



MITTATEOREETTINEN JOHDANTO HIUKKASSUOTIMIIN

Markus Runsten

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2025

Tarkastajat:
Prof. Jukka Lempa
FT Harto Saarinen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MARKUS RUNSTEN: Mittateoreettinen johdanto hiukkassuotimiin
Pro gradu -tutkielma, 78s.
Sovellettu matematiikka
Toukokuu 2025

Tässä tutkielmassa esitetään matemaattisten suotimien rakenneperiaatteita, jotka perustuvat todennäköisyysteoriaan sekä Bayesilaiseen estimaattoriteoriaan. Ennen varsinaisen suodinteorian käsittelyä esitetään stokastisten differentiaaliyhtälöiden perusteet, joita sovelletaan suotimien tila- ja havaintomalliin sekä esitettävien suodintimenetelmien sekä niiden ominaisuuksien todistamiseen.

Yleisesti tunnetun Kalman-Bucy-suotimen matemaattinen rakenne esitetään yksityiskohtaisesti Itô-laskennon avulla, jonka jälkeen suodinteoriassa edetään monimutkaisempiin ympäristöihin soveltuviin, numeerisesti tehokkaisiin ja monissa sovelluksissa hyödyllisiin hiukkassuotimiin. Näistä hiukkassuotimista esitetään diskreetti- sekä jatkuva-aikaisten iteraatiomenetelmien teoreettiset lähtökohdat sekä numeeriset algoritmit.

Lukijalta oletetaan ennakkotietona todennäköisyyslaskennan sekä mittateorian tunte-
musta.

Asiasanat: Todennäköisyysteoria, mittateoria, stokastinen analyysi, stokastiikka, suodinteoria, Kalman-Bucy-suodin, hiukkassuodin, partikkelisuodin, Itô-laskento, Bayes-päätely, aikasarja-analyysi, Pro gradu -tutkielma

Sisällys

Notaatiota	vi
1 Johdanto	1
2 Ajallista todennäköisyysteoriaa	4
2.1 Todennäköisyysteorian käsitteitä	4
2.2 Stokastisten differentiaaliyhtälöiden perusteita	8
3 Suodinteoriaa	19
3.1 Matemaattinen suodin	19
3.2 Suodinongelma	21
3.3 Lineaarinen Kalman-Bucy-suodin	22
3.4 Epälineaarinen Benešin suodin	36
4 Hiukkassuotimien periaatteita	39
4.1 Hiukkassuodinjärjestelmä	42
4.2 Haarautumisalgoritmi	44
4.3 Bayes-päätelyä diskreetissä ajassa	44
4.4 Bayes-päätelyä jatkuvassa ajassa	48
5 Suodinongelma diskreetissä ajassa	56
5.1 Monte Carlo -menetelmistä	56
5.2 Hiukkassuodin diskreetissä ajassa	57
5.3 Hiukkassuodinalgoritmi diskreetissä ajassa	64
6 Suodinongelma jatkuvassa ajassa	66
6.1 Ratkaisu osittaisdifferentiaaliyhtälön avulla	69
6.2 Hiukkassuodinalgoritmi jatkuvassa ajassa	72
7 Suodinteorian sovelluksista	74
8 Yhteenveto	76

Notaatiota

f, g, h	Funktioita.
a_t, a_s, a_u	Aikaparametrisointi käsitteelle a .
$a^i, a_i, a^{(i)}, a^{(n)}$	Ulottuvuusparametrisointi käsitteelle a .
$\mathcal{F}, \mathcal{Y}, \mathcal{G}$	Sigma-algebra, filtraatio.
\mathcal{F}^X	Prosessin X generoima sigma-algebra.
$\sigma(A)$	Satunnaismuuttujan A perusteella viritetty sigma-algebra.
μ, ν	Mitta.
(A, \mathcal{A})	Mitallinen avaruus, jossa A on joukko ja \mathcal{A} sigma-algebra.
$\mathcal{B}(A)$	Borel-joukkojen avaruus joukolle A .
$B(A)$	Äärellisten $\mathcal{B}(A)$ -mitallisten joukkojen avaruus $A \rightarrow \mathbb{R}$.
Ω	Otosavaruus.
\mathbb{P}, \mathbb{Q}	Todennäköisyysmitta.
$\mathbb{E}, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$	Odotusarvo, odotusarvo mitan \mathbb{Q} suhteen.
$\mathbb{P}(A B)$	Ehdollinen todennäköisyys käsitteelle A ehdolla B .
$\mathbb{E}[A B]$	Ehdollinen odotusarvo käsitteelle A ehdolla B .
$\mathbb{1}_A$	Indikaattorifunktio eli karakteristinen funktio joukolle A .
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Todennäköisyysavaruus.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$	Filtraatiolla \mathcal{F}_t varustettu todennäköisyysavaruus.
X, Y, Z, \dots	Satunnaismuuttuja, satunnaisprosessi.
X_t	Prosessin X arvo ajanhetkellä t , satunnaismuuttujan X_t arvo.
$X_{t_1:t_2}$	Prosessin X realisaatiohistoriavektori ajanhetkien t_1 ja t_2 välillä.
X ja Y	Signaali- ja havaintoprosessi.
\mathbb{T}	Aika-avaruus.
\mathbb{S}	Tila-avaruus, signaali-avaruus.
W, V	Wiener-prosessi, Brownin liike.
φ	Testifunktio.
δ_a	Diracin mitta pisteessä a .
$\pi_t, \hat{\pi}_t$	Ehdollinen todennäköisyysmitta ja sen estimaatti.
$\pi_t(\varphi)$	Ehdollisen todennäköisyysmitan arvo testifunktiolla φ .
$C^n(A)$	Jatkuvien n -kertaa derivoituvien funktioiden avaruus joukossa A .
$\int_{t_1}^{t_2} \cdot ds$	Integraali ajanhetkien t_1 ja t_2 välillä.
$\int_A \cdot d\mu$	Integraali avaruuden tai joukon A yli mitan μ suhteen.
$\int_A \cdot dW_s$	Stokastinen integraali joukon A yli prosessin W_s suhteen.
$\frac{da}{dt}$	Aikaderivaatta käsitteelle a .
$\frac{\partial a}{\partial b}$	Funktion a osittaisderivaatta parametrin b suhteen.
$\frac{\partial^n a}{\partial b \partial c}$	Funktion a asteen n osittaisderivaatta parametrien b ja c suhteen.
$\langle M \rangle$	Prosessin M kvadraattinen variaatio.
$\langle M, N \rangle$	Prosessien M ja N kvadraattinen kovariaatio.
$\sum_{i=1}^n, \sum_j$	Summa indeksien i ja n välillä, summa kaikkien indeksien j yli.
$\sum_{i,j}$	Lyhennetty muoto summasta $\sum_i \sum_j$.
$\prod_{i=1}^n, \prod_j$	Tulo indeksien i ja n välillä, tulo kaikkien indeksien j yli.

$a \rightarrow b$	Käsitteen a vieminen rajalle käsitteeseen b tai suppeneminen käsitteeseen b .
\hat{a}	Käsitteen a approksimaatio tai estimaatti.
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normaalijakauma.
$a \sim b$	Käsite a jakautuu jakauman b perusteella.
$a c \sim b c$	Käsite a jakautuu jakauman b perusteella ehdolla c .
$a _b$	Käsitteen a raja-alueeseen tai pisteeseen b .
A^{-1}	Matriisin A käänteismatriisi.
A^\top	Matriisin A transpoosi.
$a \propto b$	Käsite a on verrannollinen käsitteeseen b .
$[a]$	Lattiafunktio. Luvun a kokonaislukuosa.
$\{a\}$	Desimaaliosafunktio. Luvun a desimaaliosa.

1 Johdanto

Ajan suhteen muuttuvien ilmiöiden mallintaminen on hyödyllistä monilla tieteenaloilla. Ajallisilla malleilla voidaan pyrkiä selittämään tapahtuneita tilanteita taikka ennustamaan tietyn ympäristön tulevaisuuden käyttäytymistä. Vastaavasti ympäristön nykytilankin määrittämisellä on usein merkittävä arvo. Sovellustilanteissa on kuitenkin tyypillistä, etteivät niitä varten muodostetut matemaattiset mallit ole täsmällisiä. Malleihin vaikuttavia virhelähteitä ovat esimerkiksi mallintajien tekemät päätökset sekä yksinkertaistukset. Hyödynnettävällä tiedon laadulla on myös olennainen vaikutus malliin. Sovellustilanteissa hyödynnettävä data saattaa esimerkiksi sisältää havainto- ja mittausepä tarkkuuksia.

Mikäli mallinnus- tai sovellustilanteissa on oletettavissa erilaisten virhe- ja epä-tarkkuuslähteiden olemassaolo, onkin luonnollista pohtia olisiko näiden mallintamattomien virheiden huomioiminen tai minimointi jollain tavoin kuitenkin mahdollista. Matemaattinen suodinteoria on ala, jonka menetelmien avulla voidaan pyrkiä parantamaan sovellustilanteita varten muodostettavien mallien luotettavuutta ja tarkkuutta, vaikei sovellustilanne olisikaan täysin ideaali virhelähteiden olemassaolon vuoksi. Suodintoreettiset menetelmät ovat mallinnusmenetelmiä, joissa on kiinnitetty huomioita erilaisiin virhelähteisiin. Näiden menetelmien avulla tavoitellaan parhaimman mahdollisen käsityksen muodostamista sovellusympäristöstä.

