



**UNIVERSITY
OF TURKU**

This is a self-archived – parallel-published version of an original article. This version may differ from the original in pagination and typographic details. When using please cite the original.

AUTHOR

Riikka Palkki

TITLE

Virheitä päin

YEAR

2023

URL

<https://dimensiolehti.fi/virheita-pain/>

VERSION

Final draft

CITATION

Palkki, Riikka: Virheitä päin. Dimensio, 10.10.2023.
<https://dimensiolehti.fi/virheita-pain/>

Virheitä päin

Matematiikan opetuksen kansalliskomitean kolumni esittelee ajankohtaisia aiheita ja kansalliskomitean jäsenten ajatuksia matematiikan opetuksesta ja sen kehittämisestä. Kolumnia on myös mahdollista kommentoida ja siten saattaa uusia ideoita tietoomme. Tässä kolumnissa Riikka Palkki esittelee tarkoituksellisia virheitä, joita hän on tutkinut väitöskirjassaan.

Miksi virheitä?

”Matematiikka olisi mukavaa ilman virheitä”, totesi oppilas taannoin. Olisiko? Voiko oppimista todella tapahtua ilman virheitä? Olisiko se todella oppimista? Ja olisiko oppiminen edes mukavaa, jos välillä ei olisi vastoinkäymisiä?

Virheet nähdään jostain syystä negatiivisena asiana, vaikka ne ovat väistämätön osa matematiikkaa ja kaikkea oppimista. Itseasiassa virheitä pidetään jopa hävettävänä ja itseä uhkaavana (Steuer & Dresel, 2015). ”Pyyhitäänpä tämä virhe äkkiä pois”, sanoin joskus opettaessani yläkoululaisia. Tutkimuksiin perehtyessäni olen ymmärtänyt, että virheet ovat aarteita, joiden kautta voidaan päästä käsiksi oppilaan ajatteluun. Virheiden avulla nähdään, missä kohdassa oppimisprosessia ollaan menossa. Keino tähän on virheiden pohtiminen yhdessä oppilaiden kanssa. Keskustelu nimittäin edistää virheistä oppimista (Steuer & Dresel, 2015).

Opetussuunnitelma kannustaa arvioimaan, analysoimaan ja perustelemaan vastauksia, toisin sanoen tutkimaan mahdollisia virheitä. Esimerkiksi lukion opetussuunnitelmasta löytyy kohdat:

- ”Matematiikan opiskelu antaa opiskelijalle valmiudet ymmärtää, soveltaa ja tuottaa sekä arvioida matemaattisesti esitettyä tietoa” (LOPS, 2019, s. 221).
 - ”-- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla ja tottuu tekemään otaksomia, tutkimaan niiden oikeellisuutta, laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä” (LOPS 2019, s. 222).
- Virheellisen ratkaisun analysoimista on ollut myös ylioppilaskirjoitustehtävien joukossa.

Virheiden havaitseminen ja korjaaminen on itse asiassa tärkeä osa oppimaan oppimista ja metakognitiivisia taitoja. Näin ollen virheistä oppimista voi pitää itsenäisenä oppimistavoitteena. Virheitä ei tarvitsisi pelätä, vaan hyväksyä ne luonnollisena osana oppimista. Virheet ovat oppimisen ponnahduslautoja, jotka ohjaavat ymmärtämään niin esitietojen puutetta kuin ajatteluprosessia yleensäkin. Opettajalla on erinomainen tilaisuus näyttää esimerkkiä suhtautumalla sekä omiin että oppilaan virheisiin positiivisesti. Mutta miten virheitä voisi hyödyntää jopa tarkoituksella?

Tarkoitukselliset virheet – aina ei tarvitse oppia kantapäähän kautta

Joskus kuulee, että oppilaille ei saa näyttää virheitä esimerkiksi taululla. Pelätään, että ne voivat jäädä mieleen tai että virheet ”sekoittavat” oppilaita. Tarkoitus ei tietenkään olekaan opettamalla opettaa virheellistä tietoa, vaan selvittää ajattelunkulkua, miksi virheeseen on päädytty ja miten mahdollisen virheellisen esitiedon voisi oikaista.

Virheitä voidaan esittää tarkoituksella käyttäen yleisiä virhekäsityksiä. Tarkoituksellinen virhe on matematiikan tehtävän ratkaisuun upotettu tyypillinen virheellinen välivaihe (Palkki, 2022). Voidaan käyttää esimerkkiä, jossa tutkitaan rinnakkain virheellistä ja oikeaa ratkaisutapaa. Oppilaiden tulee selittää auki virhe ja korjata sen aiheuttanut virheellinen periaate oikeaksi. Tarkoituksellisia virheitä tutkimalla voi kehittää matematiikan osaamista kuten esimerkiksi Yhdysvalloissa on selvitetty (Adams ym., 2014).

