

Kvanttiteleportaatio

LuK-tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikka
2025
Fil. yo. Pinja Leppäaho
Tarkastaja:
Jyrki Piilo

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan laitos

Leppäaho, Pinja Kvanttiteleportaatio

LuK-tutkielma, 19 s.
Fysiikka
Helmikuu 2025

Kvanttiteleportaatio on tapa siirtää kvanttitila paikasta toiseen ilman, että tilaa siirretään fyysisesti tai kopioidaan paikasta toiseen. Tämän mahdollistaa kvanttisysteemien lomittuminen. Kvanttiteleportaatioprotokolla voidaan esittää kvanttipiirinä kvanttiporttien, eli unitaaristen logiikkaporttien avulla. Kokeellisesti kvanttiteleportaation voi toteuttaa kvanttioptisesti fotonien polarisaatiotilojen suhteen, käyttämällä Bellin mittausta. Kokeellisissa toteutuksissa teleportaatioissa on aina mukana virhettä, jonka mittana käytetään fideliteettiä.

Asiasanat: kvanttimekaniikka, kvanttiteleportaatio, lomittuminen, EPR, Bellin tilat, Bellin epäyhtälö, Bellin mittaus, fideliteetti, kvanttipiiri, kvanttiportit

Sisällys

Johdanto	1
1 Kvanttimekaaniset systeemit	1
1.1 Matemaattiset peruskäsitteet	1
1.2 Puhdas tila	2
1.3 Yhdistetty systeemi	3
1.4 Unitaarimuunnokset	3
1.5 Tiheysmatriisi: puhtaat ja sekoitetut tilat	4
2 Lomittuminen	5
2.1 Määritelmä	5
2.2 Bellin tilat	5
2.3 Bellin epäyhtälö	6
2.4 Bellin mittaus	8
3 Kvanttiteleportaatio	9
3.1 Protokolla	9
3.2 Kvanttipiiriesitys	11
3.3 Fideliteetti	13
3.4 Kokeellinen toteutus	14
4 Yhteenveto	16

Johdanto

Kvanttiteleportaatio tarkoittaa kvanttitalan siirtämistä paikasta toiseen vain klassisen informaation ja Einstein-Podolsky-Rosen-tilojen (EPR-tilojen) avulla ilman tilan fysikaalista siirtoa [1]. Kvanttiteleportaation idean esitteli ensimmäisenä Charles H. Bennet ym. vuonna 1993 [2], ja ensimmäisen kvanttiteleportaation kokeellisen toteutuksen tekivät D. Boschi ym. vuonna 1997 [3].

Kvanttiteleportaation mahdollistava ilmiö on lomittuminen, jossa kvanttimekaaniset tilat ovat keskenään korreloituneet. Kvanttiteleportaation kannalta erityisen tärkeitä ovat maksimaalisesti lomittuneet Bellin tilat, joiden korrelaatio on maksimaalinen [1].

Tutkielmassa tarkastellaan kvanttiteleportaatiota: sen matemaattista sekä kvanttiportteihin perustuvaa teoreettista esitystä sekä sen kokeellista toteutusta ja onnistumista. Ensimmäisessä luvussa määritellään aiheen ymmärtämiseen vaaditut kvanttimekaaniset peruskäsitteet, toisessa luvussa tutkitaan lomittumista; sen määritelmää, maksimaalisesti lomittuneita tiloja sekä lomittuneiden tilojen olemassaoloa että mittausta. Kolmannessa luvussa yhdistetään aiemmissa luvuissa määriteltyjä käsitteitä kvanttiteleportaation kuvauksessa ja selvitetään, miten kvanttiteleportaatio voi toteutua kokeellisesti. En ole käyttänyt tutkielmassa apuna tekoälyä.

1 Kvanttimekaaniset systeemit

1.1 Matemaattiset peruskäsitteet

Kvanttimekaniikan teorian muotoilu perustuu yleisesti Hilbertin avaruuksille \mathcal{H} , jotka määritellään täydellisinä sisätuloavaruuksina. d -ulotteisen Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta $\{|\varphi_k\rangle\}_{k=1}^d$ on olemassa, jos avaruus on äärellisulotteinen tai ää-

retönulotteinen ja separoituva. Tällöin vektorin $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ kantaesitys on

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^d \langle \varphi_k | \psi \rangle |\varphi_k\rangle, \quad (1)$$

jossa $\langle \varphi_k | \psi \rangle$ on kantavektorin ja vektorin sisätulo ja φ_k kantavektori. [4]

Jokaiseen eristettyyn fysikaaliseen systeemiin voidaan liittää tila-avaruus, eli Hilbertin avaruus, jossa systeemin tiloja kuvaavat yksikkövektorit, eli tilavektorit. Tämä on yksi kvanttimekaniikan postulaateista. [1]

1.2 Puhdas tila

Kvanttimekaaninen systeemi on puhtaassa tilassa, jos sillä on täysin tunnettu tilavektori, eli tila voidaan esittää muodossa

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1} c_k |\varphi_k\rangle, \quad (2)$$

jossa $|\psi\rangle$ on tilavektori ja $c_k \in \mathbb{C}$ on kantavektoria $|\varphi_k\rangle$ vastaava todennäköisyysamplitudi. Fysikaalista tilaa esittävän tilavektorin on oltava normalisoitu eli

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (3)$$

[5]. Jos tila ei ole puhdas, se on sekoitettu, eli sekoitus puhtaista tiloista [1].

Tilavektoriin $|\psi\rangle$ kohdistuva kvanttimekaanisen suureen mittaus tuottaa ominaisvektoriin $|\varphi_k\rangle$ liittyvän arvon, ominaisarvon, todennäköisyydellä

$$p(k) = |\langle \varphi_k | \psi \rangle|^2 = |c_k|^2, \quad (4)$$

jossa $\langle \varphi_k | \psi \rangle$ on ominaisvektorin ja tilavektorin sisätulo ja c_k ominaisvektoriin liittyvä todennäköisyysamplitudi. Esimerkiksi, jos spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkasen tila z -kannassa on $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\frac{\hbar}{2}\rangle$, todennäköisyys sille, että spin saa mittauksessa arvon $+\frac{\hbar}{2}$, on $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$ [5].

