DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

lukion syventävä kurssi

Teija Larke

Pro gradu -tutkielma

Toukokuu 2006

UNIVERSITY OF TURKU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FIN-20014 TURKU
FINLAND

Sisältö

1 Johdanto

Halusin tehdä lopputyön, jonka tekeminen olisi minulle mielekästä ja josta olisi minulle hyötyä myös tulevaa opettajanuraani ajatellen. Tämän tutkielman tarkoitus onkin soveltua lukion pitkän matematiikan syventäväksi kurssiksi ja toivon, että saan itse testata sen toimivuutta tulevaisuudessa. Kurssi edellyttää pohjatietona differentiaali- ja integraalilaskennan perustietojen hallintaa, joten olisi toivottavaa, että oppija osallistuisi kurssille vasta lukion viimeisenä vuotena, kun suurin osa matematiikan kursseista on käyty.

Usein mietitään mihin matematiikkaa tarvitaan ja mitä hyötyä koulumatematiikasta ylipäätään on. Monissa käytännön tilanteissa esille tulevia ongelmia voidaan kuvata sellaisen matemaattisen mallin avulla, joka on differentiaaliyhtälö. Differentiaaliyhtälöt ovatkin yksi tärkeimmistä matematiikan sovellusmenetelmistä, sillä niiden sovellusalat vaihtelevat luonnontieteistä tekniikkaan ja kaupallisiin tieteisiin. Jos esimerkiksi biologiassa halutaan tutkia tautien leviämistä, populaatioiden kasvua tai vesistöjen saastumista, törmätään välttämättä differentiaaliyhtälöihin. Lisäksi yksinkertaisten differentiaaliyhtälöiden hallinta auttaa, kun halutaan ratkaista fysiikan liikeyhtälöitä tai tarkastella sähköisiä virtapiirejä sekä aineen radioaktiivista hajoamista. Myös talouselämässä yrityksen kasvua ja tuottoa ennustettaessa tai kemiassa tutkittaessa esimerkiksi liuosten sekoittumista toisiinsa, tarjoavat differentiaaliyhtälöt loistavan työkalun.

Tässä tutkielmassa tarkoitus on ensin tutustuttaa oppilaat differentiaaliyhtälön käsitteeseen, jonka jälkeen kasvatetaan laskurutiinia esimerkkien ja itse tehtävien harjoitustehtävien avulla. Lopuksi vasta tarkastellaan varsinaisia sovellusesimerkkejä, joiden tarkoitus on, että oppijalle muodostuisi mahdollisimman monipuolinen käsitys ongelmatilanteista, joista voidaan muodostaa matemaattisena mallina differentiaaliyhtälö. Sovellusesimerkit on pyritty valitsemaan mahdollisimman laajalti eri aihealueilta, jotta voidaan ottaa huomioon eri oppilaiden erilaiset kiinnostusten kohteet ja jatko-opintotoiveet sekä korostaa differentiaaliyhtälöiden tuomaa laajaa hyötyä arkielämään. Varsinkin psykologiaan liittyvien esimerkkien tarkoitus on toimia motivaatiota kasvattavana tekijänä tuoden esille matematiikan soveltuvuutta mitä yllättävimmissä yhteyksissä.

Voidaan esimerkiksi tarkastella sellaista bakteerikantaa, jonka lisääntymisnopeus hetkellä t on suoraan verrannollinen bakteerimäärään kyseisellä hetkellä. Olkoon $y(t)$ bakteerimäärä hetkellä t. Tässä vaiheessa on syytä palauttaa mieleen, että derivaatta ilmaisee funktion kasvunopeutta tietyssä pisteessä. Tällöin siis bakteerimäärän lisääntymistä kuvaa funktion $y(t)$ derivaatta $y'(t)$. Tiedetään, että bakteerimäärän kasvunopeus on suoraan verrannollinen bakteerimäärän, joten päädytään yhtälöön

$$y'(t) = ky(t), \text{ jossa } k > 0 \text{ on verrannollisuusvakio.}$$

Tämän yhtälön ratkaisuna saataisiin bakteerimäärä $y(t)$, josta voitaisiin laskea bakteerien määrä millä tahansa hetkellä t. Tässä oli vain yksi esimerkki mallista, joka on differentiaaliyhtälö. Tällä kurssilla opitaan menettely miten muun muassa yllä olevaa muotoa olevat yhtälöt saadaan ratkaistua hyvin yksinkertaisella menetelmällä, mutta tästä enemmän tuonnempana.

Tärkeimpinä lähdemateriaalina ovat olleet lukion pitkän matematiikan oppikirjat [3] ja [2], jotka ovat olleet suuntaa antavana esimerkkinä siitä miten laajasti ja mistä lähtökohdista käsin differentiaaliyhtälöitä on lukiossa aikaisemmin käsitelty. Lisäksi lähteet [1] ja [6] ovat tarjonneet ideoita hyviin sovellusesimerkkeihin hieman muokattuna tai sellaisenaan. Tässä tutkielmassa oleviin harjoitustehtäviin olen vinkkiä katsonut edellämainituista lähteistä, mutta olen pyrkinyt muokkaamaan niitä, jotta gradu olisi mahdollisimman pitkälle oma tuotokseni. Osan tehtävistä olen keksinyt itse.

Seuraavaksi tarkastellaan vielä lähemmin kunkin kappaleen sisältöä. Johdannon jälkeisessä, tutkielman toisessa luvussa, tutustutaan differentiaaliyhtälöön liittyviin keskeisiin käsitteisiin, harjoitellaan yksinkertaisia laskutehtäviä ja hahmotellaan ratkaisukäyrien piirtämistä käsin. Kolmannessa luvussa tarkastelu keskittyy ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin. Ensin tutustutaan separoituvan differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen sekä muunnoksiin, joilla saadaan differentiaaliyhtälö muunnettua separoituvaksi. Edelleen edetään ensimmäisen kertaluvun lineaariseen differentiaaliyhtälöön ja tarkastellaan erikseen homogeenista ja epähomogeenista tapausta. Lopuksi, kolmannen luvun lopulla, käsitellään ensimmäiseen kertalukuun liittyviä sovellusesimerkkejä. Neljännessä luvussa käsitellään toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisua ja luvun lopulla tarkastellaan joitakin usein esille tulevia sovelluksia. Viidennessä luvussa tutustutaan differentiaaliyhtälöiden numeerisiin ratkaisuihin *Eulerin menetelmällä* ja *Eulerin keskipistemenetelmällä*. Tutkielman viimeisessä luvussa otetaan pikainen katsaus differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen *Maxima*-tietokoneohjelman avulla, jonka tarkoitus on kannustaa oppilaita käyttämään tietokonetta matematiikan opiskelun tukena.

Lopuksi haluan vielä toivottaa tuleville oppilailleni ja tietysti kaikille, jotka graduani lukevat, oikein nautinnollisia luku-ja opiskeluhetkiä tutkielmani parissa. Opiskelu, kuten elämä ylipäätään, ei aina ole helppoa, eikä pidäkään olla. Varsinkin nuorten opiskelijoiden on syytä muistaa, että elämänsä eteen on tehtävä töitä. On mietittävä omia tavoitteitaan ja sitä miten ne haluaa saavuttaa. Joinakin hetkinä on hyvä mennä sieltä missä aita on matalin, mutta ei aina. Kun oikein tavoittelee jotakin ja sen saa, tyydyttää lopputulos enemmän, kun tietää tehneensä töitä sen eteen. Lisäksi haluan painottaa, ettei tarvitse olla niin sanottu ällän ylioppilas pärjätäkseen tässä elämässä. Kaikki lähtee itsestä ja omasta motivaatiosta. Kaikkea ei tarvitse tietää, tärkeää on, että haluaa ottaa selvää. Parasta opiskelussa on se, kun saa opiskella sitä mistä todella pitää. Toivon, että löydätte sen saman opiskeluun liittyvän hyvän olon tunteen, jonka minä olen löytänyt matematiikan opintojeni sekä tämän kirjallisen tutkielmani aikana. Ajatellessani ketä kiittäisin tämän gradun valmistumisesta, mietin aluksi kenen ansiota on, että kirjoitan graduani nimenomaan matematiikasta. Näin ollen haluankin kiittää koko matematiikan laitosta kuluneista vuosista, sillä olen näiden opiskeluvuosien aikana vasta tajunnut, kuinka mielenkiintoista ja haasteellista matematiikka oikein on. Lisäksi haluan kiittää ohjaajaani Matti Vuorista nopeasta graduni tarkastamisesta. Lämmin kiitos tietysti myös kaikille niille, enemmän ja vähemmän rakkaille läheisille, jotka ovat jollain tavalla olleet mukana graduni etenemisessä, jos ei muuten niin sivustaseuraajana ja kuuntelijana.

Ajankäyttö

Tällä sivulla on ajankäyttöehdotelma siitä kuinka paljon opettaja voisi käyttää aikaa kunkin asian käsittelemiseen. Syytä on muistaa, että tämä ehdotelma on ainoastaan suuntaa antava ja opettaja voi itse oppilaiden mielenkiinnon ja osaamistason mukaan edetä haluamaansa tahtia. Lisäksi huomautan, että tätä kirjoittaessani minulla ei ole tietoa kuinka haastava kurssin asia on lukion oppilaille ja koska differentiaaliyhtälöt ovat poikkeuksetta yksi tärkeimmistä matematiikan sovellusmenetelmistä, on tärkeää että asiat käsitellään hitaasti ja perusteellisesti, jottei turhautumista tapahtuisi. Toisaalta, koska differentiaaliyhtälöitä painotetaan vähän tai ei lainkaan lukion opetussuunnitelmassa, antaa se opettajalle vapauden painottaa asioita haluamallaan tavalla.

Johdanto	1h
Peruskäsitteet	
Differentiaaliyhtälö	2h
Ratkaisuparvi	2h
Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt	
Separoituvat differentiaaliyhtälöt	4h
Separoituviksi palautuvat differentiaaliyhtälöt	3h
Lineaarinen differentiaaliyhtälö	4h
Sovelluksia	6h
Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt	
Lineaarinen, vakiokertoiminen ja homogeeninen diff.yht.	4h
Lineaarinen, vakiokertoiminen ja epähomogeeninen diff.yht	2h
Sovelluksia	2h
Differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaisu	
Eulerin menetelmä	2h
Eulerin keskipistemenetelmä	2h
Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen tietokoneella	2h

2 Peruskäsitteet

Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko ja Δ reaaliakselin väli ($\Delta \subseteq \mathbb{R}$). Usein merkitään $\Delta = [a, b]$ (suljettu väli), $\Delta = (a, b)$ (avoin väli) ja $\Delta = [a, b)$ tai $\Delta = (a, b]$ (puoliavoin väli). Jos ei erikseen ole mainittu, voidaan olettaa että $\Delta = R$.

Merkintä $f : \Delta \to \mathbb{R}$ tarkoittaa, että funktion f määrittelyjoukko on Δ ja arvojoukko on $\mathbb{R}$. Toisin sanoen jos $f(x_0) = y_0$, niin x_0 kuuluu joukkoon Δ (merkitään $x_0 \in \Delta$) ja y_0 on reaaliluku (merkitään $y_0 \in \mathbb{R}$).

Tällä kurssilla tarkasteltavat funktiot ovat määrittelyvälillään jatkuvia ja niillä on derivaatat olemassa kertalukuun k saakka, missä $k = 2$ tai $k = 3$.

2.1 Differentiaaliyhtälö

Differentiaaliyhtälö on yhtälö, jossa esiintyy muuttujan x lisäksi funktio $f(x)$ ja sen derivaattoja $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$... Differentiaaliyhtälön *kertaluku* on k jos siinä esiintyvän korkeimman derivaatan kertaluku on k. Esimerkiksi differentiaaliyhtälön $f'(x) = xf''(x) + 7$ kertaluku on kaksi, koska yhtälössä funktion $f(x)$ korkeimman derivaatan $f''(x)$ kertaluku on kaksi.

Differentiaaliyhtälöissä usein merkitään $y = f(x)$, jolloin ensimmäinen derivaatta muuttujan x suhteen on $y' = f'(x)$, toinen derivaatta on $y'' = f''(x)$ ja niin edelleen. Tällöin edellisessä kappaleessa esiintynyt differentiaaliyhtälö $f'(x) = xf''(x) + 7$ voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin muodossa $y' = xy'' + 7$.

Differentiaaliyhtälön *ratkaisulla* tarkoitetaan sellaista funktiota $y : \Delta \to \mathbb{R}$, joka tarkasteluvälillä yhtälöön sijoitettuna toteuttaa yhtälön.

Esimerkki 2.1 Osoita, että funktio $y = e^{x/2} - x - 2$ on differentiaaliyhtälön $2y' - y = x$ ratkaisu.

Derivoidaan funktio y, jolloin saadaan $y' = \frac{1}{2}e^{x/2} - 1$. Sijoitetaan y ja y' yhtälöön $2y' - y = x$ ja huomataan, että ne toteuttavat sen: $2 \cdot (\frac{1}{2}e^{x/2} - 1) - (e^{x/2} - x - 2) = x$. Funktio y on siis yhtälön ratkaisu.

Differentiaaliyhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan kaikkien sellaisten funktioiden $y : \Delta \to \mathbb{R}$ määrittämistä, jotka toteuttavat kyseisen yhtälön. Tälläisiä yhtälön toteuttamia ratkaisuja on yleensä ääretön määrä. Mikä tahansa ratkaisu, joka toteuttaa differentiaaliyhtälön, on yhtälön *yksittäisratkaisu*. Differentiaaliyhtälön *yleinen ratkaisu* sisältää yhden tai useamman mielivaltaisen vakion ja eri vakion (vakioiden) arvolla saadaan eri ratkaisu. Joissakin tapauksissa etsitään ratkaisua, joka toteuttaa *alkuehdon* tai *-ehdot*. Alkuehdot ovat muotoa $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y_1$ jne. (eli $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ jne.), jossa $x_0 \in \Delta$ ja y_0, y_1,$\ldots \in \mathbb{R}$. Alkuehtojen avulla voidaan yleensä määrätä vakioille yksikäsitteiset arvot, jolloin ne rajaavat differentiaaliyhtälön ratkaisujen määrän yhteen.

Usein annetulle muuttujalle x voidaan laskea halutulla tarkkuudella ratkaisun arvo $y(x)$, vaikka ratkaisun y lauseketta ei tunnettaisi. Tätä tarkastellaan lähemmin tutkielman lopulla luvussa "Differentiaaliyhtälön numeeriset ratkaisut".

Esimerkki 2.2 a) Etsi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön $y' = \sin x$ kaikki ratkaisut.

Ratkaistaan integroimalla $y = \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$, jossa C on integroimisvakio. Yhtälön *yleinen ratkaisu* on näin ollen muotoa

$$y = -\cos x + C,$$

jossa C on mielivaltainen vakio.
b) Määritä se a-kohdan ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $f(\pi) = 2$.

Alkuehdon $f(\pi) = 2$ toteuttama ratkaisu saadaan, kun sijoitetaan a-kohdan ratkaisuun $x = \pi$, $y = 2$ ja ratkaistaan vakio C:

$$\begin{aligned} f(\pi) = -\cos\pi + C &= -(-1) + C \overset{\text{oltava}}{=} 2 \\ C &= 1. \end{aligned}$$

Kysytty *yksittäisratkaisu* on

$$y = -\cos x + 1.$$

Esimerkki 2.3 a) Mikä on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön $y'' = 3$ yleinen ratkaisu?

Ratkaistaan integroimalla $y' = \int 3 \, \mathrm{d}x = 3x + C_1$ ja tästä edelleen $y = \int (3x + C_1) \, \mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2$. Yleinen ratkaisu on siis muotoa

$$y = \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2,$$

jossa C_1 ja C_2 ovat integroimisvakioita.

b) Määritä se yksittäisratkaisu, jolle on voimassa alkuehdot $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 3$.

Sijoitetaan alkuehdot a-kohdassa ratkaistuihin yhtälöihin y ja y':

$$\begin{cases} y'(0) & = 3 \cdot 0 + C_1 \overset{\text{oltava}}{=} 3 \\ y(0) & = \frac{3}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 \overset{\text{oltava}}{=} 0. \end{cases}$$

Tästä saadaan vakioille C_1 ja C_2 arvot

$$\begin{cases} C_1 & = 3 \\ C_2 & = 0. \end{cases}$$

Sijoitetaan vakiot a-kohdan yleiseen ratkaisuun ja kysytty alkuehdot toteuttava yksittäisratkaisu on

$$y = \frac{3}{2}x^2 + 3x.$$

Harjoitustehtäviä

2.1 Osoita, että funktio $y = x^2 + C$ on differentiaaliyhtälön $y'' = 2$ ratkaisu.

2.2 Osoita, että funktio $f(x) = e^{-2x}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$.

2.3 Määritä differentiaaliyhtälön $y'' = e^{-x} + 1$ yleinen ratkaisu.

2.4 Määritä differentiaaliyhtälön $y' = -x$ se yksittäisratkaisu, joka kulkee pisteen (2,1) kautta.

2.5 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''(x) - \sin x = 2$ alkuehdolla $y(0) = 1$ ja $y'(0) = -1$.

2.6 Osoita, että kaikki muotoa $f(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x}$ olevat funktiot, missä C_1 ja C_2 ovat vakioita ja $x \neq 0$, toteuttavat differentiaaliyhtälön

$x^2y'' + xy' - y = 0$. Määritä edelleen funktio $f(x)$, jonka nollakohta on 1 ja jonka kuvaaja kulkee pisteen (3,8) kautta.

2.7 Muodosta ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuja ovat kaikki funktiot

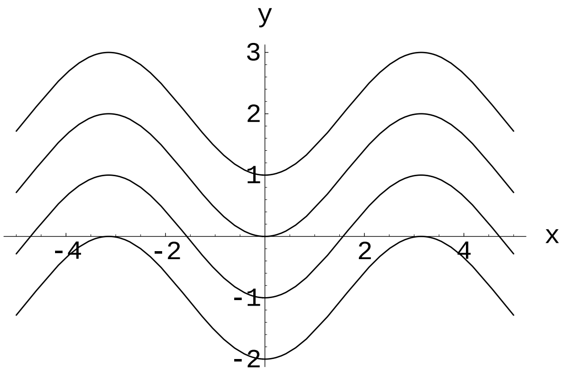
a) $f(x) = ax$, a vakio

b) $f(x) = ax + 1$, a vakio

c) $f(x) = x + a$, a vakio.

2.2 Ratkaisuparvi

Differentiaaliyhtälön ratkaisut muodostavat yhdessä *ratkaisuparven* ja edelleen kuvaajaan piirretyt käyrät muodostavat *käyräparven*. Annetun differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu voidaan määrittää ja eri vakion arvolla saadut ratkaisut voidaan piirtää kuvaan. Kuvassa 1 on esitetty esimerkin 2.2 yleisen ratkaisun $y = -\cos x + C$ kuvaajat vakion C arvoilla -1, 0, 1 ja 2.

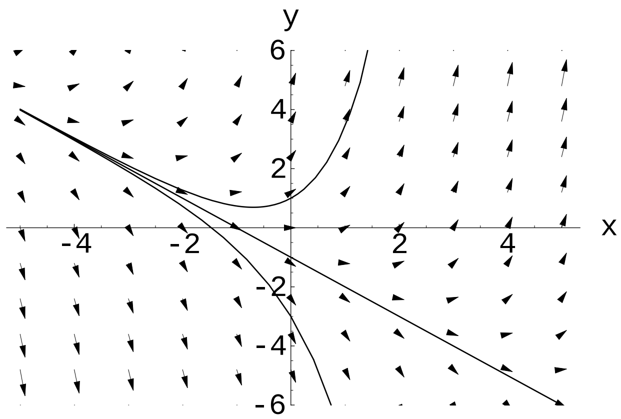


Kuva 1: Yhtälön $y = -\cos x + C$ kuvaajat vakion C arvoilla -1, 0, 1 ja 2.

Joillakin tietokoneohjelmilla, kuten *Mathematica*, *Matlab*, *Maple* jne., voidaan piirtää tiettyjen differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja, ilman että käyttäjän itse tarvitsee yhtälöä edes ratkaista. Toisaalta yksinkertaisten, ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden, ratkaisuparven kuvaajat voidaan hahmotella myös käsin vaikkei ratkaisun lauseketta tiedetä. Menetelmää kutsutaan *isokliinimenetelmäksi* ja sitä tarkastellaan lähemmin seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.4 Hahmottele graafisesti differentiaaliyhtälön $y' = x + y$ ratkaisuparven kuvaajat.

Koordinaatistoon piirretään lyhyitä pätkiä ratkaisukäyrien tangenteista eli niin sanottuja *suunta-alkioita*. Kussakin pisteessä ratkaisukäyrä kulkee tangenttinsa suuntaisesti, joten näiden tangenttien avulla voidaan hahmotella ratkaisuparven kuvaajia, sillä y' määrää pisteeseen (x, y) piirretyn käyrän tangentin kulmakertoimen. Tällöin piirretään kuhunkin pisteeseen (x, y) suunta-alkio, jonka kulmakerroin on $y' = x + y$. Esimerkiksi pisteeseen $(1, 0)$ piirretyn suunta-alkion kulmakerroin on 1+0=1 ja pisteeseen $(2, 1)$ piirretyn suunta-alkion kulmakerroin on 2+1=3 jne. Kuvaan 2 on piirretty käyrien suunta-alkiot ja ratkaisuparven kuvaaja kolmella vakion arvolla.



Kuva 2: Differentiaaliyhtälön $y' = y + x$ ratkaisukäyrien suunta-alkiot.

Harjoitustehtäviä

2.8 Hahmottele isokliinimenetelmällä differentiaaliyhtälön $y' = x - y$ ratkaisuparven kuvaajat.
2.9 Hahmottele isokliinimenetelmällä differentiaaliyhtälön $y' = y$ ratkaisuparven kuvaajat.
2.10 a) Hahmottele isokliinimenetelmällä differentiaaliyhtälön $y' = 2$ ratkaisuparven kuvaajat.
b) Ratkaise differentiaaliyhtälö ja piirrä ratkaisuista kuva kolmella eri vakion

C arvolla.

c) Vertaa a-ja b-kohdan tuloksia keskenään.

2.11 a)Kirjoita differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisukäyrillä kulmakerroin on $4x + 1$.

b) Ratkaise yhtälö ja piirrä ratkaisujen kuvaajat kolmella eri vakion C arvolla.

c) Ratkaise differentiaaliyhtälö, kun alkuehto on $y(1) = 4$. Piirrä kuva.

3 Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö sisältää muuttujan x lisäksi funktion y ja sen ensimmäisen derivaatan y'. Yhtälön *normaalimuoto* on

$$y' = f(x,y),$$

jossa $f : \Delta_1 \times \Delta_2 \to \mathbb{R}$. Funktio y' riippuu siis muuttujasta x ja tuntemattomasta funktiosta y. Normaalimuodossa on oleellista, että korkeimman derivaatan y' kerroin on yksi. Sillä millä puolella yhtäläisyysmerkkiä termit sijaitsevat ei ole väliä, joten muotoa $y' - f(x,y) = 0$ voidaan myös kutsua normaalimuodoksi. Esimerkiksi yhtälöt $y' = x + y$ ja $y' = xy + 7$ ovat normaalimuodossa, mutta ne voidaan kirjoittaa myös muotoon $y' - y - x = 0$ ja $y' - xy - 7 = 0$, jolloin ne ovat edelleen normaalimuodossa. Sen sijaan yhtälö $xy' = 3y$ ei ole normaalimuodossa, koska derivaatan y' kerroin ei ole yksi.

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleisessä ratkaisussa on yksi mielivaltainen vakio. Vakion ratkaisemiseksi tarvitaan alkuehto $y(x_0) = y_0$.

3.1 Separoituvat differentiaaliyhtälöt

Määritelmä 1. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on *separoituva* jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y' = h(x)g(y), \tag{1}$$

jossa $h : \Delta_1 \to \mathbb{R}$ ja $g : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia funktioita tarkasteluväleillään Δ_1 ja $\Delta_2 \subseteq \mathbb{R}$ ja lisäksi funktiolla g on korkeintaan äärellinen määrä nollakohtia. Separoituvuus tarkoittaa, että yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa, jossa yhtäsuuruusmerkin toisella puolella on ainoastaan tuntemattomaan funktioon y liittyviä termejä ja toisella puolella ainoastaan muuttujaan x liittyviä termejä.

Separoituvan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen. Kirjoitetaan yhtälössä (1) ensin y' muodossa $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, jonka jälkeen kerrotaan ja jaetaan yhtälön molemmat puolet sopivasti niin, että y esiintyy vain yhtälön vasemmalla ja x vain yhtälön oikealla puolella:

$$\begin{aligned}
y' &= h(x)g(y) && \text{merkitään } y' = \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= h(x)g(y) && \mid \cdot\, \mathrm{d}x \\
\mathrm{d}y &= h(x)g(y)\mathrm{d}x && \mid : g(y) \Rightarrow \text{lisäoletus } g(y) \neq 0 \\
\tfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= h(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Yhtälön vasenta puolta voidaan käsitellä kuin se olisi muuttujan y funktio ja oikeata puolta kuin se olisi muuttujan x funktio. Integroidaan molemmat puolet:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= \int h(x)\mathrm{d}x \\
\int \tfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= H(x) + C.
\end{aligned}$$

Mikäli funktiot $h(x)$ ja $\frac{1}{g(y)}$ ovat tarpeeksi yksinkertaisia funktioita ja ne pystytään integroimaan, löydetään yhtälön yleinen ratkaisu. Tapaukset, jolloin $g(y) = 0$, on tarkasteltava erikseen.

Tarkastellaan tilannetta, jossa jollekin $C \in \Delta_2$ siten että $y = C$ ja $g(C) = 0$. Tällöin yhtälö (1) tulee muotoon $y' = h(x)g(C) = h(x) \cdot 0 = 0$ ja sen on oltava yksi differentiaaliyhtälön ratkaisu, sillä jos $y = C$, niin sillekin $y' = 0$. Tämä ei kuitenkaan sisälly yllä kuvatulla menetelmällä saatuun ratkaisuparveen, sillä jaettaessa lausekkeella $g(y)$ menetettiin tapaukseen $g(y) = 0$ mahdollisesti liittyvä ratkaisu. Tälläiset ratkaisut ovat *erikoisratkaisuja* ja ne pitää aina tarkastella erikseen yhtälön täydellisen ratkaisun löytämiseksi.

Kussakin tehtävässä, jossa alkuyhtälö on separoituva, voidaan edetä kuten yllä. Joskus sopiva muunnos saattaa muuttaa tarkasteltavan yhtälön helpommin käsiteltävään muotoon. Tilanteissa, joissa joudutaan jakamaan jollakin lausekkeella, on mahdolliset erikoisratkaisut tarkasteltava erikseen, sillä ne eivät sisälly ratkaisuparveen. Menetelmää selvennetään muutamalla esimerkillä.

Esimerkki 3.1 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \frac{x}{y}$.

Kirjoitetaan ensin $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ja erotetaan muuttujat, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \tfrac{x}{y} && |\cdot\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y &= \tfrac{x}{y}\ \mathrm{d}x && |\cdot y \\ y\ \mathrm{d}y &= x\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Integroidaan yhtälön molemmat puolet:

$$\int y\ \mathrm{d}y = \int x\ \mathrm{d}x,$$

ja saadaan

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Tästä voidaan ratkaista y, kun kerrotaan yhtälön molemmat puolet kahdella ja otetaan puolittain neliöjuuri:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y^2 &= \tfrac{1}{2}x^2 + C && |\cdot 2 \\ y^2 &= x^2 + 2C && |\sqrt{} \end{aligned}$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2C}.$$

Koska $2C$ on mielivaltainen vakio, voidaan merkitä $2C = D$, jolloin lopullinen ratkaisu on

$$y = \pm\sqrt{x^2 + D}, \qquad \text{jossa } D \text{ on reaaliluku.}$$

Esimerkki 3.2 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = xy + 4x$.

Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $y' = x(y+4)$, joten se on separoituva. Kirjoitetaan $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ja erotetaan muuttujat, jolloin saadaan

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x(y+4) && \mid \cdot\ \mathrm{d}x \\
\mathrm{d}y &= x(y+4)\ \mathrm{d}x. && \mid : (y+4) \Rightarrow (y+4) \neq 0 \\
\tfrac{\mathrm{d}y}{y+4} &= x\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Integroidaan yhtälön molemmat puolet:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y+4} = \int x\ \mathrm{d}x,$$

ja saadaan

$$\ln|y+4| = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Tästä ratkaistaan y käyttämällä hyväksi tietoa $e^{\ln x} = x$ ja poistamalla itseisarvomerkit:

$$
\begin{aligned}
\ln|y+4| &= \tfrac{1}{2}x^2 + C && |e \\
|y+4| &= e^{\frac{1}{2}x^2+C} = e^{\frac{1}{2}x^2}e^C && \text{poistetaan itseisarvomerkit} \\
y+4 &= \pm e^{\frac{1}{2}x^2}e^C && |-4 \\
y &= \pm e^{\frac{1}{2}x^2}e^C - 4.
\end{aligned}
$$

Korvataan vakio $\pm e^C \neq 0$ kirjaimella $D \neq 0$:

$$y = De^{\frac{1}{2}x^2} - 4, \qquad \text{jossa } D \neq 0.$$

Ratkaisun alkuvaiheessa jaettiin lausekkeella $y+4$, joten tällöin oli tehtävä lisäoletus $y+4 \neq 0$ ja siksi ratkaisuparvi ei sisällä mahdollista ratkaisua $y = -4$. Yhtälön alkuperäisestä muodosta $y' = x(y+4)$ huomataan sijoittamalla, että vakiofunktio $y = -4$ toteuttaa yhtälön. Tämä vakiofunktio sisältyy ratkaisuparveen $y = De^{\frac{1}{2}x^2} - 4$ vakion D arvolla 0. Alkuperäisen yhtälön täydellinen ratkaisu siis on

$$y = De^{\frac{1}{2}x^2} - 4, \qquad \text{jossa } D \text{ on reaaliluku.}$$

Harjoitustehtäviä

3.1 Mitkä seuraavista differentiaaliyhtälöistä ovat separoituvia?

a) $f'(x) + x^3 f(x) = 0$

b) $y' = x - 2y'y$

c) $f'(x) = x$

d) $y' = xy + x^2$

e) $xy^3 + (y^2+1)e^{-x}y' = 0$

3.2 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2y$ ja määritä se yksittäisratkaisu, joka kulkee pisteen (1,2) kautta.