Suodintoreettiset menetelmät ovat sovelluksissa usein iteratiivisia ja niiden avulla voidaan muodostaa reaaliaikaisestikin uusia ympäristön tilan estimaatteja perustuen ajankohtaisiin havaintoihin. Tässä tutkielmassa käsiteltäviä menetelmiä ollaan sovellettu esimerkiksi navigointiin[2], robotiikkaan, kommunikaatiojärjestelmiin, ekologiaan sekä lääke- ja neurotieteeseen. Signaaliprosessointimenetelmänä suotimia voidaan hyödyntää myös tehokkaasti ääni- ja videoteknologian sovelluksissa. Monet finanssimatemaattiset ja ekonometriset menetelmät pohjautuvat myös suodinteoriaan[3][Luku 1.1] [1]. Käsiteltävät suodinteorian matemaattiset perusteet johdetaan todennäköisyysteorian sekä Bayesilaisten periaatteiden avulla.

Matemaattisen suodinteorian voidaan tulkita saaneen alkunsa niin kutsutusta Wiener-suotimesta 1950-luvulla. Wiener-suotimen sovellusmahdollisuudet ovat kuitenkin rajatumpia verrattuna 1960-luvulla kehityneen Kalman-Bucy-suotimen sovelluskohteisiin, joita modernissakin maailmassa on edelleen runsaasti. Kalman-Bucy-suodin onkin matemaattisesti optimaalinen ratkaisu suodinongelmaan lineaarisessa ympäristössä, jossa virhelähteet ovat normaalijakautuneita. Kalman-Bucy-suotimen jatkunut suosio perustuukin sen yksinkertaisuuteen sekä ymmärrettävyyteen. Tämän rajoitetusti optimaalisen suotimen kehittämisen jälkeen päädyttiin tutkimaan laajempaa joukkoa Bayesilaiseen teoriaan perustuvia suotimia 1960-1970-luvuilla [3][Luku 1.2].

Epälineaarisiin sekä monimutkaisempiin tilaestimointiongelmiin hyödynnettävät hiukkassuotimet saivat alkunsa 1990-luvun alussa [4]. Yksinkertaisesta hiukkassuotimestakin on kuitenkin kehitetty runsas määrä erikoistuneempiin sovellustilanteisiin toimivia muunnelmia. Parhaimman suodinmenetelmän valinta tiettyyn sovellustilanteeseen tulkitaan vaihtoehtojen runsaan määrän vuoksi hankalaksi [5].

Esimerkki 1. (*Populaatiokasvumalli* [6][1.1]) Muodostetaan yksinkertaisen differentiaaliyhtälön avulla populaatiokasvumalli

$$\frac{dN^{\text{malli}}}{dt} = a_t N_t^{\text{malli}}, \quad (1)$$

jonka alkutila oletetaan tunnetuksi eli $N_0^{\text{malli}} = N_0$. Muuttujalla t kuvataan ajanhetkeä, jolloin arvo N_t^{malli} kertoo tietyn ajanhetken *mallinnetun* populaatiokoon ja funktion $a_t = a(t)$ arvo kuvaa suhteellisen populaatiokasvun määrää samalla ajanhetkellä.

Esitetyn populaatiokasvumallin (1) sovellustilanteissa saattaa kuitenkin olla haastavaa määrittää suhteellista populaatiokasvua kuvaavan funktion a_t käyttäytymistä täsmällisesti, sillä se saattaa riippua esimerkiksi mallintamattomista ympäristötekijöistä. Vaikka kaikki ympäristötekijät olisivatkin tiedossa, ne saattaisivat monimutkaistaa mallia liiallisesti esimerkiksi numeerista laskentaa varten. Tämä aiheuttaa oletuksen mallin epätarkkuudesta, joskin epätäsmällisestäkään mallista saatettaisiin kuitenkin tulkita olevan hyötyä populaatiokasvun käyttäytymisen ymmärtämisessä tietyissä sovellustilanteissa. Mallin hyödyllisyyttä ja ymmärrettävyyttä voitaisiin lisätä entisestään, mikäli epätarkkuus olisi jollain tavoin myös huomioitu itse mallissa. Toisin sanoen voitaisiin pitää hyödyllisenä, että epätarkkuusoletus olisi myös mallinnettu. Suhteellisen populaatiokasvun a_t funktio voitaisiinkin määrittellä kaksiosaisesti

$$a_t = r_t + \text{”mallinnusvirhe”},$$

missä funktio $r_t = r(t)$ oletetaan täysin tunnetuksi. Mallinnusvirheen mallintaminen itsessään ei ole kuitenkaan yksiselitteistä. Vastaavasti alkuperäisen populaatiokasvumallin (1) ratkaiseminen tyypillisesti tunnetuilla differentiaaliyhtälöiden tai differenssi- eli erotusyhtälöiden ratkaisumenetelmillä ei myöskään enää onnistuisi mallinnetun epätarkkuustermin vuoksi.

Käsiteltävän populaatiokasvumallin tarkkuus tai luotettavuus olisi myös mielekäästä pystyä määrittämään. Taustaoletuksena voitaisiin myös esittää, että mallin luotettavuutta olisi oletettavasti myös mahdollista parantaa lisätiedolla mallinnettavasta tilanteesta. Populaatiokasvumallin yhteydessä luotettavuuden määrittäminen ja lisätiedon kerääminen saattaisi tarkoittaa esimerkiksi käsiteltävän populaation kaikkien yksilöiden määrän laskemista tietyin väliajoin ja vertaamalla saatua tulosta mallin tuottamaan arvoon tietyllä ajanhetkellä. Erotus laskettujen yksilöiden lukumäärän sekä mallin tuottaman arvon välillä kertoisi silloin ajanhetkisesidonnaisen absoluuttisen mallinnusvirheen määrän. Näin täsmällisen tiedon kerääminen ei sovellustilanteissa ole kuitenkaan usein mahdollista esimerkiksi teknisten rajoitteiden taikka liiallisen resurssikulutuksen vuoksi. Yksilöiden lukumäärä tulisi myös laskea samalla ajanhetkellä täsmällistä tietoa varten, joka on sovellustilanteissa harvoin mahdollista. Empiirisestikin määritetty populaation koko saattaa siis olla epätäsmällinen arvo. Pyrkimys populaation koon mittaamiseen itsessään saattaa myös vaikuttaa populaation kokoon.

Lisätietoa populaation yksilöiden lukumäärästä voidaan kuitenkin päätellä esimerkiksi määrittämällä osapopulaation koko tietyllä alueella ja ekstrapoloimalla saadun tiedon avulla populaation yksilöiden kokonaismäärä. Tämä kuitenkin tarkoittaa

lisävirhelähdettä, sillä ekstrapoloitu populaation koko ei jälleen ole täsmällinen arvo. Käsiteltävä populaatiokasvumalli myös oletti populaation määrän olevan alussa tunnettu arvo N_0 , joka on sovellustilanteissa usein myös epätasaisesti määritetty.

Populaation koon määrittämistä voidaan käsitellä yleisemmin mittausoperaationa, joka sisältää epätarkkuutta. Kuvataan ajanhetkellä t populaation todellista kokonaismäärää funktiolla $N_t^{\text{todellinen}}$. Tätä todellista arvoa ei useissa sovellustilanteissa voida suoraan määrittää, vaan pikemminkin päädytään funktioon

$$N_t^{\text{havaittu}} = N_t^{\text{todellinen}} + \text{”mittausvirhe”}.$$

Ideaalitulanteessa populaation koon tietyn ajanhetken todellinen määrä $N_t^{\text{todellinen}}$ voitaisiin määrittää matemaattisia työkaluja hyödyntäen, vaikkei todellisen populaation koon mittaaminen tai määrittäminen empiirisesti olisikaan mahdollista. Intuitiivisesti tämä edellyttäisi ainoastaan mittausvirheen vähentämistä tai *suodattamista* pois jokaisesta havainnosta, ja tämä matemaattinen ongelma onkin nimetty *suodinongelmaksi*. Toisin sanoen haluttaisiin määrittää parhain mahdollinen estimaatti funktiolle $N_t^{\text{todellinen}}$ ajanhetkillä $s \leq t$ kerättyjen mittaushavaintojen N_s^{havaittu} perusteella. Tämäntyyppisten suodinongelmien ratkaisuun erityyppisissä tilanteissa on kehitetty teoriaa, jota tässä tutkielmassa käsitellään.

Esimerkki 2. (*Pysäytysongelma* [6][1.4]) Oletetaan, että henkilöllä tai yrityksellä on hallussaan sijoitus tai resurssi, kuten kiinteistö, rahasto-osuus, metsäomistus tai valmistuotteiden varasto. Tämä kuvitteellinen henkilö tai yritys pohtii milloin omaisuuden myynti olisi kaikkein kannattavinta. Kuvataan tällaisen omaisuuden arvoa ajanhetkellä t muuttujalla X_t . Aiemman populaatiokasvumallin tavoin tämä ongelma on mallinnettavissa differentiaaliyhtälöllä

$$\frac{dX_t}{dt} = rX_t + \alpha X_t \cdot \text{”shokki”}, \quad (2)$$

missä muuttujat r sekä α ovat tunnettuja reaalivakioita. Yhtälön (2) termi rX_t kuvaa riskitöntä tuottoa, kuten sijoitusta joukkovelkakirjalainaan. Toisin sanoen termi rX_t kertoo paljonko omaisuuden arvo muuttuisi ilman ympäristön satunnaisuutta. Jälkimmäinen termi $\alpha X_t \cdot \text{”shokki”}$ taas kuvaa odottamattomien tilanteiden vaikutusta omaisuuden arvoon. Tunnetun vakiotermin α voi tässä yhteydessä myös tulkita volatilititeettinä, eli kuinka herkkä omaisuuden arvo on esimerkiksi ympäristön muutoksille. Kuvitteellinen henkilö tai yritys tietää omaisuutensa arvon käyttäytymisen kuitenkin aiemmilla ajanhetkillä $s \leq t$, muttei satunnaistermin vuoksi pysty päättämään milloin olisi tuoton maksimoiva ajanhetki myydä omaisuus. Tätä kutsutaan *pysäytysongelmaksiksi*. Sovellustilanteiden lisäongelmana voidaan myös pitää mallissa esiintyvien vakioiden r ja α määrittämistä.