1.3 Yhdistetty systeemi

Yhdistetty systeemi koostuu kahdesta tai useammasta alisysteemistä, jotka voivat vuorovaikuttaa keskenään tai olla täysin riippumattomia. Yhdistetyn systeemin Hilbertin avaruus saadaan alisysteemien Hilbertin avaruuksien tensoritulona; esimerkiksi alisysteemien A ja B yhdistettyä systeemiä AB kuvataan Hilbertin avaruudella

$$\mathcal{H}^{(AB)} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}, \quad (5)$$

jossa $\mathcal{H}^{(A)}$ ja $\mathcal{H}^{(B)}$ ovat alisysteemien Hilbertin avaruuksia. [5]

Yhdistetyn systeemin kantavektorit saadaan alisysteemien kantavektorien tensorituloina; avaruuden $\mathcal{H}^{(AB)}$ kanta on

$$\{|n, k\rangle\} = \{|n\rangle \otimes |k\rangle\}, \quad (6)$$

jossa $|n\rangle \in \mathcal{H}^{(A)}$ on avaruuden A kantavektori ja $|k\rangle \in \mathcal{H}^{(B)}$ on avaruuden B kantavektori [5]. Yhdistetyn systeemin dimensio on siis $(\dim\mathcal{H}^{(A)})(\dim\mathcal{H}^{(B)})$ [5], erityisesti alisysteemien ollessa kubitteja dimensio on 2^n , jossa n on kubittien lukumäärä [1].

Esimerkiksi, jos kahden kvanttitalan, $|\psi_A\rangle$:n ja $|\psi_B\rangle$:n, tilavektorit ovat muotoa $|\psi_A\rangle = \sum_i c_i |i\rangle_A$ ja $|\psi_B\rangle = \sum_j c_j |j\rangle_B$, yhdistetyn systeemin $|\psi_{AB}\rangle$ tilavektori on muotoa $|\psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} c_i c_j |i\rangle_A |j\rangle_B$.

1.4 Unitaarimuunnokset

Operaattori U on unitaarinen, jos sille pätee

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}, \quad (7)$$

jossa U^\dagger on operaattorin Hermiten konjugaatti, eli transpoosin kompleksikonjugaatti, ja $\mathbf{1}$ on identiteettioperaattori. Unitaarioperaattorin Hermiten konjugaatti on siis sen käänteisoperaattori. Lisäksi unitaarimuunnokset säilyttävät tilavektoreiden sisätulot, eli

$$\langle \psi_1 | U^\dagger U | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad (8)$$

jossa ψ_1 ja ψ_2 ovat mielivaltaisia tilavektoreita. [6]

Unitaarioperaattorit U muuntavat ortonormaalin kannan toiseksi ortonormaaliksi kannaksi, toisin sanoen unitaarioperaattorien avulla voidaan vaihtaa systeemin Hilbertin avaruuden kantaa: $|\tilde{\varphi}_i\rangle = U|\varphi_i\rangle$, jossa $|\tilde{\varphi}_i\rangle$ on uusi kanta ja $|\varphi_i\rangle$ vanha kanta [6].

Kahden ortonormaalin ja täydellisen kannan välille on aina löydettävissä unitaarioperaattori, joka kuvaa toisen kannan toiseksi [7]. Jos kvanttimekaaninen tila halutaan mitata eri kannassa, voidaan kanta muuttaa unitaarimuunnoksella halutuksi ennen mittausta [1].

Paulin operaattorit, tai Paulin matriisit, matriisimuodossa

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

ovat kvanttimekaniikassa esiintyviä tärkeitä unitaarioperaattoreita, jotka operoivat 2-ulotteisessa kubitin Hilbertin avaruudessa [5]. Esimerkiksi, jos kubitin tilavektori on $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, Paulin operaattori σ_y muuttaa tilan tilaksi $\sigma_y|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib \\ ia \end{pmatrix} = -ib|0\rangle + ia|1\rangle$.

1.5 Tiheysmatriisi: puhtaat ja sekoitetut tilat

Kvanttisysteemin tila-avaruutta kuvataan tiheysmatriiseilla, eli matriiseilla joiden jälki $\text{tr}\rho = 1$ [4], ja jotka määritellään kaavalla

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (10)$$

jossa p_i on tilan ψ_i todennäköisyys ja $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ tilojen projektio (engl. outer product) [1]. Tiheysmatriiseille pätee $\rho^\dagger = \rho$, jossa ρ^\dagger on tiheysmatriisin Hermiten konjugaatti, eli tiheysmatriisi on hermiittinen. Tiheysmatriisit muodostavat konveksin joukon, ja jokainen tiheysmatriisi on tämän joukon konveksikombinaatio [8].

Tilan tiheysmatriisista voidaan päätellä, onko tila puhdas vai sekoitettu. Puhtaan tilan tiheysmatriisille pätee $\text{tr}(\rho^2) = 1$, kun taas sekoitetun tilan tiheysmatriisille

pätee $0 \leq \text{tr}(\rho^2) < 1$ [1]. Puhtaalla tilalla $|\psi\rangle$ tiheysmatriisi sievenee muotoon $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, jossa ψ on tilan tilavektori, eli puhtaalla tilalla tiheysmatriisi on projektio [5]. Puhtaan tilan tiheysmatriisille pätee myös $\rho^2 = \rho$ [8].

2 Lomittuminen

2.1 Määritelmä

Puhdasta yhdistettyä systeemiä sanotaan lomittuneeksi (engl. entangled), jos sen kokonaistilaa ei voida kirjoittaa sen alisysteemien tilojen tensoritulona, eli

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle, \quad (11)$$

jossa $|\psi\rangle$ on systeemin tilavektori ja $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}^{(n)}$ ovat systeemin alisysteemien tilavektoreita [9]. Esimerkiksi, jos kahden alisysteemin, $|\psi_A\rangle$:n ja $|\psi_B\rangle$:n, tilavektorit ovat muotoa $|\psi_A\rangle = \sum_i c_i |i\rangle_A$ ja $|\psi_B\rangle = \sum_j c_j |j\rangle_B$, kokonaistila $|\psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B$ on lomittunut, jos $C_{ij} \neq c_i c_j$ vähintään yhdelle koordinaattiparille.