3.3 Johda differentiaaliyhtälön $y' = ay$ ($a \neq 0$ vakio) yleinen ratkaisu. Entä tapaus $a = 0$?

3.4 a) Määritä differentiaaliyhtälön $y' = \sqrt{y}$ yleinen ratkaisu ja piirrä kuva ratkaisuparvesta.

b) Onko tällä differentiaaliyhtälöllä erikoisratkaisu, joka ei sisälly yleiseen ratkaisuun? Perustele vastauksesi.

3.5 Määritä funktio, joka toteuttaa differentiaaliyhtälön $xy' = y - 1$ ja joka kulkee pisteen (4,3) kautta.

3.6 a) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = xe^{x-y}$. Onko tällä differentiaaliyhtälöllä erikoisratkaisu, joka ei sisälly yleiseen ratkaisuun?

b) Määritä lisäksi se yksittäisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(2) = 2$.

3.7 Määritä differentiaaliyhtälön $f'(x) = 4xf(x)^2$ täydellinen ratkaisu.

3.8 Ratkaise tehtävän (3.1) separoituvat differentiaaliyhtälöt, kun $y(0) = 1$.

3.2 Separoituviksi palautuvat differentiaaliyhtälöt

3.2.1 Muotoa $y' = F(\frac{y}{x})$ olevat differentiaaliyhtälöt

Esimerkki 3.3 Differentiaaliyhtälö $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ on muotoa $y' = F(\frac{y}{x})$. Samoin yhtälö $(2x+y)-xy' = 0$ on kyseistä muotoa, sillä se voidaan kirjoittaa muodossa $y' = \frac{2x+y}{x} = 2 + \frac{y}{x}$. Sen sijaan yhtälö $y' = 1 + x + \frac{y}{x}$ ei ole muotoa $y' = F(\frac{y}{x})$, sillä se ei ole osamäärän $\frac{y}{x}$ funktio.

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y' = f(x, y)$ on muotoa $y' = F(\frac{y}{x})$ silloin, kun yhtälö ei muutu, vaikka x korvataan termillä tx ja y

termillä ty. Toisin sanoen kaikilla $t \neq 0$ on oltava $y' = f(x,y) = f(tx,ty)$, sillä t voidaan supistaa pois muotoa $y' = F(\frac{y}{x})$ olevasta yhtälöstä.

Esimerkki 3.4 Tarkastellaan uudelleen esimerkin (3.1) differentiaaliyhtälöitä. Yhtälö $y' = f(x,y) = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} = \frac{ty}{tx} + \sin\frac{ty}{tx} = f(tx,ty)$, sillä t voidaan supistaa pois viimeisestä muodosta ja päästään takaisin alkuperäiseen muotoon. Vastaavasti $y' = f(x,y) = 2 + \frac{y}{x} = 2 + \frac{ty}{tx} = f(tx,ty)$. Sen sijaan viimeisessä yhtälössä muoto $f(tx,ty) = 1 + tx + \frac{ty}{tx} = 1 + tx + \frac{y}{x} \neq 1 + x + \frac{y}{x} = f(x,y)$ ja se ei siis ole vaadittavaa muotoa.

Jos differentiaaliyhtälö on muotoa $y' = F(\frac{y}{x})$, niin sijoituksella $v = \frac{y}{x}$ yhtälö muuttuu separoituvaksi.

Perustelu Yhtälön ratkaisemiseksi tehdään sijoitus $v = \frac{y}{x}$, jolloin $y = xv$. Kertolaskun derivointisäännön ($\mathrm{D}fg{=}g\mathrm{D}f{+}f\mathrm{D}g$) mukaan $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Sijoitetaan v ja y' yhtälöön $y' = F(\frac{y}{x})$ ja osoitetaan, että muuttujat voidaan erottaa eri puolille:

$$
\begin{aligned}
y' &= F(\tfrac{y}{x}) && \text{sijoitetaan } v = \tfrac{y}{x} \text{ ja } y' = F(\tfrac{y}{x}) \\
v + x\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= F(v) && |-v \\
x\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= F(v) - v && |\cdot \tfrac{\mathrm{d}x}{x} \\
\mathrm{d}v &= (F(v) - v)\cdot\tfrac{\mathrm{d}x}{x} && |: f(v) - v \Rightarrow F(v) - v \neq 0 \\
\tfrac{\mathrm{d}v}{F(v)-v} &= \tfrac{\mathrm{d}x}{x} && \text{integroidaan puolittain} \\
\int \tfrac{\mathrm{d}v}{F(v)-v} &= \int \tfrac{\mathrm{d}x}{x}.
\end{aligned}
$$

Yhtälön vasen puoli on siis pelkästään muuttujan v ja yhtälön oikea puoli pelkästään muuttujan x funktio. Integroinnin jälkeen yleinen ratkaisu saadaan lausuttua y lausekkeena, kun ensin sijoitetaan $v = \frac{y}{x}$ ja ratkaistaan sitten y. Jaettaessa lausekkeella $F(v) - v$, suljetaan pois ne mahdolliset ratkaisut, joille $F(v) - v = 0$ ja siksi on tutkittava erikseen sen tuomat mahdolliset erikoisratkaisut.

Esimerkki 3.5 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \frac{xy+y^2}{x^2}$, $x \neq 0$.

Kirjoitetaan yhtälö muotoon $y' = \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$, jolloin se on selvästi muotoa $y' = F(\frac{y}{x})$. Tehdään sijoitus $v = \frac{y}{x}$, josta saadaan $y = xv$ ja $y' = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Sijoitetaan nämä ratkaistavaan yhtälöön ja separoidaan muuttujat:

$$
\begin{aligned}
y' &= \tfrac{y}{x} + (\tfrac{y}{x})^2 && \text{sijoitetaan } v = \tfrac{y}{x} \text{ ja } y' = v + x\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\
v + x\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= v + v^2 && \mid -v \\
x\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= v^2 && \mid \cdot \tfrac{\mathrm{d}x}{x} \\
\mathrm{d}v &= v^2 \cdot \tfrac{\mathrm{d}x}{x} && \mid : v^2 \Rightarrow v \neq 0 \\
\tfrac{\mathrm{d}v}{v^2} &= \tfrac{\mathrm{d}x}{x} && \text{integroidaan puolittain} \\
\int \tfrac{\mathrm{d}v}{v^2} &= \int \tfrac{\mathrm{d}x}{x} \\
-\tfrac{1}{v} &= \ln|x| + C \\
v &= -\tfrac{1}{\ln|x|+C}.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $v = \frac{y}{x}$ ja ratkaistaan y, niin saadaan yhtälön ratkaisuksi

$$y = -\frac{x}{\ln|x| + C}, \text{ jossa } x \neq 0 \text{ ja } C \text{ vakio.}$$

Ratkaisun alkuvaiheessa jaettiin lausekkeella v^2, jolloin oli tehtävä lisäoletus, että $v \neq 0$ ja siis $y \neq 0$. Tällöin menetettiin ratkaisuparvesta ratkaisu $y = 0$, vaikka alkuperäisestä yhtälöstä huomataan, että se on yksi ratkaisu, sillä tällöin $y' = 0$. Yllä saatu yleinen ratkaisu ei sisällä tätä ratkaisua, joten todettakoon, että yhtälöllä on sen lisäksi erikoisratkaisu $y = 0$.

Harjoitustehtäviä

3.9 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \frac{y}{x} - \tan\frac{y}{x}$.
3.10 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2 + \frac{y}{x}$, kun $x > 0$.
3.11 Ratkaise differentiaaliyhtälö $(x^3 + y^3)\mathrm{d}x - xy^2\mathrm{d}y = 0$.

3.2.2 Muotoa $y' = F(ax + by)$ olevat differentiaaliyhtälöt

Esimerkki 3.6 Yhtälö $y' = \ln(4x - y + 3) + (4x - y + 2)$ on kyseistä muotoa $y' = F(ax + by)$, jossa muuttujan x kerroin on 4 ja y kerroin on -1, siis $a = 4$ ja $b = -1$. Sen sijaan yhtälö $y' = \ln(x - y + 3) + (4x - y + 2)$ ei ole muotoa $y' = F(ax + by)$, sillä muuttujan x kertoimet ovat eri suuret.

Jos differentiaaliyhtälö on muotoa $y' = F(ax + by)$, jossa a ja b ovat vakioita, muuttuu yhtälö separoituvaksi muunnoksella $v = ax + by$.

Perustelu Sijoituksesta $v = ax + by$ ratkaistaan $y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{b}x$. Tästä edelleen derivoimalla saadaan $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b}$. Sijoitetaan v ja y' ratkaistavaan yhtälöön $y' = F(ax + by)$ ja osoitetaan, että muuttujat voidaan erottaa:

$$
\begin{aligned}
y' &= F(ax + by) && \text{sij. } v = ax + by \text{ ja } y' = \tfrac{1}{b}\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \tfrac{a}{b} \\
\tfrac{1}{b}\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \tfrac{a}{b} &= F(v) && | \cdot b \\
\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - a &= bF(v) && | + a \\
\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= bF(v) + a && | \cdot \mathrm{d}x \\
\mathrm{d}v &= (bF(v) + a) \cdot \mathrm{d}x && | : bF(v) + a \Rightarrow bF(v) + a \neq 0 \\
\tfrac{\mathrm{d}v}{bF(v)+a} &= \mathrm{d}x && \text{integroidaan puolittain} \\
\int \tfrac{\mathrm{d}v}{bF(v)+a} &= \int \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Yhtälö on siis separoituva ja y saadaan ratkaistua, kun integroinnin jälkeen sijoitetaan $v = ax + by$. Mahdolliset erikoisratkaisut on tarkasteltava jälleen erikseen.

Esimerkki 3.7 Määritä differentiaaliyhtälön $y' = \frac{1}{x-y} + 1$ se yksittäisratkaisu, joka kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta.

Differentiaaliyhtälö on muotoa $y' = F(ax + by)$, jossa $a = 1$ ja $b = -1$. Sijoitetaan $v = x - y$, jolloin $y = x - v$ ja $y' = 1 - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, ja saadaan ratkaistava yhtälö muotoon

$$1 - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v} + 1.$$

Tästä edelleen, kun erotellaan muuttujat ja integroidaan päästään tulokseen:

$$\begin{aligned}
1 - \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \tfrac{1}{v} + 1 && | - 1 \\
-\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \tfrac{1}{v} && | \cdot \mathrm{d}x \\
-\mathrm{d}v &= \tfrac{1}{v} \cdot \mathrm{d}x && | \cdot v \\
-v \ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x && \text{integroidaan puolittain} \\
\textstyle\int -v \ \mathrm{d}v &= \textstyle\int \mathrm{d}x \\
-\tfrac{1}{2}v^2 &= x + C.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan tähän $v = x - y$, jolloin yleiseksi ratkaisuksi saadaan:

$$-\frac{1}{2}(x-y)^2 = x + C.$$

Yksittäisratkaisu, joka kulkee pisteen (1,1) kautta saadaan, kun sijoitetaan yleiseen ratkaisuun $x = 1$ ja $y = 1$:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(1-1)^2 &= 1 - C \\
C &= 1.
\end{aligned}$$

Vakion C arvoksi saatiin 1 ja kysytty yksittäisratkaisu on

$$-\frac{1}{2}(x-y)^2 = x + 1.$$

Huomaa, että tästä voisi ratkaista lausekkeen y muuttujan x funktiona, mutta ratkaisu voidaan antaa myös tässä muodossa. Tällaista ratkaisumuotoa, jossa lauseketta y ei ole ratkaistu muuttujan x funktiona, kutsutaan *implisiittiseksi* ratkaisuksi.

Harjoitustehtäviä

3.12 Mitkä seuraavista yhtälöistä voidaan muuttaa separoituvaksi? Millä muunnoksella?

a) $(3x+y)+(3x-y)y'=0$

b) $(x^2+y)+2xy'=0$

c) $xy'=\frac{x^2}{y}+x\tan\frac{y}{x}$

d) $(x-2y)\mathrm{d}x+(2y-x)\mathrm{d}y=0.$

3.13 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'=x+5y$.
3.14 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'=(x+y)^2$.
3.15 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'=\frac{x+2y}{x}$.
3.16 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'=y-x-1+\frac{4(x-y)+8}{x-y+2}$.
3.17 Osoita, että differentiaaliyhtälö, joka on muotoa $y'=F(ax+by+c)$, jossa a, b ja c ovat vakioita, voidaan muuntaa separoituvaksi muunnoksella $v=ax+by+c$.

3.3 Lineaarinen differentiaaliyhtälö

Määritelmä 2. Muotoa

$$y'+p(x)y=r(x) \tag{2}$$

olevaa differentiaaliyhtälöä sanotaan *ensimmäisen kertaluvun lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi.* Lineaarisuus tässä tarkoittaa, että siinä esiintyy y:n ja y':n suhteen vain ensimmäisen asteen termejä eikä esimerkiksi niiden neliöitä tai kuutioita eivätkä ne myöskään ole osa trigonometristä tms. funktiota. Esimerkiksi yhtälö $y'+8x\sin y=x$ ei ole lineaarinen, sillä siinä esiintyy termi $\sin y$, eikä myöskään yhtälö $y'^2+x^2y=6$, sillä siinä esiintyy termi y'^2. Yhtälö $y'+(\sin x)y=x$ on yksi esimerkki lineaarisesta yhtälöstä.

Yhtälöä (2) sanotaan *homogeeniseksi* tai *epähomogeeniseksi* sen mukaan onko funktio $r(x)$ vakiofunktio 0 vai ei.

3.3.1 Homogeeninen differentiaaliyhtälö

Jos yhtälössä (2) funktio $r(x) = 0$ sanotaan, että differentiaaliyhtälö on *homogeeninen* ja tällöin se on muotoa

$$y' + p(x)y = 0.$$

Homogeeninen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on separoituva ja sen yleinen ratkaisu on $y = Ce^{-P(x)}$, jossa C on vakio ja $P(x) = \int p(x)\mathrm{d}x$.

3.3.2 Epähomogeeninen differentiaaliyhtälö

Jos yhtälössä (2) funktio $r(x) \neq 0$ sanotaan, että differentiaaliyhtälö on *epähomogeeninen* ja tällöin se on muotoa

$$y' + p(x)y = r(x).$$

Lause 1. Epähomogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $y = y_h + y_e$, jossa y_h on vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu ja y_e on jokin epähomogeenisen yhtälön toteuttava yksittäisratkaisu.

Todistus. Jaetaan todistus kahteen osaan.

1. Ensin osoitetaan, että kaikki muotoa $y = y_h + y_e$ olevat ratkaisut ovat ratkaisuja. Homogeenisen yhtälön ratkaisu on y_h, joten $y_h' + p(x)y_h = 0$ ja epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu on y_e, joten $y_e' + p(x)y_e = r(x)$. Sijoitetaan $y = y_h + y_e$ yhtälöön $y' + p(x)y = r(x)$:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= (y_h + y_e)' + p(x)(y_h + y_e) \\ &= y_h' + y_e' + p(x)y_h + p(x)y_e \\ &= \underbrace{y_h' + p(x)y_h}_{=0} + \underbrace{y_e' + p(x)y_e}_{=r(x)} \\ &= 0 + r(x) \\ &= r(x). \end{aligned}$$

Funktio $y = y_h + y_e$ toteuttaa epähomogeenisen yhtälön $y' + p(x)y = r(x)$ ja se on siis ratkaisu.

2. Osoitetaan, että jokainen epähomogeenisen yhtälön $y' + p(x)y = r(x)$ yleinen ratkaisu on muotoa $y = y_h + y_e$. Olkoon y_0 jokin epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu ja y_e jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu. Sijoitetaan erotusfunktio $y = y_0 - y_e$ yhtälöön $y' + p(x)y = r(x)$:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= (y_0 - y_e)' + p(x)(y_0 - y_e) \\ &= y_0' - y_e' + p(x)y_0 - p(x)y_e \\ &= \underbrace{y_0' + p(x)y_0}_{=r(x)} - (\underbrace{y_e' + p(x)y_e}_{=r(x)}) \\ &= r(x) - r(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Erotusfunktio $y = y_0 - y_e$ toteuttaa homogeenisen yhtälön $y' + p(x)y = 0$ eli se on homogeenisen yhtälön ratkaisu. Yhtälöstä $y_0 - y_e = y_h$ ratkaistaan $y_0 = y_h + y_e$, joten valittu ratkaisu y_0 on myös muotoa $y_h + y_e$. $\square$

Epähomogeenisen yhtälön $y' + p(x)y = r(x)$ ratkaisemisen vaiheet.
1. Määritetään vastaavan homogeenisen yhtälön $y' + p(x)y = 0$ yleinen ratkaisu

$$y_h = Ce^{-P(x)},$$

jossa C on vakio ja funktio $P(x)$ on funktion $p(x)$ integraalifunktio.
2. Määritetään jokin epähomogeenisen yhtälön $y' + p(x)y = r(x)$ yksittäisratkaisu y_e (miten, se selviää myöhemmin).
3. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = y_h + y_e = Ce^{-P(x)} + y_e.$$

Esimerkki 3.8 Funktio $y_e = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ on differentiaaliyhtälön $y' + 2y = x$ yksittäisratkaisu. Mikä on yleinen ratkaisu?

Differentiaaliyhtälöä $y' + 2y = x$ vastaava homogeeninen yhtälö on $y' + 2y = 0$. Homogeeninen yhtälö voidaan ratkaista separoimalla tai suoraan kaavasta $y_h = Ce^{-P(x)}$, jossa $P(x) = \int p(x)\mathrm{d}x = \int 2\mathrm{d}x = 2x$. Täten homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_h = Ce^{-2x}.$$

Eräs epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu on $y_e = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, joten epähomogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = y_h + y_e = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun löytäminen ei yleensä ole helppoa. Jos $p(x) = p$ (vakio), niin yksittäisratkaisu voidaan löytää tekemällä sopiva arvaus ratkaisusta. Tehdään yrite, joka on samaa tyyppiä kuin funktio $r(x)$ ja jossa on tuntemattomia kertoimia. Kertoimet voidaan määrittää sijoittamalla yrite ratkaistavaan yhtälöön. Selvennetään asiaa muutamalla esimerkillä.

Esimerkki 3.9 Määritä epähomogeenisen yhtälön $y' + y = 5$ yleinen ratkaisu.

Vastaavan homogeenisen yhtälön $y' + y = 0$ yleinen ratkaisu on

$$y_h = Ce^{-x},$$

sillä $p(x) = 1$. Etsitään epähomogeeniselle differentiaaliyhtälölle $y' + y = 5$ jokin yksittäisratkaisu y_e. Yhtälön $y' + y = 5$ oikealla puolella oleva funktio $r(x)$ on vakiofunktio 5, joten sopiva arvaus voisi olla samaa tyyppiä. Tehdään yrite $y_e = A$ (vakio), jolloin $y_e' = 0$ ja sijoitetaan nämä yhtälöön $y' + y = 5$:

$$y_e' + y_e = 0 + A = A \overset{\text{oltava}}{=} 5.$$

Tästä ratkaistaan

$$A = 5.$$

Tällöin epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y' + y = 5$ yleinen ratkaisu on

$$y = y_h + y_e = Ce^{-x} + 5.$$

Esimerkki 3.10 Etsi epähomogeeniselle differentiaaliyhtälölle $y' + 2y = x$ yksittäisratkaisu y_e.

Epähomogeenisessa yhtälössä $y' + 2y = x$ funktio $r(x)$ on ensimmäisen asteen polynomi, joten voidaan olettaa mahdollisen ratkaisun olevan samaa muotoa. Tehdään yrite $y_e = Ax + B$, jolloin $y_e' = A$. Kun nämä sijoitetaan tarkasteltavaan yhtälöön, saadaan

$$y_e' + 2y_e = A + 2(Ax + B) = A + 2B + 2Ax \overset{\text{oltava}}{=} x.$$

Tämä toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla vain jos yhtälön molemmilla puolilla saman asteen termin kertoimet ovat yhtä suuret eli

$$\begin{cases} A + 2B &= 0 \\ \quad 2A &= 1 \end{cases}.$$

Ratkaistaan jälkimmäisestä yhtälöstä A ja sijoitetaan se ylempään yhtälöön, jolloin saadaan yhtälöparin ratkaisuksi

$$\begin{cases} A &= \frac{1}{2} \\ B &= -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Sijoitetaan A ja B yritteeseen ja saadaan epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisuksi

$$y_e = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Se on sama kuin mikä oli annettu esimerkissä (3.8).

Alla olevassa taulukossa on ehdotuksia mahdolliseksi yritteeksi epähomogeenisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön $y' + py = r(x)$ yksittäisratkaisulle.

funktio $r(x)$	yrite
vakiofunktio	vakio
polynomi	saman asteen polynomi
$\sin x$, $\cos x$	$A \sin x + B \cos x$
$\sin cx$, $\cos cx$	$A \sin cx + B \cos cx$
$x \sin x$, $x \cos x$	$Ax \sin x + Bx \cos x + C \sin x + D \cos x$
e^{rx}	Ae^{rx}
xe^{rx}	$Axe^{rx} + Be^{rx}$

Huomautus. Jos funktiossa $r(x)$ on sama termi kuin homogeenisen yhtälön ratkaisussa, pitää yrite kertoa muuttujalla x (esimerkki (3.11)).

Esimerkki 3.11 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - 3y = e^{3x}$.

Epähomogeenista differentiaaliyhtälöä $y' - 3y = e^{3x}$ vastaavan homogeenisen yhtälön $y' - 3y = 0$ yleinen ratkaisu on kaavan mukaan

$$y_h = Ce^{3x}.$$

Epähomogeenisessa yhtälössä $y' - 3y = e^{3x}$ funktio $r(x)$ on samaa muotoa kuin homogeenisen yhtälön ratkaisu. Jos yrite $y_e = Ae^{3x}$ ja sen derivaatta $y_e' = 3Ae^{3x}$ sijoitetaan tarkasteltavaan yhtälöön, saataisiin

$$y_e' - 3y_e = 3Ae^{3x} - 3 \cdot Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}.$$

Toisin sanoen yrite toteuttaa vastaavan homogeenisen yhtälön ja se häviää, jolloin vakiota A ei tämän perusteella pysty määräämään. Kerrotaan yrite muuttujalla x, jolloin $y_e = Axe^{3x}$ ja $y_e' = Ae^{3x} + x3Ae^{3x}$. Tässä tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned} y_e' - 3y_e &= (Ae^{3x} + x3Ae^{3x}) - 3 \cdot Axe^{3x} \\ &= Ae^{3x} \\ &\overset{\text{oltava}}{=} e^{3x}. \end{aligned}$$

Näin ollen $A = 1$, jolloin $y_e = xe^{3x}$ ja yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = y_h + y_e = Ce^{3x} + xe^{3x}.$$

Kannattaa varmuuden vuoksi tarkistaa vastaukset sijoittamalla saatu ratkaisu y ja sen derivaatta y' tarkasteltavaan differentiaaliyhtälöön ja näin varmistua, että yhtälö toteutuu. Lisäksi joillekin yhtälöille voi olla useampia ratkaisutapoja. Esimerkissä (3.9) tarkasteltavana ollut yhtälö olisi voitu ratkaista myös separoituvana differentiaaliyhtälönä (harjoitustehtävä).

Harjoitustehtäviä

3.18 Osoita, että differentiaaliyhtälön $y' + p(x)y = 0$ yleinen ratkaisu on $y = Ce^{-P(x)}$, jossa $P(x) = \int p(x)\mathrm{d}x$.

3.19 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + py = 0$ (p vakio), kun $y(0) = a$.

3.20 a) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - 4y = e^x$.

b) Määritä se yksittäisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 2$.

3.21 Määritä differentiaaliyhtälön $y' - y + \sin x = 0$ yleinen ratkaisu.

3.22 a) Määritä differentiaaliyhtälön $y' - y = x^2$ yleinen ratkaisu.

b) Määritä se yksittäisratkaisu, joka kulkee pisteen (0,0) kautta.

3.23 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + \frac{1}{2}y = x^2 + 2$

3.24 Ratkaise esimerkin (3.9) differentiaaliyhtälö separoituvana. Vertaa näin saatua ratkaisua esimerkin (3.9) ratkaisuun.

3.25 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + y = x$ kahdella tavalla.

3.26 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2y + e^{2x} + e^x$.

3.27 Ydinreaktorissa tuotetaan radioaktiivista ainetta. Atomien lukumäärä N kasvaa vakionopeudella v. Tätä kuvaa differentiaaliyhtälö $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = v$, jossa t on aika. Tämän lisäksi ainetta hajoaa mallin $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -kN$ mukaan, jossa k on aineelle ominainen positiivinen vakio. Kaikkiaan atomien lukumäärä noudattaa siis differentiaaliyhtälöä $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = v - kN$. Ratkaise N, kun ajan hetkellä $t = 0$ atomien lukumäärä $N = N_0$.

3.4 Sovelluksia

Tässä kappaleessa tarkastellaan lähemmin esimerkkitapauksia, joissa tähän asti opittuja tietoja voidaan käyttää hyväksi. Osassa tehtävissä on annettu valmiiksi differentiaaliyhtälö, joka ratkaistaan tietyllä alkuehdolla. Joissakin tehtävissä sen sijaan pitää itse ensin muodostaa annettujen tietojen pohjalta yhtälö, joka edelleen ratkaistaan tehtävässä annetulla alkuehdolla.

3.4.1 Radioaktiivinen hajoaminen ja puoliintumisaika (fysiikka)

a) Radioaktiivisessa hajoamisessa aineen atomien lukumäärä vähenee nopeudella, joka on suoraan verrannollinen atomien lukumäärään hetkellä t. Oletetaan, että atomien määrä alussa on N_0. Muodostetaan yhtälö, josta voidaan laskea aineen määrä hetkellä t. Lasketaan mitä arvoa atomien lukumäärä lähestyy pitkän ajan kuluttua.

Olkoon $N(t)$ atomien lukumäärä hetkellä t ja hajoamisnopeus on sen derivaatta $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N'(t)$. Hajoamisnopeus on verrannollinen atomien lukumäärään eli $N'(t) = -kN$. Tässä $k > 0$ on verrannollisuuskerroin ja edessä on miinusmerkki, koska kyseessä on hajoamisnopeus eli atomien lukumäärä pienenee. Yhtälö on homogeenisena ja ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälönä separoituva, jolloin ratkaisu on

$$N(t) = Ce^{-kt}.$$

Sijoitetaan tähän alkuehto $N(0) = N_0$ ja ratkaistaan vakio C:

$$N(0) = Ce^{-k\cdot 0} = C \overset{\text{oltava}}{=} N_0.$$

Atomien lukumäärä hetkellä t saadaan siis yhtälöstä

$$N(t) = N_0 e^{-kt},$$

jossa $k > 0$ on verrannollisuuskerroin.
Lasketaan lopuksi raja-arvo, kun aika kasvaa rajatta:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} N_0 e^{-kt} = 0,$$

joka on luonnollista, sillä lopulta aine hajoaa kokonaan.
b) Lasketaan puoliintumisaika $T_{1/2}$.

Puoliintumisaika tarkoittaa aikaa, jolloin ainetta on jäljellä tasan puolet alkuperäisestä eli aikaa jolloin $N(t) = \frac{1}{2}N_0$. Sijoitetaan tämä a-kohdassa saatuun ratkaisuun $N(t) = N_0 e^{-kt}$ ja ratkaistaan aika:

$$\begin{aligned}
N(T_{1/2}) = \tfrac{1}{2}N_0 &= N_0 e^{-kT_{1/2}} && \mid : N_0 \\
\tfrac{1}{2} &= e^{-kT_{1/2}} && \mid \ln \\
\ln \tfrac{1}{2} &= -kT_{1/2} && \mid : -k \text{ (huom! } \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2) \\
T_{1/2} &= \tfrac{\ln 2}{k}.
\end{aligned}$$

Puoliintumisaika siis on

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}.$$

Mikäli aineen puoliintumisaika tunnetaan, voidaan kyseiselle aineelle ominainen verrannollisuusvakio k laskea edellä johdetusta puoliintumisajan kaavasta.

3.4.2 Lämpötilan muuttuminen (fysiikka)

a) Newtonin jäähtymislain mukaan kappaleen jäähtymisnopeus on suoraan verrannollinen erotukseen $T(t) - T_0$, jossa $T(t)$ on kappaleen lämpötila hetkellä t ja T_0 on ympäristön lämpötila. Muodostetaan yhtälö, joka kuvaa kappaleen lämpötilaa ajan funktiona. Lisäksi lasketaan mitä arvoa kappaleeen lämpötila lähenee, kun se saa jäähtyä tarpeeksi pitkään.

Kappaleen lämpötilan muutosnopeutta kuvaa funktion $T(t)$ derivaatta $T'(t)$. Jäähtymisnopeus on suoraan verrannollinen lausekkeeseen $T(t) - T_0$, joten päädytään differentiaaliyhtälöön $T'(t) = -k(T(t) - T_0)$, jossa $k > 0$ on verrannollisuuskerroin ja edessä on miinusmerkki , koska kappaleen lämpötila laskee. Yhtälö on separoituva, joten muuttujat voidaan erottaa ja sen jälkeen integroida:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -k(T - T_0) && |:(T - T_0) \text{ ja } | \cdot \mathrm{d}t \\
\tfrac{\mathrm{d}T}{(T-T_0)} &= -k \ \mathrm{d}t && \text{integroidaan puolittain} \\
\int \tfrac{\mathrm{d}T}{(T-T_0)} &= \int -k \ \mathrm{d}t && \\
\ln|T - T_0| &= -kt + D_1 && |T - T_0 > 0 \\
T - T_0 &= De^{-kt} && | + T_0 \\
T &= De^{-kt} + T_0 &&
\end{aligned}$$

Kappaleen lämpötilaa ajan t funktiona kuvaa yhtälö

$$T(t) = De^{-kt} + T_0,$$

jossa $k > 0$ on verrannollisuuskerroin, D on integroimisvakio ja T_0 on ympäristön lämpötila.
Lopuksi lasketaan raja-arvo, kun aika lähenee äärettömyyttä:

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} De^{-kt} + T_0 = 0 + T_0 = T_0.$$

Tulos on järkevä, sillä kappale ei voi jäähtyä ympäristöään viileämmäksi.
b) Lääkäri saapuu asuinhuoneistoon ja toteaa henkilön kuolleeksi. Hän mittaa kello 21.54 kuolleen ruumiinlämmöksi 35,5°C ja tuntia myöhemmin ruumiinlämpö on 35,0°C. Oletetaan, että asuinhuoneiston lämpötila on 21,0°C ja elävän ihmisen ruumiinlämpö on keskimäärin 36,5°C. Lasketaan annettujen tietojen ja a-kohdan perusteella aika, jolloin henkilö oli kuollut.

