemiin jatkuvasti kertyvän energian vuoksi kahden aikainkrementin aaltojen satunnaisuus ei ole täysin samanlaista. Aaltokoneen tilanteessa satunnaisuutta kuvaamaan sopii paremmin malli, joka ei vaadi muistia aikojen alusta kuvatakseen tilannetta.

Määritelmä 27. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus, jonka filtraatio on täydellinen ja oikealta jatkuva, W_t on standardi tähän filtraatioon adaptoitunut Brownin liike ja $H \in (0,1)$ on Hurstin parametri. Tällöin kaikille $t \geq 0$ prosessia, joka on muotoa

$$\tilde{W}_t^H = C_H \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s,$$

missä C_H on Hurstin parametrista riippuvainen vakio, kutsutaan *katkaistuksi fraktionaaliseksi Brownin liikkeeksi* tai Riemannin–Liouvillen fraktionaaliseksi Brownin liikkeeksi.

Toisin kuin Mandelbrotin ja van Nessin määritelmässä, katkaistu fraktionaalinen Brownin liike ei sisällä tietoa koko historiasta eikä täten ole lisäyksiltään stationaarinen. Esimerkiksi johdannaisia hinnoitellessa tunnemme markkinoilla hetkellä $t=0$ tarjolla olevan varianssin termiinihinnan käyrän $\xi_0(t)$[10] jota hyödyntämällä lähtötilanne saadaan myötäilemään havaittua markkinatilannetta. Voimme siis luopua ajatuksesta, että tarvitsisimme koko hintaprosessin historian ymmärtääksemme tulevaa varianssia.

[10] $\xi_t\left(u\right) = \mathbb{E}\left[v_u \mid \mathcal{F}_t\right]$, missä $u \geq t$ ja $\sigma_u^2 = v_u$ on hetkellinen varianssi ajanhetkellä u.

12.2 Karkea Bergomin malli

Luvussa tarkastellaan Bayer et al. (2015) esittelemää karkeaa Bergomin mallia (rBergomi). Luvussa johdetaan malli julkaisun tapaan, joitakin yksityiskohtia lisäten.

Oletetaan nyt log-volatiliteetin seuraavan mallia (11)

$$\ln\left(\sigma_{t+\Delta}\right) - \ln\left(\sigma_t\right) = \nu\left(W^H_{t+\Delta} - W^H_t\right).$$

Sovelletaan nyt Mandelbrotin ja van Nessin määritelmän mukaista fraktionaalista Brownin liikettä

$$W^H_t = C_H\left(\int_{-\infty}^{t}\frac{dZ_s}{(t-s)^\gamma} - \int_{-\infty}^{0}\frac{dZ_s}{(-s)^\gamma}\right),$$

missä $\gamma = \frac{1}{2} - H$ ja

$$C_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2-2H\right)}}.$$

Merkitään $v_t = \sigma_t^2$ ja sijoitetaan valittu fraktionaalinen Brownin liike yhtälöön (11), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\ln\left(v_u\right) - \ln\left(v_t\right) &= 2\nu C_H\left(\int_{-\infty}^{u}\frac{dZ_s}{(u-s)^\gamma} - \int_{-\infty}^{t}\frac{dZ_s}{(t-s)^\gamma}\right)\\
&= 2\nu C_H\left[\int_{t}^{u}\frac{dZ_s}{(u-s)^\gamma} + \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{(u-s)^\gamma} - \frac{1}{(t-s)^\gamma}\right)dZ_s\right]\\
&=: 2\nu C_H\left[M_t\left(u\right) + A_t\left(u\right)\right]
\end{aligned}$$

Määritellään nyt eräs katkaistu fraktionaalinen Brownin liike

$$\tilde{W}_t(u) := \sqrt{2H}\int_{t}^{u}\frac{dZ_s}{(u-s)^\gamma}.$$

Huomataan, että jos $\eta = \frac{2\nu C_H}{\sqrt{2H}}$, niin

$$\ln\left(v_u\right) - \ln\left(v_t\right) = \eta\tilde{W}_t\left(u\right) + \eta\sqrt{2H}A_t\left(u\right),$$

josta edelleen

$$v_u = v_t\exp\left(\eta\tilde{W}_t\left(u\right) + \eta\sqrt{2H}A_t\left(u\right)\right). \tag{14}$$

Huomataan nyt, että $\exp(\eta\tilde{W}_t(u))$ on log-normaali, $\tilde{W}_t(u)$ on riippumaton filtraatiosta $\mathcal{F}_t$ ja $A_t(u)$ sekä v_t ovat $\mathcal{F}_t$-mitallisia. Tällöin saadaan ehdollinen odotusarvo

$$\mathbb{E}\left[v_u \mid \mathcal{F}_t\right] = v_t\exp\left(\eta\sqrt{2H}A_t\left(u\right)\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left|\eta\tilde{W}_t(u)\right|^2\right]\right),$$

josta edelleen

$$v_t\exp\left(\eta\sqrt{2H}A_t\left(u\right)\right) = \mathbb{E}\left[v_u \mid \mathcal{F}_t\right]\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left|\eta\tilde{W}_t(u)\right|^2\right]\right).$$