Jos sekoitettu tila ei ole separoituva, se on lomittunut. Kahdesta alisysteemistä koostuva systeemi on separoituva, jos sen tiheysmatriisi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^1 \otimes \rho_i^2, \quad (12)$$

jossa p_i on todennäköisyys, jolle $\sum_i p_i = 1$, ja ρ^1 sekä ρ^2 ovat alisysteemien tiheysmatriiseja [10].

2.2 Bellin tilat

Bellin tilat, joita kutsutaan myös nimellä EPR-tilat [1], ovat maksimaalisesti lomittuneita tiloja [11]. Bellin tilat ovat muotoa

$$\begin{aligned} |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \pm |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \\ |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \pm |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B), \end{aligned} \quad (13)$$

jossa $|0\rangle_A$, $|1\rangle_A$, $|0\rangle_B$ ja $|1\rangle_B$ ovat systeemien A ja B kubittitiloja [1].

Bellin tilat muodostavat ortonormaalin kannan [1], ja niitä voidaan käyttää kantana 4-ulotteiselle Hilbertin avaruudelle $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, jossa \mathcal{H}_1 ja \mathcal{H}_2 ovat kubittien Hilbertin avaruuksia: $\dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2) = 2$ [9].

2.3 Bellin epäyhtälö

Albert Einstein, Boris Podolsky ja Nathan Rosen (EPR) väittivät vuoden 1935 artikkelissaan, että korrelaatiot lomittuneiden systeemien välillä osoittavat, että kvanttimekaniikka on epätäydellinen teoria [5]. He perustelivat väitettään sillä, että kvanttimekaniikassa suureen arvoa ei ole mahdollista ennustaa varmasti ennen mittausta [1]. He siis väittivät kvanttimekaniikan noudattavan lokaalia piilomuuttujateoriaa, eli kaikki kvanttimekaaniset suureet ovat ennalta määritettyjä, mutta emme vain tiedä niitä, ja että kvanttimekaniikka on lokaalista, eli mittaukset jossakin paikassa eivät vaikuta mittauksiin toisaalla [5]. Väite kvanttimekaniikan epätäydellisyydestä oli kuitenkin väärä, ja se pystyttiin myöhemmin kokeellisesti todistamaan vääräksi; tulosta kutsutaan Bellin epäyhtälöksi [1].

Bellin epäyhtälön johtamiseksi oletetaan, että Alicella on hiukkanen, ja kaksi mittalaitetta, jolla hän voi mitata hiukkasen ominaisuudet P_Q tai P_R , vastaten arvoja P ja Q . Samoin Bobilla on hiukkanen, jonka ominaisuuksia P_S ja P_T hän voi mitata. Oletetaan lisäksi, että kaikki nämä ominaisuudet voivat saada vain arvoja 1 ja -1. [1]

Alive valitsee mielivaltaisesti, mitaako Q - vai R -arvoa ja samoin Bob S - vai T -arvoa. He suorittavat mittauksensa samaan aikaan, jolloin Alicen mittauksen tulos ei voi vaikuttaa Bobin mittaustulokseen ja toisinpäin, koska fysikaaliset vaikutukset eivät voi edetä valoa nopeammin. [1]

Tarkastellaan suuretta $QS + RS + RT - QT = (Q + R)T + (R - Q)T$. Koska $R, Q = \pm 1$, on joko $(Q + R)T = 0$ tai $(Q - R)T = 0$. Tästä seuraa, että $QS + RS +$

$RT - QT \pm 2$. Olkoon $P(q,r,s,t)$ todennäköisyys sille, että $Q = q$, $R = r$, $S = s$ ja $T = t$. Tällöin suureen $QS + RS + RT - QT = (Q + R)T + (R - Q)T$ odotusarvo on

$$\begin{aligned} \langle QS + RS + RT - QT \rangle &= \sum_{q,r,s,t} P(q,r,s,t)(qs + rs + rt - qt) \\ &\leq \sum_{q,r,s,t} 2 \cdot P(q,r,s,t) \\ &= 2. \end{aligned} \tag{14}$$

Toisaalta odotusarvo on

$$\begin{aligned} \langle QS + RS + RT - QT \rangle &= \sum_{q,r,s,t} P(s,r,s,t)qs + \sum_{q,r,s,t} P(s,r,s,t)rs \\ &\quad + \sum_{q,r,s,t} P(s,r,s,t)rt - \sum_{q,r,s,t} P(s,r,s,t)qt \\ &= \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle. \end{aligned} \tag{15}$$

Vertaamalla yhtälöitä (16) ja (17) saadaan Bellin epäyhtälö

$$\langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle \leq 2, \tag{16}$$

joka tunnetaan myös CHSH-epäyhtälönä. [1]

CHSH-epäyhtälön vasemman puolen suuret voidaan määrittää suorittamalla useita kokeellisia mittauksia ja tarkastaa, päteekö epäyhtälö [5]. Alain Aspect ym. toteuttivat vuonna 1982 ensimmäisen Bellin epäyhtälön todistavan kokeen, jossa mitattiin lineaarisesti polarisoituneiden fotoniparien korrelaatioita [12] todistaen, että lokaalinen piilomuuttujateoria on virheellinen [5]. He saivat tutkimustuloksistaan fysiikan Nobelin palkinnon vuonna 2022 [13].

Siispä kvanttimekaanisilla systeemeillä on epälokaaleja korrelaatioita, jotka ilmevät lomittumisessa [13]. Tätä kutsutaan Bellin teoreemaksi, ja Bellin epäyhtälön todistavia kokeellisia mittauksia kutsutaan Bellin testeiksi [13]. Bellin epäyhtälön rikkoutuminen ja epälokaaleiden korrelaatioiden olemassaolo hyväksyy kvanttimekaanisen lomittumisen olemassaolon, mikä mahdollistaa myös kvanttiteleportaation.