Tiedetään, että $T_0 = 21{,}0$°C ja $T(0) = 35{,}5$°C. Sijoitetaan nämä tiedot a-kohdassa saatuun ratkaisuun $T(t) = De^{-kt} + T_0$ ja ratkaistaan integroimisvakio D:

$$T(0) = De^{-k\cdot 0} + 21{,}0 = D + 21{,}0 \overset{\text{oltava}}{=} 35{,}5$$

$$D = 35.5 - 21{,}0 = 14.5.$$

Sijoittamalla edellä ratkaistu vakio D ja tieto $T(1) = 35{,}0$°C a-kohdassa saatuun ratkaisuun saadaan verrannollisuusvakio k:

$$\begin{aligned}
T(1) = 14{,}5e^{-k\cdot 1} + 21{,}0 &\overset{\text{oltava}}{=} 35{,}0 && \mid -21{,}0 \\
14{,}5e^{-k} &= 14{,}0 && \mid : 14{,}5 \\
e^{-k} &= \tfrac{14{,}0}{14{,}5} && \mid \ln \\
-k &= \ln \tfrac{14{,}0}{14{,}5} && \mid \cdot(-1) \\
k &= \ln \tfrac{14{,}5}{14{,}0}
\end{aligned}$$

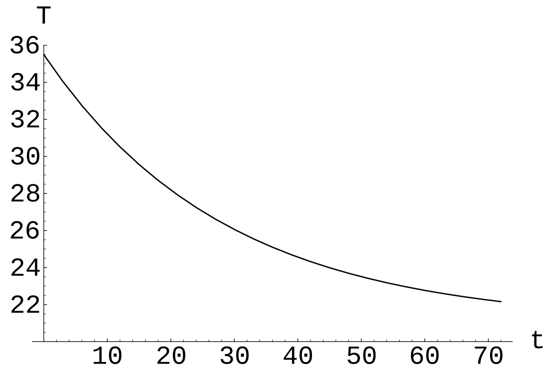
Henkilön kuolinaika voidaan laskea, kun sijoitetaan a-kohdan yhtälöön edellä ratkaistu k ja D, ja kun lisäksi tiedetään, että kuolinhetkellä henkilön ruumiinlämpö oli ollut 36,5°C:

$$
\begin{aligned}
T(t) = 14{,}5e^{-(\ln\frac{14{,}5}{14{,}0})t} + 21{,}0 &\overset{\text{oltava}}{=} 36{,}5 && \mid -21{,}0 \\
14{,}5e^{(\ln\frac{14{,}0}{14{,}5})t} &= 15{,}5 && \mid : 14{,}5 \\
e^{(\ln\frac{14{,}0}{14{,}5})t} &= \tfrac{15{,}5}{14{,}5} && \mid \ln \\
(\ln\tfrac{14{,}0}{14{,}5})t &= \ln\tfrac{15{,}5}{14{,}5} && \mid : \ln\tfrac{14{,}0}{14{,}5} \\
t &= \ln\tfrac{15{,}5}{14{,}5} : \ln\tfrac{14{,}0}{14{,}5} \\
&\approx -1{,}90(\mathrm{h}) = -114(\mathrm{min})
\end{aligned}
$$

Henkilö oli kuollut noin kello 20;00.
Ruumiin lämpötila millä tahansa ajan hetkellä voidaan laskea kaavasta

$$T(t) = 14{,}5e^{-(\ln\frac{14{,}5}{14{,}0})t} + 21{,}0.$$

Kuvassa 3 on esitetty kuolleen ihmisen lämpötilan lasku ajan funktiona ensimmäisen kolmen vuorokauden aikana.



Kuva 3: Ruumiin lämpötilan lasku kuoleman jälkeisen 72 tunnin aikana.

Huomautus Verrannollisuusvakio k ratkaistiin käyttämällä alkuehdossa ajan yksikkönä tuntia. Yhtä hyvin olisi voitu laskea käyttämällä ajan yksikkönä minuuttia, mutta tällöin vakion k arvo olisi ollut eri. Tästä syystä on tärkeää muistaa laskea samoilla yksiköillä koko tehtävän ajan.

3.4.3 Populaation suuruus (biologia)

Metsään tuotiin 40 jänistä. Tutkija arvioi, että metsässä olisi tilaa yhteensä 200 jänikselle ja neljän vuoden kuluttua metsässä arvioitiin olevan 100 jänistä. Jänispopulaation kasvunopeus oletetaan olevan suoraan verranollinen maksimimäärän 200 ja populaation suuruuden erotukseen hetkellä t. Muodostetaan differentiaaliyhtälö jänispopulaation suuruudelle ja ratkaistaan se. Lisäksi mallin mukaan lasketaan jäniksien määrä viiden vuoden kuluttua.

Olkoon $y(t)$ jänispopulaation suuruus hetkellä t ja tällöin populaation kasvunopeutta kuvaa funktion $y(t)$ derivaatta $y'(t)$. Koska populaation kasvunopeus on suoraan verrannollinen maksimimäärän 200 ja populaation suuruuden erotukseen, päädytään differentiaaliyhtälöön $y'(t) = k(200 - y(t))$, jossa $k > 0$ on verrannollisuusvakio. Yhtälö on separoituva, joten erotellaan muuttujat ja integroidaan:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -k(200-y) && |:(200-y) \text{ ja } |\cdot \mathrm{d}t \\
\tfrac{\mathrm{d}y}{(200-y)} &= -k\ \mathrm{d}t && \text{integroidaan puolittain} \\
\int \tfrac{\mathrm{d}y}{(200-y)} &= \int -k\ \mathrm{d}t && \\
\ln|200-y| &= -kt + C_1 && |200-y>0 \\
200-y &= Ce^{-kt} && |-200 \\
-y &= Ce^{-kt} - 200 && |\cdot(-1) \\
y &= 200 - Ce^{-kt} &&
\end{aligned}
$$

Saatiin, että jänismäärää hetkellä t kuvaa yhtälö

$$y(t) = 200 - Ce^{-kt},$$

jossa $k > 0$ on verrannollisuuskerroin ja C on integroimisvakio. Sijoitetaan tähän tehtävässä annetut alkuehdot ja ratkaistaan k ja C. Ensinnäkin tiedetään, että hetkellä $t = 0$ metsässä on 40 jänistä eli $y(0) = 40$:

$$y(0) = 200 - Ce^{-k \cdot 0} = 200 - C \overset{\text{oltava}}{=} 40$$

$$C = 200 - 40 = 160.$$

Lisäksi neljän vuoden kuluttua metsässä oletetaan olevan 100 jänistä eli $y(4) = 100$:

$$\begin{aligned} y(4) = 200 - 160e^{-k \cdot 4} &\overset{\text{oltava}}{=} 100 && | - 200 \\ -160e^{-k} &= -100 && | : -160 \\ e^{-k} &= \tfrac{100}{160} && | \ln \\ -k &= \ln \tfrac{100}{160} && | \cdot (-1) \\ k &= \ln \tfrac{160}{100} \end{aligned}$$

Millä tahansa ajan hetkellä voidaan ratkaista jäniksien määrä yhtälöstä

$$y(t) = 200 - 160e^{-t \ln 1{,}6}.$$

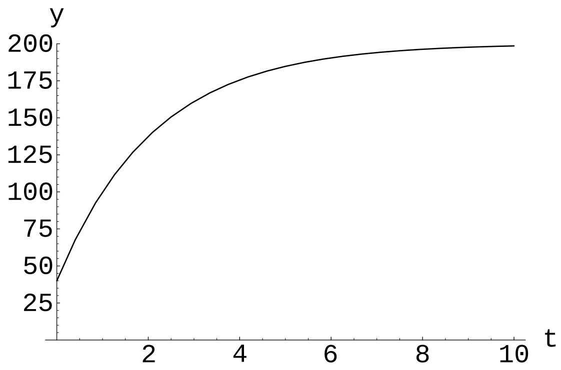
Ratkaistaan jäniksien määrä viiden vuoden kuluttua:

$$y(5) = 200 - 160e^{-5 \cdot \ln 1{,}6} = 184{,}7 \approx 185.$$

Jäniksien määrä viiden vuoden kuluttua on noin 185 jänistä. Kuvassa 4 on esitetty jänismäärä ensimmäisen kymmenen vuoden aikana.

3.4.4 Suolan määrä nesteessä (kemia)

a) Säiliöön, jossa on V litraa nestettä, virtaa a litraa minuutissa toista nestettä, jonka suolapitoisuus on p prosenttia. Suolan oletetaan jakautuvan heti tasaisesti koko nesteen tilavuudelle, jolloin säiliön liuos on koko ajan homogeenista. Lisäksi säiliöstä poistuu a litraa minuutissa hyvin sekoittunutta



Kuva 4: Jänismäärä metsässä ensimmäisen kymmenen vuoden aikana.

nestettä eli säiliön kokonaisnestemäärä pysyy koko ajan samana. Muodostetaan differentiaaliyhtälö, joka kuvaa säiliön suolapitoisuutta $y(t)$ hetkellä t.

Säiliöön virtaavan nesteen mukana suolan määrä säiliössä lisääntyy nopeudella $\frac{p}{100}a$ litraa minuutissa. Jos säiliössä on suolaa määrä $y(t)$ hetkellä t, niin säiliössä on prosentuaalisesti suolaa $\frac{y(t)}{V}100$ prosenttia (säiliössä olevan nesteen tilavuus on V). Hyvin sekoittuneen liuoksen mukana suolaa poistuu $\frac{y(t)}{V}a$ litraa minuutissa. Näiden tietojen pohjalta voidaan muodostaa differentiaaliyhtälö, joka kuvaa suolamäärän muutosnopeutta:

$$y' = \frac{p}{100}a - \frac{y}{V}a.$$

Kirjoitetaan yhtälö hieman toisenlaiseen muotoon:

$$y' + \frac{a}{V}y = \frac{p}{100}a.$$

Huomataan, että tuloksena on ensimmäisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö, jolloin se voidaan ratkaista aiemmin opittuja tietoja käyttäen.
b)Säiliössä on 100 litraa puhdasta vettä. Säiliöön alkaa alkaa virrata 15-prosenttista suolaliuosta 10 litraa minuutissa. Samalla hetkellä säiliöstä alkaa poistua hyvin sekoittunutta nestettä samalla nopeudella. Muodostetaan säiliön suolamäärää kuvaava differentiaaliyhtälö ja ratkaistaan se. Lasketaan yhtälön perusteella paljonko säiliössä on suolaa puolen tunnin kuluttua sekä arvo, jota liuoksen suolamäärä lähenee, kun aika kuluu.

Sijoitetaan a-kohdan differentiaaliyhtälöön b-kohdassa annetut tiedot

$$\begin{aligned} a &= 10 \text{ (l/min)} \\ p &= 15 \\ V &= 100 \text{ (l)}, \end{aligned}$$

jolloin saadaan säiliön suolamäärää kuvaavaksi differentiaaliyhtälöksi

$$y' + 0{,}1y = 1.5.$$

Tätä yhtälöä vastaavan homogeenisen yhtälön $y' + 0{,}1y = 0$ yleinen ratkaisu on $y_h = Ce^{-0{,}1t}$. Epähomogeeniselle yhtälölle saadaan yksittäisratkaisu tekemällä arvaus $y_e = A$ (vakio). Sijoitetaan tämä differentiaaliyhtälöön:

$$y_e' + 0{,}1y_e = 0 + 0{,}1A = 0{,}1A \overset{\text{oltava}}{=} 1{,}5,$$

josta ratkaistaan

$$A = \frac{1{,}5}{0{,}1} = 15.$$

Epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y' + 0{,}1y = 1{,}5$ yleinen ratkaisu on siis

$$y = y_h + y_e = Ce^{-0{,}1t} + 15.$$

Säiliössä oli aluksi puhdasta vettä, joten hetkellä $t = 0$ suolamäärä oli 0. Tämän alkuehdon nojalla voidaan ratkaista arvo vakiolle C:

$$y(0) = Ce^{-0{,}1 \cdot 0} + 15 = C + 15 \overset{\text{oltava}}{=} 0,$$

josta saadaan $C = -15$. Suolamäärälle y (litroina) hetkellä t saatiin siis yhtälö

$$y(t) = -15e^{-0{,}1t} + 15,$$

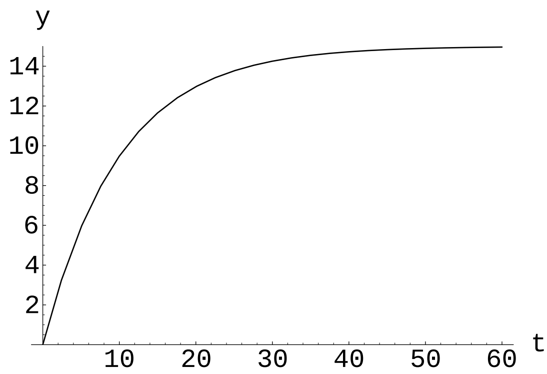
jota on mallinnettu kuvassa 5. Lasketaan yhtälön avulla paljonko säiliössä oli suolaa puolen tunnin kuluttua. Koska virtausnopeus on ilmaistu yksikössä l/min, pitää aika ilmaista minuutteina. Liuoksessa oli suolaa puolen tunnin eli 30 minuutin kuluttua

$$y(30) = -15e^{-0{,}1 \cdot 30} + 15 = 14{,}25(\text{ l}).$$

Lasketaan vielä raja-arvo, kun aika kasvaa rajatta:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}(-15e^{-0,1t} + 15) = 15$$

eli säiliön neste lähenee liosta, jossa on suolaa 15 litraa, joka on $\frac{15\text{l}}{100\text{l}} \cdot 100 = 15$ prosenttia. Tämä on oletettavaa, sillä puhdasta vettä sisältävään säiliöön tulevassa nesteessä oli suolaa 15 prosenttia.



Kuva 5: Suolan määrä säiliössä ensimmäisen tunnin aikana.

3.4.5 Ebbinghausin unohtamis- tai muistamiskäyrä (psykologia)

Henkilö oppii joukon merkityksettömiä sanoja ja tutkitaan paljonko hän muistaa esimerkiksi viiden vuorokauden kuluttua. On todettu, että unohtaminen tapahtuu aluksi hyvin nopeasti ja hidastuu ajan kuluessa. Lisäksi on todettu, että osa sanoista säilyy mielessä ikuisesti. Merkitään

$$\begin{aligned}
m(t) &= \text{muistissa olevien sanojen lukumäärä hetkellä } t, \\
m_0 &= \text{opittujen sanojen lukumäärä eli } m(0) = m_0 \text{ ja} \\
m_\infty &= \text{muistiin pysyvästi jäävien sanojen lukumäärä.}
\end{aligned}$$

Oletetaan, että aikavälillä $(t, t+\Delta t)$ unohtunut sanamäärä $m(t+\Delta t) - m(t)$ on suoraan verrannollinen aikavälin pituuteen Δt ja hetkeä t myöhemmin katoavien sanojen lukumäärään $m(t) - m_\infty$. Muodostetaan yhtälö $m(t)$ sanojen lukumäärälle hetkellä t.

Tietojen perusteella saadaan aikavälillä unohtuneiden sanojen lukumäärälle yhtälö

$$m(t + \Delta t) - m(t) = -k(m(t) - m_\infty)\Delta t,$$

jossa verrannollisuusvakio $k > 0$. Tästä saadaan, kun jaetaan termillä Δt:

$$\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -k(m(t) - m_\infty).$$

Tarkastellaan hyvin pientä aikaväliä, jolloin siis $\Delta t \to 0$, ja tällöin derivaatan määritelmän mukaan voidaan merkitä $\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Separoidaan ja integroidaan puolittain, jolloin saadaan sanojen lukumäärälle yhtälö:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} & = & -k(m(t) - m_\infty) & \mid \cdot \,\mathrm{d}t \\[2ex]
\mathrm{d}m & = & -k(m(t) - m_\infty)\mathrm{d}t & \mid : m(t) - m_\infty \\[2ex]
\frac{\mathrm{d}m}{m(t)-m_\infty} & = & -k \ \mathrm{d}t & \text{integroidaan puolittain} \\[2ex]
\int \frac{\mathrm{d}m}{m(t)-m_\infty} & = & \int -k \ \mathrm{d}t & \\[2ex]
\ln|m(t) - m_\infty| & = & -kt + C_1 & |e \text{ ja merkitään } e^{C_1} = C \\[2ex]
|m(t) - m_\infty| & = & Ce^{-kt} & \text{huom! } m(t) - m_\infty > 0 \\[2ex]
m(t) - m_\infty & = & Ce^{-kt} & \mid + m_\infty \\[2ex]
m(t) & = & Ce^{-kt} + m_\infty. &
\end{array}$$

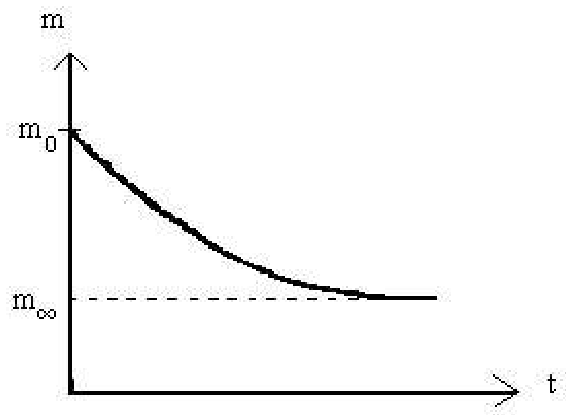
Sijoitetaan tähän alkuehto $m(0) = m_0$ ja ratkaistaan vakio C:

$$m(0) = Ce^{-k \cdot 0} + m_\infty = C + m_\infty \overset{\text{oltava}}{=} m_0$$

$$C = m_0 - m_\infty.$$

Ajan t kuluttua muistettavien sanojen lukumäärä siis on

$$m(t) = (m_0 - m_\infty)e^{-kt} + m_\infty, \text{ jossa } k > 0 \text{ vakio.}$$



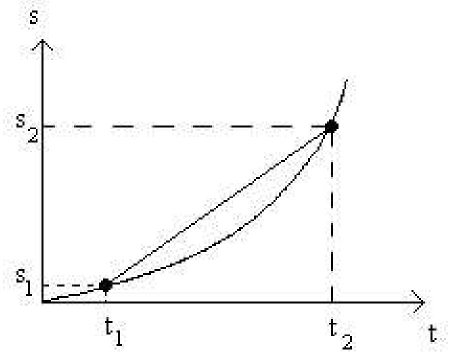
Kuva 6: Ebbinghausin unohtamis- tai muistamiskäyrä.

Muistettavien sanojen lukumäärää kuvaava käyrä kunakin ajan hetkenä on esitetty kuvassa 6.
Kokeellisesti tämä tulos on osoittautunut hyvin paikkansapitäväksi. Jos opittu sanajoukko muodostaa järkevän kokonaisuuden on k pieni ja m_∞ lähenee arvoa m_0. Jos taas sanat ovat merkityksettömiä tavuyhdistelmiä on k suuri ja m_∞ arvo jää pieneksi. On kuitenkin huomattava, että vaikka kokeellisesti tulos on osoittautunut paikkaansapitäväksi, ei se sellaisenaan täysin päde. Koehenkilöillä on todettu unohtamista tapahtuvan valveillaolon aikana jatkuvasti, mutta esimerkiksi 8-tuntisen unen 6 viimeisen tunnin aikana koehenkilö ei ole unohtanut juuri mitään oppimastaan. Ebbinghausin käyrät kuvaavatkin hyvin tilannetta, kun rajoitutaan vuorokauden päähän oppimistapahtumasta. [1, s. 70-71]

Ennen seuraavia sovelluksia käydään hieman läpi sovelluksissa tarvittavia fysiikkaan liittyviä perusasioita ottaen huomioon oppilaat, jotka eivät opiskele lukiossa pitkää fysiikkaa.

Matka, nopeus ja kiihtyvyys.
Olkoon $s(t)$ kuljettu matka ajan hetkellä t ja $v(t)$ nopeus hetkellä t. Keskinopeus on jollakin aikavälillä (t, s) koordinaatistoon kahden tarkastelupisteen

välille piirretyn suoran kulmakerroin (kuva 7).



Kuva 7: Keskinopeuden laskeminen.

Keskinopeus aikavälillä $t_2 - t_1$ voidaan siis ratkaista kaavasta

$$v_k = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Kappaleen *hetkellinen nopeus*, eli nopeus jollakin tietyllä hetkellä t, saadaan kun piirretään (t,s) koordinaatiston kuvaajaan tarkasteltavaan kohtaan tangentti ja lasketaan sen kulmakerroin. Toisaalta kohtaan t piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin funktion derivaatta kyseisessä kohdassa t. Tästä päädytään tulokseen, että nopeus jollakin hetkellä t on matkan derivaatta ajan suhteen eli

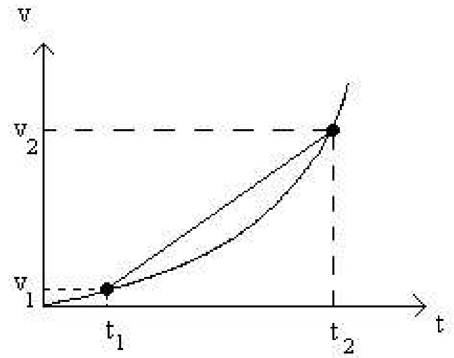
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Nopeuden yksikkönä käytetään yleensä m/s tai km/h.

Olkoon $a(t)$ kiihtyvyys ajan hetkellä t. Keskikiihtyvyys jollakin aikavälillä on (v, t) koordinaatistoon kahden tarkastelupisteen välille piirretyn suoran kulmakerroin (kuva 8).

Vastaavasti kuten edellä nopeudelle, voidaan keskikiihtyvyys aikavälillä $t_2 - t_1$ ratkaista kaavasta

$$a_k = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$



Kuva 8: Keskikiihtyvyyden laskeminen.

Kappaleen kiihtyvyys jollakin tietyllä hetkellä t ratkaistaan (t, v) koordinaatistoon tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroimesta, jolloin

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$

Kiihtyvyyden yksikkönä käytetään yleensä $\mathrm{m/s^2}$.

Voima.

Mekaniikan II peruslain mukaan kappaleeseen vaikuttava voima F on kappaleen massan m ja kiihtyvyyden a tulo: $\bar{F} = m\bar{a}$. Viiva suureen päällä tarkoittaa, että voima ja kiihtyvyys ovat vektorisuureita, jolloin niillä on sekä suuruus että suunta. Mikäli kappaleeseen vaikuttaa useita voimia, niin $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ ($\sum$ 'sigma' tarkoittaa summaa). Kappaleeseen vaikuttavat voimat kannattaa jakaa x ja y akselin suuntaisiin voimiin ja tarkastella kumpikin tapaus erikseen. Kun tarkastellaan esimerkiksi x-akselin suuntaisia voimia, valitaan oikean- ja vasemmanpuoleisesta suunnasta toinen positiiviseksi, jolloin toinen on negatiivinen. Voiman yksikkönä käytetään Newtonia: $[F] = \mathrm{kgm/s^2} = \mathrm{N}$. Maan kappaleeseen kohdistamaa vetovoimaa sanotaan painovoimaksi, sitä merkitään kirjaimella G ja se on suuruudeltaan $G = mg$, jossa g on normaaliputoamiskiihtyvyys. Putoamiskiihtyvyyden arvo vaihtelee maantieteellisen sijainnin mukaan, ja Suomessa sen arvo on noin $9{,}81\mathrm{m/s^2}$. Painovoiman suunta on kappaleesta maan pintaa kohti.

Esimerkki 3.12 Kappaletta vedetään 100 N voimalla, jolloin se saa kiihtyvyyden 5 m/s^2. Kuinka suuri on kappaleen massa?

Mekaniikan II peruslain kaavasta $F = ma$ ratkaistaan $m = \frac{F}{a}$, johon sijoitetaan $F = 100$ N ja $a = 5$ m/s^2. Massaksi saadaan $m = \frac{100 \text{ N}}{5 \text{ m/s}^2} = 20$ kg.

Esimerkki 3.13 Kuinka suuren kiihtyvyyden 4 N voima antaa kappaleelle, jonka massa on 5 kg?

Kaavasta $F = ma$ ratkaistaan $a = \frac{F}{m}$, johon sijoitetaan $F = 4$ N ja $m = 5$ kg. Näin ollen kiihtyvyydeksi saadaan $a = \frac{4 \text{ N}}{5 \text{ kg}} = 0{,}80$ m/s^2 (huom! N$=\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$).

Esimerkki 3.14 Kappaletta vedetään oikealle 5 N voimalla ($\bar{F_1}$) ja vasemmalle 8 N voimalla ($\bar{F_2}$). Kuinka suuri kokonaisvoima kappaleeseen vaikuttaa ja mihin suuntaan kappale liikkuu?

Valitaan oikealle menevä liikesuunta positiiviseksi (kuten positiivinen x-akseli) ja vasemmalle menevä liikesuunta negatiiviseksi (kuten negatiivinen x-akseli). Tällöin $\bar{F_1} = 5$ N ja $\bar{F_2} = -8$ N, jolloin kokonaisvoimaksi saadaan $\sum \bar{F} = \bar{F_1} + \bar{F_2} = 5 \text{ N} - 8 \text{ N} = -3$ N. Miinusmerkki vastauksen edessä tarkoittaa, että kappale liikkuu negatiiviseen suuntaan eli vasemmalle. Mekaniikan II peruslain mukaan pystyttäisiin laskemaan kappaleen kiihtyvyys tai massa yhtälöstä $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ jos toinen tunnetaan.

3.4.6 Putoamisnopeus, kun ilmanvastusta ei huomioida (fysiikka)

a) Muodostetaan yhtälö, josta voidaan ratkaista putoavan kappaleen nopeus $v(t)$ kullakin hetkellä t. Jätetään ilmanvastus huomioimatta ja oletetaan, että ainut voima, joka kappaleeseen vaikuttaa on painovoima $F = mg$. Tässä m on kappaleen massa ja g on putoamiskiihtyvyys, eli kiihtyvyys jolla kappale putoaa alas. Putoamiskiihtyvyys vaihtelee maantieteellisen sijainnin mukaan ja Suomessa sen arvo on n. 9,81 m/s^2.

Dynamiikan peruslain mukaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on kappaleen massan m ja kiihtyvyyden a tulo eli $\sum F = ma$. Ainut voima, joka kappaleeseen vaikuttaa, on painovoima $F = mg$, joten saadaan yhtälö

$$ma(t) = mg.$$

Tästä edelleen, kun supistetaan massa m pois, saadaan

$$a(t) = g.$$

Tiedetään, että kiihtyvyys on nopeuden derivaatta eli $a(t) = v'(t)$, joten nopeus saadaan, kun integroidaan kiihtyvyys:

$$v(t) = \int g \ \mathrm{d}t = gt + C,$$

jossa C on integroimisvakio. Usein laskuissa oletetaan, että kappaleen putoaminen alkaa ajan hetkellä $t = 0$, jolloin siis alkuehto on $v(0) = 0$. Tästä saadaan vakion C arvoksi 0, sillä

$$v(0) = g \cdot 0 + C = C \overset{\text{oltava}}{=} 0.$$

Putoavan kappaleen nopeutta ajan funktiona kuvaa siis yhtälö

$$v(t) = gt.$$

Yhtälössä on huomioitava, että putoamiskiihtyvyyden g, kuten yleensäkin kiihtyvyyden, yksikkönä käytetään $\mathrm{m/s^2}$, jolloin siis aika on syytä ilmaista sekunteina ja tällöin nopeuden yksiköksi tulee m/s.
b) Lentokoneesta, joka lentää 10 km korkeudessa, irtoaa 100 kg painava osa. Lasketaan aika, joka irtoavalta osalta menee ennen kuin se osuu maahan, sekä nopeus, joka kappaleella on maahan osuessaan. Jätetään ilmanvastus huomiotta.

Koska ilmanvastusta ei huomioida, voidaan käyttää nopeudelle a-kohdan yhtälöä $v(t) = gt$. Nopeus on matkan $s(t)$ derivaatta eli $v(t) = s'(t)$. Tästä saadaan matka, kun integroidaan nopeus eli

$$s(t) = \int gt \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + C,$$

jossa C on integroimisvakio. Integroimisvakion C arvoksi saadaan 0, kun oletetaan, että ajan ketkellä $t = 0$ matka $s = 0$:

$$s(0) = \frac{1}{2}g \cdot 0 + C = C \overset{\text{oltava}}{=} 0.$$

Matkaa s ajan funktiona kuvaa siis yhtälö

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Yhtälössä on jälleen huomattava, että aika kannattaa ilmaista sekunteina, jolloin matkan yksiköksi tulee metri.