Sijoittamalla ylempi yhtälöön (14), saadaan

$$\begin{aligned} v_u &= \mathbb{E}\left[v_u \mid \mathcal{F}_t\right] \exp\left(\eta \tilde{W}_t\left(u\right) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\left|\eta \tilde{W}_t(u)\right|^2]\right) \\ &= \mathbb{E}\left[v_u \mid \mathcal{F}_t\right] \mathcal{E}^{\diamond}\left(\eta \tilde{W}_t\left(u\right)\right) \\ &= \xi_t\left(u\right) \mathcal{E}^{\diamond}\left(\eta \tilde{W}_t\left(u\right)\right), \end{aligned}$$

missä $\mathcal{E}^{\diamond}$ on stokastinen eksponentiaali Wick-mielessä. Huomataan, että kohde-etuuden varianssin tarkasteluun hetkellä t ei tarvitse tuntea koko historiaa $\mathcal{F}_t$, jos varianssin termiinikäyrä $\xi_t(u)$ on havaittavissa. rBergomi malli esitetään nyt tämän tarkastelun motivoimana muodossa

$$\begin{aligned} \frac{dS_u}{S_u} &= \mu_u du + \sqrt{v_u} dW_u \\ v_u &= \xi_0\left(u\right) \mathcal{E}^{\diamond}\left(\eta \tilde{W}_0\left(u\right)\right), \end{aligned}$$

missä μ_u on jokin ajautumistermi ja W_u eräs Brownin liike, joka on korreloitunut termin $\tilde{W}_0(u)$ satunnaisuutta ajavan Brownin liikkeen Z kanssa korrelaatiokertoimella ρ.

Perustellaan nyt tulkintaa Wick-mielen stokastisen eksponentin käytöstä. Olkoon Ψ keskeinen Gaussin prosessi. Tällöin stokastinen eksponentti Wick-mielessä on muotoa

$$\mathcal{E}^{\diamond}(\Psi) = \exp\left(\Psi - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[|\Psi|^2\right]\right).$$

Kun Ψ on martingaaliominaisuuden täyttävän Gaussin prosessin lisäys, kuten $\int_0^t f\left(s\right) dW_s$, missä integrandi on deterministinen, eksponentti Wick-mielessä yhtenee tavallisen stokastisen eksponentin kanssa. Tavallinen stokastinen eksponentti ei ole mahdollinen, sillä katkaistun fraktionaalisen Brownin liikkeen neliöheilahtelu ei ole äärellinen. On helppo huomata mallin saavuttavan joitakin edullisia ominaisuuksia; $\xi_t(u)$ on martingaali ja käytetyn stokastisen eksponentin odotusarvo on 1.

Gassiat (2019) näytti, että korrelaatiokerroin $\rho \leq 0$ satunnaisuutta ajavien prosessien välillä on tarpeen, jotta hintaprosessi on martingaali. Oletus epäpositiivisuudesta ei ole vahva, sillä vipuvaikutuksena[11] tunnettu ilmiö pitää korrelaation esimerkiksi osakkeiden tapauksessa melkein aina negatiivisena. Seurataan nyt Gassiat'n todistusta edellä mainitusta martingaaliominaisuudesta. Tarkastellaan mallia riskineutraalissa kontekstissa, eli tässä tapauksessa ilman ajautumistermiä.

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \sigma\left(t, Y_t\right) dW_t \\ Y_t &= \int_0^t K\left(t, s\right) dZ_s, \end{aligned} \tag{15}$$

[11]Vipuvaikutus viittaa tilanteeseen, jossa osakkeen hinnan laskiessa yhtiön omanpääoman suhde velkaan pienenee, mikä lisää riskiä.

missä $Z_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2} W_t^{\perp}$ siten, että W_t ja $W_t^{\perp}$ ovat riippumattomia Brownin liikkeitä samassa filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa. Tästä muodosta saadaan erikoistapauksena rBergomi-malli, kun $K(t,s) = C_H (t-s)^{H-\frac{1}{2}}$ ja $\sigma(t,y) = \sqrt{\xi_0(t)\,\mathcal{E}^{\diamond}(\eta y)}$.

Lause 11. *Oletetaan, että $K(t,s) \geq 0$ on ydinfunktio siten, että yhtälöryhmän (15) volatiliteettiprosessi on jatkuva Gaussin prosessi. Oletetaan lisäksi, että $\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on jatkuva ja rajoitettu välillä $[0,T] \times (-\infty,a]$ kaikille $T, a > 0$. Tällöin jos $\rho \leq 0$, niin kohdan (15) hintaprosessi on martingaali.*

Todistus. Aloitetaan huomaamalla, että välittömän volatiliteetin prosessi $\sigma(t, Y_t)$ on jatkuva, mitallinen, rajoitettu tarkasteluvälillä ja täten myös ennustettava [83]. Edelleen mainittujen ominaisuuksien ja hintaprosessin määritelmän nojalla hintaprosessi on epänegatiivinen, rajoitettu, jatkuva lokaali martingaali [83].

Seuraavaksi todetaan hintaprosessin olevan supermartingaali. On olemassa jono kasvavia pysäytyshetkiä siten, että $(\tau_n)_n$ siten, että $\tau_n \to \infty$. Fatoun lemman nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} S_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[S_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= S_s.
\end{aligned}$$

On osoitettava, että tarkasteluvälillä $[0,T]$ pätee $\mathbb{E}[S_t] = S_0$. Määritellään pysäytyshetki $\tau_n = \inf\{t > 0 \mid Y_t = n\}$. Huomataan, että pysäytetty prosessi $(t, Y_{t\wedge\tau_n})$ on ylhäältä rajoitettu tila-avaruuden joukossa $[0,T] \times (-\infty, n]$. Tällöin

$$S_0 = \mathbb{E}\left[S_{T\wedge\tau_n}\right] = \mathbb{E}\left[S_T \mathbf{1}_{\{T<\tau_n\}}\right] + \mathbb{E}\left[S_{\tau_n} \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq T\}}\right].$$

Huomataan, että termin n kasvaessa rajatta, saadaan

$$S_0 - \mathbb{E}\left[S_T\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[S_{\tau_n} \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq T\}}\right].$$