Bellin testit hyödyntävät Bellin mittausta, kuten kvanttiteleportaatiokin, ja niissä esiintyy samankaltaisia rajoitteita kuten kvanttiteleportaation kokeellisissa toteutuksissa [13].

2.4 Bellin mittaus

Bellin mittauksessa kahden kubitin kvanttisysteemi projektoidaan Bellin kantaan, jonka jälkeen mittaus suoritetaan Bellin kannassa, jolloin tuloksena saadaan jokin Bellin tiloista. Jos Bellin tilassa olevien hiukkasten tilat mitataan erikseen, mittaus tulokset ovat täysin korreloituneita tai antikorreloituneita, Bellin tilasta riippuen, koska Bellin tilat ovat lomittuneita tiloja. Esimerkiksi, jos Bellin tilan $|\Phi^+\rangle$ toinen kubitti mittauksessa havaitaan olevan tilassa $|0\rangle$, on varmaa, että toinenkin kubitti on tilassa $|0\rangle$; tilat ovat täysin korreloituneita. Kuitenkin Bellin mittauksessa kubitit mitataan samanaikaisesti. [13]

Mittauksen seurauksena kvanttisysteemi romahtaa kyseistä mittaustulosta vastaavaan Bellin tilaan, eli tuloksena saadaan $|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^-\rangle$ tai $|\Psi^+\rangle$. Jos Bellin mittauksessa olleet kubitit eivät olleet ennen mittausta lomittuneita, Bellin mittaus lomittaa ne [13].

Bellin tilat muodostavat ortonormaalin kannan, joten ne ovat erotettavissa toisistaan suorittamalla sopivia mittauksia [1]. Optinen, 50:50 säteenjakajaan, kahteen 45° asteen polarisaattoreihin ja fotodetektoreihin ja niistä saatuihin koinsidensseihin perustuva Bellin mittaus voi erottaa neljästä Bellin tilasta kaksi. Koinssidenssit tarkoittavat detektoreille samanaikaisesti saapuvia fotonien havaintoja [14]. Hyperlomittumisen, eli lomittumisen useiden vapausasteiden suhteen, avulla voidaan konstruoida täydellinen Bellin mittaus [14].

Bellin testien, kuten kvanttiteleportaationkin, kokeellisissa toteutuksissa on useita aukkoja, joita on vähitellen pystytty paikkaamaan. Nämä aukot liittyvät mm. mittausten tarkkuuteen, eli havaittujen koinssidenssien tulee olla aitoja, ja lokaali-

suuteen, eli hiukkasten välillä ei tule siirtyä informaatiota mittausten aikana [13].

Bellin mittaus on ydinaseudessa useissa kvanttiprotokollissa; kvanttiteleportaation lisäksi mm. supertiheässä koodauksessa (engl. superdense coding) ja kvanttivainen jakelussa (engl. quantum key distribution) [13].

3 Kvanttiteleportaatio

3.1 Protokolla

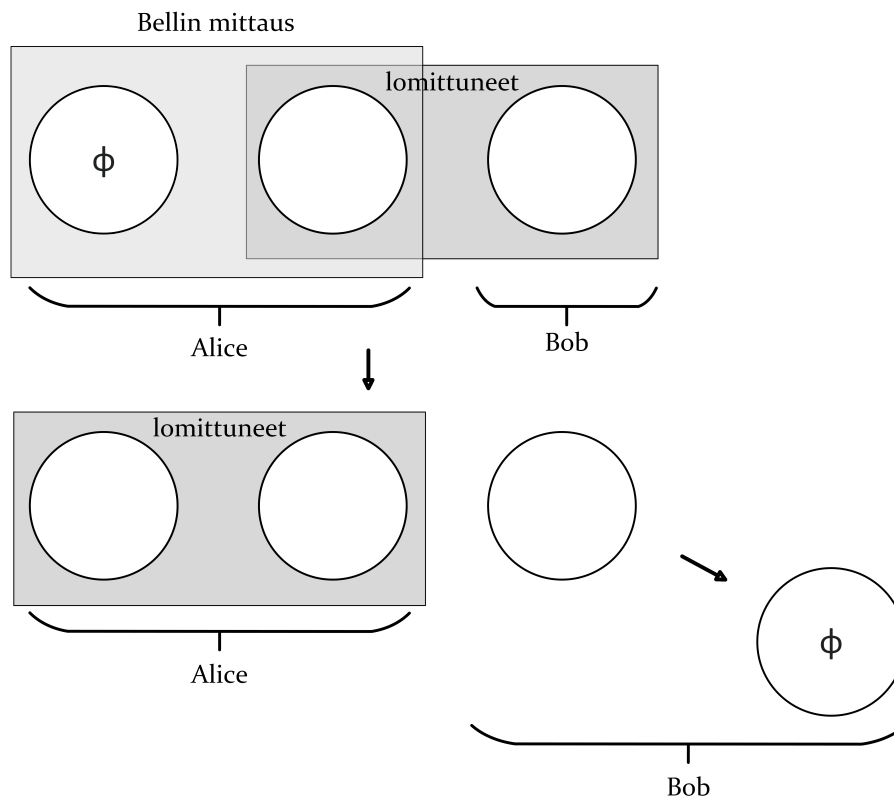
Kvanttiteleportaatiossa Alicen, lähettäjän, tuntematon kvanttitila siirtyy vastaanottajalle Bobille, jonka kanssa Alice etukäteen jakaa jonkin EPR-tilan [2]. Kvanttiteleportaatio edellyttää, että lähettäjän ja vastaanottajan välillä on kvanttikanava sekä klassinen kanava [11].