Ratkaistaan seuraavaksi aika T, joka kappaleelta menee 10 km eli 10 000 m matkan putomiseen:

$$\begin{aligned} s(T) = \tfrac{1}{2}gT^2 &\overset{\text{oltava}}{=} 10\,000 && \mid \cdot \tfrac{2}{g} \\ T^2 &= \tfrac{20000}{g} && \mid\sqrt{} \qquad \text{huom! } T > 0 \\ T &= \sqrt{\tfrac{20000}{g}} && \text{sijoitetaan } g = 9{,}81 \\ T &= \sqrt{\tfrac{20000}{9{,}81}} = 45{,}15(\text{ s}) \end{aligned}$$

Lopuksi ratkaistaan nopeus, joka kappaleella on maahan osuessaan, eli nopeus kun aika $t = 45{,}15$ sekuntia:

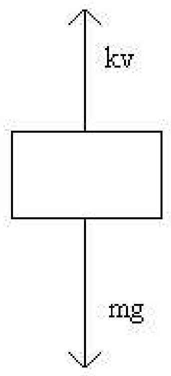
$$v(45{,}15) = gt = 9{,}81 \cdot 45{,}15 = 442{,}92(\text{m/s}).$$

Tarkastellaan vielä lähemmin kuinka järkevä a-kohdan tulos on. Jos oletetaan, että kappale putoaisi äärettömän korkealta, niin tällöin nopeus kasvaisi yhtälön mukaan äärettömän suureksi. Käytännössä näin ei kuitenkaan ole! Esimerkissä jätettiin ilmanvastus täysin huomiotta, mutta todellisuudessa ilmanvastus vaikuttaa kappaleeseen aina. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaankin tilannetta, jossa putoavaan kappaleeseen vaikuttaa ilmanvastus, joka on verrannollinen kappaleen nopeuteen. Tosiasiassa putoavaan kappaleeseen vaikuttava ilmanvastus on verrannollinen putoavan kappaleen nopeuden neliöön, mutta tällöin ratkaistavaksi tuleva differentiaaliyhtälö olisi liian hankala ratkaista lukiotiedoilla.

3.4.7 Putoamisnopeus, kun ilmanvastus huomioidaan (fysiikka)

Muodostetaan yhtälö, josta voidaan ratkaista putoavan kappaleen nopeus $v(t)$ kullakin hetkellä t, kun kappaleeseen vaikuttaa painovoima $F_1 = mg$

ja ilmanvastus $F_2 = kv$. Tässä m on kappaleen massa, v kappaleen nopeus, $k > 0$ verrannollisuuskerroin ja g on putoamiskiihtyvyys. Kuvassa 9 on esitetty putoavaan kappaleeseen vaikuttavien voimien suuntanuolet.



Kuva 9: Putoavaan kappaleeseen vaikuttavat voimat, kun ilmanvastus huomioidaan.

Kappaleeseen vaikuttaa painovoiman lisäksi ilmanvastus, joka on suunnaltaan päinvastainen painovoiman suuntaan verrattuna, tällöin dynamiikan peruslain mukaan $\sum \bar{F} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 = mg - kv = ma$. Koska kiihtyvyys $a(t)$ on nopeuden $v(t)$ derivaatta eli $a(t) = v'(t)$, päädytään ensimmäisen kertaluvun epähomogeeniseen differentiaaliyhtälöön

$$mv' = mg - kv.$$

Vastaavan homogeenisen yhtälön $mv' + kv = 0$ ratkaisu on $v_h(t) = Ce^{-kt}$, jossa C on integroimisvakio. Epähomogeenisen yhtälön $mv' + kv = mg$ yksittäisratkaisun löytämiseksi tehdään samaa muotoa oleva yrite $v_e = A$ (vakio), joka sijoitettuna yhtälöön antaa vakiolle A arvon

$$\begin{aligned} m \cdot 0 + kA &= mg \\ A &= \frac{mg}{k}. \end{aligned}$$

Nopeus kullakin hetkellä t voidaan siis ratkaista yhtälöstä

$$v(t) = Ce^{-kt} + \frac{mg}{k},$$

jossa C on integroimisvakio ja k on positiivinen verrannollisuusvakio. (Huomaa, että yhtälö olisi voitu ratkaista myös separoituvana.) Integroimisvakiolle C saadaan arvo, kun sijoitetaan yhtälöön alkuehto $v(0) = 0$:

$$v(t) = Ce^{-k\cdot 0} + \frac{mg}{k} = C + \frac{mg}{k} \overset{\text{oltava}}{=} 0$$
$$C = -\frac{mg}{k}.$$

Lopulta siis ratkaisuksi saadaan

$$v(t) = -\frac{mg}{k}e^{-kt} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Tarkastellaan vielä tuloksen järkevyyttä. Jos esine pudotetaan äärettömän korkealta, niin nopeuden raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt}) = \frac{mg}{k}(1 - 0) = \frac{mg}{k}.$$

Jos esine siis pudotetaan hyvin korkealta, sen nopeus ei kasva rajattomasti, vaan lopulta se saavuttaa vakioarvon $\frac{mg}{k}$. Tämä vastaa paremmin todellisuutta, toisin kuin edellisessä esimerkissä saatu tulos, että nopeus kasvaisi äärettömäksi.

Kuten edellisen esimerkin lopulla jo mainittiin, niin todellisuudessa ilmanvastus on verrannollinen putoavan kappaleen nopeuden neliöön, jolloin ratkaistavaksi tulee yhtälö

$$mv' = mg - kv^2.$$

Alkuehdolle $v(0) = 0$ yhtälön ratkaisu on

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{1 + e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}\right).$$

Tarkastellaan vielä nopeuden raja-arvoa:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{1 + e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}\right) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Rajanopeus, jota putoavan esineen nopeus kasvaa, kun se pudotetaan hyvin korkealta, on $\sqrt{\frac{mg}{k}}$. Edellä, kun ilmanvastus oli verrannollinen nopeuden neliöön, rajanopeus oli $\frac{mg}{k}$.

Harjoitustehtäviä

3.28 Lohiviljelyaltaaseen, jossa oli 1100 kalaa, levisi kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalamäärä alkoi vähetä yhtälön $P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$ mukaisesti. Tässä $P(t)$ on kalamäärä hetkellä t ja aika t on mitattu viikkoina. Kuinka monen viikon kuluttua kaikki kalat olivat kuolleet? (yo-tehtävä k01)

3.29 Kesätapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään kyseisenä hetkenä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisuna hyttysten määrä mielivaltaisella hetkellä t. Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta. (yo-tehtävä k00)

3.30 Eräässä yhteiskunnassa elintason kasvu on kääntäen verrannollinen jo saavutettuun elintasoon, ts. mitä korkeampi elintaso on, sen vähemmän on halukkuutta sen edelleen nostamiseen. Muodosta elintasoa kuvaava differentiaaliyhtälömalli ja ratkaise se. Onko kyseessä jatkuva elintason kasvu? Onko muutos kiihtyvää vai hidastuvaa? Lähestyykö elintaso jotain vakiotasoa? (yo-tehtävä s01)

3.31 Kakku, jonka lämpötila on $21°C$, laitetaan paistumaan uuniin, joka pysyy vakiolämpötilassa $225°C$. Kakun lämpötilan muutos aikayksikössä on suoraan verrannollinen uunin lämpötilan ja kakun lämpötilan erotukseen. Kymmenen minuutin kuluttua kakun lämpötila on $67°C$. Määritä kakun lämpötila T ajan t funktiona. Määritä funktion $T(t)$ avulla kakun lämpötila 40 minuutin kuluttua. Milloin uuniin unohtuneen kakun lämpötila saavuttaa mallin mukaan uunin lämpötilan. (yo-tehtävä k98)

3.32 Määrää Ebbinghausin unohtamis- ja muistamiskäyrän esimerkin mukaan $m(10)$ kahdessa seuraavassa tapauksessa.

a) On todettu, että henkilö muistaa oppimastaan, ajatuksella tehdystä loppusoinnillisesta runosta, viiden päivän kuluttua oppimisesta 80% ja tällöin $m_\infty = 40\%$.

b) Henkilö muistaa merkityksettömästä sanayhdistelmästä viiden päivän kuluttua vain 30% ja tällöin $m_\infty = 20\%$.

c) Vertaa tuloksia keskenään. Ovatko ne järkeviä?

4 Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö sisältää muuttujan x, funktion y sekä tämän ensimmäisen ja toisen derivaatan y' ja y''. Yhtälön normaalimuoto on

$$y'' = f(x,y,y'),$$

jossa siis olennaista on, että korkeimman derivaatan y'' kerroin on yksi.

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu sisältää kaksi mielivaltaista vakiota, jotka pystytään ratkaisemaan alkuehtojen $y'(x_0) = y_0$ ja $y(x_0) = y_1$ avulla.

4.1 Lineaarinen, vakiokertoiminen ja homogeeninen differentiaaliyhtälö

Määritelmä 3. *Toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö* on muotoa

$$y'' + q(x)y' + p(x)y = r(x). \tag{3}$$

Kuten ensimmäisen kertaluvun tapauksessa, sanotaan että yhtälö (3) on homogeeninen jos termi $r(x) = 0$ ja vakiokertoiminen jos funktiot $q(x)$ ja $p(x)$ ovat vakioita. Tällä kurssilla tarkastellaan toisen kertaluvun lineaarisista differentiaaliyhtälöistä pääosin homogeenisia ja vakiokertoimisia yhtälöitä, sillä ne voidaan suhteellisen yksinkertaisella ja lukiolaiselle tutulla menetelmällä ratkaista. Tällöin siis ratkaistavaksi tulee differentiaaliyhtälö

$$y'' + qy' + py = 0,$$

jossa q ja p ovat vakioita.

Lineaarisen, homogeenisen ja vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön $y'' + qy' + py = 0$ ratkaiseminen.

Lause 2. Jos $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ovat differentiaaliyhtälön $y'' + qy' + py = 0$ yksittäisratkaisuja, niin kyseisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

jossa C_1 ja C_2 ovat vakioita. Jos suhde $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ ei ole vakio, niin kaikki yhtälön yleiset ratkaisut ovat tätä muotoa ja lisäksi vakiot C_1 ja C_2 määräytyvät yksikäsitteisesti alkuehdoista $y'(x_0) = y_0$ ja $y(x_0) = y_1$.

Todistus. Sijoitetaan yleinen ratkaisu $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ ratkaistavaan yhtälöön:

$$
\begin{aligned}
y'' + qy' + py &= (C_1y_1(x) + C_2y_2(x))'' + q(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))' \\
&\quad +p(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)) \\
&= C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) + qC_1y_1'(x) + qC_2y_2'(x) \\
&\quad +pC_1y_1(x) + pC_2y_2(x) \\
&= C_1y_1''(x) + qC_1y_1'(x) + pC_1y_1(x) \\
&\quad +C_2y_2''(x) + qC_2y_2'(x) + pC_2y_2(x) \\
&= C_1\underbrace{(y_1''(x) + qy_1'(x) + py_1(x))}_{=0} \\
&\quad +C_2\underbrace{(y_2''(x) + qy_2'(x) + py_2(x))}_{=0} \\
&= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Yleinen ratkaisu toteuttaa ratkaistavan yhtälön ja siinä on kaksi mielivaltaista vakiota, kuten toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleisessä ratkaisussa pitää olla. Se, että kaikki yhtälön yleiset ratkaisut ovat tätä muotoa mikäli suhde $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ ei ole vakio, ja että vakiot C_1 ja C_2 määräytyvät yksikäsitteisesti annetuista alkuehdoista, jätetään todistamatta. □

Määritetään yhtälön $y'' + qy' + py = 0$ kaksi yksittäisratkaisua $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ käyttämällä yritettä $y = e^{rx}$, jossa C on mielivaltainen vakio ja r jokin vakio. Huomaa, että yrite on samantapainen kuin vastaavan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön $y' + py = 0$ ratkaisu $y = Ce^{-px}$.

Sijoitetaan

$$\begin{cases} y &= e^{rx} \\ y' &= re^{rx} \\ y'' &= r^2e^{rx} \end{cases}$$

yhtälöön $y'' + qy' + py = 0$, jolloin saadaan

$$y'' + qy' + py = r^2e^{rx} + qre^{rx} + pe^{rx} = (r^2 + qr + p)e^{rx} = 0.$$

Tämä toteutuu ainoastaan silloin, kun $r^2 + qr + p = 0$, sillä aina $e^{rx} \neq 0$.

Määritelmä 4. Toisen asteen yhtälöä

$$\boxed{r^2 + qr + p = 0}\,,$$

jonka kertoimet ovat samat kuin differentiaaliyhtälön $y'' + qy' + py = 0$ kertoimet, sanotaan yhtälöä vastaavaksi *karakteristiseksi yhtälöksi.*

Esimerkki 4.1 a) Mikä on differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' + 3y = 0$ karakteristinen yhtälö?

Yhtälössä $q = 2$ ja $p = 3$. Sijoitetaan q ja p karakteristiseen yhtälöön $r^2 + qr + p = 0$, jolloin saadaan $r^2 + 2r + 3 = 0$.

b) Mikä on differentiaaliyhtälön $2y'' + 6y' + 8y = 0$ karakteristinen yhtälö?

Ensin on muutettava yhtälö normaalimuotoon, jossa termin y'' kerroin on oltava yksi. Jaetaan siis yhtälön kumpikin puoli kahdella, jolloin päädytään identtiseen yhtälöön $y'' + 3y' + 4y = 0$. Tässä $q = 3$ ja $p = 4$, jotka antavat karakteristiseksi yhtälöksi $r^2 + 3r + 4 = 0$.

c) Mikä on differentiaaliyhtälön $y'' - y = 0$ karakteristinen yhtälö?

Tarkasteltavassa yhtälössä $q = 0$ ja $p = -1$, jotka karakteristiseen yhtälöön $r^2 + qr + p = 0$ sijoitettuna antavat $r^2 - 1 = 0$.

Funktio $y = e^{rx}$ on lineaarisen, homogeenisen ja vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön $y'' + qy' + py = 0$ yksittäisratkaisu, mikäli vakiolla r on sellainen arvo, että se toteuttaa ratkaistavaa yhtälöä vastaavan karakteristisen yhtälön $r^2 + qr + p = 0$. Karakteristinen yhtälö on toisen asteen yhtälö, joten sillä on kaksi juurta r_1 ja r_2, jolloin mahdollisia differentiaaliyhtälön yksittäisratkaisujakin on kaksi. Tästä saadaan siis etsityt yksittäisratkaisut $y_1(x) = e^{r_1x}$ ja $y_2(x) = e^{r_2x}$. Seuraavassa tarkastellaan erikseen tapaukset, jolloin juuret ovat erisuuret, yhtäsuuret tai kompleksiset.

4.1.1 Karakteristisen yhtälön juuret erisuuret ja reaaliset

Tarkastellaan ensin tapausta, jolloin karakteristisen yhtälön $r^2 + qr + p = 0$ juuret ovat reaalisia ja erisuuret eli $r_1 \neq r_2$. Tällöin yhtälön $y'' + qy' + py = 0$ yksittäisratkaisuiksi saadaan edellä mainitun yritteen mukaan $y_1(x) = e^{r_1 x}$ ja $y_2(x) = e^{r_2 x}$. Näiden ratkaisujen suhde $\frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x}$ ei ole vakio, joten yhtälön yleinen ratkaisu on lauseen 2 mukaisesti muotoa

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}},$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita.

Esimerkki 4.2 a) Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 5y' - 6y = 0$ yleinen ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöä vastaava karakteristinen yhtälö on $r^2 + 5r - 6 = 0$, josta voidaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ratkaista juuret:

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 7}{2},$$

josta edelleen ratkaistaan

$$r_1 = -6 \text{ ja } r_2 = 1.$$

Juuret ovat erisuuret ja reaaliset, joten yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{x},$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita.
b)Määritä se a-kohdan yksittäisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y'(0) = 1$ ja $y(0) = 0$.

Sijoitetaan alkuehdot a-kohdassa saatuun ratkaisuun y ja tämän derivaattaan $y' = C_1 \cdot (-6)e^{-6x} + C_2 e^{x}$:

$$\begin{cases} y'(0) &= C_1 \cdot (-6)e^{-6 \cdot 0} + C_2 e^{0} \overset{\text{oltava}}{=} 1 \\ y(0) &= C_1 e^{-6 \cdot 0} + C_2 e^{0} \overset{\text{oltava}}{=} 0, \end{cases}$$

josta edelleen

$$\begin{cases} -6C_1 + C_2 &= 1 \\ \quad C_1 + C_2 &= 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä $C_1 = -C_2$ ja sijoitetaan se ylempään yhtälöön, jolloin saadaan

$$-6C_1 + C_2 = -6 \cdot (-C_2) + C_2 = 7C_2 = 1.$$

Vakioiden arvot siis ovat

$$\begin{cases} C_1 &= -\frac{1}{7} \\ C_2 &= \frac{1}{7} \end{cases}$$

ja alkuehdot toteuttava yksittäisratkaisu on

$$y = -\frac{1}{7}e^{-6x} + \frac{1}{7}e^{x}.$$

4.1.2 Karakteristisen yhtälön juuret yhtäsuuret

Jos karakteristisella yhtälöllä $r^2+qr+p = 0$ on kaksinkertainen juuri $r_{1,2} = r$, saadaan edellä mainitulla yritteellä ainoastaan yksittäisratkaisu $y_1(x) = e^{rx}$. Toisaalta myös $y(x) = xe^{rx}$ on ratkaisu, sillä jos sijoitetaan

$$\begin{cases} y &= xe^{rx} \\ y' &= e^{rx} + xre^{rx} \\ y'' &= re^{rx} + re^{rx} + xr^2e^{rx} \end{cases}$$

yhtälöön $y'' + qy' + py = 0$, huomataan että se toteutuu:

$$\begin{aligned} y'' + qy' + py &= 2re^{rx} + xr^2e^{rx} + q(e^{rx} + xre^{rx}) + pxe^{rx} \\ &= xe^{rx}(r^2 + qr + p) + e^{rx}(2r + q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $r^2 + qr + p = 0$, sillä r on karakteristisen yhtälön juuri. Lisäksi tapauksessa, jolloin toisen asteen yhtälöllä on ainoastaan yksi juuri, menee sen ratkaisukaavassa diskriminantti nollaksi ja juuri on suuruudeltaan $r = \frac{-q}{2}$, jolloin siis $2r = -q$.

Nyt on siis löydetty kaksi yksittäisratkaisua yhtälölle $y'' + qy' + py = 0$ ja näiden suhde $\frac{xe^{rx}}{e^{rx}} = x$ ei ole vakio, joten yhtälön yleinen ratkaisu on lauseen 2 mukaisesti muotoa

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}},$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita.

Esimerkki 4.3 a) Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' + y = 0$ yleinen ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöä vastaava karakteristinen yhtälö on $r^2 + 2r + 1 = 0$. Se voidaan kirjoittaa muotoon $(r+1)^2 = 0$, josta nähdään, että yhtälöllä on kaksinkertainen juuri $r = -1$. Tämän perusteella tiedetään, että yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita.
b) Määritä se a-kohdan yksittäisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y'(0) = 1$ ja $y(0) = 0$

Sijoitetaan alkuehdot a-kohdassa saatuun ratkaisuun y ja tämän derivaattaan $y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x}$:

$$\begin{cases} y'(0) &= -C_1 e^{-0} + C_2 e^{-0} - C_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} \overset{\text{oltava}}{=} 1 \\ y(0) &= C_1 e^{-0} + 0 \cdot C_2 e^{-0} \overset{\text{oltava}}{=} 0, \end{cases}$$

josta edelleen

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 &= 1 \\ C_1 &= 0. \end{cases}$$

Alemman yhtälön mukaan $C_1 = 0$ ja sijoitetaan se ylempään yhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{cases} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 1. \end{cases}$$

Näin ollen alkuehdot toteuttava yksittäisratkaisu on

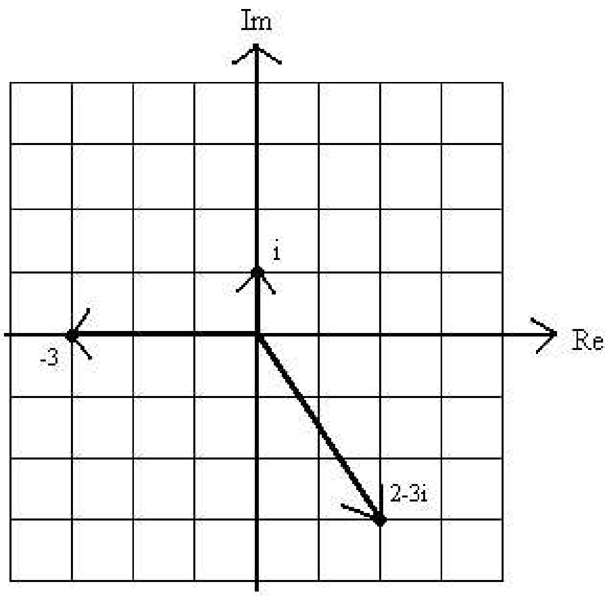
$$y = xe^{-x}.$$

4.1.3 Karakteristisen yhtälön juuret kompleksiset

Siltä varalta, että tiedot kompleksiluvuista ovat unohtuneet tai puutteelliset, käsitellään seuraavaksi lyhyesti tällä kurssilla tarvittavia perustietoja kompleksiluvuista.

Ratkaistaessa esimerkiksi yhtälöä $x^2 = -4$ tai yhtälöä $x^2 = -1$, todetaan usein, ettei näillä ole ratkaisua. Tämä väite ei täysin pidä paikkansa. Mikäli etsitään ratkaisua *reaalilukujen* joukosta on totta, ettei kyseisillä yhtälöillä ole ratkaisua, mutta jos laajennetaan tarkastelua *kompleksilukuihin* on kyseisillä yhtälöillä ratkaisut.

Laajennus reaaliluvuista kompleksilukuihin edellyttää, että tarkastellaan reaalilukuja esittävän lukusuoran sijasta xy-tasoa, jota kutsutaan *kompleksitasoksi*. Tason luvut muodostavat kompleksilukujen joukon, jota merkitään kirjaimella $\mathbb{C}$ ja ne ovat muotoa $a + bi$, jossa a ja b ovat reaalilukuja. Reaaliluvut ovat lukusuoran (x-akselin) pisteitä ja koordinaatiston x-akselia kutsutaankin *reaaliakseliksi*. Koordinaatiston pystyakselia eli y-akselia kutsutaan *imaginaariakseliksi* ja sen yksikkö on *imaginaariyksikkö* i. Kuvassa 10 on kompleksitasoon piirretty esimerkkinä imaginaariluku $2 - 3i$ sekä erikoistapauksena pelkkä reaaliluku -3 ja puhdas imaginaariluku i. Huomaa, että ne vastaavat xy-tason pisteitä (2,-3), (-3,0) ja (0,1).



Kuva 10: Luvut 2-3i, -3 ja i esitettynä kompleksitasossa.

Imaginaariyksiköllä i on tärkeä ominaisuus

$$i^2 = -1$$

eli

$$i = \sqrt{-1}.$$

Esimerkki 4.4 Yllä olevaa imaginaariyksikön ominaisuutta hyväksikäyttäen voidaan ratkaista esimerkiksi yhtälö $x^2 = -1$, jolloin $x = \pm\sqrt{-1}$ eli imaginaariyksikön i määritelmän mukaan $x = \pm i$. Vastaavasti ratkaistaan yhtälö $x^2 = -4$, jolloin $x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$.

Kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku perustuu tavallisiin liitäntä-, vaihdanta- ja osittelulakeihin.

Esimerkki 4.5 Lasketaan kompleksilukujen $2 - 3i$ ja $-1 + 2i$
a) summa:

$$(2 - 3i) + (-1 + 2i) = 2 - 3i - 1 + 2i = 1 - i.$$

b) tulo:

$$\begin{aligned}
(2 - 3i)(-1 + 2i) &= 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2i + (-3i) \cdot (-1) + (-3i) \cdot 2i \\
&= -2 + 4i + 3i - 6i^2 \\
&= -2 + 7i + 6 \\
&= 4 + 7i.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan tilannetta, jolloin karakteristisen yhtälön $r^2 + qr + p = 0$ juuret ovat kompleksilukuja eli $r_1 = a + bi$ ja $r_2 = a - bi$ ($b \neq 0$). Tällöin differentiaaliyhtälön $y'' + qy' + py = 0$ kaksi yksittäisratkaisua kompleksilukualueella ovat $y_1(x) = e^{r_1 x}$ ja $y_2(x) = e^{r_2 x}$, josta edelleen yhtälön yleiseksi ratkaisuksi kompleksilukualueella saadaan

$$y(x) = D_1 e^{r_1 x} + D_2 e^{r_2 x},$$

jossa D_1 ja D_2 ovat komleksilukuvakioita. Differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa halutaan löytää reaalisia ratkaisuja, joiden selvittämiseksi lähdetään liikkeelle yhtälön yleisestä ratkaisusta ja käytetään eksponenttifunktion ominaisuutta

$$e^{x+y} = e^x e^y \tag{4}$$

sekä Eulerin kaavaa

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x : \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
y &= D_1 e^{r_1 x} + D_2 e^{r_2 x} \\
&= D_1 e^{(a+bi)x} + D_2 e^{(a-bi)x} \\
&\overset{(4)}{=} D_1 e^{ax} e^{bix} + D_2 e^{ax} e^{-bix} \\
&\overset{(5)}{=} D_1 e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + D_2 e^{ax}(\cos bx + i \sin(-bx)) \\
&= D_1 e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + D_2 e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) \\
&= (D_1 + D_2) e^{ax} \cos bx + i(D_1 - D_2) e^{ax} \sin bx \\
&= e^{ax}((D_1 + D_2)\cos bx + i(D_1 - D_2)\sin bx).
\end{aligned}$$

Vakiot D_1 ja D_2 ovat mielivaltaisia, joten valitaan ne niin, että $C_1 = D_1 + D_2$ ja $C_2 = i(D_1 - D_2)$ ovat reaalisia. Yleinen ratkaisu reaalialueella siis on

$$\boxed{y(x) \ = \ e^{ax}(C_1 \cos bx \ + \ C_2 \sin bx)} \ ,$$

jossa C_1 ja C_2 ovat reaalivakioita. Lauseen 2 mukaisesti differentiaaliyhtälön $y'' + qy' + py = 0$ reaaliset yksittäisratkaisut ovat $y_1(x) = e^{ax}\cos bx$ ja $y_2(x) = e^{ax}\sin bx$, joka voidaan todeta sijoittamalla ratkaisut yhtälöön (harjoitustehtävä).

Esimerkki 4.6 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Yhtälön karakteristinen yhtälö on $r^2 + 4r + 13 = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i,$$

jolloin juuret ovat

$$r_1 = -2 + 3i \text{ ja } r_2 = -2 - 3i.$$

Juuret ovat kompleksiset; reaaliosa $a = -2$ ja imaginääriosan kerroin $b = 3$. Yhtälön yleinen ratkaisu reaalialueella on tällöin

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x),$$

jossa C_1 ja C_2 ovat reaalivakioita.

Esimerkki 4.7 a) Määritä differentiaaliyhtälön $y''+4y=0$ yleinen ratkaisu.

Ratkaistavaa yhtälöä vastaavan karakteristisen yhtälön $r^2+4=0$ juuret ovat $r=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$. Juurten reaaliosa $a=0$ ja imaginääriosan kerroin $b=2$, jolloin yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

jossa C_1 ja C_2 ovat reaalivakioita (huom. $e^0=1$).

b) Määritä se yksittäisratkaisu, jolle pätee alkuehdot $y(0)=1$ ja $y'(0)=2$.

Sijoitetaan alkuehdot a-kohdan yleiseen ratkaisuun y ja tämän derivaattaan $y'=-2C_1\sin 2x + 2C_2 \cos 2x$:

$$\begin{cases} y'(0) &= -2C_1 \sin(2\cdot 0) + 2C_2\cos(2\cdot 0) \overset{\text{oltava}}{=} 2 \\ y(0) &= C_1\cos(2\cdot 0) + C_2 \sin(2\cdot 0) \overset{\text{oltava}}{=} 1, \end{cases}$$

josta edelleen

$$\begin{cases} 2C_2 &= 2 \\ C_1 &= 1. \end{cases}$$

Tästä nähdään, että molemmat vakiot $C_1 = C_2 = 1$, joten alkuehdot toteuttava yksittäisratkaisu on

$$y = \cos 2x + \sin 2x.$$

Harjoitustehtäviä

4.1 Ratkaise differentiaaliyhtälöt.

a) $y''+3y'-4y=0$ c) $y''-6y'+9y=0$

b) $y''-16y=0$ d) $y''+4y'+5y=0$

4.2 Ratkaise differentiaaliyhtälö

a) $y''-2y'+10y=0$, kun $y(0)=0$ ja $y'(0)=1$.

b) $y''-4y'+4y=0$, kun $y(0)=3$ ja $y'(0)=1$.

c) $y''+y'-2y=0$, kun $y(0)=2$ ja $y'(0)=1$.

4.3 Minkä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

a) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ c) $y=C_1e^{-5x}+C_2xe^{-5x}$

b) $y=e^{2x}(C_1\cos x + C_2 \sin x)$ d) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

4.4 Osoita, että $y_1 = e^{ax} \cos bx$ ja $y_2 = e^{ax} \sin bx$ toteuttavat differentiaaliyhtälön $y'' + qy' + py = 0$.

4.5 Osoita, että yhtälön $y'' + qy' + py = 0$ ratkaisu on

a) $y = x$ jos $q + px = 0$.

b) $y = e^x$ jos $1 + q + p = 0$.

4.6 Tutki differentiaaliyhtälön $x^2y'' + qxy' + py = 0$ ratkaisemista sijoituksella $x = e^t$.

4.7 Millä reaaliarvolla p differentiaaliyhtälön $y'' + py = 0$ kaikki ratkaisut

a) ovat rajoitettuja.

b) lähestyvät nollaa, kun $x \to \pm\infty$. Perustele.

4.2 Lineaarinen, vakiokertoiminen ja epähomogeeninen differentiaaliyhtälö

Lineaarisen, vakiokertoimisen ja epähomogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$y'' + qy' + py = r(x)$$

yleinen ratkaisu on summa

$$y = y_h + y_e,$$

jossa y_h on vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu ja y_e on jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu. Ratkaisu muodostuu siis vastaavasti kuin ensimmäisen kertaluvun tapauksessa (luku 3.3.2).

Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu määräytyy karakteristisen yhtälön juurista, jota on käsitelty edellä. Sen sijaan epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu voidaan löytää tekemällä sopiva arvaus ratkaisusta. Tehdään yrite, joka on samaa tyyppiä kuin funktio $r(x)$ ja jossa on tuntemattomia kertoimia. Kertoimet voidaan määrittää sijoittamalla yrite ratkaistavaan yhtälöön (luku 3.3.2).

Esimerkki 4.8 Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' + y = x$.

Esimerkissä (4.3) on vastaavan homogeenisen yhtälön $y'' + 2y' + y = 0$ yleiseksi ratkaisuksi saatiin

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x},$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita. Seuraavaksi etsitään epähomogeeniselle yhtälölle jokin yksittäisratkaisu. Nyt ratkaistavan yhtälön tekee epähomogeeniseksi ensimmäisen asteen polynomi $r(x) = x$, joten oletetaan ratkaisun olevan samaa muotoa ja tehdään yrite $y_e = Ax + B$. Sijoitetaan

$$\begin{cases} y &= Ax + B \\ y' &= A \\ y'' &= 0 \end{cases}$$

ratkaistavaan yhtälöön:

$$y'' + 2y' + y = 0 + 2A + (Ax + B) \overset{\text{oltava}}{=} x.$$

Tästä ratkaistaan vakioille A ja B arvot, kun saman asteen termien kertoimet on oltava yhtä suuret eli

$$\begin{cases} 2A + B &= 0 \\ A &= 1. \end{cases}$$

Sijoitetan $A = 1$ ylempään yhtälöön, jolloin siis $B = -2$ ja yksittäisratkaisu on

$$y_e = x - 2.$$

Tästä edelleen yhdistämällä ratkaisut, saadaan yhtälön yleiseksi ratkaisuksi

$$y = y_h + ye = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x - 2,$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita.

Huomautus Mikäli epähomogeenisen yhtälön funktiossa $r(x)$ on sama termi kuin homogeenisen yhtälön yleisessä ratkaisussa, pitää yrite kertoa muuttujalla x aivan kuten ensimmäisen kertaluvun tapauksessakin (luku 3.3.2).

Harjoitustehtäviä

4.8 Ratkaise differentiaaliyhtälöt.

a) $y'' - y' - 2y = 3$ c) $y'' - y' - 2y = x + 3$
b) $y'' - y' - 2y = x$ d) $y'' - y' - 2y = x^2$

4.9 Ratkaise differentiaaliyhtälöt.

a) $y'' - 7y' + 6y = e^{2x}$ b) $y'' - 7y' + 6y = e^{x}$

4.10 Ratkaise differentiaaliyhtälöt.

a) $y'' + 9y = \sin 2x$ b) $y'' + 9y = \sin 3x$

Miksi a-kohdassa ei tarvitse tehdä yritettä $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$, vaan riittää yrite $y = C_1 \sin 2x$? Miksei sama päde b-kohtaan?

4.11 Mikä on differentiaaliyhtälön $y'' - 4y' + 4y = x$ yleinen ratkaisu sekä se yksityisratkaisu, joka arvolla $x = 0$ saa arvon $y = \frac{1}{4}$ ja arvolla $x = 1$ arvon $y = 0$. (yo-tehtävä s72)

4.3 Sovelluksia

4.3.1 Oppiminen (psykologia)

Henkilön on opeteltava suuri määrä vieraan kielen sanoja ulkomaille muuttoa varten ja hän tekee kunakin päivänä saman verran työtä sanojen oppimiseen. Oletetaan, että oppimistyön alkaessa oppimisnopeus on v_0. Opitun määrän lisääntyessä oppimisnopeus pienenee, joten oppimiskiihtyvyys on negatiivinen (vrt. autolla nopeuden hidastuessa kiihtyvyys on negatiivinen). Lisäksi oletetaan, että oppimiskiihtyvyys on suoraan verrannollinen oppimisnopeuteen. Olkoon $m(t)$ opittu sanamäärä hetkellä t, jolloin oppimisnopeutta kuvaa sen derivaatta $m'(t)$ ja oppimiskiihtyvyyttä $m''(t)$. Muodostetaan yhtälö opitulle sanamäärälle hetkellä t.

Tiedetään, että oppimiskiihtyvyys on suoraan verrannollinen oppimisnopeuteen, jolloin saadaan ratkaistavaksi yhtälö

$$m''(t) = -km'(t),$$

jossa k on positiivinen verrannollisuusvakio. Ratkaistavan yhtälön karakteristinen yhtälön $r^2 + kr = r(r + k) = 0$ juuret ovat $r_1 = 0$ ja $r_2 = -k$. Juuret ovat siis erisuuret ja reaaliset, joten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$m(t) = C_1 + C_2 e^{-kt},$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita (huom. $e^0 = 1$).
Vakiot voidaan määrätä yksikäsitteisesti alkuehdoista. Oletetaan, että oppija aloittaa oppimisen ajan hetkellä $t = 0$, jolloin hän ei ole oppinut vielä ainuttakaan sanaa. Tästä siis saadaan ensimmäinen alkuehto, joka on $m(0) = 0$. Toisaalta tiedetään, että aluksi hänen oppimisnopeutensa on v_0, joten toinen alkuehto on $m'(0) = v_0$. Sijoitetaan nämä yleiseen ratkaisuun $m(t)$ ja sen derivaattaan $m'(t) = C_2 \cdot (-k)e^{-kt}$:

$$\begin{cases} m'(0) & = C_2 \cdot (-k)e^{-k \cdot 0} \overset{\text{oltava}}{=} v_0 \\ m(0) & = C_1 + C_2 e^{-k \cdot 0} \overset{\text{oltava}}{=} 0, \end{cases}$$

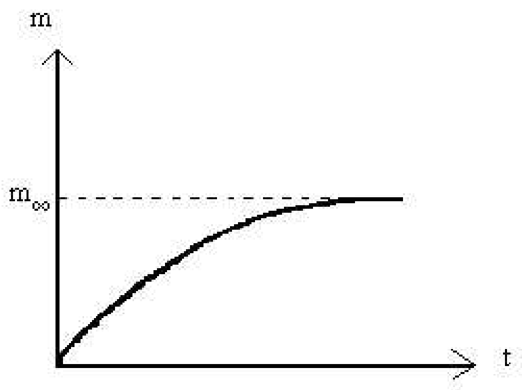
josta edelleen

$$\begin{cases} -kC_2 & = v_0 \\ C_1 + C_2 & = 0. \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä ratkaistaan $C_2 = -\frac{v_0}{k}$ ja alemmasta $C_1 = -C_2$. Sanojen lukumäärää hetkellä t kuvaa yhtälö

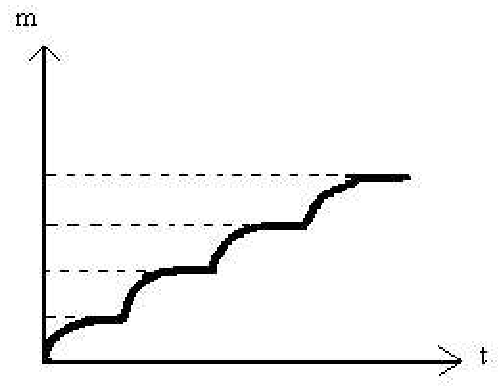
$$m(t) = \frac{v_0}{k} - \frac{v_0}{k}e^{-kt} = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}),$$

jota on mallinnettu kuvassa 11.



Kuva 11: Opittujen sanojen lukumäärä ajan funktiona.

Tarkastellaan vielä tuloksen järkevyyttä. Kun $t \to \infty$, niin $m \to \frac{v_0}{k}$. Näin ollen ajan kuluessa opittujen sanojen määrä lähenee raja-arvoa $\frac{v_0}{k}$, jota merkataan termillä m_∞. Yleensä oppimista tapahtuu asteittain. Oppija saattaa siis juuttua joksikin aikaa paikalleen, jolloin oppimista ei juuri tapahdu. Toisaalta oppimistyön jatkuessa tapahtuu jossain vaiheessa oppimisen paranemista, kunnes jälleen juututaan tietylle tasolle. Oppimiskäyräksi ei siten saada kuvan 11 käyrää sellaisenaan, vaan tällaisista kokoonpantu kuvan 12 mukainen käyrä.



Kuva 12: Oppimistapahtumaa totuudenmukaisemmin kuvaava käyrä.

4.3.2 Harmoninen värähdysliike (fysiikka)

Jousen toinen pää on kiinnitetty seinään ja toisessa päässä on kiinni kappale, jonka massa on m. Jousta venytetään niin, että kappaleen poikkeama tasapainoasemasta on A ja päästetään värähdysliikkeeseen ajanhetkellä $t = 0$. Tarkastellaan miten kappaleen paikka x riippuu ajasta. Valitaan origo tasapainokohdaksi ja positiivinen suunta on venyttävän voiman suunta. Lisäksi jos kappale on kohdassa x, vaikuttaa jousi siihen *harmonisella voimalla* $F = -kx$, missä $k > 0$ on jouselle ominainen vakio ja miinusmerkki tulee siksi, koska voiman ja poikkeaman suunnat ovat vastakkaiset.

Mekaniikan II peruslain mukaan kappaleeseen vaikuttava voima F on kappaleen massan m ja kiihtyvyyden a tulo: $F = ma$, jossa $a = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$. Harmoniselle värähdysliikkeelle saadaan siis yhtälö

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx.$$

Muunnetaan yhtälö normaalimuotoon sekä kirjoitetaan kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Yhtälön karakteristisen yhtälön

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

juuret ovat

$$r_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ja } r_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Koska juuret ovat kompleksiset, yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Vakiot määräytyvät alkuehdoista. Ensinnäkin tiedetään, että kappaletta venytetään, niin että sen poikkeama tasapainoasemasta on A, tällöin $x(0) = A$. Toisaalta kappale ei ole liikkeessä irroitushetkellä, jolloin siis $x'(0) = 0$. Sijoitetaan yleisen ratkaisun yhtälöön alkuehto $x(0) = A$, jolloin

$$x(0) = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 = C_1 \overset{\text{oltava}}{=} A,$$

josta siis $C_1 = A$ ja edelleen, kun sijoitetaan alkuehto $x'(0) = 0$ yhtälöön $x'(t) = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$, saadaan

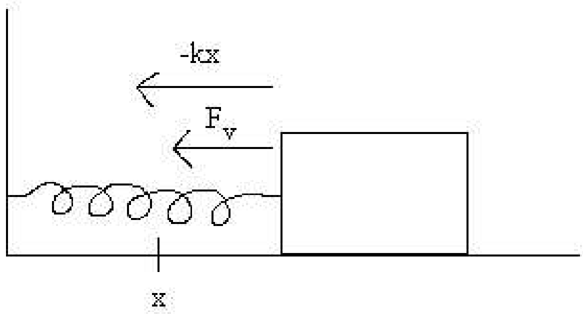
$$x'(0) = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 + C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 = C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \overset{\text{oltava}}{=} 0.$$

Koska $\sqrt{\frac{k}{m}}$ on vakio$\neq 0$, on oltava $C_2 = 0$. Kappaleen etäisyys tasapainopisteestä kullakin ajanhetkellä, kun jousta on ensin venytetty origosta etäisyydelle A, voidaan ratkaista yhtälöstä

$$x(t) = A \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

4.3.3 Vaimennettu harmoninen värähdysliike (jatkoa edelliseen esimerkkiin)

Todellinen värähtelijä vaimenee vähitellen, ellei sen värähtelyä ylläpidetä ulkoisella voimalla. Oletetaan, että jousen päässä olevaan kappaleeseen vaikuttaa harmonisen voiman $F = -kx$ lisäksi nopeuteen verrannollinen vaimentava voima F_v. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 13. Tällöin syntyy *vaimennettu harmoninen värähdysliike*, sillä vastusvoima vaimentaa jousen värähtelyä. Muodostetaan yhtälö, josta voidaan ratkaista kappaleen sijainti kullakin hetkellä t, kun alkuehdot ovat samat kuin edellisessä tehtävässä eli $x(0) = A$ ja $x'(0) = 0$.



Kuva 13: Jousen päässä olevaan kappaleeseen vaikuttavat voimat.

Vastusvoima on kappaleen nopeuteen verrannollinen, joten $F_v = -hv$, jossa nopeus $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'$ ja h on verrannollisuusvakio. Vaimennetun harmonisen värähdysliikkeen differentiaaliyhtälöksi saadaan

$$mx'' = -hx' - kx,$$

joka normaalimuodossa kirjoitetaan muotoon

$$x'' + \frac{h}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Tätä yhtälöä vastaava karakteristinen yhtälö on

$$r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0,$$

ja sen juuret ovat

$$r = \frac{-\frac{h}{m} \pm \sqrt{(\frac{h}{m})^2 - 4 \cdot \frac{k}{m}}}{2}.$$

Yksinkertaisuuden vuoksi merkitään $\frac{k}{m} = K^2$ ja $\frac{h}{m} = 2H$, jolloin juuret voidaan kirjoittaa hieman yksinkertaisemmin muodossa

$$r = \frac{-2H \pm \sqrt{4H^2 - 4K^2}}{2} = -H \pm \sqrt{H^2 - K^2}.$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu vaihtelee sen mukaan onko $H = K$, $H > K$ vai $H < K$, joten tarkastelu on jaettava kolmeen osaan.

1. Tarkastellaan ensin tilannetta, jolloin $H = K$ (*kriittinen vaimennus*). Tällöin karakteristisen yhtälön molemmat juuret ovat $r = -H$, joten yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x = C_1 e^{-Ht} + C_2 t e^{-Ht},$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita. Vakiot voidaan ratkaista alkuehdoista $x(0) = A$ ja $x'(0) = 0$ (harjoitustehtävä).

2. Toisena tarkastellaan tapausta, jolloin $H > K$ (*vahva vaimennus*). Nyt karakteristisen yhtälön juuret ovat reaaliset ja erisuuret:

$$r_1 = -H + \sqrt{H^2 - K^2} \text{ ja } r_2 = -H - \sqrt{H^2 - K^2},$$

joten yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x = e^{-Ht}(C_1 e^{t\sqrt{H^2-K^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{H^2-K^2}}),$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita. Vakiot voidaan ratkaista alkuehdoista $x(0) = A$ ja $x'(0) = 0$ (harjoitustehtävä).

3. Viimeisenä tarkastellaan tilannetta, jolloin $H < K$ (*heikko vaimennus*). Karakteristisen yhtälön juuret ovat nyt kompleksiset:

$$r_1 = -H + i\sqrt{H^2 - K^2} \text{ ja } r_2 = -H - i\sqrt{H^2 - K^2},$$

joten yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x = e^{-Ht}(C_1 \cos(t\sqrt{K^2 - H^2}) + C_2 \sin(t\sqrt{K^2 - H^2})),$$

jossa C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita, jotka voidaan ratkaista alkuehdoista $x(0) = A$ ja $x'(0) = 0$ (harjoitustehtävä).

Lisätehtävä Tutki kolmessa eri tapauksessa $H = K$, $H > K$ ja $H < K$ miten ratkaisufunktiot käyttäytyvät, kun $t \to \infty$. Päättele tästä mitä tarkoitetaan vahvalla, heikolla ja kriittisellä vaimennuksella.

5 Differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaisu

Differentiaaliyhtälön ratkaisufunktion y lauseketta ei aina pystytä käsin ratkaisemalla tai edes tietokoneohjelmalla löytämään. Jos halutaan tietää ainoastaan funktion arvo $y(x)$ jossakin kohdassa x ja jollakin tietyllä tarkkuudella, voidaan turvautua differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen numeerisin menetelmin. Tällöinkään ei saada selville ratkaisufunktion lauseketta y, vaan ainoastaan ratkaisun arvo $y(x)$ halutussa kohdassa x. Numeerisia menetelmiä on erilaisia, ja riippuen millä tarkkuudella ratkaisun likiarvo halutaan, voidaan käyttää eri menetelmää. Tällä kurssilla tarkastellaan joidenkin ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista numeerisesti ja otetaan pikainen katsaus *Eulerin menetelmään* ja, hieman edellistä tarkempaan, *Eulerin keskipistemenetelmään.*

Jotta differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaisu olisi yksikäsitteinen, täytyy kyseessä olla alkuarvoprobleema, eli yhtälön $y' = f(x,y)$ lisäksi pitää olla tunnettuna alkuehto $y(x_0) = y_0$.

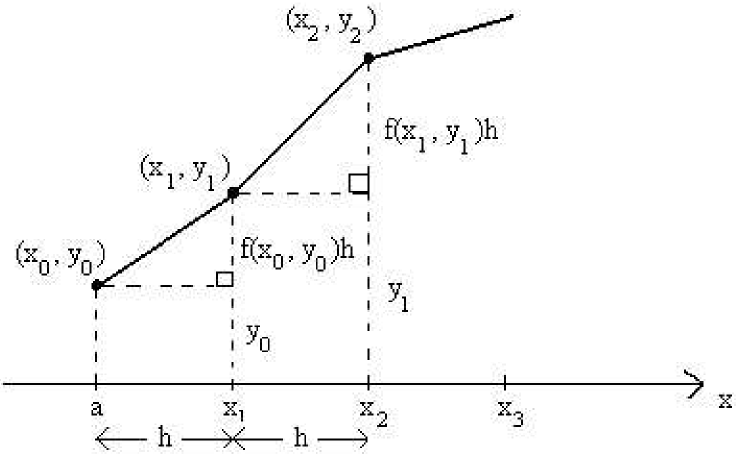
5.1 Eulerin menetelmä

Eulerin menetelmä on yksinkertaisin numeerinen menetelmä, jolla voidaan ratkaista differentiaaliyhtälöitä. Vaikka menetelmää käytetäänkin paljon sen yksinkertaisuuden vuoksi, on olemassa muita menetelmiä, jotka antavat huomattavan paljon tarkempia likiarvoja kuin tämä menetelmä.

Tarkastellaan differentiaaliyhtälön $y' = f(x,y)$ ratkaisua $y(x)$ numeerisesti, kun x on välillä $[x_0,b]$ ja kun pätee alkuehto $y(x_0) = y_0$.

Ensin jaetaan tarkasteltava väli $[x_0,b]$ yhtä pitkiin osaväleihin, siten että välin pituus on h ja merkitään jakopisteitä x_0, x_1, x_2,... . Kun siis välin alkupiste x_0 ja osavälin pituus h tunnetaan, saadaan muut jakopisteet laskemalla $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$ ja yleisesti $x_{k+1} = x_k + h$, kun $k = 0,1,2,...$.

Mikäli välin pituus h on riittävän pieni, voidaan olettaa funktion kuvaajan käyttäytyvän välin alkupisteeseen piirretyn tangentin suuntaisesti koko osavälillä. Tällöin siis ensimmäisellä osavälillä $[x_0,x_1]$ ratkaisufunktion tangentin kulmakerroin on $y'(x_0) = f(x_0,y_0)$, toisella osavälillä $[x_1,x_2]$ tangentin kulmakerroin on $y'(x_1) = f(x_1{,}y_1)$ ja niin edelleen. Eulerin menetelmää on havainnollistettu kuvassa 14.



Kuva 14: Eulerin menetelmä.

Todellisuudessa välin pituutta ei pystytä valitsemaan niin pieneksi, että ratkaisufunktio kulkisi täysin välin alkupisteeseen piirretyn tangentin suuntaisesti koko osavälillä. Tällöin siis kussakin jakopisteessä x_k ratkaisufunktion arvo $y(x_k) = y_k$ on ainoastaan likiarvo.

Ensimmäisen osavälin $[x_0{,}x_1]$ alkupisteen ratkaisufunktion tarkka arvo $y(x_0) = y_0$ tiedetään tehtävän alkuehdon perusteella. Ensimmäisen osavälin ratkaisufunktion tangentin kulmakerroin on kulmakertoimen määritelmän mukaan $y'(x_0) = f(x_0{,}y_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$. Tästä yhtälöstä saadaan ratkaisuna toisen osavälin $[x_1{,}x_2]$ alkupisteen x_1 ratkaisufunktion numeerinen likiarvo $y(x_1) = y_1 = y_0 + f(x_0{,}y_0)h$ ja yleisesti $y_{k+1} = y_k + f(x_k{,}y_k)h$, kun $k = 0{,}1{,}2{,}\ldots$.

Eulerin menetelmä voidaan esittää rekursiivisesti yhtälöinä

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ x_{k+1} &= x_k + h \\ y(x_{k+1}) = y_{k+1} &= y_k + f(x_k{,}y_k)h, \end{aligned}$$

jossa x_0 ja y_0 tunnetaan tehtävän alkuehdon perusteella ja $k = 0{,}1{,}2{,}\ldots$.

Esimerkki 5.1 Tarkastellaan differentiaaliyhtälön $y' = 2y$ ratkaisemista numeerisesti Eulerin menetelmällä välillä [0,1], kun alkuehto on $y(0) = 1$ ja askelpituus

a) $h = 0{,}5$.

Nyt $y' = f(x_k,y_k) = 2y_k$ sekä $x_0 = 0$ ja $y_0 = 1$. Rekursiivisten yhtälöiden mukaisesti $x_1 = 0{,}5$ ja $x_2 = 1$ sekä

$$\begin{aligned} y(0{,}5) = y_1 &= y_0 + 2y_0 \cdot 0{,}5 = 1 + 2 \cdot 0{,}5 = 2 \\ y(1) = y_2 &= y_1 + 2y_1 \cdot 0{,}5 = 2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 4 \end{aligned}$$

b) $h = 0{,}2$.

Rekursiivisten yhtälöiden mukaan: $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, ... ,$x_5 = 1$ sekä

$$\begin{aligned} y(0{,}2) = y_1 &= y_0 + 2y_0 \cdot 0{,}2 = 1 + 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}4 \\ y(0{,}4) = y_2 &= y_1 + 2y_1 \cdot 0{,}2 = 1{,}4 + 2 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}2 = 1{,}96 \\ y(0{,}6) = y_3 &= y_2 + 2y_2 \cdot 0{,}2 = 1{,}96 + 2 \cdot 1{,}96 \cdot 0{,}2 = 2{,}744 \\ y(0{,}8) = y_4 &= y_3 + 2y_3 \cdot 0{,}2 = 2{,}744 + 2 \cdot 2{,}744 \cdot 0{,}2 = 3{,}8416 \\ y(1) = y_5 &= y_4 + 2y_4 \cdot 0{,}2 = 3{,}8416 + 2 \cdot 3{,}8416 \cdot 0{,}2 = 5{,}37824 \end{aligned}$$

c) $h = 0{,}1$.

Laskeminen on suhteellisen työlästä käsin, sillä arvoja tulee nyt 10 kappaletta. Tästä syystä käytetään apuna laskinta, johon syötetään ohjelma, joka laskee tarvitut arvot. Ensin syötetään laskimeen tarkasteltava funktio $f(x,y)$ grafiikkafunktioksi $Y1 = 2Y$. Tämän jälkeen tallennetaan laskimen muistiin osavälin pituus $0{,}1 \to H$ sekä alkuarvot $1 \to Y$ ja $-0{,}1 \to X$. Huomaa, että muuttujan x alkuarvo on aloitettava yhden askelpituuden verran vasemmalta, jotta laskut tulevat oikein. Kun grafiikkafunktio ja tarvittavat luvut on tallennettu laskimeen, kirjoitetaan näytölle yhden rivin ohjelma:

$$X + H \to X : Y + Y1 \cdot H \to Y.$$

Kirjain Y voidaan kaikkialla korvata kirjaimella Z jos laskin ei hyväksy kirjainta Y grafiikkafunktion lausekkeeseen. Taulukon tulokset on laskettu laskimella ja pyöristetty kahden desimaalin tarkkuuteen.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,00	1,20	1,44	1,73	2,07	2,49	2,99	3,58	4,23	5,16	6,19

d) Verrataan b ja c-kohdissa lasketuttuja likiarvoja oikeaan arvoon 0,2:n välein.

Yhtälö $y' = 2y$ on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen yhtälö, jonka yleinen ratkaisu on $y = Ce^{2x}$ ja edelleen alkuehdon $y(0) = 1$ toteuttava yksittäisratkaisu on $y = e^{2x}$. Sijoitetaan tähän haluttu muuttujan x arvo ja verrataan sitä b ja c kohtien tuloksiin.

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
y	1,00	1,40	1,96	2,74	3,84	5,38	$h = 0,2$
y	1,00	1,44	2,07	2,99	4,23	6,19	$h = 0,1$
y	1,00	1,49	2,23	3,32	4,95	7,39	oikea arvo

Huomataan, että välin pituuden h pienetessä Eulerin menetelmä antaa parempia tuloksia kuin suuremmilla askelpituuksilla. Tämä tukee sitä, että pienemmillä välin pituuksilla ratkaisufunktion poikkeama välin alkupisteeseen piirretystä tangentista on pienempi.

Eulerin menetelmän heikkous on siis siinä, että ratkaisufunktio korvataan kullakin osavälillä suoralla, jonka kulmakerroin on määräytynyt ainoastaan välin alkupisteestä, joka ei välttämättä kuvaa erityisen hyvin funktion muutosta koko kyseisellä osavälillä. Mitä suurempi askelpituus h on, niin sen suurempi on myös poikkeama oikeasta arvosta. Lisäksi koska lausekkeeseen y_{k+1} sijoitettava arvo y_k on likiarvo, tulee virhettä joka laskukerralla enemmän. Eulerin menetelmää onkin kehitetty ottamalla paremmin huomioon koko osavälillä tapahtuvat muutokset esimerkiksi laskemalla kulmakerroin useammassa kohdassa.

5.2 Eulerin keskipistemenetelmä

Eulerin *keskipistemenetelmässä* kulmakerroin lasketaan nimensä mukaisesti osavälin keskipisteessä. Keskipistettä vastaava funktion y arvo lasketaan samoin kuin Eulerin menetelmässä. Tarkastellaan menetelmää tarkemmin yhtälölle $y' = f(x,y)$, kun alkuehto on $y(x_0) = y_0$ ja tarkastelu väli $[x_0,b]$.

Jaetaan tarkasteluväli jälleen yhtäpitkiin osaväleihin, joiden jokaisen pituus on h. Välin $[x_k,x_{k+1}]$ alkupistettä x_k vastaava funktion y arvo on y_k. Kyseisen välin keskipiste on

$$u_k = x_k + \frac{h}{2}$$

ja sitä vastaava funktion y arvo on

$$v_k = y_k + f(x_k,y_k) \cdot \frac{h}{2}.$$

Huomaa, että keskipistettä vastaava funktion y arvo on laskettu kuten Eulerin menetelmässä.

Kulmakerroin välin $[x_k,x_{k+1}]$ keskipisteessä saadaan, kun sijoitetaan yllä määritetyt u_k ja v_k lausekkeeseen $y' = f(x,y)$, jolloin

$$r_k = f(u_k,v_k) = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + f(x_k,y_k) \cdot \frac{h}{2}).$$

Funktion y arvo välin $[x_k,x_{k+1}]$ päätepisteessä x_{k+1} saadaan kuten Eulerin menetelmässä, mutta kulmakertoimena käytetään välin keskipisteessä laskettua kulmakerrointa r_k, joten

$$y_{k+1} = y_k + r_k \cdot h.$$

Eulerin keskipistemenetelmä voidaan ilmaista rekursiivisesti kaavoilla seuraavasti

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ x_{k+1} &= x_k + h \\ y(x_{k+1}) = y_{k+1} &= y_k + f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + f(x_k,y_k) \cdot \frac{h}{2}) \cdot h, \end{aligned}$$

jossa x_0 ja y_0 tunnetaan tehtävän alkuehdon perusteella ja $k = 0,1,2,\ldots$.

Keskipistemenetelmässä tehdään enemmän laskutoimituksia, kuin tavallisessa Eulerin menetelmässä, joten se on työläämpi suorittaa manuaalisesti alusta loppuun. Siksi onkin yksinkertaisinta syöttää laskimeen ohjelma, joka laskee tarvittavat tulokset pienellä työmäärällä ja melko nopeasti. Tavalliseen Eulerin menetelmään verrattuna, pitää laskimeen syötettävää ohjelmaa hieman muuttaa. Koska kulmakerroin on laskettava kahdesti muuttujien x ja y eri arvoilla, tarvitaan apumuuttujat S ja W.

$$X \to S : Y \to W : W + Y1 \cdot \frac{H}{2} \to Y : S + \frac{H}{2} \to X :$$
$$W + Y1 \cdot H \to Y : S + H \to X : \mathrm{Disp}\ Y$$

Mikäli laskin ei hyväksy kirjainta Y grafiikkafunktion lausekkeeseen, voidaan se korvata esimerkiksi kirjaimella Z.

Esimerkki 5.2 Ratkaise Eulerin keskipistemenetelmällä edellisen esimerkin yhtälö $y' = 2y$, kun alkuehto $y(0) = 1$ ja tarkasteluväli [0,1]. Käytetään askelpituutta
a) $h = 0{,}5$.

Yhtälö $y' = f(x,y) = 2y$ ja alkuehdon perusteella $x_0 = 0$ ja $y_0 = 1$. Ensimmäisen osavälin $[0; 0{,}5]$ keskipiste on $u_0 = x_0 + \frac{h}{2} = 0{,}25$ ja sitä vastaavan funktion y arvo v_0 lasketaan kuten Eulerin menetelmässä

$$v_0 = y_0 + f(x_0,y_0) \cdot \frac{h}{2} = y_0 + 2y_0 \cdot \frac{0{,}5}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{0{,}5}{2} = 1{,}50.$$

Sitten lasketaan kulmakerroin välin keskipisteessä $(u_0,v_0) = (0{,}25; 1{,}50)$:

$$r_0 = f(u_0,v_0) = 2v_0 = 2 \cdot 1{,}50 = 3,$$

jonka avulla ratkaistaan funktion arvo y_1:

$$y(0{,}5) = y_1 = y_0 + r_0 h = 1 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}5.$$

Tästä edelleen seuraavan osavälin $[0{,}5; 1]$ keskipiste on $u_1 = x_1 + \frac{h}{2} = 0{,}75$ ja sitä vastaavan funktion y arvo v_1

$$v_1 = y_1 + f(x_1,y_1) \cdot \frac{h}{2} = y_1 + 2y_1 \cdot \frac{0{,}5}{2} = 2{,}5 + 2 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}25 = 3{,}75.$$

Lopuksi ratkaistaan kulmakerroin pisteessä $(u_1,v_1) = (0{,}75; 3{,}75)$:

$$r_1 = f(u_1,v_1) = 2v_1 = 2 \cdot 3{,}75 = 7{,}5,$$

jonka avulla edelleen ratkaistaan funktion arvo y_2:

$$y(1) = y_2 = y_1 + r_1 h = 2{,}5 + 7{,}5 \cdot 0{,}5 = 6{,}25.$$

b) $h = 0{,}2$.