Soveltamalla Girsanovin lausetta, saadaan

$$\mathbb{E}\left[S_{\tau_n} \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq T\}}\right] = S_0 \mathbb{Q}_n\left(\tau_n \leq T\right),$$

missä $\mathbb{Q}_n$ on todennäköisyysmitta, jolle

$$\hat{W}^{(n)} = W_t - \int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma(s,Y_s)\,ds$$

on Brownin liike. Huomataan, että kaikille $t \leq \tau_n$ pätee

$$\begin{aligned}
Y_t &= \int_0^t K(t,s)\left(d\hat{Z}_s^{(n)} + \rho\sigma(s,Y_s)\,ds\right) \\
&= \hat{Y}_t + \int_0^t K(t,s)\,\rho\sigma(s,Y_s)\,ds,
\end{aligned}$$

missä $\hat{Z}, \hat{Y}$ merkitsee tässäkin muuttujaa todennäköisyysmitan $\mathbb{Q}_n$ alla ja

$$\hat{Y}_t := \int_0^t K(t,s)\, d\hat{Z}_s^{(n)}.$$

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa $\rho \leq 0$. Selvästi $Y_t \leq \hat{Y}_t$ kaikille $t \leq \tau_n$, josta edelleen $\tau_n \geq \tau_n^0 := \inf\left\{t > 0, \hat{Y}_t = n\right\}$. Lisäksi, koska $\hat{Z}_t$ on Brownin liike $\mathbb{Q}_n$ alla, niin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}_n\left(\tau_n^0 \leq T\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} Y_t > n\right) = 0,$$

josta edelleen

$$S_0 - \mathbb{E}\left[S_T\right] = S_0 \lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}_n\left(\tau_n \leq T\right) = 0.$$

Tästä nähdään, että S on martingaali. $\square$

Kuten monilla malleilla, joilla ei ole Markovin ominaisuutta, myös rBergomin malli kärsii parametrien estimoinnissa tarvittavasta raskaasta laskentatehosta [94]. El Euch ja Rosenbaum (2018) esittelivät karkeana Hestonin mallina tunnetun mallin, jota motivoi tarve laskennallisesti tehokkaammalle mallille.

13 Karkeiden mallien haasteita

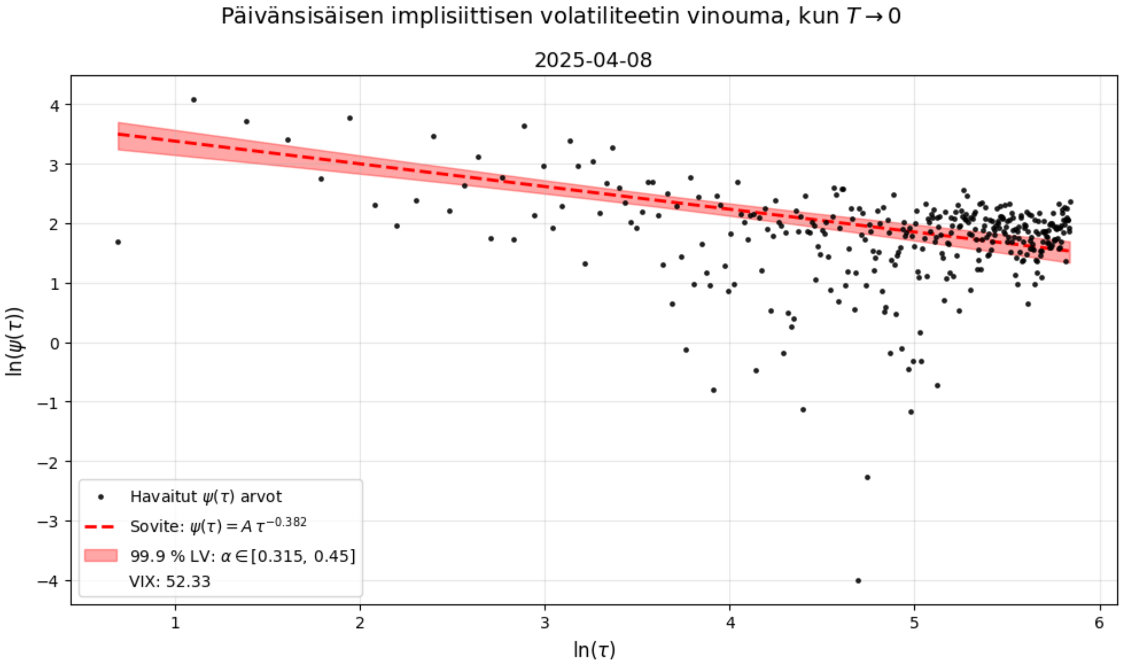
Tässä luvussa nostetaan esille karkeiden volatiliteetin mallien haasteita. Pääasialliseksi haasteeksi on muodostunut etenkin optiot, joiden aika maturiteettiin on pieni. Tällaisten optioiden Hurstin parametrin arviointi korkean frekvenssin datasta kohtaa markkinoiden mikrostruktuurista aiheutuvan kohinan, joka heikentää havaintojen todenmukaisuutta. Ehkä merkittävin markkinoiden mikrostruktuurin aiheuttaman kohinan tekijä on osto- ja myyntihinnan erotuksesta johtuva hinnan hyppelehtiminen kahden hinnan välillä aiheuttaa keinotekoista volatiliteettia havaituissa hinnoissa, vaikka oikea keskimääräinen hinta ei muuttuisikaan. Optioiden, etenkin out-of-the-money (OTM) -optioiden, osto- ja myyntihinnan välinen erotus on suurempi kuin esimerkiksi pörssilistatuilla osakkeilla ([88] [89]). Markkinoilla havaitut hinnat eivät myöskään ole jatkuvia, vaan niissä on minimikoko, esimerkiksi yhden sentin minimiväli kahden eri hinnan välillä. Myös suuret yksittäiset ostotoimeksiannot voivat siirtää markkinalla tarjolla olevien kohde-etuuksien tarjouskirjaa myyntipuolelta. Ostojen tapahtuessa hinta saattaa pian palata kohti aiempaa tasoa.