Alicella on siis hallussaan tuntematon kvanttitila $|\phi\rangle_C$, jonka hän haluaa välittää Bobille. Alice ja Bob jakavat etukäteen jonkin Bellin tilan siten, että toinen hiukkanen on Alicella ja toinen Bobilla. Alice suorittaa Bellin mittauksen tuntemattomalle kvanttitilalleen ja hänen hallussaan olevalle EPR-tilan hiukkaselle, tehden näistä kahdesta lomittuneet. Samalla Alicen ja Bobin EPR-tilan lomittuminen purkautuu. Tämän jälkeen Alice lähettää Bobille Bellin mittauksen tuloksen, eli kaksi bittiä, klassista kanavaa pitkin. Saatuaan bitit Bob muuttaa unitaarimuunnoksella EPR-hiukkasensa täysin samanlaiseen tilaan, jossa Alicen hiukkanen oli alussa. [2] Kuvassa 1 on havainnollistettu tätä kvanttiteleportaation prosessia.

Jos Alice ja Bob jakavat EPR-tilan $|\Phi^+\rangle$ ja Alicella on hallussaan tuntematon tila $|\phi\rangle_C = a|0\rangle_C + b|1\rangle_C$, on kokonaistila näiden tilojen yhdistetty systeemi

$$\begin{aligned} |\psi_{ABC}\rangle &= (a|0\rangle_C + b|1\rangle_C) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})\right) \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle_{CAB} + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle_{CAB} + \frac{b}{\sqrt{2}}|100\rangle_{CAB} + \frac{b}{\sqrt{2}}|111\rangle_{CAB}, \end{aligned} \quad (17)$$

jossa $|00\rangle_{AB} = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$ jne., ja jossa A viittaa Aliceen ja B Bobiin. [9]



Kuva 1: Havainnollistava kaavio kvanttiteleportaatiosta, jossa symboli ϕ kuvaa teleportoitavaa kvantttilaa.

Kun Alice suorittaa Bellin mittauksen tuntemattomalle hiukkaselle ja EPR-parin hiukkaselleen, ne lomittuvat muodostaen EPR-parin. Kokonaistila on tällöin

$$\begin{aligned}
 |\psi_{ABC}\rangle &= \frac{a}{2}(|\Phi^+\rangle_{CA} + |\Phi^-\rangle_{CA})|0\rangle_B + (|\Psi^+\rangle_{CA} + |\Psi^-\rangle_{CA})|1\rangle_B \\
 &\quad + \frac{b}{2}(|\Psi^+\rangle_{CA} - |\Psi^-\rangle_{CA})|0\rangle_B + (|\Phi^+\rangle_{CA} - |\Phi^-\rangle_{CA})|1\rangle_B \\
 &= \frac{1}{2}(|\Phi^+\rangle_{CA}(a|0\rangle_B + b|1\rangle_B) + |\Psi^+\rangle_{CA}(a|1\rangle_B + b|0\rangle_B) \\
 &\quad + |\Phi^-\rangle_{CA}(a|0\rangle_B - b|1\rangle_B) + |\Psi^-\rangle_{CA}(a|1\rangle_B - b|0\rangle_B)),
 \end{aligned} \tag{18}$$

jossa Alicen kubitit on kirjoitettu Bellin kannassa [1]. Bobilla on nyt hallussaan jokin kubittitila neljästä vaihtoehdosta, kaikki todennäköisyydellä $|\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$ [2]. Tämä tila on Alicen Bellin mittauksen tuloksesta riippuen joko alkuperäinen tuntematon tila tai tila, joka voidaan muuntaa unitaarioperaatiolla alkuperäiseksi tilaksi [2].

Taulukko I: Kvanttiteleportaatioissa Alicen tekemän Bellin mittauksen tulokset, niitä vastaavat Bobin tilat sekä tarvittavat unitaarimuunnokset [1].

Bellin mittauksen tulos	Bobin tila	Tarvittavat unitaarimuunnokset
$ \Phi^+\rangle$	$a 0\rangle + b 1\rangle$	–
$ \Phi^-\rangle$	$a 1\rangle + b 0\rangle$	σ_z
$ \Psi^+\rangle$	$a 0\rangle - b 1\rangle$	σ_x
$ \Psi^-\rangle$	$a 1\rangle - b 0\rangle$	$\sigma_z\sigma_x$

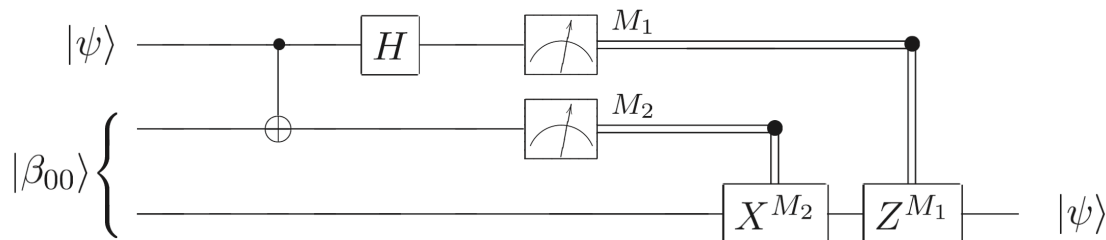
Taulukossa 1 on esitetty mahdolliset Alicen suorittaman Bellin mittauksen tulokset, niitä vastaavat Bobin kubitin tilat sekä niitä vastaavat operaatiot, jotka Bobin tulee tehdä tilaansa, jotta saisi alkuperäisen, teleportoitavan tilan. [1]

Kvanttiteleportaatio ei mahdollista valoa nopeampaa informaation siirtoa, koska teleportaation onnistuminen edellyttää Alicen lähettävän kaksi bittiä Bobille pitkin klassista kanavaa, jossa informaatio siirtyy valoa hitaammin. Kvanttiteleportaatio ei välitä lainkaan informaatiota, jos klassista kommunikaatiota ei tapahdu.[1] On myös huomattava, että kvanttiteleportaatioissa tilaa ei kopioida paikasta toiseen, vaan se siirtyy, joten kvanttiteleportaatio noudattaa kvantti-informaatioteorian keskeistä sääntöä: tuntematonta kvanttittilaa ei ole mahdollista kopioida (engl. no-cloning theorem) [9].