Virheitä voidaan pohtia ja selittää. Ehkä aina ei tarvitsekaan tehdä kaikkia virheitä itse, vaan riittää tutkia muiden virheitä!

Rinnakkain oikean ratkaisutavan kanssa

Tarkoituksellisia virheitä – kuten muitakaan opetusmenetelmiä – ei luonnollisesti tarvitse käyttää koko ajan ja kaikissa tilanteissa, mutta välillä niistä voi olla hyötyä.

Virheiden hyödyntämisessä on tärkeää huomioida muutamia seikkoja. Oleellisen tärkeää on, että oppilailla on positiivisia uskomuksia virheistä. Tällöin hän todennäköisemmin analysoi ja korjaa virheitään (Tulis, 2013). Tärkeää on siis luoda luokkaan myönteisesti virheisiin suhtautuva ilmapiiri. Kun virhe on tullut tai sitä tutkitaan, on luonnollisesti korjattava virheen taustalla oleva periaate oikeaksi (Alfieri ym., 2013). Kiinnostavimpia ovatkin juuri käsitteelliset virheet, joissa oppilas systemaattisesti ajattelee jonkin asian virheellisesti. On tärkeää varmistaa, että oikea periaate opitaan. Tehokasta on myös esittää virheellinen ratkaisutapa oikean ratkaisutavan rinnalla (Durkin & Rittle-Johnson, 2012). Voidaan käyttää ns. vertailutehtäviä, joita Suomessa on esimerkiksi Joustava yhtälönratkaisu -materiaalissa tai Joustavaan Matematiikkaan -verkkokurssilla.

Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $45y + 90 = 60y$ seuraavilla tavoilla:

| | Kallen ratkaisu | Leenan ratkaisu | |
|--|---------------------------------|----------------------------------|--|
| Aluksi yhdistän vasemman puolen termit keskenään. | $45y + 90 = 60y$ | $45y + 90 = 60y$ | Aluksi vähennän molemmilta puolilta 45y. |
| Tämän jälkeen vähennän molemmilta puolilta 60y. | $135y = 60y$ | $45y - 45y + 90 = 60y - 45y$ | Muokkaan yhtälön molempia puolia suorittamalla yhteenlaskut. |
| Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 75 ja saan vastauksen. | $135y - 60y = 60y - 60y$ | $90 = 15y$ | Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 15. |
| | $75y = 0$ | $\frac{90}{15} = \frac{15y}{15}$ | Suoritan jakolaskut puolittain ja saan yhtälön ratkaisun. |
| | $\frac{75y}{75} = \frac{0}{75}$ | $6 = y$ | |
| | $y = 0$ | | |



a) Kuvaile, mitä eroa Kallen ja Leenan ratkaisuissa on. _____

b) Kumpi on oikeassa? Miksi? Miten tarkistat tämän? _____

c) Mikä virhe on tehty? Kirjoita omin sanoin sääntö, jolla virhe voidaan välttää.

Esimerkki virheen sisältävästä vertailutehtävästä.

Tutkimukseni opettajat suhtautuivat vertailutehtäviin ja tarkoituksellisiin virheisiin pääosin myönteisesti. Oman ja muiden tutkimusten pohjalta näen, että virheistä todellakin voidaan oppia, jopa tarkoituksella. Rohkeasti siis virheitä päin!

Riikka Palkki, Turun yliopisto
FiCMI:n sihteeri (2022-24)

Tarkoituksellisista virheistä lisätietoa/materiaalia:

Joustava yhtälönratkaisu -materiaali, joka sisältää myös tarkoituksellisia virheitä:
<https://aoe.fi/#/materiaali/2392> (suomeksi ja ruotsiksi)

Joustavaan Matematiikkaan -täydennyskoulutus: <https://www.flexibility.fi/>

Lähteet:

- Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S. & Van Velsen, M. (2014). Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. *Computers in Human Behavior*, 36, 401–411. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2014.03.053>
- Alfieri, L., Nokes-Malach, T. J. & Schunn, C. D. (2013). Learning through case comparisons: A meta-analytic review. *Educational Psychologist*, 48(2), 87–113. <https://doi.org/10.1080/00461520.2013.775712>
- Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, 22(3), 206–214. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.11.001>
- LOPS 2019. Opetushallitus: Lukion opetussuunnitelman perusteet. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf
- Palkki, R. (2022). Vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet – erilaisia ratkaisutapoja tarkastelemalla kohti joustavaa matematiikan osaamista. Oulun yliopiston tutkijakoulu. Tampere: Punamusta. Väitöskirja. <http://urn.fi/urn:isbn:97895262333837>
- Steuer, G. & Dresel, M. (2015). A constructive error climate as an element of effective learning environments. *Psychological Test and Assessment Modeling*, 57(2), 262–275.
- Tulis, M. (2013). Error management behavior in classrooms: Teachers' responses to student mistakes. *Teaching and Teacher Education*, 33, 56–68. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.02.003>