Volatiliteetti voidaan siis tulkinnallisesti jakaa kahteen komponenttiin, oikeaan, esimerkiksi uudesta informaatiosta johtuvaan volatiliteettiin, ja kohinan luomaan volatiliteettiin. Etenkin kun aika maturiteettiin pienenee ja approksimointiin käytetyn datan frekvenssi kasvaa, kohinan aiheuttama komponentti havaitussa volatiliteetissa on suhteellisesti suurempi. Edellä mainituista tekijöistä kaikki antavat systeemisen virheen, joka laskee estimoidun Hurstin parametrin arvoa. Markkinoilla, joissa ei ole mikrostruktuurin aiheuttamaa kohinaa, huomattaisiin Hurstin parametrin kasvavan (pienenevän), kun volatiliteetti nousee (laskee). Korkean frekvenssin datasta usein kuitenkin huomataan vastakkainen toteuma.

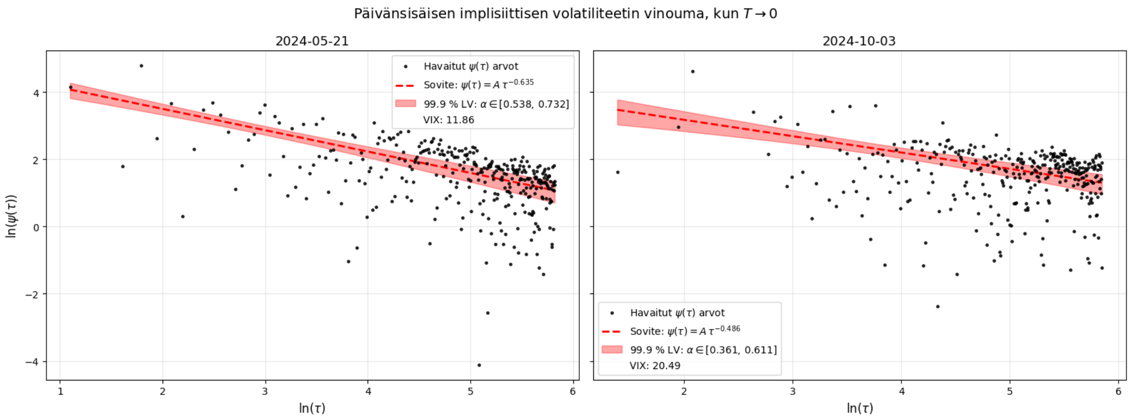
13.1 Havaintoja korkean frekvenssin datasta

Tässä alaluvussa esitetään korkean frekvenssin dataa, jossa tarkastellaan markkinoilla vallitsevan ennakoidun volatiliteetin yhteyttä estimoituihin Hurstin parametrin arvoihin. SPX optioiden pohjalta laskettu, seuraavan 30 päivän implisiittisen volatiliteetin perusteella arvonsa saava, CBOE Volatility Index (VIX) mittaa S&P-500 indeksin ennustettua tulevaa volatiliteettia. Markkinoiden odottama volatiliteetti, jota VIX-indeksi mittaa, on suoraan liitännäinen optioiden hintaan ja volatiliteettiin.

Kuvasta 7 nähdään, että pitkän aikavälin ja päivittäisten havaintojen data, jossa esiintyvä kohina on suhteellisesti pientä, ilmentää likimain kirjallisuudessa esiintyvää Hurstin parametrin arvoa $0,1$. Alkuvuodesta 2025 alkanut laaja tuontitullien kautta käyty kauppasota johti poikkeuksellisen korkeisiin havaittuihin VIX-indeksin arvoihin. Kuva 8 näyttää Yhdysvaltojen asettamien tuontitullien voimaanastumisen ajanhetkeä.



Kuva 8: SPY-myyntioptioiden 2025-04-08 havaittu vinouma ja 99,9% luottamusväli korkean frekvenssin päivänsisäisessä datassa logaritmisessa asteikossa. Lähde: Databento



Kuva 9: Korkean frekvenssin SPY-myyntioptioiden datasta arvioituja Hurstin parametrin arvoja eri VIX-indeksin arvoilla. Lähde: Databento.

Kuvasta 9 huomataan, että VIX-indeksin saadessa pienempiä arvoja, myös Hursin parametri saa pienempiä arvoja. Aikavälillä 2020–2025 pienin havaittu VIX-indeksin arvo antaa jopa negatiivisen Hurstin parametrin arvon, $H = -0,135$, joka ei tarkasteltavan mallin osalta teoreettisesti mahdollinen arvo. Tämä empiirinen havainto tukee teoreettista ajatusta kohinan vaikutuksesta Hurstin parametriin. Kauppasodan alkamispäivän volatiliteetin voidaan ajatella koostuvan oikean tiedon saapumisesta markkinoille ja sen vaikutuksesta kurssien kehitykseen. Tällöin volatiliteetin komponenteista kohinan suhteellinen vaikutus jää pienemmäksi. Kohinan aiheuttaman häiriön lisäksi Rømer (2022) näytti, että Hurstin parametri on vahvasti riippuvainen ajasta, eli toisin sanoen parametri ei ole vakio, vaan itsekin stokastinen prosessi.

13.2 Kohinan eliminointi

Gatheral et al. (2018) argumentoivat, että volatiliteetti on karkea Hurstin parametrilla $H = 0,1$, kun tarkastellaan "kaikkia järkeviä aikavälejä". Aiemmissa alaluvuissa huomioitu lyhyen maturiteetin optioissa esiintyvä estimointiongelma tekee päivänsisäisestä tarkastelusta joko "järjettömän", tai sitten a priori on tehty, ilman perusteluja, oletus kohinan merkityksellisyydestä lopputulokseen. Tässä alaluvussa tuodaan lyhyesti esille malleja, jotka pyrkivät lieventämään tai ohittamaan edellisessä alaluvussa esitetyn empiirisestä datasta havaitun ongelman ja/tai antamaan parempia estimaatteja Hurstin parametrille.