3.2 Kvanttipiiriesitys

Kvanttipiiri koostuu viivoista (engl. wires), jotka edustavat kubitteja, sekä kvanttiporteista, jotka ovat unitaarisia logiikkaportteja. Kvanttiteleportaation kvanttipiirissä tarvitaan 5:tä erilaista kvanttiporttia: CNOT-, Hadamard-, mittaus-, X- sekä Z-portteja. [1]

CNOT-portti, jota kutsutaan myös controlled-NOT-portiksi, on kuvassa 2 en-



Kuva 2: Kvanttiteleportaation kvanttipiiri, jossa $|\psi\rangle$ kuvaa teleportoitavaa tilaa ja $|\beta_{00}\rangle$ kuvaa Alicen ja Bobin jakamaa Bellin tilaa. [1]

simmäisenä porttina vasemmalta oikealle. Kyseinen portti on kahden kubitin portti, jossa toinen kubitti toimii kontrollikubittina (engl. control qubit) ja toinen kohdekubittina (engl. target qubit). Jos kontrollikubitti, piiriesityksessä portille tuleva ylempi kubitti, on tilassa $|0\rangle$, kohdekubitille, eli piiriesityksessä portin alemmalle kubitille, ei tehdä mitään, mutta jos kontrollikubitti on tilassa $|1\rangle$, kohdekubitin tila vaihdetaan toiseksi; tilasta $|0\rangle$ tulee $|1\rangle$ ja tilasta $|1\rangle$ tulee $|0\rangle$. [5]

Hadamard-portin matriisiesitys on

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ja se muuttaa tilan $|0\rangle$ tilaksi $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ ja tilan $|1\rangle$ tilaksi $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. Hadamard-porttia merkitään kirjaimella H, kuten kuvassa 2. [1]

Mittausportti kuvaa kubitin mittausta, jossa kubitti muuttuu klassiseksi bitiksi; 1:ksi tai 0:ksi tietyin todennäköisyyksin. Mittaus siis muuttaa kubitin $a|0\rangle + b|1\rangle$ bitiksi 0 todennäköisyydellä $|a|^2$ ja bitiksi 1 todennäköisyydellä $|b|^2$. Piiriesityksessä mittausta merkitään mittari-symbolilla, ja toisin kuin kubitteja, bittejä eli klassista informaatiota, merkitään piiriesityksessä kahdella viivalla, viitaten kahteen mahdolliseen bitin arvoon. [1]

X- ja Z-portit vastaavat Paulin operaattoreita σ_x ja σ_z ; X-portti, jota kutsutaan myös NOT-portiksi, vaihtaa kubitin todennäköisyysamplitudit päittäin, kun taas Z-portti muuttaa tilan $a|0\rangle + b|1\rangle$ tilaksi $a|0\rangle - b|1\rangle$. Näitä portteja merkitään

kvanttipiiriesityksessä kirjaimilla X ja Z . [1]

Kvanttiteleportaation kvanttipiiri on esitetty kuvassa 2, jossa kaksi ylintä viivaa kuvaavat Alicen kubitteja, joista ylempi on teleportoitavassa tilassa. Alin viiva kuvaa Bobin kubittia. Ensin Alice operoi CNOT-portilla EPR-hiukkaseensa kontrollikubitin ollessa teleportoitava hiukkanen. CNOT-portin jälkeen, jossa teleportoitavan kubitin tila ei muutu, Alice lähettää kubitin Hadamard-portin läpi, jossa kubitille tehdään sitä vastaava operaatio. Alice lähettää näiden operaatioiden jälkeen molemmat kubittinsa mittausportteihin, joita kuvassa 2 on merkitty kirjaimilla M_1 ja M_2 . Mittauksissa kubitit muuttuvat klassisiksi biteiksi eli saavat tietyn arvon [1]. CNOT-, Hadamard- ja mittausportit yhdessä muodostavat Bellin mittauksen laskennallisessa kannassa (engl. computational basis), eli mittaustuloksena saadaan 00, 01, 10 tai 11, vastaten Bellin tiloja [13]. Koska kvanttiportit ovat unitaarisia, näiden porttien yhdistelmän käänteisoperaatiolla voidaan muodostaa Bellin tiloja [1]. Viimeiseksi, riippuen Bellin mittauksen tuloksesta eli saaduista biteistä, Bob muuntaa tilaansa X - ja Z -porteilla. [1]

3.3 Fideliteetti

Fideliteetti (engl. fidelity) kuvaa kvanttitilojen erilaisuutta toisiinsa nähden [1], ja se määritellään

$$F(\rho, \sigma) = \left(\text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right)^2, \quad (20)$$

jossa ρ ja σ ovat tilojen tiheysmatriiseja, ja tr on matriisin jälki [15].

Kvanttiteleportaatiossa fideliteettiä käytetään teleportaation laadun mittana, eli se ilmaisee, kuinka hyvin tuntematon kvanttitila on pystytty teleportoimaan paikasta toiseen. Fideliteetti saa arvoja väliltä $F \in [0,1]$, ja fideliteetin ollessa $F = 1$ tilat ovat samat. [16]

Ideaalitilanteessa kvanttiteleportaatiossa alkuperäisen, teleportoitavan tilan ja teleportoidun tilan fideliteetti saa arvon 1, mutta kokeellisissa toteutuksissa fideli-

teetti on aina pienempi[11]. Teleportaatiota pidetään epäklassisena, jos fideliteetti on suurempi kuin $F = \frac{2}{3}$ [11], koska $F = \frac{2}{3}$ on suurin fideliteetti, joka on mahdollista saavuttaa klassisissa käytänteissä, jotka eivät hyödynnä lomittumista [16].