2 Ajallista todennäköisyysteoriaa

Johdannossa mallinnus- ja mittausvirheet, epätietoisuus tulevaisuudesta sekä odottamattomat ympäristön muutokset kuvattiin määrittämättömillä käsitteillä. Matemaattista tulkintaa varten virhetermejä mallinnetaan kuitenkin ajan suhteen kehittyvillä stokastisella prosesseilla, jotka toteuttavat tässä luvussa esitettävät oletukset. Käsite *ajasta* on myös hyvin olennainen stokastisten prosessien käsittelyä varten, sillä monet stokastisiin prosesseihin liittyvät periaatteet nojaavat tietyissä ajanhetkissä olemassaolevaan tietoon sekä ajallisen ympäristön toistomittaukseen. Todennäköisyysteorian ja Bayesilaisen teorian avulla on taas mahdollista tehdä tulkintoja sekä johtopäätöksiä olemassaolevasta ja kerätystä tiedosta. Myöhemmin käsiteltävät menetelmät esimerkiksi suodinongelman ratkaisuun perustuvat käsiteltäviin määritelmiin sekä ominaisuuksiin.

2.1 Todennäköisyysteorian käsitteitä

Määritelmä 1. *Aika-avaruudella* \mathbb{T} tarkoitetaan täydellisesti järjestettyä indeksijoukkoa¹, jonka tavoitteena on kuvata mahdollisia ajanhetkiä $t \in \mathbb{T}$. Ajanhetket voivat olla diskreettejä, jolloin $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_{\geq 0}$ taikka jatkuvia, jolloin $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Määritelmä 2. *Filtraatiolla varustetuksi todennäköisyysavaruudeksi* kutsutaan nelikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, missä muuttuja Ω kuvaa tapaus- eli otosavaruutta, muuttuja \mathcal{F} tapausavaruuden Ω osajoukkojen sigma-algebraa, funktio \mathbb{P} todennäköisyysmittaa mitallisessa avaruudessa (Ω, \mathcal{F}) sekä filtraatio $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ei-vähenevää² ja oikealta jatkuvaa³ sigma-algebran \mathcal{F} alisigma-algebroyen joukkoperhettä. Yksinkertaisempi todennäköisyysavaruus ilman filtraatiota on kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Aikaparametrisoidun filtraation \mathcal{F}_t voidaan mieltää kuvaavan olemassaolevan tiedon tai informaation määrää tietyllä ajanhetkellä $t \in \mathbb{T}$. Tulkinnallisesti tämän ajanhetkisdonnaisen tiedon määrä kasvaa ajan edetessä, muttei se voi koskaan ylittää mahdollisen kokonaistiedon \mathcal{F} määrää. Teoreettisesti täydellinen tilannetieto on saavutettavissa, jolloin $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ jostakin ajanhetkestä $t \in \mathbb{T}$ eteenpäin, joskin sovelustilanteissa tämä on harvinaista.

Määritelmä 3. Merkitään joukolla \mathbb{S} tila-avaruutta, jolloin *satunnaismuuttujaksi* X kutsutaan filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ funktiota $X : \Omega \rightarrow \mathbb{S}$, jolle sen käänteisfunktion arvo sijaitsee sigma-algebrassa \mathcal{F} eli $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ kaikilla mitallisilla joukoilla $A \subset \mathbb{S}$, jolloin satunnaismuuttujaa X kutsutaan myös \mathcal{F} -mitalliseksi. Satunnaismuuttujan X yksittäistä tunnettua arvoa kutsutaan sen *realisaatioksi*.

¹Täydellisellä järjestyksellä tarkoitetaan joukkoa A , joka toteuttaa binäärirelaation \leq eli kaikilla $a, b, c \in A$ pätee refleksiivisyys ($a \leq a$), transitiivisyys (jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$), antisymmetrisyys (jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$) ja vahva yhtenäisyys (eli $a \leq b$ tai $b \leq a$ toteutuu).

²Sigma-algebraa \mathcal{F}_t kutsutaan ei-väheneväksi, kun sille toteutuu jokaisella ajanhetkellä $s > t$ sisältyvyyssehto $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+s}$.

³Sigma-algebra \mathcal{F}_t on oikealta jatkuva, kun sille toteutuu ehto $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ kaikilla muuttujan ε arvoilla. Intuitiivisemmin tämä ehto siis takaa, että mitallinen tieto myös pysyy mitallisena.

Satunnaismuuttuja yhdistää tapausavaruuden alkioille $\omega \in \Omega$ tila-avaruuden \mathbb{S} alkion, eli sen voi siis mieltää kertovan mitä tietyllä satunnaismuuttujan havaintokerralla tapahtui samassa alkutilanteessa ω . Yksinkertainen esimerkki on nopanheitto, jossa heittotilanne on tapausavaruuden alkio, jonka lopputilanteella on kuitenkin useampi kuin yksi mahdollinen tila-avaruuden arvo eli reaalisiaatio, jonka satunnaismuuttuja kuvaa. Satunnaismuuttujan tuottama arvo ei siis yleensä⁴ ole aina sama arvo.

Määritelmä 4. *Stokastisella prosessilla X aika-avaruudessa \mathbb{T} ja filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ tarkoitetaan aikaparametrisoitua satunnaismuuttujien joukkoa eli $X := \{X_t(\omega) : t \geq 0 \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega\}$. Kun prosessin X satunnaismuuttujat X_t ovat \mathcal{F}_t -mitallisia jokaisella ajanhetkellä $t \in \mathbb{T}$, niin prosessi on *adaptoitunut* filtraatioon $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Stokastisen prosessin kehittymistä eli siihen liittyvien satunnaismuuttujien realisaaatioiden joukkoa kutsutaan *poluksi* tai stokastisen prosessin *polkurealisaatioksi*.*

Stokastisilla prosesseilla voidaan kuvata tietyn tapahtumaketjun kehitystä sekä historiaa. Koska stokastiset prosessit muodostetaan satunnaismuuttujien avulla, on tyypillistä etteivät niiden polut ole täsmälleen samanlaisia, vaan ne saattavat olla huomattavankin erilaisia riippuen satunnaismuuttujien reaalisaaatioista. Adaptoituneisuus taas kertoo, etteivät prosessin arvot ole riippuvia tulevaisuudesta, eli satunnaismuuttujien X_t tuottamat arvot voivat olla riippuvia ainoastaan menneisyyden tapahtumista X_s , missä $s < t \in \mathbb{T}$ taikka realisoitumisajanhetkestä $t \in \mathbb{T}$ eli ne voivat hyödyntää informaatiota \mathcal{F}_t .

Määritelmä 5. *Luonnolliseksi filtraatioksi \mathcal{F}_t kutsutaan stokastisen prosessin X satunnaismuuttujien X_t virittämää sigma-algebraa, eli luonnolliselle filtraatiolle pätee $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t)$, jolloin stokastinen prosessi on \mathcal{F}_t -adaptoitunut eli adaptoitunut luonnolliseen filtraatioonsa.*

Määritelmä 6. (*Generoitu sigma-algebra*) Olkoon Ω otosavaruus. Kun muuttujalla \mathcal{U} merkitään otosavaruuden Ω osajoukkojen joukkoperhettä, niin on olemassa pienin mahdollinen sigma-algebra $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$, joka sisältää joukkoperheen \mathcal{U} eli

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}} = \bigcap \{ F \mid F \text{ on otosavaruuden } \Omega \text{ sigma-algebra ja } \mathcal{U} \subset F \}.$$

Sigma-algebraa $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ kutsutaan silloin joukkoperheen \mathcal{U} *generoimaksi sigma-algebraksi*.

Määritelmä 7. (*Wiener-prosessi*) Olkoon W reaaliarvoinen stokastinen prosessi todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sekä aika-avaruudessa $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Määritellään aikaparametrit $u, s, t \in \mathbb{T}$ siten, että näille ajanhetkille toteutuu epäyhtälöehto $0 \leq u < s < t$. Nyt ehtojen

1. Prosessin W alkuarvo on melkein varmasti⁵ nolla eli todennäköisyys $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$,

⁴Satunnaismuuttuja voi noudattaa degeneroitunutta jakaumaa, joka tuottaa aina saman realisaaation. Tämän voi intuitiivisemmin mieltää esimerkiksi noppana, jonka jokaisella sivulla on sama arvo.

⁵Termillä *melkein varmasti* tai *melkein kaikkialla* tarkoitetaan mittateorian käsitettä, jolla ominaisuus pätee kaikille joukoille, joiden mitta on yli nolla. Nollamittaisia joukkoja ei siis huomioida.

2. Prosessin W arvot ovat toisistaan riippumattomia eli prosessin W arvojen muutokset $W_{t+u} - W_t$ ovat riippumattomia sen historian arvoista W_s ,
3. Prosessin W muutokset ovat normaalijakautuneita eli arvot $W_{t+u} - W_t$ noudattavat normaalijakaumaa odotusarvolla 0 ja varianssilla u eli muutoksille pätee ehto $(W_{t+u} - W_t) \sim \mathcal{N}(0, u)$,
4. Prosessin W polut ovat melkein varmasti jatkuvia jokaisella ajanhetkellä $t \in T$

toteutuessa stokastista prosessia W kutsutaan *Wiener-prosessiksi*. Kirjallisuudessa samasta prosessista käytetään usein myös termiä *Brownin liike*.