Laskuvaiheita on jo niin paljon, että lopputulokset kannattaa laskea laskimen ohjelmalla. Tallennetaan tarkasteltava yhtälö laskimeen grafiikkafunktioksi $Y1 = 2y$, tallennetaan askelpituus $0{,}2 \to H$ sekä alkuarvot $1 \to Y$ ja $0 \to X$ sekä syötetään laskimen näytölle ennen esimerkkiä mainittu ohjelma. Taulukossa on esitetty tuloksien kaksidesimaaliset likiarvot.

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	1,00	1,48	2,19	3,24	4,80	7,10

c) Verrataan funktion arvolle $y(1)$ a ja b kohdissa saatuja tuloksia esimerkin (5.1) antamiin likiarvoihin.

Kootaan tulokset taulukkoon, jotta niitä on helpompi vertailla.

	Euler	keskip	oikea arvo=7,39
$y(1)$	4,00	6,25	$(h = 0{,}5)$
$y(1)$	5,38	7,10	$(h = 0{,}2)$
$y(1)$	6,19		$(h = 0{,}1)$

Huomataan, että keskipistemenetelmälle jo jakovälin pituus $h = 0{,}5$ antaa tarkemman likiarvon kuin tavallinen Eulerin menetelmä jakovälin pituudelle $h = 0{,}1$.

Tavalliseen Eulerin menetelmään verrattuna, keskipistemenetelmä antaa pienemmällä askelvälin pituudella h tarkemman likiarvon. Tosin keskipistemenetelmässä samalla askelpituudella laskuvaiheita on useampia ja siksi laskeminen käsin saattaa tulla jo alkuvaiheessa työlääksi. Jos käytössä on tietokone tai graafinen laskin, kannattaa tuloksen paremman tarkkuuden vuoksi käyttää näistä kahdesta menetelmästä keskipistemenetelmää. Toisaalta Eulerin menetelmäkin vaatii laskimen käyttöä, jos joudutaan käyttämään pientä jakovälin pituutta h, jolloin myös laskuvaiheiden määrä kasvaa.

Edellä käsitellyistä menetelmistä vieläkin tarkempaan likiarvoon johtaa *Rungen-Kuttan menetelmä*, jossa kulmakerroin lasketaan neljässä eri kohdassa ja lopullinen kulmakerroin on näiden painotettu keskiarvo. Vaikkakin manuaalisesti joudutaan tekemään useita laskuvaiheita, on se helppo ohjelmoida laskimeen tai laskea likiarvot tietokoneella. Menetelmä on jätetty tämän kurssin ulkopuolelle.

Harjoitustehtäviä

5.1 Ratkaise Eulerin menetelmällä yhtälö $y' = y + 1$, kun $y(1) = 0{,}5$ ja väli [1,2]. Käytä askelpituutta a) 0,2 ja b) 0,1. c) Ratkaise yhtälö ja laske $y(2)$. Vertaa tulosta a ja b kohtien tuloksiin.
5.2 Tutki differentiaaliyhtälön $y' = y$ ratkaisemista Eulerin menetelmällä, kun alkuehto on $y(0) = 1$. Käytä erilaisia välin [0,1] jaotuksia ja yritä näin etsiä mahdollisimman hyvä likiarvo $y(1)$.
5.3 Laske yhtälön $y' = y + x$, $y(0) = 1$ arvot $y(1)$ ja $y(2)$ Eulerin menetelmällä, kun askelväli h on a) 0,5 ja b) 0,2.
5.4 Ratkaise Eulerin menetelmällä differentiaaliyhtälö $y' = x - y + 1$, kun alkuehto on $y(1) = 1$. Päättele tulosten perusteella yhtälön analyyttinen ratkaisu.
5.5 Ratkaise Eulerin keskipistemenetelmällä differentiaaliyhtälö $y' = yx$ välillä [1,2], kun alkuehto on $y(1) = 0{,}5$. Käytä askelväliä h a) 0,5, b) 0,2 ja c) 0,1.
5.6 Laske Eulerin keskipistemenetelmällä yhtälön $y' = y + x$, $y(0) = 1$ arvot $y(1)$ ja $y(2)$. Käytä askelväliä a) 0,5, b) 0,2 ja c) vertaa tuloksia harjoitustehtävän (5.3) tuloksiin sekä todellisiin likiarvoihin $y(1) \approx 3{,}44$ ja $y(2) \approx 11.78$.
5.7 Määritä numeerisesti yhtälön $y' = x - y + 1$, $y(1) = 4$ ratkaisun pienin arvo, kun $x \geq 1$. Tarkista tuloksesi ratkaisemalla yhtälö analyyttisesti ja määrittämällä sen perusteella ratkaisufunktion pienin arvo.

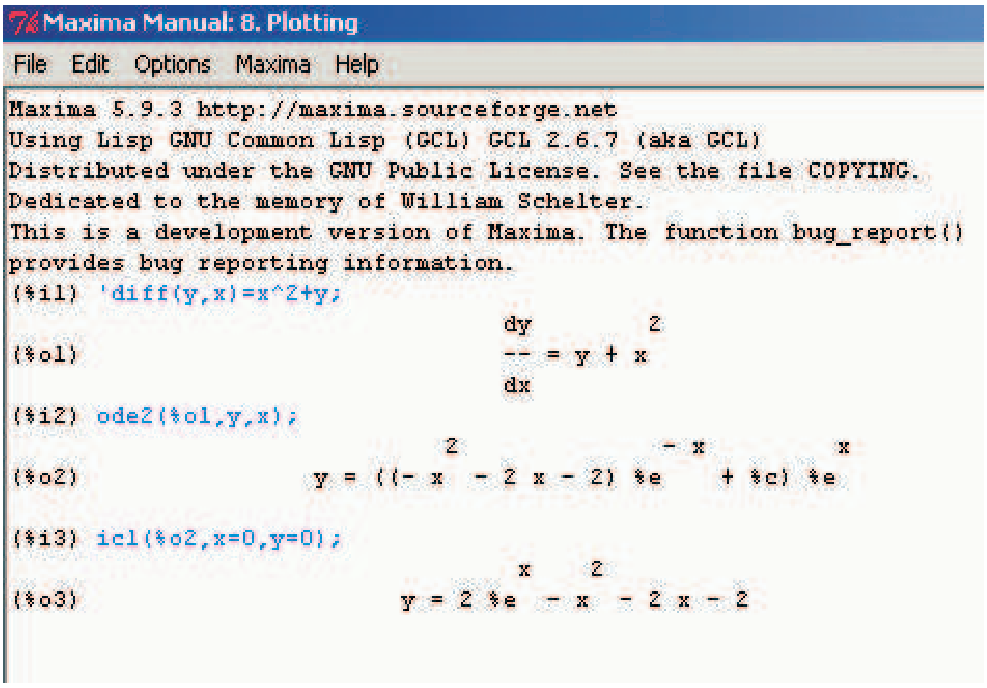
6 Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen tietokoneella

Tällä kurssilla tarkasteltavana olleet differentiaaliyhtälöt ovat olleet muodoltaan sellaisia, että ne on saatu ratkaistua suht yksinkertaisin menetelmin. Monet differentiaaliyhtälöt ovat kuitenkin muodoltaan sellaisia, ettei niitä pystytä tämän kurssin tietojen perusteella ratkaisemaan tai sellaisia, että on kokeneellekin laskijalle työlästä, aikaavievää tai jopa mahdotonta ruveta ratkaisemaan niitä käsin. Onneksi on kehitetty erilaisia tietokoneohjelmia, joiden avulla differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen onnistuu hyvin pienellä vaivalla. Tällä kurssilla tutustutaan lyhyesti *Maxima*-tietokoneohjelman käyttöön. Sen löytää esimerkiksi Googlesta hakusanalla *Maxima*, josta sen voi ladata omalle koneelle ilmaiseksi.

6.1 Analyyttinen ratkaisu

Esimerkki 6.1 Tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön $y' = x^2 + y$ ratkaisemista *Maxima*-ohjelmalla, kun alkuehto on $y(0) = 0$.

Kuvassa 15 on kopio tietokoneruudulta yhtälön ratkaisuvaiheessa. Jos käsky syötetään jollekin komentoriville (in), niin ohjelma antaa tuloksen vastaavalla (out) rivillä. Huomaa, että kunkin komennon jälkeen on kirjoitettava puolipiste. Lisäksi Neperin luvun e eteen on laitettava prosenttimerkki ja $\%c$ tarkoittaa integroimisvakiota. Tämän esimerkin ratkaisusta voidaan piirtää kuva komennolla $plot2d(2*\%e\hat{}x - x\hat{}2 - 2*x - 2, [x, -4{,}4], [y, -4{,}4])\$$, jossa sulkeiden sisällä on ensin piirrettävän käyrän yhtälö ja sitten on annettu välit, joilla x ja y ovat. Piirtokomennon jälkeen käytetään puolipisteen sijasta dollarimerkkiä.

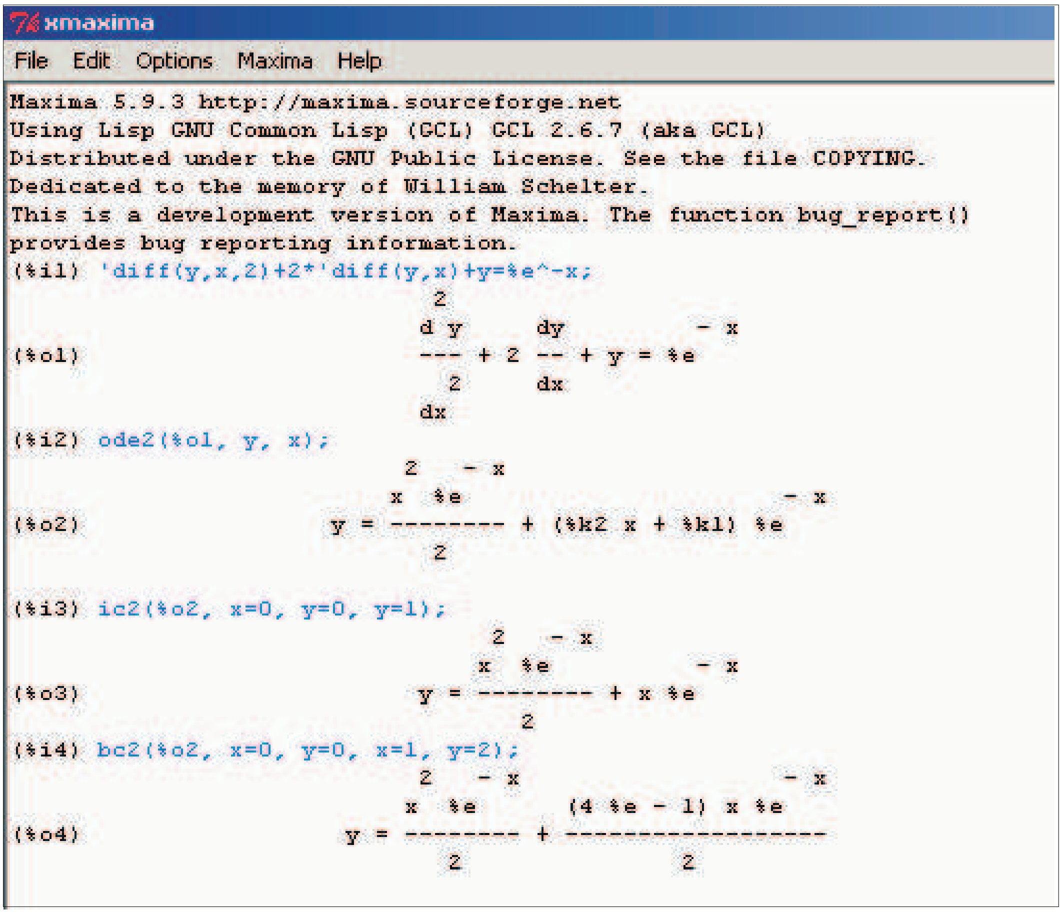


Kuva 15: Differentiaaliyhtälön $y' = x^2 + y$ ratkaiseminen *Maxima*-ohjelmalla (esimerkki 6.1).

Ratkaistava differentiaaliyhtälö on syötetty komentoriville $\%i1$. Riville $\%i2$ on annettu käsky $ode2$, joka ratkaisee yhtälön ja yleinen ratkaisu tulee riville $\%o2$. Kysytty yksittäisratkaisu on syötetty käskyllä $\%c1$ riville $\%i3$, josta kone antaa tuloksena yksittäisratkaisun komentoriville $\%o3$.

Esimerkki 6.2 Ratkaistaan *Maxima*-ohjelmalla toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' + y = e^{-x}$, kun alkuehdot ovat $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 1$ sekä reunaehdot $y(0) = 0$ ja $y'(1) = 2$.

Kuvassa 16 on kopio tietokoneen näytöltä yhtälöä ratkaistaessa. Huomaa, että 'diff(y,x,2) tarkoittaa funktion toista derivaattaa y''. Alkuehdon mukainen ratkaisu saadaan komennolla $ic2$, kun ensimmäisen kertaluvun tapauksessa komento oli $ic1$. Lisäksi reuna-arvotehtävän määräämä ratkaisu saadaan komennolla $bc2$, joka on kuvassa 16 komentorivillä $\%i4$.



Kuva 16: Differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ ratkaiseminen *Maxima*-ohjelmalla (esimerkki 6.2).

Harjoitustehtäviä

6.1 Ratkaise *Maxima*-ohjelmalla differentiaaliyhtälö $y' = \frac{3y}{x} + x$ alkuehdolla $y(1) = 2$. Piirrä kuva, kun $x \in [-10, 10]$.

6.2 Ratkaise *Maxima*-ohjelmalla differentiaaliyhtälö $y' = y^2 + y$, $y(0) = 1$.

6.3 Ratkaise *Maxima*-ohjelmalla differentiaaliyhtälö $y' = (\frac{y}{x})^2 + \frac{2y}{x}$, kun alkuehto on $y(1) = 1$. Piirrä kuva.

6.4 Ratkaise *Maxima*-ohjelmalla differentiaaliyhtälö $xy' + y = -\sin x$, kun $y(\pi) = 0$. Piirrä kuva.

6.5 Ratkaise *Maxima*-ohjelmalla differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' - 3y = 3x - e^{2x}$, kun alkuehdot ovat $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 0$. Piirrä kuva.
6.6 Ratkaise *Maxima*-ohjelmalla differentiaaliyhtälö $y'' - 3y' + 2y = \sin x$, kun alkuehdot ovat $y(0) = 0$ ja $y(0) = 1$. Piirrä kuva.
6.7 Kirjoita *Maxima*- ohjelmalla differentiaaliyhtälöt (ei tarvitse ratkaista) a) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ ja b) $y''^3 + y'^2 - y = \cos x$.

6.2 Numeerinen ratkaisu

Esimerkki 6.3 Tarkastellaan differentiaaliyhtälön $y' = 2y$ ratkaisua välillä $[0, 1]$ numeerisesti Maxima-ohjelmalla, kun $y(0) = 1$. Alla on kirjattuna tarvittavat komennot ja vastaavat tulokset, kun askelpituus $h = 0{,}5$ ja käytetään Eulerin menetelmää.

```
(%i1) n : 2;
(%o1)         2
(%i2) x : 0;
(%o2)         0
(%i3) y : 1.0;
(%o3)        1.0
(%i4) h :(y-x)/n;
(%o4)        0.5

(%i5) X1 : makelist(5*i,i,0,n);
(%o5)    [0, 5, 10]
(%i6) Y1 : [y];
(%o6)       [1.0]

(%i7) for p : 1 thru n do (y : y+2*y*h, Y1:append(Y1,[y]),
      print("y(" , X1[p+1]/10.0 , ") = " , y) );

    y( 0.5 ) =  2.0
    y( 1.0 ) =  4.0
```

Vastaavasti askelpituudelle $h = 0{,}2$:

```
(%i1) n : 5;
(%o1)         5
(%i2) x : 0;
(%o2)         0
(%i3) y : 1.0;
(%o3)        1.0
(%i4) h :(y-x)/n;
(%o4)        0.2

(%i5) X2 : makelist(2*i,i,0,n);
(%o5)        [0, 2, 4, 6, 8, 10]
(%i6) Y2 : [y];
(%o6)       [1.0]

(%i7) for p : 1 thru n do (y : y+2*y*h, Y2:append(Y2,[y]),
      print("y(" , X2[p+1]/10.0 , ") = " , y) );

   y( 0.2 ) =  1.4
   y( 0.4 ) =  1.96
   y( 0.6 ) =  2.744
   y( 0.8 ) =  3.8416
   y( 1.0 ) =  5.37824
(%o7)       done
```

Differentiaaliyhtälön $y' = 2y$ analyyttinen ratkaisu on e^{2x}, jonka tarkat arvot askelvälille 0,2 saadaan Maximan avulla komennolla:

```
(%i9) X3 : makelist(2*i,i,0,n);
(%o9)        [0, 2, 4, 6, 8, 10]
(%i10) Y3 : makelist(exp(0.2*2*i),i,0,n);
(%o11) [1, 1.49182469764127, 2.225540928492468,
        3.320116922736548, 4.953032424395115,
        7.38905609893065]
```

Komennolla $plot2d([[discrete,X1,Y1],[discrete,X2,Y2],[discrete,X3,Y3]]);$ voidaan piirtää pisteitä vastaavat kuvaajat samaan koordinaatistoon.

Harjoitustehtäviä

6.8 Ratkaise Maxima-ohjelmalla esimerkki 6.3, kun askelpituus $h = 0{,}1$. Piirrä kuva.

6.9 Ratkaise Maxima-ohjelmaa käyttämällä differentiaaliyhtälö $y' = y$ tarkasteluvälillä $[0, 1]$, kun $y(0) = 1$ ja askelpituus a) $h = 0{,}2$ ja b) $h = 0{,}1$.

Tehtävien vastauksia

2.3 $y = e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$

2.4 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

2.5 $y = -\sin x + x^2 + 1$

2.6 $y = 3(x - \frac{1}{x})$

2.7 esimerkiksi

a) $af'(x) = f(x)$

b) $af'(x) + 1 = f(x)$

c) $f'(x) + a = f(x)$

3.1 a, b, c, e

3.2 $y = 2e^{2x-2}$

3.3 $a \neq 0$ $y = Ce^{ax}$ ja $a = 0$ $y = C$

3.4 $y = (\frac{1}{2}x + C)^2$ erik.ratk. $y = 0$

3.5 $y = \frac{1}{2}x + 1$

3.6 a) $y = \ln(xe^x - e^x + C)$

ei erik.ratk.

b) $y = \ln(xe^x - e^x)$

3.7 $y = -\frac{1}{2x+C}$ erik.ratk. $y = 0$

3.8 $y = e^{-\frac{1}{4}x^2}$

$y = \frac{-1+\sqrt{2x^2+9}}{2}$

$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

$\ln y - \frac{2}{y^2} = e^x - xe^x - \frac{3}{2}$

3.9 $y = x \arcsin Cx$

3.10 $y = 2x \ln x + Cx$

3.11 $y = x\sqrt[3]{3\ln|x| + C}$

3.12 a ja c: $v = \frac{y}{x}$

d: $v = \frac{y}{x}$ tai $v = ax + by$

3.13 $y = Ce^{5x} - \frac{x}{5} - \frac{1}{25}$

3.14 $y = \tan(x + C) - x$

3.15 $y = x(Cx - 1)$

3.16 $y = -Ce^x + x - 2$

3.19 $y = ae^{-px}$

3.20 a) $y = Ce^{4x} - \frac{1}{3}e^x$

b) $y = \frac{7}{3}e^{4x} - \frac{1}{3}e^x$

3.21 $y = Ce^x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

3.22 a) $y = Ce^x - x^2 - 2x - 2$

b) $y = 2e^x - x^2 - 2x - 2$

3.23 $y = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 2x^2 - 8x + 20$

3.25 $y = Ce^{-x} + x - 1$

3.26 $y = Ce^{2x} - e^{-x} + xe^{2x}$

3.27 $N = (N_0 - \frac{v}{k})e^{-kt} + \frac{v}{k}$

3.28 17 viikon kuluttua

3.29 1600 hyttystä

3.30 kasvu jatkuvaa, hidastuvaa, ei lähene vakiotasoa

3.31 $T(40) = 152$, ei koskaan saavuta uunin lämpötilaa

3.32 a) 67%

b) 21%

4.1 a) $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$

b) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$

c) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

d) $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

4.2 a) $y = \frac{1}{3}e^x \sin 3x$

b) $y = (3 - 5x)e^{2x}$

c) $y = \frac{1}{3}(5e^x + e^{-2x})$

4.3 a) $y'' - y = 0$

b) $y'' - 4y' + 5y = 0$

c) $y'' + 10y' + 25y = 0$

d) $y'' + y - 2y = 0$

4.6 Karakteristiseksi yhtälö $r^2 + (q-1)r + p = 0.$

4.7	a) $p > 0$, yleinen ratkaisu	
	$y = C_1 \cos \sqrt{p}x + C_2 \sin \sqrt{p}x$	
	b) ei millään p arvolla	
4.8	a) $C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{3}{2}$	
	b) $C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$	
	c) $C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$	
	d) $C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$	
4.9	a) $y = C_1e^{x} + C_2e^{6x} - \frac{1}{4}e^{2x}$	
	b) $y = C_1e^{x} + C_2e^{6x} - \frac{1}{5}xe^{x}$	
4.10	a) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 2x$	
	b) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{6}x \cos 3x$	
4.11	yleinen: $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + e^{2x}(C_1 + C_2x)$	
	yksityis $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}xe^{2x-2}$	
5.1	a) $y(2) \approx 2{,}73248$	
	b) $y(2) \approx 2{,}891$	
	c) $y(2) \approx 3{,}077$	
5.2	$y(1) \approx 2{,}718$	
5.3	a) $y(1) \approx 2{,}50$ $y(2) \approx 7{,}125$	
	b) $y(1) \approx 2{,}977$ $y(2) \approx 9{,}383$	
5.4	$y = x$	
5.5	a) $y(2) \approx 1{,}962$	
	b) $y(2) \approx 2{,}173$	
	c) $y(2) \approx 2{,}221$	
5.6	a) $y(1) \approx 3{,}28$ $y(2) \approx 10{,}95$	
	b) $y(1) \approx 3{,}41$ $y(2) \approx 11{,}61$	
5.7	noin 3,10 (kun $x = 2{,}1$)	
6.1	$y = 3x^3 - x^2$	
6.2	$\ln y - \ln(y + 1) = x - \ln 2$	
6.3	$y = \frac{x^2}{2-x}$	
6.4	$y = \frac{\cos x + 1}{x}$	
6.5	$y = e^{x} - \frac{2}{15}e^{-3x} - \frac{1}{5}e^{2x} - x - \frac{2}{3}$	
6.6	$y = \frac{\sin x + 3\cos x}{10} + \frac{6}{5}e^{2x} - \frac{3}{2}e^{x}$	
6.7	y''' saadaan käskyllä 'diff(y,x,3).	

Kirjallisuutta

[1] Juve Y., Lyytikäinen V.: *Differentiaaliyhtälöiden alkeet.* Kirjayhtymä, Helsinki, 1974.

[2] Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J., Paasonen J, Salmela M.: *Pitkä matematiikka. Analyysi.* WSOY, Porvoo, 1997.

[3] Laurinolli T., Merikoski J., Sankilampi T., Väänänen K,: *Matematiikan Taito 13. Analyysi.* WSOY, Porvoo, 1998.

[4] Martio O., Sarvas J.: *Tavalliset differentiaaliyhtälöt.* Yliopistopaino, Helsinki, 1993.

[5] Maxima, http://maxima.sourceforge.net, 26.4.2006

[6] Pursiheimo Ulla: *Differentiaaliyhtälöt*, Turun yliopisto, Matematiikan laitos, luentomoniste C9, 1999.

Tehtävien ratkaisut

2.1 Derivoimalla saadaan $y = x^2 + C \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow y'' = 2$
eli yhtälö $y = x^2 + C$ toteuttaa yhtälön $y'' = 2$.

2.2 Derivoimalla saadaan $f(x) = e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow f''(x) = 4e^{-2x}$
ja sijoittamalla huomataan, että ne toteuttavat yhtälön
$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 4e^{-2x} + 3 \cdot (-2e^{-2x}) + 2 \cdot (e^{-2x}) = 0$.

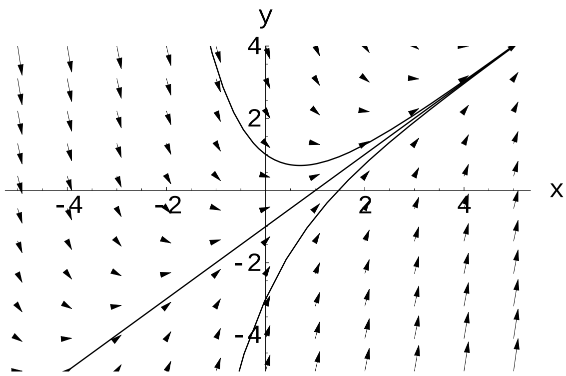
2.3 Integroimalla saadaan yleinen ratkaisu $y'' = e^{-x} + 1$
$\Rightarrow y' = -e^{-x} + x + C_1 \Rightarrow \underline{y = e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2}$.

2.4 Yleinen ratkaisu integroimalla: $y' = -x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + C$.
Vakio määräytyy alkuehdosta $y(2) = 1$:
$y(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + C = -2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 3$ eli yksittäisratkaisu $\underline{y = -\frac{1}{2}x^2 + 3}$.

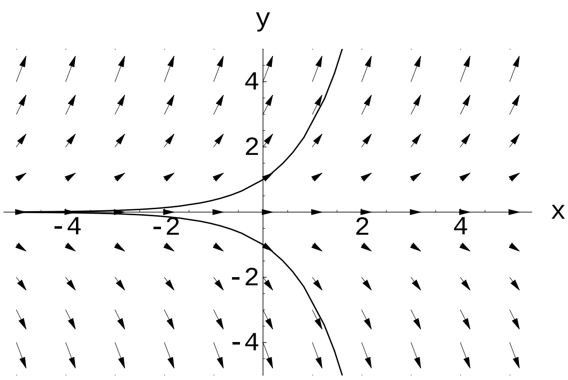
2.5 Yleinen ratkaisu integroimalla: $y'' = 2 + \sin x \Rightarrow y' = 2x - \cos x + C_1$
$\Rightarrow y = x^2 - \sin x + C_1x + C_2$.
Vakiot määräytyvät alkuehdoista $y(0) = 1$ ja $y'(0) = -1$:
$y(0) = 0 - \sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 = 1$ ja
$y'(0) = 2 \cdot 0 - \cos 0 + C_1 = -1 + C_1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 0$
eli yksittäisratkaisu $\underline{y = x^2 - \sin x + 1}$.

2.6 Integroimalla saadaan $f(x) = C_1x + \frac{C_2}{x} \Rightarrow f'(x) = C_1 - \frac{C_2}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2C_2}{x^3}$
ja sijoittamalla huomataan, että ne toteuttavat yhtälön
$x^2y'' + xy' - y = x^2 \cdot \frac{2C_2}{x^3} + x(C_1 - \frac{C_2}{x^2}) - (C_1x + \frac{C_2}{x}) = 0$.
Vakiot määräytyvät alkuehdoista $f(1) = 0$ ja $f'(3) = 8$:
$f(1) = C_1 \cdot 1 + \frac{C_2}{1} = C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -C_2$ ja
$f(3) = C_1 \cdot 3 + \frac{C_2}{3} = C_1(3 - \frac{1}{3}) = C_1\frac{8}{3} = 8 \Leftrightarrow C_1 = 3$.
Yksittäisratkaisu on $\underline{f(x) = 3x - \frac{3}{x}}$.

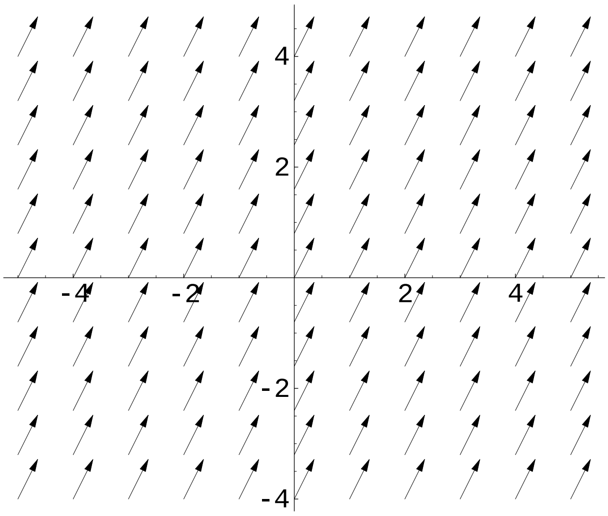
2.8



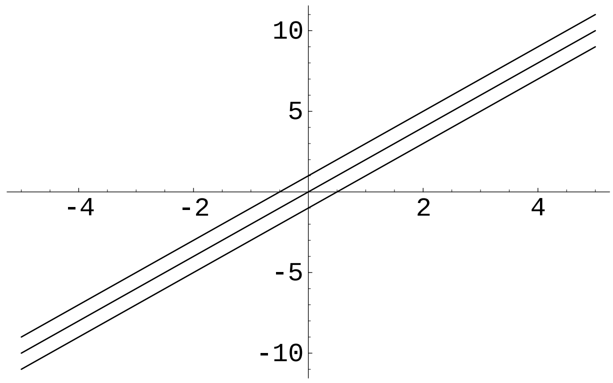
2.9



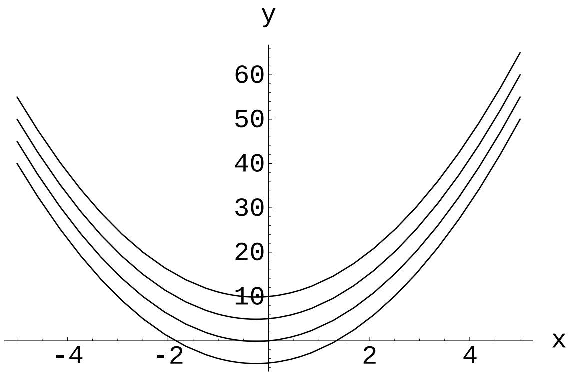
2.10 a)



b) Integroimalla yleinen ratkaisu: $y' = 2 \Rightarrow \underline{y = 2x + C}$. Piirretään ratkaisuista kuva, kun C=-1, 0 ja 1:



2.11 a) Kulmakerroin eli $\underline{y' = 4x + 1}$.
b) Integroimalla yleinen ratkaisu: $y' = 4x + 1 \Rightarrow \underline{y = 2x^2 + x + C}$. Piirretään ratkaisuista kuva, kun C=-5, 0, 5 ja 10:



c) Vakio määräytyy alkuehdosta $y(1) = 4$:
$y(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 + C = 3 + C = 4 \Leftrightarrow C = 1$ eli yksittäisratkaisu $\underline{y = 2x^2 + x + 1}$.