Jaber ja De Carvalho (2024) esittelevät *hyperkarkeaan Hestonin malliin* perustuvan, *palautuvan karkean Hestonin mallin* (engl. reversionary Heston model), jota karakterisoi korkea volatiliteetin volatiliteetti ja volatiliteetin hyvin nopea odotusarvoon palautuminen (engl. mean-reversion). Malli tarkastelee parametrin H positiivisia ja negatiivisia arvoja. Jaber ja Carvalho osoittavat, että kun parametri H saa arvon, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin $-0,5$, malli suppenee erääseen hyppymalliin, Lévyn hyppymalliin. Kun $H > -0,5$, niin hintaprosessin käyrä pysyy jatkuvana. Esitetty malli ei kuitenkaan pysty välttymään yleisiltä kritiikin aiheilta, joita esiintyy artikkeleissa ([94] [92]) ja Jaberin (2019) itsensä kirjoittamassa artikkelissa *Lifting the Heston model.*

Jacod et al. (2009) esittävät intuitiivisesti yksinkertaisen mallin, joka perustuu painotettuun aritmeettiseen keskiarvoon. Oletetaan, kuten aiemmin, että havaittu hintaan sisältyy kohinatermi, joka on muotoa

$$\Delta_i^n S = S_{t_i} - S_{t_{i-1}}.$$

Määritellään nyt painotetun liukuvan prosessin muodoksi

$$\overline{Y}_i = \sum_{j=1}^{k_n-1} g\left(\frac{j}{k_n}\right) \Delta_{i+j}^n Y,$$

missä g on välillä $[0,1]$ jatkuva funktio. Liukuvan keskiarvon idea on selkeä; kohinan vaikutus vaimenee, kun tarkastellaan useampaa datapistettä. Esimerkiksi osto- ja myyntihinnan välinen erotus lähestyy vaikutukseltaan nollaa, kun k kasvaa. Malli kuitenkin jättää useita kysymyksiä. Miten valitaan painofunktio g tai voidaanko kohinan olettaa olevan ajasta ja kohde-etuuden hinnasta riippumatonta? Edellä mainittujen esimerkkien lisäksi on esitetty muitakin vaihtoehtoja, joita muutamia löytyy kootusti lähteestä Brouty et al. (2025)[12]. Toistaiseksi, eikä yhtään yllättäen, ei ole olemassa mallia, joka pystyisi yksikäsitteisesti eristämään ja poistamaan kohinan vaikutuksen. Täten yksikäsitteisen, datasta estimoidun, parametrin H määritelmä, arvo ja myös tarkastelun mielekkyys ovat edelleen asioita, joissa ei ole saavutettu konsensusta [98].

[12]Toistaiseksi vertaisarvioimaton artikkeli.

14 Yhteenveto

Tutkielmassa tarkasteltiin fraktionaalisen Brownin liikkeen mallien soveltuvuutta erilaisiin markkinadatan mallintamista koskeviin tehtäviin. Todettiin, että malleilla on vahvuuksia esimerkiksi volatiliteettipinnan todenmukaisessa mallintamisessa ja volatiliteetin fraktaalisuuden huomioimisessa. Koska fraktionaalisen Brownin liikkeen malli ei välttämättä ole semimartingaali, se mahdollistaa muistiominaisuuden sisällyttämisen volatiliteettiprosessiin. Semimartingaaliominaisuuden puuttuminen aiheutti arbitraasiin liittyviä vaikeita haasteita, jotka kuitenkin osoittautuivat vaihtoehtoisten mallien myötä ja kaupankäyntikulujen huomioinnin jälkeen vain akateemisiksi kauneusvirheiksi.

Fraktionaaliseen Brownin liikkeeseen perustuvia malleja on useita ja niillä on vaihtelevia vahvuuksia eri ilmiöiden mallintamisessa. Siksi onkin tärkeää tiedostaa, että täydellisen, kaikkiin tapauksiin soveltuvan, mallin etsiminen ei välttämättä ole tarkoituksenmukaista. Esimerkiksi markkinoiden mikrostruktuurin aiheuttamasta kohinasta johtuen muodostuu tarve ainakin kahdelle erilliselle mallille, jotka huomioivat onko option aika maturiteettiin lyhyt vai pitkä. Ilman tilannespesifisiä tarkasteluja tutkimuskysymys sopivasta mallista ja sen parametreista on liian laaja, joten yksimielisyyttä sopivasta mallista tuskin voitaisiin saavuttaa.

Nykyinen kirjallisuus painottuu yksittäisten mallien täydentämiseen tai parametrien arvojen tarkentamiseen. Mallit ovat kuitenkin aina epätäydellisiä. Lokaalin volatiliteetin malli pystyy täydellisesti huomioimaan nykyisen volatiliteettipinnan kuitenkaan kykenemättä huomioimaan sen tulevaa kehitystä. Hestonin malli on laskennallisesti kevyt ja pystyy huomioimaan volatiliteetin tulevan kehityksen satunnaisuuden, mutta lyhyen maturiteetin optioiden hinnoittelussa mallilla on systemaattinen virhe. Hyppymallit pystyvät hinnoittelemaan lyhyen maturiteetin optioita paremmin ja huomioimaan äkilliset liikkeet hintaprosessissa, mutta sen parametreja on vaikea kalibroida ja mallilla on haasteita optioiden kanssa, joiden arvo riippuu tapahtumasta, jossa kohde-etuuden hinta joko ylittää tai alittaa erään ennalta sovitun hinnan.