Määritelmä 8. (*Martingaali*) Olkoon M stokastinen prosessi filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Oletetaan prosessin M arvojen sijaitsevan Banachin avaruudessa⁶ normilla $\|\cdot\|_B$. Prosessia M kutsutaan *martingaaliksi* filtraation \mathcal{F}_t suhteen ehtojen

1. Prosessi M on \mathcal{F}_t -adaptoitunut,
2. Prosessin M kaikille realisaatioille M_t toteutuu äärellisyysehto $\mathbb{E}[\|M_t\|_B] < \infty$,
3. Ajanhetkille $s < t \in \mathbb{T}$ ja kaikille ajanhetkisdonnaisen sigma-algebran joukoille $F \in \mathcal{F}_s$ toteutuu odotusarvoidentiteetti $\mathbb{E}[(M_t - M_s) \cdot \mathbb{1}_F] = 0$ tai ekvivalentisti ehdollinen odotusarvoidentiteetti $M_s = \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]$

toteutuessa. Martingaalia kutsutaan lisäksi *jatkuvaksi*, kun sen polut ovat jatkuvia todennäköisyydellä 1 eli kuvaus $t \mapsto M_t(\omega)$ on ajan suhteen jatkuva melkein kaikilla alkioilla $\omega \in \Omega$.

Määritelmä 9. (*Tasaisesti integroituva martingaali*) Olkoon $M = \{M_t, t \geq 0\}$ stokastinen prosessi. Kun prosessi M toteuttaa raja-arvoehdon

$$\sup_{M_t \in M} \left\{ \int_{|M_t| > c} |M_t| d\mathbb{P} \right\} = \sup_{M_t \in M} \left\{ \mathbb{E} [|M_t| \cdot \mathbb{1}_{|M_t| > c}] \right\} \rightarrow 0, \text{ kun } c \rightarrow \infty,$$

niin prosessi M on tasaisesti integroituva. Kun prosessi M toteuttaa lisäksi martingalin määritelmän, niin prosessia M kutsutaan tasaisesti integroituvaksi martingaaliksi.

Määritelmä 10. (*Lokaali martingaali*) Olkoon $M = \{M_t, t \geq 0\}$ stokastinen prosessi. Jos prosessin alkuajanhetken arvo M_0 on \mathcal{F}_0 -mitallinen ja on olemassa kasvava sekä hajaantuva jono pysäytysaikoja $T^{(n)}$, joiden lisäksi pysäytysajanhetkisdonnaiset prosessit

$$M_T^{(n)} = \{M_{\min(t, T_n)} - M_0, t \geq 0\}$$

ovat \mathcal{F}_t -mitallisia martingaaleja jokaisella pysäytysaikaindeksillä n , niin prosessi M on lokaali martingaali ja jonoa $T^{(n)}$ kutsutaan redusoivaksi jonoksi lokaalille martingaalille M .

⁶Banachin avaruus on vektoriavaruus, jossa jokainen Cauchyn jono suppenee. Toisin sanoen Banachin avaruus on täydellinen normiavaruus.

Määritelmä 11. (*Kvadraattinen variaatio*) Kun prosessi M on jatkuva neliöintegroituva martingaali, niin sen *kvadraattisella variaatiolla* $\langle M \rangle_t$ tarkoitetaan prosessia, joka on jatkuva, nollassa alkava sekä kasvava prosessi A_t siten, että erotusprosessi $(M_t)^2 - A_t$ on martingaali.

Määritelmä 12. (*Kvadraattinen kovariaatio*) Kun prosessit M_1 ja M_2 ovat jatkuvia neliöintegroituja martingaaleja, niin *kvadraattisella kovariaatiolla* $\langle M_1, M_2 \rangle_t$ tarkoitetaan prosessia, jolle toteutuu ehto

$$\langle M_1, M_2 \rangle_t := \frac{1}{2} \cdot (\langle M_1 + M_2 \rangle_t - \langle M_1 \rangle_t - \langle M_2 \rangle_t).$$

Esimerkki 3. Wiener prosessi $W = \{W_t \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$ on martingaali prosessin W realisaatioiden (W_s, \dots, W_t) generoimien sigma-algebroiden \mathcal{F}_t suhteen: Odotusarvoehto

$$\mathbb{E}[W_s - W_t \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[W_s - W_t] = 0,$$

toteutuu, koska erotus $W_s - W_t$ on riippumaton sigma-algebrasta \mathcal{F}_t , jonka lisäksi odotusarvoehtiteetti

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_t] = W_t$$

on voimassa sigma-algebran \mathcal{F}_t -mitallisuuden johdosta. Näitä tietoja hyödyntämällä on todettavissa odotusarvoehto

$$\mathbb{E}[|W_t|^2] \leq \mathbb{E}[|W_t|^2] = |W_0|^2 + nt.$$

Käsiteltäessä taas ajanhetkeä $s \geq t$, saadaan ehdollinen odotusarvoehto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_s \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[W_s - W_t + W_t \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[W_s - W_t \mid \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 0 + W_t = W_t. \end{aligned}$$

Wiener-prosessi eli Brownin liike on siis satunnaiskävelyn yleistys, jonka jokainen askel, muutos tai eteneminen on riippumaton aiemmista. Muutoksen suunta- ja suuruus on siis täysin satunnaista. [3][Luku 3.1]

Esimerkki 4. Mallinnus- ja mittausvirhettä voidaan kuvata Wiener-prosesseilla. Hyödyntämällä Wiener-prosessia aiemman populaatiokasvumallin (1) virheiden kuvaamiseen päädytään yhtälömuotoihin

$$\begin{aligned} \frac{dN^{\text{malli}}}{dt} &= a_t N_t^{\text{malli}} \\ &= (r_t + \text{”mallinnusvirhe”}) \cdot N_t^{\text{malli}} \\ &= (r_t + W_t) \cdot N_t^{\text{malli}} \\ &= r_t N_t^{\text{malli}} + N_t^{\text{malli}} W_t \end{aligned}$$

ja merkitsemällä

$$\begin{aligned} X &:= N^{\text{malli}} \\ \mu(X_t, t) &= \mu_t(X_t) := r_t N_t^{\text{malli}} \\ \sigma(X_t, t) &= \sigma_t(X_t) := N_t^{\text{malli}} \end{aligned}$$

päädytään muotoon

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu_t(X_t) + \sigma_t(X_t)W_t$$

ja edelleen huomioimalla mallin alkutila ja merkitsemällä $N_0 = X_0$ päädytään yhtälöön

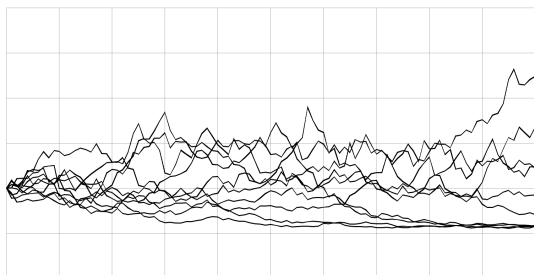
$$\frac{dX_t}{dt} = X_0 dt + \mu_t(X_t) + \sigma_t(X_t)W_t,$$

jonka integroimalla päädyttäisiin ratkaisuun

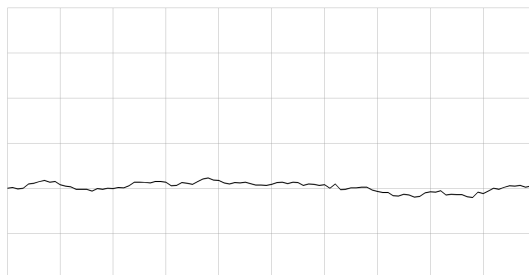
$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_t(X_t) dt + \int_0^t \sigma_t(X_t)W_t dt,$$

jossa ensimmäinen integraalitermi on yksiarvoinen deterministinen integraali. Kyseessä ei ole kuitenkaan tyypillisen differentiaaliyhtälön ratkaisu jälkimmäisen integraalitermin vuoksi, sillä jälkimmäinen integraali sisältää stokastisen prosessin suhteen integroimisen. Stokastisella integraalilla on useampi kuin yksi arvo polkurealisaatioiden eroista johtuen, jolloin stokastisen integraalin arvo on satunnaismuuttuja deterministisen integraalin arvon yksikäsitteisyyden sijaan. Tämän ominaisuuden vuoksi myös kuvatus mallin ratkaisu X_t on itsessään satunnaismuuttuja. Stokastisen prosessin suhteen integroimista on toistaiseksi myös käsitelty ainoastaan intuitiivisesti matemaattisen täsmällisyyden sijaan. Seuraavan luvun tavoitteena on esittää stokastisen integraalin matemaattinen määritelmä Kiyosi Itô:n teoriaan perustuen.

Polkurealisaatioita, n=10



Keskimääräinen polkurealisaatio



Kuva 1: Stokastisen differentiaaliyhtälön polkurealisaatioita.

2.2 Stokastisten differentiaaliyhtälöiden perusteita

Tavoitellaan stokastisen integraalin $\int_{t_a}^{t_b} \cdot dW_t$ matemaattisen käsitteen määrittämistä yksinkertaisempien alkeisfunktioiden avulla, joita hyödyntämällä päädytään vaiheittain varsinaisen stokastisen integraalin määritelmään Itô-laskennossa. Periaatteellisesti tätä voi verrata yleisesti tunnetun Riemann-integraalin määritelmään, joka perustuu ylä- ja alasummien raja-arvoon.

Stokastisten differentiaaliyhtälöiden historia nähdään alkaneeksi Einsteinin vuonna 1905 kuvaamasta Brownin liikkeen rakenteesta [7][Luku 3.1]. Einstein esitti matemaattisen yhteyden mikrokooppisten hiukkasten satunnaisliikkeen sekä makroskooppisen diffuusiolyhtälön kanssa, jonka ehdot Adolf Fick oli esittänyt empiirisesti vuonna 1855 [8]. Diffuusiolla tarkoitetaan yleisesti liikettä korkeasta konsentraatiosta pienempään tai tasapainosempaan konsentraatioon. Esimerkiksi vesilasiin pudotetut väriainehiukkaset pyrkivät jakautumaan tasaisesti, ja tähän liittyvää prosessia kutsutaan diffuusioksi.