3.2 Separoidaan ja integroidaan yhtälö $y' = 2y$, jolloin saadaan yleinen ratkaisu: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\ \mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = 2x + C_1 \Rightarrow y = \pm e^{C_1} e^{2x} = Ce^{2x}$. Erikoisratkaisu $y = 0$ sisältyy ratkaisuparveen vakion arvolla $C = 0$.
Vakio määräytyy alkuehdosta $y(1) = 2$:
$y(1) = Ce^{2 \cdot 1} = 2$, josta ratkaistaan $C = 2e^{-2}$ ja yksittäisratkaisu on $\underline{y = 2e^{2x-2}}$.

3.3 Jos $a \neq 0$, niin yleinen ratkaisu $\underline{y = Ce^{ax}}$ saadaan kuten edellisessä tehtävässä ja erikoisratkaisu $y = 0$ sisältyy ratkaisuparveen vakion arvolla $C = 0$.
Jos $a = 0$, niin $y' = 0 \Rightarrow \underline{y = C}$.

3.4 a) Separoidaan ja integroidaan yhtälö $y' = \sqrt{y}$, jolloin yleiseksi ratkaisuksi saadaan $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \int\ \mathrm{d}x \Rightarrow 2\sqrt{y} = x + C \Leftrightarrow \underline{y = (\frac{x+C}{2})^2}$.
b) Yhtälöllä on erikoisratkaisu $y = 0$, joka voidaan todeta sijoittamalla yhtälöön $y' = \sqrt{y}$. Tämä ei sisälly ratkaisuparveen, sillä ei ole sellaista vakion C arvoa, jotta $y = 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

3.5 Separoidaan ja integroidaan yhtälö $xy' = y - 1$, jolloin saadaan yleinen ratkaisu: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln|y-1| = \ln|x| + \ln|C_1| \Leftrightarrow y = Cx + 1$. Erikoisratkaisu $y = 1$ sisältyy ratkaisuparveen vakion arvolla $C = 0$.
Vakio määräytyy alkuehdon $y(4) = 3$ perusteella:

$y(4) = C \cdot 4 + 1 = 3 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$ eli yksittäisratkaisu $\underline{y = \frac{1}{2}x + 1}$.

3.6 a) Separoidaan ja integroidaan yhtälö $y' = xe^{x-y}$, josta saadaan yleinen ratkaisu: $\int e^y \, \mathrm{d}y = \int xe^x \, \mathrm{d}x \Rightarrow e^y = xe^x - e^x + C \Leftrightarrow \underline{y = \ln(xe^x - e^x + C)}$.
Ei erikoisratkaisuja, sillä $e^y \neq 0$ aina.
b) Määrätään vakio alkuehdosta $y(2) = 2$, jolloin
$y(2) = \ln(2 \cdot e^2 - e^2 + C) = \ln(e^2 + C) = 2 \Leftrightarrow e^2 + C = e^2 \Leftrightarrow C = 0$ ja yksittäisratkaisu on $\underline{y = \ln(xe^x - e^x)}$.

3.7 Separoidaan ja integroidaan yhtälö $f'(x) = 4xf(x)^2$, jolloin yleinen ratkaisu: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 4x \, \mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{y} = 2x^2 + C \Leftrightarrow \underline{y = -\frac{1}{2x^2+C}}$.
Yhtälöllä on ratkaisuparveen sisältymätön erikoisratkaisu, kun $y = 0$.

3.8 a: Separoidaan ja integroidaan yhtälö $f'(x) + x^3 f(x) = 0$, jolloin saadaan yleinen ratkaisu: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -x^3 \, \mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{4}x^4 + C_1$
$\Leftrightarrow y = \pm e^{C_1} e^{-\frac{1}{4}x^4} = Ce^{-\frac{1}{4}x^4}$ ja erikoisratkaisu $y = 0$ sisältyy ratkaisuparveen, kun vakio $C = 0$.
Määrätään vakion arvo alkuehdosta $y(0) = 1$:
$y(0) = Ce^{-\frac{1}{4} \cdot 0} = C = 1$, joten yksittäisratkaisu on $\underline{y = e^{-\frac{1}{4}x^4}}$.
b: Kirjoitetaan yhtälö $y' = x - 2y'y$ muotoon $(1 + 2y)y' = x$, jonka jälkeen separoidaan ja integroidaan: $\int (1 + 2y)\mathrm{d}y = \int x \, \mathrm{d}x \Rightarrow y + y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Leftrightarrow$ $y^2 + y - \frac{1}{2}x^2 - C_1 = 0$. Tästä muodosta ratkaistaan y lauseke toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla y:n suhteen, jolloin yleiseksi ratkaisuksi saadaan
$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-x^2 - C_1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4x^2 + C}}{2}$.
Vakiolle saadaan arvo alkuehdosta $y(0) = 1$:
$y(0) = \frac{-1 \pm \sqrt{C}}{2} = 1 \Leftrightarrow C = 9$ ja yksittäísratkaisu on $\underline{y = \frac{-1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{2}}$.
c: Yhtälö $y' = x$ on jo separoidussa muodossa, joten yleinen ratkaisu saadaan suoraan integroimalla $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.
Vakio määräytyy alkuehdosta $y(0) = 1$, jolloin
$y(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + C = C = 1$ eli yksittäisratkaisu on $\underline{y = \frac{1}{2}x^2 + 1}$.
e: Separoidaan ja integroidaan yhtälö $xy^3 + (y^2 + 1)e^{-x}y' = 0$, jolloin saadaan yleinen ratkaisu implisiittisessä muodossa:
$\int (\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3}) \, \mathrm{d}y = \int -xe^x \, \mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| - \frac{1}{2}y^{-2} = -xe^x + e^x + C$.

Vakio ratkaistaan alkuehdosta $y(0) = 1$, kun sijoitetaan ratkaisuun $x = 0$ ja $y = 1$: $\ln 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^{-2} = -0 \cdot e^0 + e^0 + C \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = 1 + C \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$ eli yksittäisratkaisu on $\underline{\ln|y| - \frac{1}{2}y^{-2} = -xe^x + e^x - \frac{3}{2}}$.

3.9 Sijoitetaan ensin $v = \frac{y}{x}$, josta ratkaistaan $y = xv$ ja $y' = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Yhtälö $y' = \frac{y}{x} - \tan\frac{y}{x}$ tulee tällöin muotoon $v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v + \tan v$, joka edelleen separoidaan ja integroidaan: $\int \frac{\mathrm{d}v}{\tan v} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln|\sin v| = -\ln|x| - \ln|C_1| \Leftrightarrow |\sin v| = -|C_1 x| \Leftrightarrow \sin v = \mp C_1 x \Leftrightarrow v = \arcsin Cx$. Tähän sijoitetaan $v = \frac{y}{x}$, jolloin yleinen ratkaisu tulee muotoon $\underline{y = x \arcsin Cx}$. Erikoisratkaisu $y = 0$ sisältyy ratkaisuparveen, kun vakio $C = 0$.

3.10 Tehdään sijoitus $v = \frac{y}{x}$, josta ratkaistaan $y = xv$ ja $y' = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Yhtälö $y' = 2 + \frac{y}{x}$ tulee tällöin muotoon $v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2 + v$, joka separoidaan ja integroidaan: $\int \mathrm{d}v = \int 2\frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow v = 2\ln|x| + C$. Sijoitetaan $v = \frac{y}{x}$, ja koska $x > 0$, saadaan yleinen ratkaisu: $\underline{y = 2x\ln x + Cx}$.

3.11 Yhtälö $(x^3 + y^3)\mathrm{d}x - xy^2\mathrm{d}y = 0$ kirjoitetaan muotoon $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}$. Tehdään sijoitus $v = \frac{y}{x}$, josta ratkaistaan $y = xv$ ja $y' = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ ja yhtälö voidaan tämän jälkeen kirjoittaa muodossa $v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v^2} + v$. Tämä separoidaan ja integroidaan: $\int v^2\ \mathrm{d}v = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \frac{1}{3}v^3 = \ln|x| + C_1$
$\Leftrightarrow v = \sqrt[3]{3\ln|x| + C}$. Sijoitetaan $v = \frac{y}{x}$, jolloin saadaan yleinen ratkaisu: $\underline{y = x\sqrt[3]{3\ln|x| + C}}$.

3.13 Tehdään sijoitus $v = x + 5y$, jolloin $y = \frac{v}{5} - \frac{x}{5}$ ja $y' = \frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{5}$. Sijoitetaan nämä yhtälöön $y' = x + 5y$, jolloin $\frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{5} = v$. Tämä separoidaan ja integroidaan: $\int \frac{\mathrm{d}v}{5v+1} = \int\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{5}\ln|5v + 1| = x + C_1 \Leftrightarrow 5v + 1 = \pm e^{C_2}e^{5x}$
$\Leftrightarrow v = C_3e^{5x} - \frac{1}{5}$. Sijoitetaan $v = x + 5y$, jolloin yleiseksi ratkaisuksi saadaan $\underline{y = Ce^{5x} - \frac{x}{5} - \frac{1}{25}}$. Ratkaisuparveen sisältymätön erikoisratkaisu
$v = -\frac{1}{5}$ saadaan vakion C arvolla nolla, jolloin $y = -\frac{x}{5} - \frac{1}{25}$.

3.14 Tehdään yhtälöön $y' = (x + y)^2$ sijoitus $v = x + y$, jolloin $y' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 1$ ja yhtälö kirjoitetaan muodossa $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 1 = v^2$. Separoidaan ja integroidaan: $\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} = \int\ \mathrm{d}x \Rightarrow \arctan v = x + C \Leftrightarrow v = \tan(x + C)$. Sijoitetaan $v = x + y$, jolloin yleinen ratkaisu on $\underline{y = \tan(x + C) - x}$.

3.15 Kirjoitetaan yhtälö ensin muodossa $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$. Tehdään sijoitukset $v = \frac{y}{x}$ ja $y' = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, jolloin yhtälö tulee muotoon $v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 + 2v$. Separoidaan ja integroidaan: $\int \frac{\mathrm{d}v}{1+v} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln|1 + v| = \ln|x| + \ln|C_1| \Leftrightarrow v = \pm C_1 x - 1 = Cx - 1$. Sijoitetaan $v = \frac{y}{x}$, jolloin yleinen ratkaisu on $\underline{y = x(Cx - 1)}$. Erikoisratkaisu $v = -1$ eli $y = -x$ sisältyy ratkaisuparveen, kun vakio $C = 0$.

3.16 Tehdään sijoitukset $v = x - y$ ja $y' = 1 - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, jolloin yhtälö $y' = y - x - 1 + \frac{4(x-y)+8}{x-y+2}$ tulee muotoon $1 - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -v - 1 + \frac{4v+8}{v+2} = -v + 3$. Separoidaan ja integroidaan: $\int \frac{\mathrm{d}v}{v-2} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \ln|v - 2| = x + C_1 \Leftrightarrow v = \pm e^{C_1} e^x + 2 = Ce^x + 2$. Sijoitetaan $v = x - y$, jolloin yleinen ratkaisu on $\underline{y = -Ce^x + x - 2}$.

3.17 Jos $v = ax + by + c$, niin $y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ja edelleen $y' = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b}$. Sijoitetaan nämä yhtälöön $y' = F(ax + by + c)$, jolloin se tulee muotoon $\frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b} = F(v)$. Tämä on separoituva, sillä se voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{\mathrm{d}v}{bF(v)+a} = \mathrm{d}x$, jossa siis yhtälön toinen puoli on ainoastaan muuttujan v funktio ja toinen muuttujan x funktio.

3.18 Sijoittamalla $y = Ce^{-P(x)}$ ja $y' = -p(x)Ce^{-P(x)}$ yhtälöön $y' + p(x)y = 0$ huomataan että se toteutuu: $-p(x)Ce^{-P(x)} + p(x)Ce^{-P(x)} = 0$. Sama voitaisiin osoittaa myös siten, että ratkaistaan alkuperäinen yhtälö separoimalla ja integroimalla: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x)\ \mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = -p(x) + C_1$
$\Leftrightarrow y = \pm e^{C_1} e^{-p(x)} = Ce^{p(x)}$. Erikoisratkaisu sisältyy ratkaisuparveen vakion C arvolla nolla.

3.19 Yhtälön yleinen ratkaisu on $y = Ce^{px}$. Määrätään vakio alkuehdosta $y(0) = a$: $y(0) = Ce^0 = C = a$, joten yksittäisratkaisu on $y = ae^{px}$.

3.20 a) Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_0 = Ce^{4x}$. Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu löydetään yritteellä $y_1 = Ae^x$, jolloin yhtälöön

$y' - 4y = e^x$ sijoitettuna saadaan $Ae^x - 4Ae^x = e^x$. Yhtälön molemmat puolet on oltava yhtäsuuret, jolloin $-3A = 1$ ja siis $A = -\frac{1}{3}$. Yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = Ce^{4x} - \frac{1}{3}e^x}$.
b) Vakion C arvo määräytyy alkuehdosta $y(0) = 2$:
$y(0) = Ce^0 - \frac{1}{3}e^0 = C - \frac{1}{3} = 2 \Leftrightarrow C = \frac{7}{3}$ ja yksittäisratkaisu $\underline{y = \frac{7}{3}e^{4x} - \frac{1}{3}e^x}$.

3.21 Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_0 = Ce^x$. Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu löydetään yritteellä $y_1 = A\sin x + B\cos x$. Sijoitetaan y_1 ja $y_1' = A\cos x - B\sin x$ yhtälöön $y' - y + \sin x = 0$, jolloin $A\cos x - B\sin x - A\sin x - B\cos x + \sin x = 0$. Tässä termien $\cos x$ ja $\sin x$ kertoimet on mentävä nollaksi, jolloin siis $A - B = 0$ ja $-A - B + 1 = 0$. Ensimmäisestä ratkaistaan $A = B$, joka jälkimmäiseen sijoitettuna antaa $B = \frac{1}{2}$. Yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = Ce^x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x}$.

3.22 a) Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_0 = Ce^x$. Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu löydetään yritteellä $y_1 = Ax^2 + Bx + C$. Sijoitetaan y_1 ja $y_1' = 2Ax + B$ yhtälöön $y' - y = x^2$, jolloin saadaan $2Ax + B - Ax^2 - Bx - C = x^2$. Koska kunkin samanasteisen termin x kerroin on oltava yhtä suuri yhtälön molemmilla puolilla, päädytään yhtälöihin: $-A = 1$, $2A - B = 0$ ja $B - C = 0$. Näiden yhtälöiden perusteella saadaan vakioille arvot $A = -1$, $B = -2$ ja $C = -2$, jolloin yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = Ce^x - x^2 - 2x - 2}$.
b) Määrätään vakiolle C arvo alkuehdosta $y(0) = 0$:
$y(0) = Ce^0 - 0 - 2 \cdot 0 - 2 = C - 2 = 0 \Leftrightarrow C = 2$ ja yksittäisratkaisu on $\underline{y = 2e^x - x^2 - 2x - 2}$.

3.23 Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_0 = Ce^{-\frac{1}{2}x}$. Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu löydetään yrittellä $y_1 = Ax^2 + Bx + C$. Sijoitetaan y_1 ja $y_1' = 2Ax + B$ yhtälöön $y' + \frac{1}{2}y = x^2 + 2$, jolloin saadaan $2Ax + B + \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{2}Bx + \frac{1}{2}C = x^2 + 2$. Saman asteisten termien x kertoimet on oltava yhtä suuret, jolloin saadaan yhtälöt $\frac{1}{2}A = 1$, $2A + \frac{1}{2}B = 0$ ja $B + \frac{1}{2}C = 2$, joista ratkaistaan $A = 2$, $B = -8$ ja $C = 20$. Yleinen ratkaisu on $\underline{y = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 2x^2 - 8x + 20}$.

3.24 Separoidaan ja integroidaan yhtälö $y' + y = 5$, jolloin saadaan yleinen ratkaisu: $\int \frac{\mathrm{d}y}{5-y} = \int \ \mathrm{d}x \Rightarrow -\ln|5-y| = x+C_1 \Leftrightarrow \underline{y = \pm e^{-C_1}e^{-x} + 5 = Ce^{-x} + 5}$.

3.25 Ensinnäkin voidaan ratkaista muunnoksella $v = x - y$, jolloin $y = x - v$ ja $y' = 1 - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Tällöin yhtälö $y' + y = x$ voidaan kirjoittaa muotoon $1 - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v$, josta edelleen separoimalla ja integroimalla:
$\int \frac{\mathrm{d}v}{1-v} = \int \ \mathrm{d}x \Rightarrow -\ln|1-v| = x + C_1 \Leftrightarrow v = \mp e^{-C_1}e^{-x} + 1 = C_2e^{-x} + 1$.
Sijoitetaan $v = x - y$, jolloin yleinen ratkaisu on $\underline{y = Ce^{-x} + x - 1}$.
Samaan ratkaisuun päästään myös seuraavasti: homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y_0 = Ce^{-x}$ ja epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu etsitään yritteellä $y_1 = Ax + B$. Sijoitetaan y_1 ja $y_1' = A$ yhtälöön $y' + y = x$: $A + Ax + B = x$. Koska samanasteisten termien x kertoimet ovat yhtä suuret yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla, saadaan vakiot A ja B yhtälöistä $A = 1$ ja $A + B = 0$, jolloin siis yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = Ce^{-x} + x - 1}$.

3.26 Vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y = Ce^{2x}$. Epähomogeenisen yhtälön ratkaisu löydetään yritteellä $y_1 = Axe^{2x} + Be^{x}$. Sijoitetaan y_1 ja $y_1' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + Be^{x}$ yhtälöön $y' = 2y + e^{2x} + e^{x}$, jolloin $Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + Be^{x} = 2(Axe^{2x} + Be^{x}) + e^{2x} + e^{x}$. Vakiot A ja B määräytyvät yhtälöistä $A = 1$ ja $B = 2B + 1 \Leftrightarrow B = -1$. Yleinen ratkaisu on $\underline{y = Ce^{2x} + xe^{2x} - e^{x}}$.

3.27 Vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu on $N(t) = Ce^{-kt}$. Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi kokeillaan yritettä $N(t) = A$ (vakio). Sijoitetaan $N(t) = A$ ja $N'(t) = 0$ yhtälöön $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = v - kN$, jolloin $0 = v - kA \Leftrightarrow A = \frac{v}{k}$ ja yhtälön yleinen ratkaisu on $N(t) = Ce^{-kt} + \frac{v}{k}$. Yhtälö olisi voitu ratkaista myös separoituvana, jolloin olisi päästy samaan lopputulokseen.
Integroimisvakiolle C määrätään arvo alkuehdosta $N(0) = N_0$:
$N(0) = Ce^{0} + \frac{v}{k} = C + \frac{v}{k} = N_0 \Leftrightarrow C = N0 - \frac{v}{k}$ ja atomien lukumäärä hetkellä t voidaan ratkaista yhtälöstä $\underline{N(t) = (N_0 - \frac{v}{k})e^{-kt} + \frac{v}{k}}$.

3.28 Yhtälö $P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$ on separoituva. Erotellaan muuttujat ja integroidaan, jolloin saadaan yleinen ratkaisu:
$\int \frac{\mathrm{d}P}{\sqrt{P(t)}} = -4\int \mathrm{d}t \Rightarrow 2\sqrt{P(t)} = -4t + 2C \Rightarrow P(t) = (-2t + C)^2$.
Ratkaistaan vakio C, kun alussa oli 1100 kalaa eli $P(0) = 1100$:
$P(0) = (-2 \cdot 0 + C)^2 = C^2 = 1100 \Leftrightarrow C = \sqrt{1100} = 10\sqrt{11}$. Sijoitetaan vakion C arvo yleiseen ratkaisuun ja ratkaistaan aika, jolloin kalat olivat kuolleet eli $P(t) = 0$: $P(t) = (-2t + 10\sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow -2t + 10\sqrt{11} = 0$
$\Leftrightarrow t = 5\sqrt{11} \approx 16{,}583$. Kalat olivat kuolleet 17 viikon kuluttua.

3.29 Jos hyttysten määrää hetkellä t (h) kuvaa funktio $y(t)$, saadaan hyttysten kasvusta homogeeninen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y' = ky$, jossa k on verrannollisuuskerroin. Yhtälön yleinen ratkaisu on $y = Ce^{kt}$. Aluksi hyttysten määrä oli 200, joten $y(0) = 200$, jonka mukaan määräytyy vakion C arvo: $y(0) = Ce^0 = C = 200$. Lisäksi tiedetään, että $y(3) = 700$ ja tästä saadaan määrättyä arvo verrannollisuuskertoimelle k: $y(3) = 200e^{3k} = 700 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}$. Hyttysten määrä mielivaltaisella hetkellä t on $\underline{y(t) = 200e^{\frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}t}}$.
Erikoisesti, kun $t = 5$ saadaan $y(5) = 200e^{\frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}5} \approx 1613{,}65$. Hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua oli 1600.

3.30 Jos elintaso ajan funktiona $y(t)$ on kääntäen verrannollinen elintason kasvuun $y'(t)$, päädytään 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöön $y' = \frac{k}{y}$, jossa $k > 0$ on verrannollisuuskerroin. Yhtälö on separoituva, joten erotellaan muuttujat ja integroidaan: $\int y\ \mathrm{d}y = \int k\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = kt + C$. Yleinen ratkaisu siis on $\underline{y = \sqrt{2kt + C}}$. Elintason kasvu on jatkuvaa, sillä y on ajan t suhteen jatkuva funktio. Koska $y'' = -ky^{-2}y' < 0$, on y' pienenevä funktio ja kasvu on hidastuvaa. Lisäksi koska $\lim_{t\to\infty} y = \lim_{t\to\infty}\sqrt{2kt + C} = \infty$, ei elintason kehitys lähene mitään vakiotasoa.

3.31 Jos celsiusasteina uunin lämpötila on U ja kakun lämpötila hetkellä t (min) on $T(t)$, saadaan uunin lämpötilalle differentiaaliyhtälö $T' = k(U - T)$, jossa k on verrannollisuuskerroin. Yhtälön ratkaisu on $T(t) = U + Ce^{-kt}$ (vrt. sovellus 3.4.2).

Uunin lämpötila pysyy vakiolämpötilassa $U = 225°\text{C}$ ja alussa kakun lämpötila on $21°\text{C}$ eli $T(0) = 21$: $T(0) = 225 + Ce^0 = 225 + C = 21 \Leftrightarrow C = -204$. Lisäksi kymmenen minuutin kuluttua kakun lämpötila on $67°\text{C}$ eli $T(10) = 67$: $T(10) = 225 - 204e^{-10k} = 67 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{10}\ln\frac{79}{102}$. Kakun lämpötila mielivaltaisella hetkellä t voidaan ratkaista yhtälöstä $\underline{T(t) = 225 - 204e^{\frac{1}{10}\ln\frac{79}{102}t}}$. Erikoisesti 40 minuutin kuluttua kakun lämpötila on $T(40) = 225 - 204e^{\frac{40}{10}\ln\frac{79}{102}} \approx 151{,}59$ eli lämpötila on noin $152°\text{C}$. Kakun lämpötila ei milloinkaan saavuta uunin lämpötilaa, sillä $-204e^{-kt} < 0$ (koska $e^{-kt} > 0$), jolloin aina $T(t) < 225$.

3.32 Sijoitetaan yhtälöön $m(t) = (m_0 - m_\infty)e^{-kt} + m_\infty$

a) $m_\infty = 40\% = 0{,}40$, $m_0 = 100\% = 1$ ja $m(5) = 80\% = 0{,}80$ ja ratkaistaan verrannollisuusvakio k:

$m(5) = (1 - 0{,}40)e^{-5k} + 0{,}40 = 0{,}80 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}$.

Ratkaistaan $m(10)$: $m(10) = (1 - 0{,}40)e^{\frac{10}{5}\ln\frac{2}{3}} + 0{,}40 = 0{,}667 \approx 67\%$.Henkilö muistaa kymmenen päivän kuluttua oppimastaan noin 67%.

b)$m_\infty = 20\% = 0{,}20$, $m_0 = 100\% = 1$ ja $m(5) = 30\% = 0{,}30$ ja ratkaistaan verrannollisuusvakio k:

$m(5) = (1 - 0{,}20)e^{-5k} + 0{,}20 = 0{,}30 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\frac{1}{8}$.

Ratkaistaan $m(10)$: $m(10) = (1 - 0{,}20)e^{\frac{10}{5}\ln\frac{1}{8}} + 0{,}20 = 0{,}2125 \approx 21\%$.Henkilö muistaa kymmenen päivän kuluttua oppimastaan noin 21%.

c)Tulokset ovat teorian mukaisia. Jos opittu sanajoukko muodostaa järkevän kokonaisuuden (a-kohta), on k pieni ja m_∞ lähenee arvoa m_0 ja tällöin oppija muistaa oppimastaan enemmän. Jos sanat ovat merkityksettömiä (b-kohta), on k suuri ja m_∞ arvo jää pieneksi. Tällöin henkilö ei muista niin paljon oppimastaan.

4.1 a) Karakteristinen yhtälön $r^2 + 3r - 4 = 0$ ratkaisut ovat $r_1 = 1$ ja $r_2 = -4$. Yleinen ratkaisu: $\underline{y = C_1e^x + C_2e^{-4x}}$.

b) Karakteristinen yhtälön $r^2 - 16 = 0$ ratkaisut ovat $r_1 = 4$ ja $r_2 = -4$. Yleinen ratkaisu: $\underline{y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}}$.

c) Karakteristinen yhtälön $r^2 - 6r - 9 = 0$ ratkaisut ovat $r_{1,2} = 3$. Yleinen ratkaisu: $\underline{y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}}$.

d) Karakteristinen yhtälön $r^2 + 4r + 5 = 0$ ratkaisut ovat $r_1 = -2 + i$ ja $r_2 = -2 - i$. Yleinen ratkaisu: $\underline{y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)}$.

4.2 a) Karakteristinen yhtälön $r^2 - 2r + 10 = 0$ ratkaisut ovat $r_1 = 1 + 3i$ ja $r_2 = 1 - 3i$ ja yleinen ratkaisu: $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.
Määrätään vakio C_1 alkuehdosta $y(0) = 0$:
$y(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = C_1 = 0$, jolloin $y = e^x C_2 \sin 3x$ ja $y' = e^x C_2 \sin 3x + 3e^x C_2 \cos 3x$. Vakio C_2 saadaan alkuehdosta $y'(0) = 1$: $y'(0) = e^0 C_2 \sin 0 + 3e^0 C_2 \cos 0 = 3C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3}$. Kysytty yksittäisratkaisu on $\underline{y = \frac{1}{3}e^x \sin 3x}$.
b) Karakteristinen yhtälön $r^2 - 4r + 4 = 0$ ratkaisut ovat $r_{1,2} = 2$ ja yleinen ratkaisu: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.
Määrätään vakio C_1 alkuehdosta $y(0) = 3$: $y(0) = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 = C_1 = 3$.
Vakio C_2 saadaan alkuehdosta $y'(0) = 1$, kun $y' = 6e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x}$: $y'(0) = 6e^0 + C_2 e^0 + 2C_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 6 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = -5$. Kysytty ratkaisu on $\underline{y = 3e^{2x} - 5xe^{2x}}$.
c) Karakteristinen yhtälön $r^2 + r - 2 = 0$ ratkaisut ovat $r_1 = 1$ ja $r_2 = -2$ ja yleinen ratkaisu: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.
Määrätään vakiot C_1 ja C_2 alkuehdoista $y(0) = 2$ ja $y'(0) = 1$:
$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 2$ ja
$y'(0) = C_1 e^0 - 2C_2 e^0 = C_1 - 2C_2 = 1$, joista ratkaistaan $C_1 = \frac{5}{3}$ ja $C_2 = \frac{1}{3}$.
Kysytty yksittäisratkaisu on $\underline{y = \frac{1}{3}(5e^x + e^{-2x})}$.

4.3 a) Karakteristisen yhtälön juuret ovat $r_1 = 1$ ja $r_2 = -1$. Tällöin yhtälössä $r^2 + qr + p = 0$ termi $-q = r_1 + r_2 = 1 + (-1) = 0$ ja $p = r_1 \cdot r_2 = 1 \cdot (-1) = -1$, joten karakteristista yhtälöä vastaava differentiaaliyhtälö on $\underline{y'' - y = 0}$.
b) Karakteristisen yhtälön juuret ovat $r_1 = 2 + i$ ja $r_2 = 2 - i$. Tällöin yhtälössä $r^2 + qr + p = 0$ termi $-q = r_1 + r_2 = 2 + i + (2 - i) = 4$ ja $p = r_1 \cdot r_2 = (2 + i)(2 - i) = 5$, joten karakteristista yhtälöä vastaava differentiaaliyhtälö on $\underline{y'' - 4y' + 5y = 0}$.
c) Karakteristisen yhtälön juuret ovat $r_1 = -5$ ja $r_2 = -5$. Tällöin yhtälössä $r^2 + qr + p = 0$ termi $-q = r_1 + r_2 = -5 + (-5) = -10$ ja

$p = r_1 \cdot r_2 = (-5) \cdot (-5) = 25$, joten karakteristista yhtälöä vastaava differentiaaliyhtälö on $\underline{y'' + 10y' + 25y = 0}$.
d) Karakteristisen yhtälön juuret ovat $r_1 = 1$ ja $r_2 = -2$. Tällöin yhtälössä $r^2 + qr + p = 0$ termi $-q = r_1 + r_2 = 1 + (-2) = -1$ ja
$p = r_1 \cdot r_2 = 1 \cdot (-2) = -2$, joten karakteristista yhtälöä vastaava differentiaaliyhtälö on $\underline{y'' + y' - 2y = 0}$.