Tutkielmassa tehtyjen havaintojen perusteella voidaan ehdottaa, että universaalien mallien tavoittelun sijaan akateemisen huomion tulisi keskittyä malleihin, jotka sopivat hyvin yksittäisiin tilanteisiin ja jotka suoriutuvat tehtävässään paremmin kuin yleisemmät mallit. Tarkoituksena ei ole välttämättä luoda kaikenkattavaa mallia, vaan työkalut haluttujen ilmiöiden mahdollisimman tarkkaan mallintamiseen.

Viitteet

[1] Pacioli, Luca (1494) Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita.

[2] Hald, Anders (2003) A history of Probability and Statistics and their Applications before 1750. Wiley, 35.

[3] Fermat, Pierre de (1894) Oeuvres de Fermat. Tome 2: Correspondance. Toim. Paul Tannery & Charles Henry. Paris: Gauthier-Villars et fils. 289–307.

[4] Huygens, Christiaan (1657) De Ratiociniis in Ludo Aleae.

[5] Gauss, Carl Friedrich (1809) Theoria Motus Corporum Coelestium.

[6] Laplace, Pierre-Simon (1810) Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres.

[7] Bachelier, Louis (1900) Théorie de la Spéculation.

[8] Einstein, Albert (1905) Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Annalen der Physik.

[9] Perrin, Jean (1909) Le Mouvement Brownien et la Réalité Moleculaire. Annales de chimie et de physique.

[10] Wiener, N. (1923) Differential-Space. Journal of Mathematics and Physics.

[11] Samuelson, Paul A. (1965) Rational Theory of Warrant Pricing. Industrial Management Review 6:2, 14.

[12] Bernstein, P. L. (1992). Capital ideas: The improbable origins of modern Wall Street. New York: The Free Press, 18–20.

[13] Aristotle (1932) Politics. Kääntänyt H. Rackham. Cambridge, MA: Harvard University Press, 55.

[14] Poitras, Geoffrey (2000) The Early History of Financial Economics, 1478–1776. Edward Elgar, 340.

[15] Black, Fischer & Scholes, Myron (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81:3, 637–654.

[16] SIFMA (2024) SIFMA Research Statistics Fact Book. https://www.sifma.org/research/statistics/fact-book (haettu 3.4.2026).

[17] BIS (2024) OTC Derivatives Statistics. `https://www.bis.org/publ/otc_hy2512.htm` (haettu 3.4.2026).

[18] Baillie, R. T., Bollerslev, T. & Mikkelsen, H. O. (1996) Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics 74:1, 3–30.

[19] Bollerslev, T. & Mikkelsen, H. O. (1996) Modeling and pricing long memory in stock market volatility. Journal of Econometrics 73:1, 151–184.

[20] Comte, F. & Renault, E. (1998) Long memory in continuous-time stochastic volatility models. Mathematical Finance 8:4, 291–323.

[21] Lévy, Paul (1948) Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars.

[22] Lévy, Paul (1937) Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars.

[23] Doob, J. L. (1953) Stochastic Processes. Wiley.

[24] Itô, Kiyosi (1951) On Stochastic Differential Equations. Memoirs of the American Mathematical Society 4, 1–51.

[25] Itô, Kiyosi (1951) On a Formula Concerning Stochastic Differentials. Nagoya Mathematical Journal 3, 55–65.

[26] Cox, J., Ross, S. & Rubinstein, M. (1979) Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics 7:3, 233.

[27] La Porte, Mathieu de (1704) La science des négociants et teneurs de livres.

[28] Hull, John (2009) Options, Futures, and other Derivatives (7. painos).

[29] Crow, Edwin L. & Shimizu, Kunio (1988) Lognormal distributions theory and applications. Marcel Dekker, 303.

[30] Guo, Haochen (2017) Review of Applying European Option Pricing Models. Proceedings of the 3rd Czech-China Scientific Conference 2017. InTech.

[31] Fengler, M.R. & Wang, Q. (2009) Least Squares Kernel Smoothing of the Implied Volatility Smile. Teoksessa Härdle, W.K., Hautsch, N. & Overbeck, L. (toim.) Applied Quantitative Finance. Berlin, Heidelberg: Springer.

[32] Britannica (2025) Black swan event. `https://www.britannica.com/topic/black-swan-event` (haettu 7.7.2025).

[33] Hammond, Peter (2009) Adapting to the entirely unpredictable: black swans, fat tails, aberrant events, and hubristic models.

[34] McCauley, Joseph L. & Gunaratne, Gemunu H. (2003) An Empirical Model for Volatility of Returns and Option Pricing. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 329:1, 178–198.

[35] Suárez-Taboada, María et al. (2018) Uncertainty quantification and Heston model. Journal of mathematics in industry, 3.

[36] Rosenthal, J. S. (2006) A First Look at Rigorous Probability Theory (2. painos). World Scientific Publishing.

[37] Øksendal, B. (2003) Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications (6. painos). Springer.

[38] Karatzas, I. & Shreve, S. (1988) Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York: Springer-Verlag New York Inc.

[39] Shreve, S. (2004) Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model. New York: Springer.

[40] MacBeth, James D. & Merville, Larry J. (1979) An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model. The journal of finance, 1185.

[41] Birkhoff, G. D. (1931) Proof of the Ergodic Theorem. Proceedings of the National Academy of Sciences 17:12, 656–660.

[42] Xu, W. & Wu, Z. (1996) A black-scholes formula for option pricing with dividends. Applied Mathematics. 11:2, 159–164.

[43] Hu, Y. & Øksendal, B. (2003) Fractional white noise calculus and applications to finance. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 06, 1–32.

[44] Moyaert, Thibaut & Petitjean, Mikael (2011) The Performance of Popular Stochastic Volatility Option Pricing Models During the Subprime Crisis. Applied Financial Economics 21:4, 1059.

[45] Bates, D. (1996) Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rates Processes Implicit in Deutsche Mark Options. The Review of Financial Studies 9:1, 69–107.

[46] Oxford English Dictionary.

[47] Mandelbrot, B. B. (1963) The Variation of Certain Speculative Prices. The Journal of Business 36:4, 394–419.