Stokastistilla differentiaaliyhtälöillä voidaan mallintaa dynaamisia ympäristöjä eri tiede-, tutkimus- ja insinöörialoilla, joilla täsmällistä mallia tai rakennetta mallinnettavasta tilanteesta ei tunneta. Esimerkiksi ajoneuvon käyttäytymisen mallintaminen on hankalaa, sillä siihen vaikuttaa runsas määrä erilaisia voimia, joista tuntemattomien voimien tai ilmiöiden mallintamiseen voidaan hyödyntää stokastisia differentiaaliyhtälöitä [7][Example 3.4]. Käsiteltävä stokastisten integraalien sekä stokastisten differentiaaliyhtälöiden esitysjärjestys perustuu lähteeseen [6][Luku 3].

Määritelmä 13. Olkoon $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t_a, t_b)$ funktioluokka, jonka jokainen funktio $f(t, \omega) : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot

1. Kuvaus $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ on $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \times \mathcal{F}$ -mitallinen,
2. Funktio $f(t, \omega)$ on \mathcal{F} -adaptoitunut,
3. Äärellisyysehto $\mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$ on voimassa.

Määritelmä 14. (*Stokastinen alkeisfunktiointegraali*) Alkeisfunktiolla $\phi \in \mathcal{V}$ tarkoitetaan funktiota, joka on esitettävissä summana

$$\phi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

jossa jokainen summan osafunktio e_j on \mathcal{F}_{t_j} -mitallinen funktioluokan \mathcal{V} määritelmän nojalla. Alkeisfunktion ϕ stokastinen integraali ajanhetkien t_a ja t_b välillä on nyt myös esitettävissä summana

$$\int_{t_a}^{t_b} \phi(t, \omega) dW_t = \sum_j e_j(\omega) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega). \quad (3)$$

Lause 1. *Alkeisfunktion $\phi(t, \omega) \in \mathcal{V}$ ollessa äärellinen se toteuttaa odotusarvoehdon*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{t_a}^{t_b} \phi(t, \omega) dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} \phi(t, \omega)^2 dt \right], \quad (4)$$

josta huomataan stokastisen differenssitermin dW_t katoaminen.

Todistus. Määritetään rekursioyhtälö

$$\Delta W_j = W_{t_{j+1}} - W_{t_j},$$

jonka avulla muodostetaan odotusarvohajotelma

$$\mathbb{E}[e_i e_j \Delta W_i \Delta W_j] = \begin{cases} 0, & \text{kun } i \neq j \\ \mathbb{E}[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j), & \text{kun } i = j \end{cases}$$

joka on mahdollista termien $e_i e_j \Delta W_i$ ja ΔW_j riippumattomuuden nojalla, kun indeksi $i < j$. Muodostetun odotusarvohajotelman avulla päädytään väitteeseen

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_a}^{t_b} \phi dW_t \right)^2 \right] &= \sum_i \sum_j \mathbb{E}[e_i e_j \Delta W_i \Delta W_j] \\ &= \sum_j \mathbb{E}[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} \phi^2 dt \right]. \end{aligned}$$

□

Lemma 1. *Olkoon funktio $g \in \mathcal{V}$ äärellinen ja sen arvot $g(\cdot, \omega)$ jatkuvia jokaisella parametrin ω arvolla, jolloin on olemassa alkeisfunktiojono $\phi_n \in \mathcal{V}$, jolle suppenemisehto*

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} (g - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

on voimassa.

Todistus. Määritetään funktiot

$$\phi_n(t, \omega) = \sum_j g(t_j, \omega) \cdot \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t).$$

Huomioidaan kaikkien funktioiden ϕ_n olevan alkeisfunktioita, sillä funktio $g \in \mathcal{V}$ ja suppenemisehto

$$\int_{t_a}^{t_b} (g - \phi_n)^2 dt \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

toteutuu jokaisella parametrin ω arvolla, koska funktion $g(\cdot, \omega)$ oletettiin olevan jatkuva kaikilla parametrin ω arvoilla. Suppenemistulokseen päädytään soveltamalla tasaisesti rajoitetun konvergenssin lausetta⁷. □

Lemma 2. *Olkoon funktio $h \in \mathcal{V}$ rajoitettu. Silloin on olemassa funktiot $g_n \in \mathcal{V}$, joiden kuvaus $g_n(\cdot, \omega)$ on jatkuva kaikilla parametrien ω ja n arvoilla sekä suppenemisehto*

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} (h - g_n)^2 dt \right] \rightarrow 0$$

on voimassa.

⁷(Tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause) Olkoon joukko E mitallinen, sen mitta $\mu(E)$ äärellinen ja funktiojono $\{f_i\}$ jono sellaisia joukossa E integroituvia funktioita, joille suppenemisehto $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$ toteutuu melkein kaikkialla. Jos on olemassa luku $M > 0 \in \mathbb{R}$, jolle ehto $\sup_{i \in \mathbb{N}} |f_i(x)| \leq M$ on voimassa kaikilla parametrin $x \in E$ arvoilla, niin suppenemisehto $\int_E f d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i d\mu$ toteutuu.

Todistus. Oletetaan, että epäyhtälöehto $|h(t, \omega)| \leq M$ on voimassa kaikilla parametrituplien (t, ω) arvoilla sekä vakiolla $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Määritetään lisäksi jokaiselle parametrille n ei-negatiivinen jatkuva reaaliarvoinen funktio ψ_n , joka toteuttaa ehdot

1. $\psi_n = 0$ kaikille argumenteille $x \leq -\frac{1}{n}$ ja $x \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) dx = 1$.

Määritetään edelleen funktiot

$$g_n(t, \omega) = \int_0^T \psi_n(s - T) \cdot h(s, \omega) ds,$$

jolloin funktiot $g_n(\cdot, \omega)$ ovat jatkuvia kaikilla argumenteilla ω ja epäyhtälöehto $|g_n(t, \omega)| \leq M$ on voimassa kaikilla indekseillä n . Funktion $h \in \mathcal{V}$ avulla voidaan myös näyttää, että jokainen funktio $g_n(t, \omega)$ on \mathcal{F}_t -mitallinen kaikilla ajanhetkillä t^8 . \square

Lemma 3. *Olkoon funktio $f \in \mathcal{V}$, jolloin on olemassa funktiojono $\{h_n\} \subset \mathcal{V}$, jonka jokainen funktio h_n on äärellinen ja suppenemisehto*

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} (f - h_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

toteutuu.

Todistus. Muodostetaan funktiot

$$h_n(t, \omega) = \begin{cases} -n, & \text{kun } f(t, \omega) < -n \\ f(t, \omega), & \text{kun } -n \leq f(t, \omega) \leq n, \\ n, & \text{kun } f(t, \omega) > n \end{cases}$$

jolloin lemma pätee dominoidun konvergenssin⁹ perusteella. \square

Määritelmä 15. (*Yksiulotteinen Itô-integraali*) Olkoon $\{\phi_n\}$ alkeisfunktiojono, joka toteuttaa suppenemisehdon

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty,$$

tässä luvussa aiemmin esitettyjen lemmaiden perusteella. Nyt funktion f kuullessa rajattuun funktioluokkaan $\mathcal{V}(t_a, t_b)$ sen Itô-integraali ajanhetkien t_a ja t_b välillä on

$$\int_{t_a}^{t_b} f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_a}^{t_b} \phi_n(t, \omega) dW_t(\omega).$$

Koska differenssitermi dW_t on stokastinen prosessi, niin integraalin arvo on siis satunnaisuuttuja.

⁸Tämän erikoistapauksen käsittely löytyy lähteestä [9][s. 133]

⁹(*Dominoidun konvergenssin lause*) Olkoon joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen, funktio μ joukon E mitta ja funktiojono $\{f_i\}$ jono sellaisia joukossa E mitallisia funktioita, joille $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$ melkein kaikkialla. Jos on olemassa joukossa E integroitava funktio g siten, että $\sup_{i \in \mathbb{N}} |f_i(x)| \leq g(x)$ melkein kaikkialla, niin funktio f on integroitava joukossa E ja raja-arvo $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E |f - f_i| d\mu = 0$ sekä integraaliehto $\int_E f d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i d\mu$ toteutuu.

Seuraus 1. Kun funktio $f \in \mathcal{V}(t_a, t_b)$, niin Itô-isometriaksi kutsutaan odotusarvoidentiteettiä

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{t_a}^{t_b} f(t, \omega) dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} f(t, \omega)^2 dt \right].$$

Vastaava ehto muodostettiin alkeisfunktioille yhtälössä (4).

Määritelmä 16. (Funktioiluokka \mathcal{W}) Itô-integraali määriteltiin funktioluokan \mathcal{V} avulla. Se on kuitenkin yleistettävissä funktioluokkaa \mathcal{V} suuremmalle joukolle funktioita relaksoimalla funktionluokan \mathcal{V} ehtoja. Relaksoidaan aluksi ehtoa, jossa funktio luokan \mathcal{V} jäsenfunktion $f \in \mathcal{V}$ edellytettiin olevan \mathcal{F}_t -adaptoitunut. Korvataan tämä aiempi adaptoituneisuusehto edellytyksellä, että on olemassa kasvava joukko sigma-algebroja \mathcal{H}_t , joille

1. Stokastisen integraalin $\int f dW_t$ Wiener-prosessitermi W_t on martingaali ajallisen sigma-algebran \mathcal{H}_t suhteen,
2. Funktio luokan \mathcal{W} jäsenfunktio f_t on \mathcal{H}_t -adaptoitunut.

Martingaaliehto implikoi sisältyvyyden $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$. Ehtojen yhdistelmä taas takaa, että odotusarvoidentiteetti $\mathbb{E}[W_s - W_t \mid \mathcal{H}_t] = 0$ on voimassa kaikilla ajanhetkillä $s > t$.