Fideliteettiä kvanttiteleportaatioissa pienentää erityisesti dekoherenssi, joka johtuu kvanttisysteemin ja ympäristön vuorovaikutuksesta. Dekoherenssia aiheuttaa kvanttikommunikaatioissa erityisesti kvanttikanavan melu (engl. noise). [14]

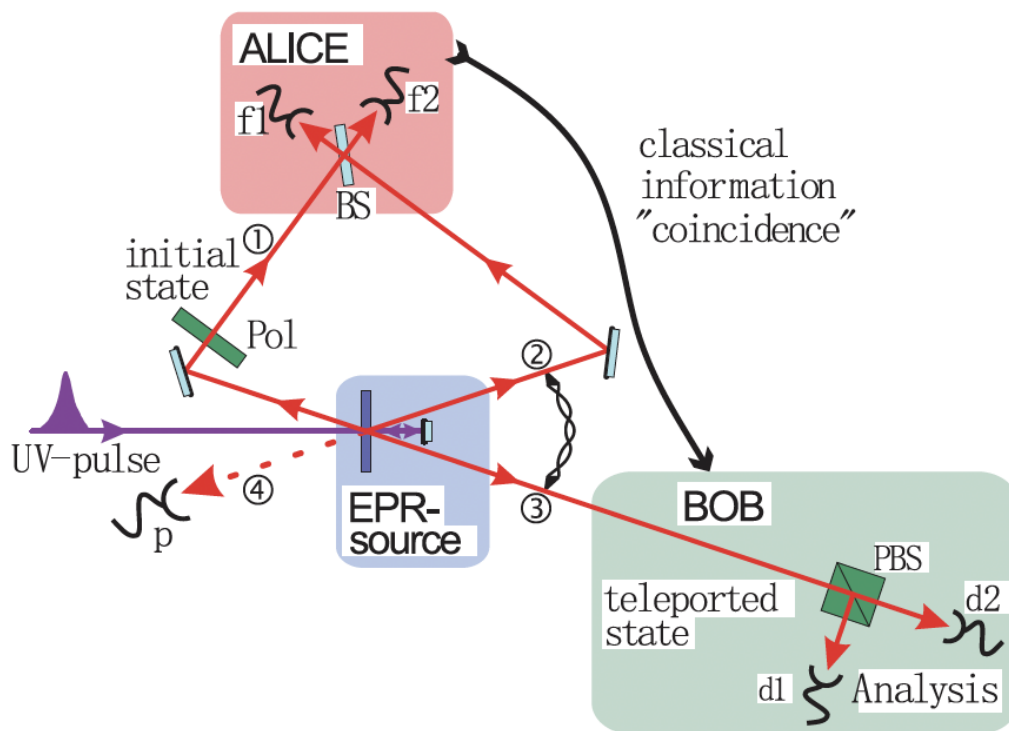
3.4 Kokeellinen toteutus

Kokeellisesti kvanttiteleportaation voi toteuttaa esimerkiksi fotonien polarisaatiotilojen avulla, eli siirtämällä fotonin polarisaatiotilan mielivaltaisen matkan päässä olevalle toiselle fotonille [9]. Kvanttiteleportaation ensimmäisen kokeellisen, kvanttioptisen toteutuksen tekivät D. Boschi ym. vuonna 1997, jossa teleportoitiin lineaarisesti polarisoitunut sekä elliptisesti polarisoitunut kvanttityla fotonilta toiselle [3].

Yleisimmin lomittuneita kvanttityloja luodaan parametrisella alaskonversiolla (engl. parametric down-conversion), jossa fotoni kulkee epälineaarisen kiteen läpi, muodostaen polarisaatioiden suhteen lomittuneen fotoniparin. Parametrisen alaskonversion avulla voidaan muodostaa erityisesti Bellin tiloja. [9] Tämä on kuvattu kuvan 3 sisäisessä laatikossa, jossa on EPR-tilojen lähde. Näin muodostuu kaksi lomittunutta fonia, joita kuvassa 3 merkitään numeroilla 2 ja 3. [17].

UV-pulssin fotonin heijastuessa kiteen jälkeen takaisin kiteeseen, muodostuu toinen fotonipari, jota kuvassa 3 on merkitty numeroilla 1 ja 4. Fotoni 1 muutetaan polarisaattorin avulla tilaan, joka halutaan teleportoida, kun taas fonia 4 käytetään ilmaisemaan, että teleportoitava tila on valmistumassa [17].

Teleportoitavassa tilassa oleva fotoni sekä toinen EPR-tilassa olevista fotoneista ohjataan Alicen luo säteenjakajalle. Alice odottaa fotonien koinsidensseja (engl. coincidence), eli detektoreille samaan aikaan saapuvia fotoneja. Kuvassa 3 tämä on



Kuva 3: Kvanttiteleportaation kokeellisen toteutuksen koejärjestely. [14]

kuvattu punaisessa laatikossa, ja fotodetektoreja on merkitty kirjaimilla f1 ja f2. Kun koinsidenssi on havaittu, Alice lähettää siitä tiedon Bobille klassisesti, ja tätä kuvataan kuvassa 3 mustalla nuolella [17]. Kun koinsidenssi on havaittu, tiedetään fotonien olevan lomittuneita ja Bellin tilassa [14].

Bobin saadessa Alicelta tiedon koinsidenssista, tiedetään, että hänen fotoninsa, kuvassa 3 fotoni 3, on alkuperäisessä, teleportoitavassa tilassa, tai unitaarimuutosten päässä siitä. Polarisoivan säteenjakajan ja kahden fotodetektorin avulla Bob voi tutkia, onko fotoni alkuperäisessä tilassa. Tätä on merkitty kuvassa 3 vihreällä alueella ja fotodetektoreja on merkitty kirjaimilla d1 ja d2 [14].