[48] Mandelbrot, B. & van Ness, J.W. (1968) Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Review 10:4, 422–437.

[49] Spence, Joseph. (1820). Anecdotes, Observations, and Characters, of Books and Men. Lontoo: W.H. Carpenter, 368.

[50] Greene, Myron T. & Fielitz, Bruce D. (1977) Long-term dependence in common stock returns. Journal of Financial Economics 4:3, 339–349.

[51] Lo, Andrew W. & MacKinlay, A. Craig (1988) Stock Market Prices do not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test. The Review of Financial studies 1:1, 41–66.

[52] Willinger, Walter et al. (1999) Stock market prices and long-range dependence. Finance and Stochastics 3:1, 1–13.

[53] Dang, Phuoc Huy (2003) A Remark on Non-Markov Property of a Fractional Brownian Motion. Vietnam Journal of Mathematics 31:2, 237–240.

[54] Rogers, L. C. G. (1997) Arbitrage with fractional Brownian motion. Mathematical finance 7:1, 95–105.

[55] Björk, Tomas & Hult, Henrik (2005) A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model. SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, No. 596. Stockholm: Stockholm School of Economics, The Economic Research Institute (EFI).

[56] Fama, E. F. & MacBeth, J. D. (1973) Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. Journal of Political Economy 81:3, 607–636.

[57] Dupire, B. (1994) Pricing with a Smile. Risk 7:1. Incisive Media, 18–20.

[58] Bollerslev, Tim (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics 31:3, 307–327.

[59] Engle, Robert F. & Ng, Victor K. (1993) Measuring and testing the impact of news on volatility. Journal of Finance 48:5, 1749–1778.

[60] El Euch, O. & Rosenbaum, M. (2018). The characteristic function of rough Heston models. Mathematical Finance, 29, 3—38

[61] Nelson, D. B. (1991) Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. Econometrica: Journal of the Econometric Society 59, 347–370.

[62] Dohmen, Thomas et al. (2011) Individual Risk Attitudes: Measurement, Determinants and Behavioral Consequences. Journal of the European Economic Association 9:3, 522–550.

[63] Grossman, Sanford J. & Stiglitz, Joseph E. (1980) On the Impossibility of Informationally Efficient Markets. The American Economic Review 70:3, 393–408.

[64] Heston, S. L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. The Review of Financial Studies, 6:2, 327–343.

[65] Sentana, Enrique (1995) Quadratic ARCH Models. The Review of Economic Studies 62:4, 639–661.

[66] Glosten, L. R. et al. (1993) On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. The Journal of Finance 48:5, 1779–1801.

[67] Kluppelberg, Claudia, Lindner, Alexander & Maller, Ross (2004) A continuous-time GARCH process driven by a Lévy process: stationarity and second-order behaviour. Journal of Applied Probability 41, 601–622.

[68] Rasmussen, Carl Edward & Christopher K. I. Williams. Gaussian Processes for Machine Learning. MIT Press, 2006, 14.

[69] Delbaen, F. & Schachermayer, W. (1997) Non-Arbitrage and the Fundamental Theorem of Asset Pricing: Summary of Main Results. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 00.

[70] Uhlenbeck, G. E. & Ornstein, L. S. (1930) ON THE THEORY OF THE BROWNIAN MOTION. Physical Review 36, 823–841.

[71] Hull, J. & White, A. (1987) The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. The Journal of Finance 42:2, 281–300.

[72] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. & Sinai, Y. G. (1982) Ergodic Theory. Springer, 368–370.

[73] Ding, Zhuanxin, Granger, Clive W. J. & Engle, Robert F. (1993) A long memory property of stock market returns and a new model. Journal of Empirical Finance 1:1, 83–106.

[74] Guasoni, P. (2006) No arbitrage under transaction costs, with fractional Brownian motion and beyond. Mathematical Finance 16:3, 569–582.

[75] Andersen, T. G. & Bollerslev, T. (1997) Heterogeneous Information Arrivals and Return Volatility Dynamics: Uncovering the Long-Run in High Frequency Returns. The Journal of Finance 52:3, 975–1005.

[76] Gatheral, J., Jaisson, T. & Rosenbaum, M. (2018) Volatility is rough. Quantitative Finance 18:6, 933–949.

[77] Chronopoulou, A. & Viens, F. G. (2012) Estimation and pricing under longmemory stochastic volatility. Annals of Finance 8:2-3, 379–403.

[78] Scott, L. (1987) Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application. J. Financial and Quantitative Analysis 22:4, 419–438.

[79] Stein, E. & Stein, J. (1991) Stock price distribution with stochastic volatility: An analytic approach. The Review of Financial Studies 4, 727–752.

[80] Bentes, S. R. & Cruz, M. M. (2011) Is stock market volatility persistent? A fractionally integrated approach. Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa (ISCAL) - Comunicações. http://hdl.handle.net/10400.21/1403

[81] Bayer, C., Friz, P. & Gatheral, J. (2015) Pricing under rough volatility. Quantitative Finance 16:6, 887–804.

[82] Gassiat, P. (2019) On the martingale property in the rough Bergomi model. Electronic Communications in Probability 24, 1–9.

[83] Protter, P. (2005) Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, 44, 55, 84, 86–87.

[84] Fukasawa, Masaaki (2011) Asymptotic analysis for stochastic volatility: martingale expansion. 15:4, 635–654.

[85] Carr, Peter & Wu, Liuren (2003) What Type of Process Underlies Options? A Simple Robus Test. The Journal of Finance LVIII:6, 2581–2610.

[86] Alòs, E., Leó n, J. A. & Vives, J. (2007) On the short-time behavior of the implied volatility for jump-diffusion models with stochastic volatility. Finance and Stochastics 11:4, 571–589.

[87] Fukasawa, M. (2021) Volatility has to be rough. Quant. Finance 21, 1–8.