Aiempi äärellisyysehto $\mathbb{E} \left[\int_{t_a}^{t_b} f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$ on myös relaksoitavissa, sillä se on korvattavissa todennäköisyys ehdolla¹⁰

$$\mathbb{P} \left(\int_{t_a}^{t_b} f(s, \omega)^2 ds < \infty \right) = 1.$$

Merkitään relaksoitua funktio luokan \mathcal{V} laajennosta muuttujalla \mathcal{W} . Notaatiota $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ hyödynnetään tietyn sigma-algebran kiinnittämiseen funktio luokalle \mathcal{W} .

Huomautus 1. Itô-integraalin määritelmää ei esitetä laajennetulle funktio luokalle \mathcal{W} . Tämä olisi kuitenkin tehtävissä vastaavalla tavalla kuin se esitettiin funktio luokalle \mathcal{V} . Jatkossa Itô-integraalin käsitteellä tarkoitetaan kuitenkin sen laajennettua versiota joukon \mathcal{W} funktioille.

Esimerkki 5. (Funktio luokkien \mathcal{V} ja \mathcal{W} ero) Olkoon prosessi $W_t(\omega) = W_k(t, \omega)$ n -ulotteisen Wiener-prosessin osaprosessi. Kun sigma-algebra $\mathcal{F}_t^{(n)}$ on generoitu prosessien $W_1(s_1, \cdot), \dots, W_n(s_n, \cdot)$ avulla ajanhetkille $s_k \leq t$, niin prosessi $W_k(t, \omega)$ on martingaali sigma-algebran $\mathcal{F}_t^{(n)}$ suhteen, sillä arvot $W_k(s, \cdot) - W_k(t, \cdot)$ ovat riippumattomia sigma-algebroista $\mathcal{F}_t^{(n)}$ ajanhetkillä $s > t$. Voidaan siis valita sigma-algebra $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$, jolloin stokastinen integraali

$$\int_0^t f(s, \omega) dW_k(s, \omega)$$

¹⁰Kun W_t on yksiulotteinen Wiener-prosessi ja funktio $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, niin jokaiselle ajanhetkelle t on esitettävissä askelfunktion $f_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ olemassaolo siten, että suppenemisehto $\int_0^t |f_n - f|^2 ds \rightarrow 0$ pätee todennäköisyysmitan \mathbb{P} suhteen. Tällaiselle funktiojonolle tiedetään stokastisen integraalin $\int_0^t f_n(s, \omega) dW_s$ suppeneminen tiettyyn satunnaismuuttujaan. Koska kyseinen raja-arvo riippuu ainoastaan funktiosta f eikä funktiojonosta f_n , niin voidaan määrittää suppenemisehto $\int_0^t f(s, \omega) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(s, \omega) dW_s$, joka toteutuu todennäköisyysmitan \mathbb{P} suhteen.

on määritelty $\mathcal{F}_t^{(n)}$ -adaptoituille funktioille $f(t, \omega)$. Tällaisia stokastisia integraaleja ovat esimerkiksi useamman kuin yhden Wiener-prosessin sisältävät stokastiset integraalit, kuten

$$\int W_2(t, \omega) dW_1 \text{ ja} \\ \int \sin(W_1^2 + W_2^2) dW_2.$$

Määritelmä 17. (*Moniulotteinen Itô-integraali*) Merkitään muuttujalla W n -ulotteista Wiener-prosessia. Tulkitaan joukko $\mathcal{W}^{m \times n}(t_a, t_b)$ joukoksi $m \times n$ -ulotteisia funktiomatriiseja, joiden jokaisen indeksin funktio σ_{ij} on funktioluokan $\mathcal{W}(t_a, t_b)$ jäsen. Kun funktiomatriisi $A \in \mathcal{W}^{m \times n}(t_a, t_b)$, niin moniulotteinen Itô-integraali on

$$\int_{t_a}^{t_b} A dW = \int_{t_a}^{t_b} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1 \\ \vdots \\ dW_n \end{pmatrix},$$

jossa jokaisen sarakevektorin j komponentti i tulkitaan yksiulotteisten Itô-integraalien summiksi

$$\sum_{j=1}^n \int_{t_a}^{t_b} \sigma_{ij} dW_j(s, \omega).$$

Huomautus 2. Jokainen stokastinen integraali on martingaali, joka periytyy Wiener-prosessin martingaaliominaisuudesta [7][Luku 5.1].

Käsittelystä Itô-laskennon mukaisesta stokastisten integraalien esitystavasta on huomioitavissa, että Itô-laskenta käsittelee enemmän integrointia kuin derivointia. Stokastisiin prosesseihin liittyvään differentiaalilaskentaan on kehitetty myös derivointiin liittyvää teoriaa, mutta derivointia stokastisten prosessin suhteen pidetään osana Malliavin-laskentaa, joka yhdistää variaatiolaskennon teoriaa sekä ideoita stokastisiin prosesseihin [7][Luku 4]. Malliavin-laskentaa ei tässä tutkielmassa käsitellä.

Stokastisen integraalin voi myös muodostaa Stratonovichin kehittämällä menetelmällä. Stratonovichin rakenteen heikkoutena pidetään sitä, etteivät sen avulla muodostetut stokastiset integraalit ole kuitenkaan martingaaleja verrattuna Itô-laskennon teoriaan perustuviin stokastisiin integraaleihin [7][Luku 4.6]. Tyypillisesti Stratonovichin stokastisen integraalin voi huomioida notaatiosta, jossa hyödynnetään differenssitermien edessä palloa $\int \circ dW_t$. Stratonovichin sekä Itôn stokastisen integraalin esitystapojen välillä voidaan kuitenkin yksinkertaisesti vaihtaa [7][Algoritmi 4.11], jolloin osa teoreettisista rakenteista sekä sovelluskohteiden päättelystä yksinkertaistuu. Osa stokastisten integraalien sekä differentiaaliyhtälöiden ominaisuuksista on kuitenkin todistettu vain toisessa näistä teorioista.

Määritelmä 18. (*Yksiulotteinen Itô-prosessi*) Olkoon W_t Wiener-prosessi todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Yksiulotteiseksi *Itô-prosessiksi* tai *stokastiseksi integraaliksi* kutsutaan stokastista prosessia X_t , joka noudattaa ehtoa

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

missä funktio $\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ toteuttaa äärellisyysehdon

$$\mathbb{P} \left(\int_0^t \sigma(s, \omega)^2 ds < \infty \right) = 1.$$

Lisäksi oletetaan, että funktio μ on \mathcal{H}_t -adaptoitunut sekä äärellisyysehto

$$\mathbb{P} \left(\int_0^t \mu(s, \omega)^2 ds < \infty \right) = 1$$

on vastaavasti voimassa. Differentiaalimuodossa Itô-prosessista hyödynnetään notaatiota

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

jossa kerrointa μ voidaan kutsua virtaus- tai ajautumistermiksi¹¹ sekä kerrointa σ diffuusiotermiksi¹². Diffuusiotermistä σ käytetään joissain sovellustilanteissa myös nimitystä dispersiotermi. Ajautumistermi μ kuvaa siis tunnettua käyttäytymistä, kun taas diffuusio- tai dispersiotermi kuvaa miten satunnainen kohina tai virhe yhdistyy deterministiseen malliin.

Lause 2. (*Yksiulotteinen Itô:n lause*) Olkoon prosessi X_t yksiulotteinen Itô-prosessi muotoa

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Kun funktio $g \in C^2([0, \infty] \times \mathbb{R})$ ¹³, niin prosessi Y ehdolla

$$Y_t := g(t, X_t)$$

on vastaavasti Itô-prosessi. Lisäksi prosessin Y differentiaalimuoto toteuttaa yhtälön

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2, \quad (5)$$

missä merkintää $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ voidaan käsitellä ehtojen

$$\begin{aligned} (dt)^2 &= dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, \\ (dW_t)^2 &= dW_t \cdot dW_t = dt \end{aligned}$$

mukaisesti.

Todistus. Periaatteellisesti tulos osoitetaan sijoittamalla differentiaali dX_t prosessin Y_t differentiaalimuotoon. Differentiaalitermien identiteettejä hyödyntäen päädytään

¹¹engl. drift

¹²engl. diffusion

¹³Eli funktio g on kaksi kertaa jatkuvasti derivoitavissa alueella $[0, \infty) \times \mathbb{R}$.

yhtälömuotoihin

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} (\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot (\mu dt + \sigma dW_t)^2 \\
&= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} \mu dt + \frac{\partial g}{\partial x} \sigma dW_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \mu^2 \cdot (dt)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\mu \sigma dt dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2 \cdot (dW_t)^2 \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \mu \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} \sigma dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \mu^2 \cdot 0 + (\mu \sigma \cdot 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2 \cdot dt \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} \sigma dW_t,
\end{aligned}$$

josta viimeisessä termit on järjestetty Itô-prosessin differentiaalimuotoon. Integraalimuoto on silloin

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} \sigma dW_s.$$

Termien g , $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ sekä $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ rajallisuus voidaan olettaa, muttei tätä erikseen näytetä.

Osoitetaan lause toiseen suuntaan hyödyntämällä Taylorin sarjakehitelmää, jolloin

$$\begin{aligned}
g(t, X_t) &= g(0, X_0) + \sum_j \Delta g(t_j, X_j) \\
&= g(0, X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_j \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_j)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} (\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\
&\quad + \sum_j R_j,
\end{aligned}$$

missä osittaisderivaatat on kehitetty pisteissä (t_j, X_{t_j}) ja differenssitermit ovat

$$\begin{aligned}
\Delta t_j &= t_{j+1} - t_j \\
\Delta X_j &= X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \\
\Delta g(t_j, X_j) &= g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - g(t_j, X_j),
\end{aligned}$$

joiden lisäksi jäännöstermi on¹⁴

$$R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2) \text{ kaikilla indekseillä } j.$$

Kun differenssitermi viedään rajalle $\Delta t_j \rightarrow 0$, niin päädytään suppenemisehtoihin

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t} ds \quad \text{ja} \quad \sum_j \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} ds.$$

¹⁴Pikku-o-notaatiolla tarkoitetaan asymptootista merkitsemättömyyttä. Tässä yhteydessä ajanhetkivälien lyhentyessä jäännöstermi suppenee siis kohti nollaa.