4.4 Osoitetaan, että $y_1 = e^{ax} \cos bx$ toteuttaa differentiaaliyhtälön
$y'' + qy' + py = 0$ sijoittamalla $y_1' = ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx$ ja
$y_1'' = a^2 e^{ax} \cos bx - abe^{ax} \sin bx - bae^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx$ tarkasteltavaan yhtälöön: $a^2 e^{ax} \cos bx - abe^{ax} \sin bx - bae^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx + qae^{ax} \cos bx - qbe^{ax} \sin bx + pe^{ax} \cos bx = e^{ax} \cos bx(a^2 - b^2 + qa + p) + e^{ax} \sin bx(-ab - ba - qb) = e^{ax} \cos bx(a^2 - b^2 - 2a^2 + a^2 + b^2) + e^{ax} \sin bx(-ab - ba + 2ab) = 0$. Tässä käytettiin hyväksi ominaisuutta $-q = r_1 + r_2 = a + bi + (a - bi) = 2a$ ja $p = r_1 \cdot r_2 = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2)$. Samoin osoitettaisiin, että $y_2 = e^{ax} \sin bx$ on yhtälön ratkaisu.

4.5 a) Sijoitetaan $y = x$, $y' = 1$ ja $y'' = 0$ yhtälöön $y'' + qy' + py = 0$ ja huomataan, että se toteutuu ainoastaan kun $0 + q + px = q + px = 0$.
b) Sijoitetaan $y = y' = y'' = e^x$ yhtälöön $y'' + qy' + py = 0$ ja huomataan, että se toteutuu ainoastaan kun $e^x + qe^x + pe^x = e^x(1 + q + p) = 0$.

4.6 Ensinnäkin $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$ ja $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$.
Ketjusäännön mukaan $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{x}$ ja edelleen
$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})$.
Sijoitetaan yhtälöön $x^2y'' + qxy' + py = 0$, jolloin
$(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}) + q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + py = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + (q-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + py = 0$ Tämä on vakiokertoiminen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka karakteristinen yhtälö on
$r^2 + (q - 1)r + p = 0$.

4.7 a) Karakteristisen yhtälön $r^2 + p = 0$ ratkaisut ovat $r = \pm\sqrt{-p}$.
Jos $p = 0$, niin $y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2$. Tämä ei ole rajoitettu, sillä $\lim_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$.

Jos $p < 0$, niin $r = \pm\sqrt{p}$ ja yleinen ratkaisu on $y = C_1 e^{-\sqrt{p}x} + C_2 e^{\sqrt{p}x}$. Tämä ei ole rajoitettu, sillä $\lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{p}x} = \infty$ ja $\lim_{x\to-\infty} e^{-\sqrt{p}x} = \infty$, joten aina $\lim_{x\to\pm\infty} y = \infty$.
Jos $p > 0$, niin $r = \pm i\sqrt{p}$ ja yleinen ratkaisu on $y = C_1 \cos\sqrt{p}x + C_2 \sin\sqrt{p}x$. Tämä on rajoitettu, sillä $-1 \leq \sin\sqrt{p}x \leq 1$ ja $-1 \leq \cos\sqrt{p}x \leq 1$.
Vastaus: Rajoitettu, kun $\underline{p > 0}$.
b) Ratkaisu ei ole edes rajoitettu tapauksissa $p \leq 0$, joten ratkaisut eivät myöskään voi lähestyä nollaa, kun $x \to \pm\infty$. Tapauksessa $p > 0$ ratkaisu on rajoitettu, mutta sillä ei ole raja-arvoa eikä siis lähesty nollaa, kun $x \to \pm\infty$.

4.8 Kussakin kohdassa yhtälön homogeeninen yhtälö on sama. Sitä vastaavan karakteristisen yhtälön $r^2 - r - 2 = 0$ juuret ovat $r_1 = 2$ ja $r_2 = -1$, jolloin homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.
a) Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi tehdään yrite $y_1 = A$ (vakio). Sijoitetaan $y_1 = A$ ja $y_1'' = y_1' = 0$ yhtälöön $y'' - y' - 2y = 3$: $0 - 0 - 2A = 3 \Leftrightarrow A = -\frac{2}{3}$ ja epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{2}{3}}$.
a) Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi tehdään yrite $y_1 = Ax + B$. Sijoitetaan $y_1 = Ax + B$, $y_1' = A$ ja $y_1'' = 0$ yhtälöön $y'' - y' - 2y = x$, jolloin $0 - A - 2Ax - 2B = x$. Samanasteisten termien kertoimet ovat yhtä suuret, joten $-2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$ ja $-A - 2B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{4}$. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$.
c) Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan, kun yhdistetään a ja b kohtien epähomogeenisten yhtälöiden yksittäisratkaisut:
$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}}$.
d) Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi tehdään yrite $y_1 = Ax^2 + Bx + C$. Sijoitetaan $y_1 = Ax^2 + Bx + C$, $y_1' = 2Ax + B$ ja $y_1'' = 2A$ yhtälöön $y'' - y' - 2y = x^2$, jolloin
$2A - 2Ax - B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2$. Samanasteisten termien kertoimet ovat yhtä suuret, joten $-2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$ ja $-2A - 2B = 1 - 2B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}$ sekä $2A - B - 2C = -1 - \frac{1}{2} - 2C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{4}$. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}$.

4.9 Karakteristisen yhtälön $r^2 - 7r + 6 = 0$ juuret ovat $r_1 = 1$ ja $r_2 = 6$, jolloin homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu $y_0 = C_1e^x + C_2e^{6x}$.
a) Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi kokeillaan yritettä $y_1 = Ae^{2x}$. Sijoitetaan $y_1 = Ae^{2x}$, $y_1' = 2Ae^{2x}$ ja $y_1'' = 4Ae^{2x}$ yhtälöön $y'' - 7y' + 6y = e^{2x}$, jolloin $e^{2x}(4A - 7 \cdot 2A + 6A) = -4Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}$.
Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = C_1e^x + C_2e^{6x} - \frac{1}{4}e^{2x}.}$
b) Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisun löytämiseksi kokeillaan yritettä $y_1 = Axe^x$. Sijoitetaan $y_1 = Axe^x$, $y_1' = Ae^x + Axe^x$ ja $y_1'' = 2Ae^x + Axe^x$ yhtälöön $y'' - 7y' + 6y = e^x$, jolloin
$e^x(2A + Ax - 7(\cdot A + Ax) + 6Ax) = -5Ae^x = e^x \Leftrightarrow A = -\frac{1}{5}$. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = C_1e^x + C_2e^{6x} - \frac{1}{5}xe^x.}$

4.10 Karakteristisen yhtälön $r^2 + 9 = 0$ juuret ovat $r_{1,2} = \pm 3i$, jolloin homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu $y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.
a) Riittää tehdä yrite $y_1 = A \sin 2x$, koska epähomogenisoiva tekijä on $\sin 2x$ ja yritteen termi $\cos 2x$ ei tuottaisi yhtälöön $\sin 2x$ termejä lainkaan, sillä yhtälössä ei ole lainkaan termiä y'. Sijoitetaan $y_1 = A \sin 2x$, $y_1'' = -4A \sin 2x$ yhtälöön $y'' + 9y = \sin 2x$, jolloin $-4A \sin 2x + 9A \sin 2x = 5A \sin 2x = \sin 2x \Leftrightarrow A = \frac{1}{5}$. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on
$\underline{y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 2x.}$
b) Homogeenisen yhtälön yleisessä ratkaisussa on termi $\sin 3x$, joten on tehtävä yrite $y_1 = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$. Sijoitetaan y_1,
$y_1' = A \cos 3x + B \sin 3x + x(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)$ ja
$y_1'' = -6A \sin 3x + 6B \cos 3x + x(-9A \cos 3x - 9B \sin 3x)$ yhtälöön
$y'' + 9y = \sin 3x$, jolloin
$y_1'' = -6A \sin 3x + 6B \cos 3x + x(-9A \cos 3x - 9B \sin 3x) + 9x(A \cos 3x + B \sin 3x) = -6A \sin 3x + 6B \cos 3x = \sin 3x \Leftrightarrow B = 0$ ja $A = -\frac{1}{6}$. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $\underline{y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{6}x \cos 3x.}$

4.11 Karakteristisen yhtälön $r^2 - 4r + 4 = 0$ juuret ovat $r_{1,2} = 2$, jolloin homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu $y_0 = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkasiu etsitään yritteellä $y_1 = Ax + B$. Sijoitetaan $y_1 = Ax + B$, $y_1' = A$ ja $y_1'' = 0$ yhtälöön $y'' - 4y' + 4y = x$, jolloin

$0-4A+4Ax+4B=x$. Samanasteisten termien kertoimet ovat yhtä suuret, joten $4A=1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{4}$ ja $-4A+4B=-1+4B=0 \Leftrightarrow B=\frac{1}{4}$. Epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu siis on $\underline{y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}}$.
Alkuehdosta $y(0)=\frac{1}{4}$ määräytyy arvo vakiolle C_1:
$y(0)=C_1e^0+C_2\cdot 0\cdot e^0+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}=C_1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow C_1=0$. Edelleen alkuehdosta $y(1)=0$ määräytyy vakio C_2:
$y(1)=C_1e^2+C_2e^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=C_2e^2+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow C_2=-\frac{1}{2e^2}$. Kysytty yksittäisratkaisu on $\underline{y=-\frac{1}{2}xe^{2(x-1)}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}}$.

5.1 a)Nyt $y'=f(x_k,y_k)=y_k+1$ sekä $x_0=1$ ja $y_0=0{,}5$. Rekursiivisten yhtälöiden mukaan lasketaan $x_1=1{,}2$, $x_2=1{,}4$, ... ,$x_5=2$ sekä

$$\begin{aligned}
y(1{,}2)=y_1 &= y_0+(y_0+1)\cdot 0{,}2=0{,}5+(0{,}5+1)\cdot 0{,}2=0{,}8\\
y(1{,}4)=y_2 &= y_1+(y_1+1)\cdot 0{,}2=0{,}8+1{,}8\cdot 0{,}2=1{,}16\\
y(1{,}6)=y_3 &= y_2+(y_2+1)\cdot 0{,}2=1{,}16+2{,}16\cdot 0{,}2=1{,}592\\
y(1{,}8)=y_4 &= y_3+(y_3+1)\cdot 0{,}2=1{,}592+2{,}592\cdot 0{,}2=2{,}1104\\
y(2)=y_5 &= y_4+(y_4+1)\cdot 0{,}2=2{,}1104+3{,}1104\cdot 0{,}2=2{,}73248
\end{aligned}$$

b) Tämä kannattaa tehdä laskimen yhden rivin ohjelmalla. Sijoitetaan laskimeen grafiikkafunktioksi $Y1=Y+1$, sekä tallennetaan muuttujille arvot $0{,}1\rightarrow H:0{,}9\rightarrow X:0{,}5\rightarrow Y$. Tulokset on kahden desimaalin tarkkuudella alla olevassa taulukossa.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y	0,5	0,65	0,82	1,00	1,20	1,42	1,66	1,92	2,22	2,54	2,89

c) Yhtälön ratkaisu: $y=1{,}5e^{x-1}-1$. Sijoitetaan $y(2)=1{,}5e-1\approx 3{,}077$, joten b-kohdan likiarvo on lähempänä todellista arvoa. Jos jakoväli olisi 0,01 saataisiin $y(2)\approx 3{,}057$. Tarkkuus parantuu, kun askelpituutta h pienennetään.

5.2 Tarkastelu väli on $[0{,}1]$. Tehdään laskimeen yhden rivin ohjelma, jossa grafiikkafunktio on $Y1=Y$. Jos käytetään askelväliä $h=0{,}2$, sijoitetaan muuttujiksi $0{,}2\rightarrow H:-0{,}2\rightarrow X:1\rightarrow Y$ ja saadaan kahden desimaalin tarkkuudella seuraavat tulokset

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1,0	1,20	1,44	1,73	2,07	2,49.

Jos askelpituus $h = 0{,}1$, sijoitetaan $0{,}1 \to H : -0{,}1 \to X : 1 \to Y$ ja saadaan seuraavat tulokset

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,0	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,95	2,14	2,36	2,59.

Askelpituudelle $h = 0{,}01$ saadaan likiarvoksi $y(1) \approx 2{,}705$.
Yhtälön ratkaisu on $y = e^x$, jolle $y(1) \approx 2{,}718$.

5.3 a)Nyt $y' = f(x_k,y_k) = y_k + x_k$ sekä $x_0 = 0$ ja $y_0 = 1$. Rekursiivisten yhtälöiden mukaan lasketaan $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}0$, $x_3 = 1{,}5$ ja $x_4 = 2$ sekä

$$\begin{aligned}
y(0{,}5) = y_1 &= y_0 + (y_0 + x_0) \cdot 0{,}5 = 1 + 1 \cdot 0{,}5 = 1{,}5 \\
y(1{,}0) = y_2 &= y_1 + (y_1 + x_1) \cdot 0{,}5 = 1{,}5 + 2{,}0 \cdot 0{,}5 = 2{,}5 \\
y(1{,}5) = y_3 &= y_2 + (y_2 + x_2) \cdot 0{,}5 = 2{,}5 + 3{,}5 \cdot 0{,}5 = 4{,}25 \\
y(2) = y_4 &= y_3 + (y_3 + x_3) \cdot 0{,}5 = 4{,}25 + 5{,}75 \cdot 0{,}5 = 7{,}125.
\end{aligned}$$

b) Laskimen yhden rivin ohjelmalla. Grafiikkafunktioksi $Y1 = Y + X$, sekä muuttujiksi $0{,}2 \to H : -0{,}2 \to X : 1 \to Y$. Tulokset on kahden desimaalin tarkkuudella alla olevassa taulukossa.

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y	1,0	1,20	1,48	1,86	2,35	2,98	3,77	4,77	5,60	7,52	9,38.

5.4 Esimerkiksi askelvälille $h = 0{,}2$ ja tarkasteluvälille [1,2].
$y' = f(x_k,y_k) = x_k - y_k + 1$ sekä $x_0 = 1$ ja $y_0 = 1$. Rekursiivisten yhtälöiden mukaan lasketaan $x_1 = 1{,}2$, $x_2 = 1{,}4$, ... , $x_5 = 2$ sekä

$$\begin{aligned}
y(1{,}2) = y_1 &= y_0 + (x_0 - y_0 + 1) \cdot 0{,}2 = 1 + 1 \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \\
y(1{,}4) = y_2 &= y_1 + (x_1 - y_1 + 1) \cdot 0{,}2 = 1{,}2 + 1 \cdot 0{,}2 = 1{,}4 \\
y(1{,}6) = y_3 &= y_2 + (x_2 - y_2 + 1) \cdot 0{,}2 = 1{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 = 1{,}6 \\
y(1{,}8) = y_4 &= y_3 + (x_3 - y_3 + 1) \cdot 0{,}2 = 1{,}6 + 1 \cdot 0{,}2 = 1{,}8 \\
y(2) = y_5 &= y_4 + (y_4 + x_4 + 1) \cdot 0{,}2 = 1{,}8 + 1 \cdot 0{,}2 = 2{,}0.
\end{aligned}$$

Tulosten perusteella huomataan, että $y = x$, joka on yhtälön analyyttinen ratkaisu. Tämä ratkaisu toteuttaa myös alkuehdon $y(1) = 1$.

5.5 a) Yhtälö $y' = f(x,y) = y_k x_k$ ja alkuehtojen perusteella $x_0 = 1$ ja $y_0 = 0{,}5$. Ensimmäisen osavälin $[1; 1{,}5]$ keskipiste on $u_0 = x_0 + \frac{h}{2} = 1{,}25$ ja sitä vastaavan funktion y arvo v_0 lasketaan kuten Eulerin menetelmässä

$$v_0 = y_0 + f(x_0,y_0) \cdot \frac{h}{2} = y_0 + y_0 x_0 \cdot \frac{0{,}5}{2} = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \frac{0{,}5}{2} = 0{,}625.$$

Seuraavaksi lasketaan kulmakerroin välin keskipisteessä $(u_0,v_0) = (1{,}25; 0{,}625)$:

$$r_0 = f(u_0,v_0) = v_0 u_0 = 0{,}625 \cdot 1{,}25 = 0{,}78125,$$

jonka avulla ratkaistaan funktion arvo y_1:

$$y(1{,}5) = y_1 = y_0 + r_0 h = 0{,}5 + 0{,}78125 \cdot 0{,}5 = 0{,}890625.$$

Tästä edelleen seuraavan osavälin $[1{,}5; 2]$ keskipiste on $u_1 = x_1 + \frac{h}{2} = 1{,}75$ ja sitä vastaavan funktion y arvo v_1

$$v_1 = y_1 + f(x_1,y_1) \cdot \frac{h}{2} = y_1 + y_1 x_0 \cdot \frac{0{,}5}{2} = 0{,}89063 + 0{,}89063 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}25 = 1{,}22461.$$

Lopuksi ratkaistaan kulmakerroin pisteessä $(u_1,v_1) = (1{,}75; 1{,}22461)$:

$$r_1 = f(u_1,v_1) = v_1 u_1 = 1{,}22461 \cdot 1{,}75 = 2{,}14307,$$

jonka avulla edelleen ratkaistaan funktion arvo y_2:

$$y(1) = y_2 = y_1 + r_1 h = 0{,}89063 + 2{,}14307 \cdot 0{,}5 = 1{,}96216.$$

b) Ohjelmoidaan laskimeen Eulerin keskipistemenetelmä. Sijoitetaan grafiikkafunktioksi $Y1 = YX$. Askelpituudelle $h = 0{,}2$ sijoitetaan laskimen muuttujat $0{,}2 \rightarrow H : 1 \rightarrow X : 0{,}5 \rightarrow Y$ ja tulokseksi saadaan

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y	0,5	0,62	0,80	1,08	1,50	2,17

c) Askelpituudelle $h = 0{,}1$ sijoitetaan laskimeen muuttujat $0{,}1 \rightarrow H : 1 \rightarrow X : 0{,}5 \rightarrow Y$ ja tulokseksi saadaan

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y	0,5	0,56	0,62	0,71	0,81	0,93	1,09	1,28	1,52	1,83	2,22

Vertailun vuoksi tarkastellaan oikeaa likiarvoa $y(2)$. Yhtälön ratkaísu on $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ ja edelleen $y(2) \approx 2{,}241$, joten mitä pienempi askelväli, sen tarkempi lopputulos.

5.6 a) Ohjelmoidaan laskimeen Eulerin keskipistemenetelmä. Sijoitetaan grafiikkafunktioksi $Y1 = Y + X$.
a) Askelpituudelle $h = 0{,}5$ sijoitetaan laskimen muuttujat $0{,}5 \rightarrow H : 0 \rightarrow X : 1 \rightarrow Y$ ja tulokseksi saadaan

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
y	1,0	1,75	3,28	6,08	10,95

b)Askelpituudelle $h = 0{,}2$ sijoitetaan laskimen muuttujat $0{,}2 \rightarrow H : 0 \rightarrow X : 1 \rightarrow Y$ ja tulokseksi saadaan

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y	1,0	1,24	1,58	2,03	2,63	3,41	4,40	5,65	7,22	9,18	11,61.

Eulerin keskipistemenetelmä antaa tarkemmat likiarvot kuin pelkkä Eulerin menetelmä. Lisäksi tulokset ovat sitä tarkempia mitä pienempi on askelpituus h.

5.7 Etsitään pienin kohta esimerkiksi Eulerin menetelmällä. Ohjelmoidaan laskimeen yhden rivin ohjelma ja käytetään askelpituutta $h = 0{,}1$. Tallennetaan laskimeen grafiikkafunktioksi $Y1 = X - Y + 1$ ja muuttujat $0{,}1 \rightarrow H : 0{,}9 \rightarrow X : 4 \rightarrow Y$. Pienin arvo on noin 3,041, joka saadaan, kun $x = 2{,}1$. Eulerin keskipistemenetelmällä saataisiin pienimmäksi arvoksi noin 3,101. Yhtälön ratkaisu alkuehdolla $y(1) = 4$ on $y = 3e^{1-x} + x$. Pienin arvo saadaan derivaatan $y' = -3e^{1-x} + 1$ nollakohdasta $x = \ln 3 + 1 \approx 2{,}099$ ja sitä vastaava funktion y arvo on noin 3,099. Eulerin keskipistemenetelmä antaa siis suuhteellisen tarkan likiarvon.

6.1

```
(%i1) 'diff(y, x)=3*y/x+x;

(%i2) ode2(%o1, y, x);

(%i3) ic1(%o2, x=1, y=2);

(%i4) plot2d(3*x^3-x^2, [x, -10, 10])$
```

6.2

```
(%i1) 'diff(y, x)=y^2+y;

(%i2) ode2(%o1, y, x);

(%i3) ic1(%o2, x=0, y=1);
```

6.3

```
(%i1) 'diff(y, x)=(y/x)^2+2*y/x;

(%i2) ode2(%o1, y, x);

(%i3) ic1(%o2, x=1, y=1);

(%i4) plot2d(x^2/(2-x), [x, -1, 1])$
```

6.4

```
(%i1) 'diff(y, x)*x+y=-sin(x);

(%i2) ode2(%o1, y, x);

(%i3) ic1(%o2, x=%pi, y=0);

(%i4) plot2d((cos(x)+1)/x, [x, -6, 6], [y, -10, 10])$
```

6.5

```
(%i1) 'diff(y, x, 2)+2*'diff(y, x)-3*y=3*x-%e^(2*x);

(%i2) ode2(%o1, y, x);

(%i3) ic2(%o2, x=0, y=0, y=0);
```

6.6

```
(%i1) 'diff(y, x, 2)-3*'diff(y, x)+2*y=sin(x);

(%i2) ode2(%o1, y, x);

(%i3) ic2(%o2, x=0, y=0, y=1);
```

6.7

```
(%i1) 'diff(y, x, 3)-2*'diff(y, x, 2)-'diff(y, x)+2*y=0;

(%i2) 'diff(y, x, 2)^3+'diff(y, x)^2-y=cos (x);
```

6.8

```
(%i1) n : 10;
(%o1)  10
(%i2) x : 0;
(%o2)   0
(%i3) y : 1.0;
(%o3)  1.0
(%i4) h :(y-x)/n;
(%o4)   0.1

(%i5) X4 : makelist(i,i,0,n);
(%o5)   [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
(%i6) Y4 : [y];
(%o6)  [1.0]

(%i7) for p : 1 thru n do (y : y+2*y*h, Y4:append(Y4,[y]),
     print("y(" , X4[p+1]/10.0 , ") = " , y) );

  y( 0.1 ) =  1.2
  y( 0.2 ) =  1.44
  y( 0.3 ) =  1.728
  y( 0.4 ) =  2.0736
  y( 0.5 ) =  2.48832
  y( 0.6 ) =  2.985984
  y( 0.7 ) =  3.5831808
  y( 0.8 ) =  4.299816959999999
  y( 0.9 ) =  5.159780351999999
  y( 1.0 ) =  6.191736422399999
(%o7)  done

(%i8) plot2d([discrete,X4,Y4]);
```

```
(%i9) /* Tallennus eps muodossa ja kuvaajan tekstien muutos*/
       plot2d([discrete,X4,Y4], [gnuplot_preamble,
       "set xlabel '10 x'; unset key;"],
       [gnuplot_term, ps], [gnuplot_out_file, "kuva.eps"]);
```

6.9

a)

```
(%i1) n : 5;
(%o1)   5
(%i2) x : 0;
(%o2)  0
(%i3) y : 1.0;
(%o3)  1.0
(%i4) h :(y-x)/n;
(%o4)  0.2

(%i5) X1 : makelist(2*i,i,0,n);
(%o5)  [0, 2, 4, 6, 8, 10]
(%i6) Y1 : [y];
(%o6)  [1.0]

(%i7) for p : 1 thru n do (y : y+y*h, Y1:append(Y1,[y]),
     print("y(" , X1[p+1]/10.0 , ") = " , y) );

  y( 0.2 ) =  1.2
  y( 0.4 ) =  1.44
  y( 0.6 ) =  1.728
  y( 0.8 ) =  2.0736
  y( 1.0 ) =  2.48832
(%o7)   done
```

b)

```
(%i1) n : 10;
(%o1)  10
(%i2) x : 0;
(%o2)   0
(%i3) y : 1.0;
(%o3)  1.0
(%i4) h :(y-x)/n;
(%o4)   0.1

(%i5) X2 : makelist(i,i,0,n);
(%o5)  [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
(%i6) Y2 : [y];
(%o6)  [1.0]

(%i7) for p : 1 thru n do (y : y+y*h, Y2:append(Y2,[y]),
     print("y(" , X2[p+1]/10.0 , ") = " , y) );n : 10;

  y( 0.1 ) =  1.1
  y( 0.2 ) =  1.21
  y( 0.3 ) =  1.331
  y( 0.4 ) =  1.4641
  y( 0.5 ) =  1.61051
  y( 0.6 ) =  1.771561
  y( 0.7 ) =  1.9487171
  y( 0.8 ) =  2.14358881
  y( 0.9 ) =  2.357947691
  y( 1.0 ) =  2.5937424601
(%o7)  done

(%o8) plot2d([[discrete,X1,Y1],[discrete,X2,Y2]]);
```

Liite: Matematica-tiedostot

Kuva 1

```
eq = y'[x] == Sin[x]
  y'[x] == Sin[x]

DSolve[eq, y[x], x]
  {{y[x] -> c-Cos[x]}}

Plot[Evaluate[Table[c-Cos[x], {c, -1, 2, 1}]],
  {x, -5, 5}, AxesLabel -> {"x","y"}]
```

Kuva 2

```
eq = y'[x] == x + y[x]
  y'[x] == x + y[x]

DSolve[eq, y[x], x]
  {{y[x] -> -1 - x + c*e^x}}

g1 = Plot[Evaluate[Table[-1 - x + c*e^x , {c, -2, 2, 2}]],
    {x, -5, 5}, PlotRange -> {-6 , 6}, AxesLabel -> {"x", "y"}]

Needs["Graphics`PlotField`"]
g2=PlotVectorField[{1,x + y}, {x, -5, 5}, {y, -6, 6},
   PlotPoints -> 11, Axes -> True];

Show[g1, g2]
```

Kuva 3

```
sol = T[t] = 14.5*(14.5/14)^-t + 21
  21 + 14.5 * 1.0357142857142858^-t

Plot[sol, {t, 0, 72}, PlotRange -> {20, 36},
    AxesLabel -> {"t","T"}]
```

Kuva 4

```
sol = y[t] = 200 - (160*1.6)^-t
  200 - 160 * 1.6^-t

Plot[sol, {t, 0, 10}, PlotRange -> {0,200},
     AxesLabel -> {"t","y"}]
```

Kuva 5

```
sol = y[t] = 200 - (160*1.6)^-t
  200 - 160 * 1.6^-t

Plot[sol, {t, 0, 10}, PlotRange -> {0,200},
     AxesLabel -> {"t","y"}]
```

Kuva 6

```
sol = y[t] = -15*e^(-0.1 t) + 15
  15 - 15e^(-0.1t)

Plot[sol,{t, 0, 60}, AxesOrigin -> {0,0}, PlotRange -> {0,15},
    AxesLabel -> {"t","y"}]
```

Harjoitustehtävän 2.8 ratkaisu

```
eq = y'[x] == x - y[x]
  y'[x] == x - y[x]

DSolve[eq, y[x], x]
  {{y[x] -> -1 + x + c*e^-x}}

g1 = Plot[Evaluate[Table[-1 + x + c*e^-x , {c, -2 , 2, 2}]],
    {x, -5, 5}, PlotRange -> {-5, 4}, AxesLabel -> {"x", "y"}]

Needs["Graphics`PlotField`"]
g2=PlotVectorField[{1, x - y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 4},
      PlotPoints -> 11, Axes -> True];

Show[g1, g2]
```

Harjoitustehtävän 2.9 ratkaisu

```
eq = y'[x] == y[x]
  y'[x] == y[x]

DSolve[eq, y[x], x]
  {{y[x] -> c*e^x}}

g1 = Plot[Evaluate[Table[c*e^x , {c, -1 , 2, 2}]],
    {x, -5, 5}, PlotRange -> {-5, 5}, AxesLabel -> {"x", "y"}]

Needs["Graphics`PlotField`"]
g2=PlotVectorField[{1, y}, {x, -5, 5}, {y,-5, 5},
      PlotPoints -> 11, Axes -> True];

Show[g1, g2]
```

Harjoitustehtävän 2.10 ratkaisu

a)
```
Needs["Graphics`PlotField`"]
g2=PlotVectorField[{1, 2}, {x, -5, 5}, {y,-5, 5},
   PlotPoints -> 11, Axes -> True];
```

b)
```
eq=y'[x] == 2
  y'[x] == 2

DSolve[eq, y[x], x]
  {{y[x] -> 2*x + c}}

g1 = Plot[Evaluate[Table[2*x + c , {c, -1 , 1, 1}]],
  {x, -5, 5}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

Harjoitustehtävän 2.11b ratkaisu

```
eq = y'[x] == 4x + 1
  y'[x] == 1 + 4x

DSolve[eq, y[x], x]
  {{y[x] -> x + 2x^2 + c}}

Plot[Evaluate[Table[x + 2*x^2 + c, {c, -5, 10, 5}]], {x, -5, 5},
  AxesLabel -> {"x","y"}]
```