[88] Vijh, A. M. (1990) Liquidity of the CBOE Equity Options. The Journal of Finance 45:4, 1165–1168.

[89] Wei, J. & Zheng, J. (2010) Trading activity and bid–ask spreads of individual equity options. Journal of Banking & Finance 34, 2897–2916.

[90] Dellacherie, C. & Meyer, P. (1982) Probabilities and Potential B: Theory of Martingales. Amsterdam: North-Holland, 336.

[91] Czichowsky, Christoph, Peyre, Rémi, Schachermayer, Walter & Yang, Junjian (2018) Shadow prices, fractional Brownian motion, and portfolio optimisation under transaction costs. Finance and Stochastics 22:1, 161–180.

[92] Rømer, S. E. (2022) Empirical analysis of rough and classical stochastic volatility models to the SPX and VIX markets. Quantitative Finance 22:10, 1805–1838.

[93] Jaber, E. A. & De Carvalho, N. (2024) Reconciling rough volatility with jumps. SIAM Journal on Financial Mathematics 15:3, 785–823.

[94] McCrickerd, R. & Pakkanen, M. S. (2018) Turbocharging Monte Carlo pricing for the rough Bergomi model. Quantitative Finance 18:11, 1877–1886.

[95] Jaber, A. E. (2019) Lifting the Heston model. Quantitative Finance 19:12, 1995–2013.

[96] Jacod, J., Li, Y., Mykland, P. A., Podolskij, M. & Vetter, M. (2009) Microstructure noise in the continuous case: the pre-averaging approach. Stochastic Processes and their Applications 119:7, 2249–2276.

[97] Broutya, Xavier, Garcinb, Matthieu & Roccaro, Hugo (2025) Estimation of bid-ask spreads in the presence of serial dependence.

[98] Rogers, L. C. G. (2023) Things we think we know. Teoksessa Options — 45 Years since the Publication of the Black-Scholes-Merton Model. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 173–184.

A Heikko derivaatta

Sijoittajan tekemää kaupankäyntiä saatetaan mallintaa prosesseilla, jotka ovat mitallisia, mutta eivät välttämättä ole jatkuvia tai derivoituvia. Oletetaan, että sijoittaja seuraa erästä tällaista strategiaa θ, jonka mukaan hän omistaa θ_t yksikköä kohde-etuutta hetkellä t. Strategia koostuu diskreeteistä osto- ja myyntitapahtumista, jolloin θ ei selvästikään ole jatkuva. Tässä luvussa esitetään edelläkuvailtujen strategioiden tarkastelussa tarvittava *heikon derivaatan* käsite diskreetille strategialle.

Aloitetaan käsitteen pohjustaminen esittelemällä Heavisiden porrasfunktio. Heavisiden porrasfunktioilla $H(t) = \mathbf{1}_{t \geq 0}$ voidaan mallintaa kohde-etuuden strategian mukaista määrää eräällä hetkellä. Strategiaa, jossa ostetaan yksi osake hetkellä $t = 3$, kaksi osaketta hetkellä $t = 5$ ja myydään kolme osaketta hetkellä $t = 8$ voidaan mallintaa merkitsemällä

$$\theta_t = H(t-3) + 2H(t-5) - 3H(t-8).$$

Määritelmä 28. Olkoot u, v välillä $[a, b]$ äärellisiä funktioita. Funktiota v kutsutaan funktion u heikoksi derivaataksi, jos

$$\int_a^b u\,(t)\,\varphi'\,(t)\,dt = -\int_a^b v\,(t)\,\varphi\,(t)\,dt$$

kaikille φ, joille pätee $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ja joiden kaikkien kertalukujen derivaatta on olemassa.

Halutessa mallintaa vain toteutuneiden toimeksiantojen kokoa (kohde-etuuden yksikköjen määrä) ja laatua (osto vai myynti), voidaan käyttää heikkoa derivaattaa. Asettamalla Heavisiden porrasfunktio määritelmän vasemmalle puolelle, saadaan

$$\int_{-10}^{10} H\,(t)\,\varphi'\,(t)\,dt = \int_0^{10} \varphi'\,(t)\,dt = -\varphi\,(0)\,.$$

On siis oltava

$$\int_{-10}^{10} \varphi\,(t)\,d\mu = \varphi\,(0)$$

eräälle mitalle μ. Tämän toteuttaa mitta, joka antaa pisteelle $t = 0$ massan 1. Voidaan sanoa mitan μ olevan Heavisiden porrasfunktion heikko derivaatta mittamielessä.

Yllä olevan strategian heikko derivaatta antaa esimerkiksi pisteessä $t = 4$ arvon 0, pisteessä $t = 3$ arvon 1 ja pisteessä $t = 8$ arvon -3. Heikon derivaatan kokonaisheilahtelu kertoo yksinkertaisesti derivaatan arvon muutosten itseisarvon summan eräällä välillä. Tällöin strategian kaupankäyntivolyymi saadaan laskemalla

$$\int_2^8 d\|D\theta\|_s = 6.$$

B Tekoälyn käyttö tutkielmassa

Tutkielman tekemiseen on hyödynnetty tekoälyä lähteiden etsinnässä ja oikeinkirjoituksen tarkistamisessa.

C Data ja datan käsittely

Tutkielmassa käytettyä dataa on noudettu Yahoo Finance -palvelun ja Databenton tietokannoista. Datan käsittelyyn ja kuvaajien tuottamiseen käytetty ohjelmointikoodi löytyy julkisesta GitHub repositoriosta `https://github.com/EetuLehtonen/Gradu`. Palvelun ehtojen mukaisesti dataa ja siitä johdettuja tuloksia on sallittua soveltaa pro gradu -tutkielmassa. Raakadata on kuitenkin lisätty GitHub repositorioon salasanalla suojattuna .7z tiedostona.