Koska funktiot μ ja σ ovat alkeisfunktioita, voidaan muodostaa ehto

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \mu_j^2 (\Delta t_j)^2 + 2 \cdot \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \mu_j \sigma_j (\Delta t_j) (\Delta W_j) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma_j^2 (\Delta W_j)^2, \end{aligned}$$

jonka kaksi ensimmäistä termiä lähestyvät kohti nollaa, kun differenssitermi vietään rajalle eli $\Delta t_j \rightarrow 0$. Esimerkkinä tästä voidaan esittää odotusarvon suppeneminen

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \mu_j \sigma_j (\Delta t_j) (\Delta W_j) \right)^2 \right] = \sum_j \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \mu_j \sigma_j \right)^2 \right] (\Delta t_j)^3 \rightarrow 0.$$

Väitetään viimeisen termin suppenevan L^p -avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$ kohti integraalia

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2 ds, \text{ kun } \Delta t_j \rightarrow 0.$$

Tämän osoittamiseksi määritetään funktio $a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2$, jolle hyödynnetään notatiota $a_j = a(t_j)$. Tulkitaan ehto

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_j a_j (\Delta W_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j \right)^2 \right] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[a_i a_j ((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i) ((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j)].$$

Kun indeksi $i < j$, niin termit $a_i a_j ((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i)$ sekä $((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j)$ ovat toisistaan riippumattomia, jolloin ne katoavat. Päätely toteutuu vastaavasti käänteisille indekseille $i > j$. Käsiteltäväksi jää siis tilanne $i = j$, jolle toteutuu suppeneminen

$$\begin{aligned} \sum_j \mathbb{E} [a_j^2 ((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j)^2] &= \sum_j \mathbb{E}[a_j^2] \cdot \mathbb{E}[(\Delta W_j)^4 - 2(\Delta W_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2] \\ &= \sum_j \mathbb{E}[a_j^2] \cdot (3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2) \\ &= 2 \sum_j \mathbb{E}[a_j^2] \cdot (\Delta t_j)^2 \rightarrow 0, \text{ kun } \Delta t_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$ ollaan siis osoitettu suppenemisehto

$$\sum_j a_j (\Delta W_j)^2 \rightarrow \int_0^t a(s) ds, \text{ kun } \Delta t_j \rightarrow 0,$$

joka on toisin sanoen esitettävissä differenssi-identiteettinä

$$(dW_t)^2 = dt.$$

Tulos osoittaa samalla, että jäännöstermille pätee asymptoottinen merkitsemättömyys

$$\sum R_j \rightarrow 0, \text{ kun } \Delta t_j \rightarrow 0.$$

□

Huomautus 3. Stokastisten differentiaaliyhtälöiden deterministinen integraali voidaan käsitellä Riemann-, Riemann-Stieltjes- tai Lebesgue-integraalina riippuen sovellustilanteesta

Itön lausetta voidaan verrata deterministisen differentiaalilaskennan ketjusääntöön, joka nähdään monella tavalla hyödylliseksi tässäkin tutkielmassa.

Määritelmä 19. (*Moniulotteinen Itô-prosessi*) Merkitään muuttujalla W m -ulotteista Wiener-prosessia, funktiomatriisin α komponentteina μ -muotoisia funktioita u_{ij} sekä funktiomatriisin β komponentteina σ -muotoisia funktioita σ_{ij} . Näiden avulla voidaan määrittää stokastinen differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} dX_1 &= \mu_1 dt + \sigma_{11} W_1 + \dots + \sigma_{1m} W_m \\ \vdots & \\ dX_n &= \mu_n dt + \sigma_{n1} W_1 + \dots + \sigma_{nm} W_m \end{cases},$$

joka voidaan esittää matriisimuodossa yhtälönä

$$dX_t = \alpha dt + \beta dW_t,$$

jota kutsutaan moniulotteiseksi Itô-prosessiksi.

Lause 3. (*Moniulotteinen Itön lause*) Olkoon X moniulotteinen Itô-prosessi

$$dX_t = \alpha dt + \beta dW_t.$$

Määritellään funktiovektori $g : [0, \infty] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g = (g_1, \dots, g_p)$ ja prosessi

$$Y(t, \omega) := g(t, X_t),$$

jolloin prosessi Y on yksiulotteista tapausta vastaavasti moniulotteinen Itô-prosessi, jonka komponentit Y_k määritellään ehdolla

$$dY_k := \frac{\partial g_k}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j,$$

jossa differenssi-identiteeteille pätee¹⁵

$$\begin{aligned} dW_i dW_j &= \delta_{ij} dt \\ dW_i dt &= dt dW_i = 0. \end{aligned}$$

Huomautus 4. Moniulotteisen Itön kaavan todistus on yksiulotteista tapausta vastaava, muttei sitä esitetä.

Stokastisen differentiaaliyhtälön voi siis tulkita olevan ajan suhteen etenevä prosessi, jota siihen liittyvä Wiener-prosessi ohjaa tai edistää tiettyyn suuntaan. Yksittäisen stokastisen differentiaaliyhtälön polkurealisaation tulkinta on satunnaisuuden vuoksi harvoin hyödyllistä. Hyödyllisempänä tavoitteena voidaankin pitää useamman polkurealisaation käyttäytymisen tilastollista tulkintaa [7][Luku 3.2]. Stokastisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisun olemassaolon ja yksikäsitteisyyden määrittäminen on myös haastavaa, sillä esimerkiksi Wiener-prosessi ei ole differentioituva missään pisteessä. Picardin-Lindelöfin lauseesta on kuitenkin muodostettu stokastisille differentiaaliyhtälöillekin soveltuva versio [7][Luku 3.5], jota ei kuitenkaan tässä tutkielmassa käsitellä.

¹⁵Notaatiolla δ tarkoitetaan Diracin mittaa.

Numeerisista ratkaisumenetelmistä

Käsiteltävä Euler-Maruyama-menetelmä [7][3.48] laajentaa determinististen differentiaaliyhtälöiden numeeriseen ratkaisemiseen hyödynnettävää Eulerin menetelmää toimimaan myös stokastisille differentiaaliyhtälöille. Käsiteltävä menetelmä hyödyntää ajallisen parametrin $t \in \mathbb{T}$ diskretointia parametrin N osoittamaan määrään osavälejä Eulerin menetelmän tavoin, jonka avulla on myös mahdollista muuttaa approksimointitarkkuutta sekä laskennallista kompleksisuutta.

Euler-Maruyama-menetelmää voidaan hyödyntää esimerkiksi stokastisilla differentiaaliyhtälöillä muodostettujen mallien simulointiin, kun niiden ratkaisu analyttisesti ei ole mahdollista. Useampaa polkurealisaatiota hyödyntämällä stokastisen differentiaaliyhtälön käyttäytymisestä voidaan myös tehdä tilastollisia päätelmiä.

Määritelmä 20. (*Euler-Maruyama-menetelmä*) Tavoitteena on ratkaista numeerisesti stokastinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) W_t,$$

jonka alkuarvo X_0 on tunnettu. Asetetaan ratkaisuaikaväliksi $(0, T] \in \mathbb{T}$ ja jaetaan se tasaisesti parametrin N osoittamaan määrään osa-aikavälejä

$$0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad \text{missä } \Delta t = T/N.$$

Muodostetaan approksimaatiota varten rekursioyhtälö Y_n välille $0 \leq n \leq N - 1$, joka toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0 \\ Y_{n+1} &= Y_n + \mu(t, Y_n)\Delta t + \sigma(t, Y_n)\Delta W_t, \\ \Delta W_n &= W_{t_{n+1}} - W_{t_n}. \end{aligned}$$

Wiener-prosessia approksimoivat muuttujat W_n ovat siis riippumattomia ja identtisesti normaalijakautuneita satunnaismuuttujia jakaumalla $\mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Euler-Maruyama-menetelmä on yksinkertainen ymmärtää ja toteuttaa, mutta sen konvergenssinopeutta voidaan pitää hitaana. Stokastisten differentiaaliyhtälöiden numeerista ratkaisua varten onkin kehitetty useampia menetelmiä, kuten Milsteinin menetelmä sekä Runge-Kutta-menetelmän laajennus stokastisille differentiaaliyhtälöille [10] [7][Luku 8].

3 Suodinteoriaa

3.1 Matemaattinen suodin

Signaaliprosessi kuvaa signaalin totuutta, asiaa tai informaatiota, jota pyritään mitaamaan. *Suotimella* tarkoitetaan ympäristön tuottaman signaalin estimoimista siitä tehtävien havaintojen avulla. Yksinkertaisen suotimen syötteenä on siis esimerkiksi tietyn sensorin tai muun mittausvälineen tilatieto useammalla peräkkäisellä ajanhetkellä. Suotimilla voidaan tulkita olevan kolme lähtökohtaista ehtoa[11][Luku 1.3]

1. Kausaalisuusehto edellyttää, että signaalin tilaa X_t mitataan havaintojen Y_t perusteella.
2. Optimaalisuusehto tarkoittaa, että tilaestimaatin \hat{X}_t tulee minimoida keskineliövirhettä $\mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_t)^2]$.
3. Hetkellisyysehto varmistaa, että estimaatin \hat{X}_t tulee olla käytettävissä kaikilla ajanhetkillä t .