Tätä teleportaatiokoejärjestelyä kutsutaan Innsbruckin kokeeksi. Alicen ja Bobin ei tarvitse tietää toistensa sijainteja, ja he voivat olla mielivaltaisen matkan päässä toisistaan, kunhan he alunperin jakavat EPR-parin ja voivat kommunikoida klassisesti. [14]

Dekoherenssin häiritsevää vaikutusta kvanttiteleportaatioissa voidaan pienentää käyttämällä hyväksi useiden alisysteemien hybridilomittumista (engl. multipartite hybrid entanglement), joka tarkoittaa alisysteemien lomittumista useiden vapausasteiden suhteen. Jos fotonien polarisaatiotilojen lomittumisen sijasta hyödynnetään fotonien polarisaation ja taajuuden hybridilomittumista, saadaan kvanttiteleportaatioissa dekoherenssin vaikutus muutettua fideliteettiä parantavaksi. [18]

4 Yhteenveto

Kvanttimekaaniset systeemit voidaan kategorisoida puhtaisiin ja sekoitettuihin tiloihin sen perusteella, onko systeemin tila täysin tunnettu. Tämä voidaan selvittää systeemin tiheysmatriisin ominaisuuksia tarkastelemalla. Systeemit voidaan toisaalta jakaa myös separoituviin ja lomittuneisiin tiloihin sen perusteella, onko tila mahdollista jakaa tekijöihin tensoritulon suhteen.

Lomittuminen on kvanttiteleportaation mahdollistava ilmiö, sillä se mahdollistaa kahden lomittuneen hiukkasen mittaustulosten korrelaation, olivatpa hiukkaset kuinka kaukana toisistaan tahansa. Kvantttiteleportaatioissa hyödynnetään sekä lomittumista että kahden hiukkasen Bellin mittausta ja unitaarimuunnoksia.

Kvantttiteleportaation voi esittää kvanttipiirinä kvanttiporttien, eli kubitteihin operoivien unitaaristen logiikkaporttien avulla. Kvantttiteleportaation voi suorittaa kokeellisesti esimerkiksi fotonien polarisaatiotilojen suhteen käyttämällä polarisaattoreita, säteenjakajia ja fotodetektoreita.

Viime vuosikymmeninä kvanttiteleportaatiota on kehitetty eri osa-alueilla: kvanttiteleportaatio on onnistuttu tekemään yhä suuremmilla etäisyyksillä, useampien vapausasteiden suhteen ja häiriöttömämmin [11]. Kvantttiteleportaatiota pyritään jatkuvasti sujuvoittamaan parantamalla käytännön ratkaisuja ja teleportoidun informaation määrää. Kvanttiporttien avulla toteutettua kvanttiteleportaatiota voidaan hyödyntää mm. kvanttilaskennassa [11], ja sillä on potentiaalisia sovelluksia

salatussa viestinnässä [13].

Viimeaikaisia kvanttiteleportaation saavutuksia ja tutkimustuloksia ovat esimerkiksi yksittäisten fotonikubitien teleportaatio maasta satelliitille etäisyytenä jopa 1400 km [19], kvanttiteleportaatio samanaikaisesti klassisen telekommunikaation käytössä olevien optisten kuitujen kautta [20] sekä hybridilomittumisen käyttö melun vaikutuksen kumoamiseksi kvanttiteleportaatioissa [18].

Viitteet

- [1] M. A. Nielsen ja I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [2] C. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres ja W. Wootters, *Physical Review Letters* **70**, 1895 (1993).
- [3] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy ja S. Popescu, *Physical Review Letters* **80**, 1121–1125 (1998).
- [4] T. Heinosaari ja M. Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement* (Cambridge University Press, 2011).
- [5] B. Schumacher ja M. Westmoreland, *Quantum Processes Systems, and Information* (Cambridge University Press, 2010).
- [6] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu ja F. Laloë, *Quantum mechanics; 1st ed.* (WileyNew York, NY, 1977), käännetty : *Mécanique quantique*. Paris : Hermann, 1973.
- [7] J. Sakurai ja J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 2017).
- [8] L. Ballentine, *Quantum mechanics: A modern development: 2nd edition* (World Scientific Publishing Company, 2014).
- [9] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki ja K. Horodecki, *Reviews of Modern Physics* **81**, 865 (2009).
- [10] A. Peres, *Physical Review Letters* **77**, 1413–1415 (1996).
- [11] X.-M. Hu, Y. Guo, B.-H. Liu, C.-F. Li ja G.-C. Guo, *Nature Reviews Physics* **5**, 339 (2023).
- [12] A. Aspect, P. Grangier ja G. Roger, *Physical Review Letters* **49**, 91 (1982).
- [13] P. Lee, H. Ji ja R. Cheng, *Quantum Computing and Information: A Scaffolding Approach* (Polaris QCI Publishing, 2024).
- [14] J.-W. Pan, Z.-B. Chen, C.-Y. Lu, H. Weinfurter, A. Zeilinger ja M. Żukowski, *Reviews of Modern Physics* **84**, 777 (2012).
- [15] Y.-C. Liang, Y.-H. Yeh, P. E. M. F. Mendonça, R. Y. Teh, M. D. Reid ja P. D. Drummond, *Reports on Progress in Physics* **82**, 076001 (2019).
- [16] J. Bang, J. Ryu ja D. Kaszlikowski, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **51**, 135302 (2018).
- [17] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter ja A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575–579 (1997).

- [18] Z.-D. Liu, O. Siltanen, T. Kuusela, R.-H. Miao, C.-X. Ning, C.-F. Li, G.-C. Guo ja J. Piilo, **10**, eadj3435 (2024).
- [19] J.-G. Ren, P. Xu, H.-L. Yong, L. Zhang, S.-K. Liao, J. Yin, W.-Y. Liu, W.-Q. Cai, M. Yang, L. Li, K.-X. Yang, X. Han, Y.-Q. Yao, J. Li, H.-Y. Wu, S. Wan, L. Liu, D.-Q. Liu, Y.-W. Kuang, Z.-P. He, P. Shang, C. Guo, R.-H. Zheng, K. Tian, Z.-C. Zhu, N.-L. Liu, C.-Y. Lu, R. Shu, Y.-A. Chen, C.-Z. Peng, J.-Y. Wang ja J.-W. Pan, *Nature* **549**, 70–73 (2017).
- [20] J. M. Thomas, F. I. Yeh, J. H. Chen, J. J. Mambretti, S. J. Kohlert, G. S. Kanter ja P. Kumar, *Optica* **11**, 1700 (2024).