Suotimia pidetään osana tilastollista aikasarja-analyysiä, jolloin Bayesilaisena tavoitteena voidaan pitää päättelyä ehdollisesta todennäköisyysjakaumasta tai -mitasta, kun havainnot tunnetaan ajanhetkeen t asti. Tämän ehdollisen todennäköisyysjakauman tai -mitan avulla pyritään siis kuvaamaan tilastollisesti pääteltävissä oleva tieto tietyistä ympäristöstä. Se kuvaa siis rajatumpaa osuutta kokonaistiedon määrästä, kun ympäristön aiemmista tapahtumista on kerätty havaintoja. Ehdollinen todennäköisyysjakauma kertoo siis kontekstisidonnaisempaa tietoa ympäristöstä verrattuna olemassaolevaan kokonaistietoon, jota sigma-algebrat kuvaavat.

Mallintamisen näkökulmasta satunnaisuuden olemassaoloa ei erityisesti oleteta, vaan satunnaisuutta hyödynnetään kuvattaessa päätelmien epäluotettavuutta [7][Luku 10]. Epäluotettavuus voi johtua esimerkiksi olemassaolevan tiedon tai informaation riittämättömyydestä, taikka tapahtumien odottamattomuudesta, jolloin esimerkiksi tapahtumien tai tilojen estimointi luotettavasti ei ole mahdollista. Satunnaisuutta voidaan varsinaisesti hyödyntää mallinnettaessa esimerkiksi fyysistä satunnaisuutta, kuten radioaktiivista hajontaa¹⁶, jota ei tyypillisesti pidetä varsinaisena informaation puutteena. Seuraavaksi käsiteltävä teoriarakenne perustuu lähteen [11] esitystapaan.

Määritelmä 21. Suotimen tila-avaruus \mathbb{S} on *täydellinen separoituva metrinen avaruus*. Lisäksi muuttujalla $\mathcal{S} := \mathcal{B}(\mathbb{S})$ kuvataan tila-avaruuden \mathbb{S} Borelin sigma-algebraa eli joukon \mathbb{S} avointen joukkojen generoimaa sigma-algebraa. Jos tila-avaruus $\mathbb{S} = \mathbb{R}^d$, missä $d \in \mathbb{N}$, niin sigma-algebra \mathcal{S} on numeroituvasti generoitu. Tila-avaruuden tarkoituksena on kuvata ympäristön kaikkien mahdollisten tilanteiden joukkoa.

¹⁶Kvanttifysiikan nykyiseen käsitykseen nojaten yksittäisen atomin hajoamishetken estimointi ei ole mahdollista.

Määritelmä 22. (*Signaaliprosessi*) Kun joukko \mathbb{S} on tila-avaruus, joukko \mathbb{T} aika-avaruus sekä nelikko $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ filtraatiolla varustettu todennäköisyysavaruus, niin *signaaliprosessiksi* kutsutaan $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptoitunutta stokastista prosessia $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$, jonka mahdolliset arvot sijaitsevat tila-avaruudessa \mathbb{S} ja jonka polut ovat cadlag-polkuja¹⁷.

Signaalin mittaaminen virheettömästi ei kuitenkaan ole suotimien sovelluskonteksteissa tyypillisesti mahdollista. Signaalista voidaan kuitenkin tehdä epäsuorasti yleensä virhettä sisältäviä havaintoja.

Määritelmä 23. (*Todennäköisyysmittojen joukko*) Kun pari $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ on mitallinen avaruus ja $\mathcal{M}(\mathbb{S})$ mitallisen avaruuden $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ äärellisten mittojen joukko, niin todennäköisyysmittojen joukko $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ on sellainen aliavaruus $\mathcal{M}(\mathbb{S})$, jonka jokaiselle todennäköisyysmitalle $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$ pätee $\mu(\mathbb{S}) = 1$. Funktion $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ arvolla tarkoitetaan siis todennäköisyysmittojen joukkoa mitallisessa avaruudessa $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ eli lyhyemmin tila-avaruuden \mathbb{S} todennäköisyysmittojen joukkoa.

Määritelmä 24. (*Havaintoprosessi*) Oletetaan, että signaaliprosessi X saa arvoja tila-avaruudesta \mathbb{S} ajanhetkillä $t \in \mathbb{T}$ filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Asetetaan sensorien eli ajanhetkellisten havaintojen lukumääräksi $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ja määritellään tämän lukumäärän avulla m -ulotteinen mitallinen sensorifunktio $h = (h^i)_{i=1}^m : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^m$, jolle pätee todennäköisyyden suhteen äärellisysehto

$$\mathbb{P} \left(\int_0^t \|h(X_s)\| ds < \infty \right) = 1$$

kaikilla ajanhetkillä $t \in \mathbb{T}$. Sensorifunktion h tulee siis olla melkein varmasti äärellistä jokaisella ajanhetkellä $t \in \mathbb{T}$ todennäköisyydellä 1.

Olkoon stokastinen prosessi W m -ulotteinen $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptoinut signaaliprosessista X riippumaton Wiener-prosessi, joka sijaitsee signaaliprosessin X avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. *Havaintoprosessiksi* kutsutaan silloin stokastista prosessia Y , jolle pätee integraaliyhtälö

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t h(X_s) ds + W_t$$

jokaisella ajanhetkellä $t \in \mathbb{T}$.

Huomautus 5. Havaintoprosessin Y määritelmän mitallinen sensorifunktio h voi tarvittaessa olla ajanhetkistä $t \in \mathbb{T}$ riippuva. Notation yksinkertaistuksen vuoksi mahdollista ajallista riippuvuutta ei kuitenkaan määritelmässä esitetty.

Tyypillisissä sovellustilanteissa ympäristön muutokset ovat jatkuvia, kun taas havaintoja kerätään diskreeteillä ajanhetkillä. Näiden diskreettien ajanhetkien välit eivät myöskään aina ole tasavälejä. Hyödynnettäessä havaintoihin useampaa kuin

¹⁷Prosessi on cadlag-adaptoitunut, kun sen polut ovat oikealta jatkuvia ja vasemmalta rajallisia. Kun stokastisen prosessin A_t ajanhetkille $t \in \mathbb{T}$ on olemassa raja-arvot A_{t-} sekä A_{t+} ja oikealle raja-arvolle pätee $A_t = A_{t+}$, niin prosessin polut ovat cadlag-polkuja.

yhtä sensoria, voidaan myös päätyä tilanteeseen, jossa sensoreilta päätyy eri ajanhetkillä uusia havaintoja. Tämänkaltaisessa sovellustilanteessa stokastisten differentiaaliyhdyntälöiden hyödyntämisestä on erityisesti hyötyä, sillä stokastisen differentiaaliyhdyntälön voi arvottaa tai estimoida mielivaltaisilla ajanhetkillä tai havaintoajanhetkien eroilla¹⁸ [7][Luku 10].

3.2 Suodinongelma

Määritelmä 25. (*Suodinongelma*) Oletetaan aika-avaruudeksi \mathbb{T} ja filtraatiolla varustetuksi todennäköisyysavaruudeksi $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Määritellään signaaliprosessi X sekä sen havaintoprosessi Y kuten edellä. *Suodinongelmalla* tarkoitetaan ehdollisen todennäköisyysjakauman π_t määrittämistä signaaliprosessin X tilalle ajanhetkelle t , hyödyntäen havaintoprosessista Y kerättyä tietoa ajanhetkeen t mennessä. Kun avaruus $B(\mathbb{S})$ kuvaa äärellisten $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ -mitallisten funktioiden $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ joukkoa ja testifunktio $\varphi \in B(\mathbb{S})$, niin suodinongelman tavoitteena on määrittää ajanhetkelle t ehdollinen jakauma todennäköisyysmittojen joukosta eli

$$\pi_t(\varphi) = \mathbb{E}[\varphi(X_t) \mid \mathcal{Y}_t],$$

missä sigma-algebralla \mathcal{Y} tarkoitetaan havaintoprosessin Y generoiman sigma-algebran laajennosta mitattomiin joukkoihin¹⁹. Prosessi π_t on siis stokastinen prosessi, jonka arvot ovat todennäköisyysmittoja. Toisin sanoen pyritään siis etsimään yksittäinen todennäköisyysmitta todennäköisyysmittojen joukosta $\mathcal{P}(\mathbb{S})$, joka on odotettavin ajanhetkellä t perustuen kerättyyn informaatioon \mathcal{Y}_t .

Suodinongelman periaatteena on siis löytää signaaliprosessille X parhain mahdollinen estimaatti \hat{X}_t jokaisella ajanhetkellä $t \in \mathbb{T}$, kun estimaattiin \hat{X}_t voidaan hyödyntää havaintoprosessin Y avulla kerättyjä havaintoja ajanhetkeen t mennessä. Koska havaintoprosessin tuottamat havainnot eivät ole lähtökohtaisesti täsmällisiä tuntemattoman havaintovirhemäärän vuoksi, niin signaaliprosessin estimaattori on myöskään harvoin täydellinen. Parhaana mahdollisena estimaattorina käsitellään sellaista estimaattoria, jonka tuottamien estimaattien keskineliövirhe minimoituu, joka olikin yksi matemaattisen suotimen aiemmin mainituista lähtökohdista. Tarkemmin tavoitteena on siis minimoida mitallisen avaruuden yli laskettu keskineliövirheen määrä

$$\int_{\Omega} |X_t - \hat{X}_t|^2 d\mathbb{P} = \mathbb{E}[|X_t - \hat{X}_t|^2].$$

Huomionarvoisesti tyypillisissä sovellustilanteissa varsinaisen signaaliprosessin arvoja X_t ei tunneta eli sen estimaattorivirheen määrää ei voida määrittää, jonka seurauksena päädytään suodinongelmaan.

¹⁸Tätä ominaisuutta kutsutaan diskretisaatioinvarianssiksi.

¹⁹Kun muuttuja A on stokastinen prosessi, niin sigma-algebran laajennoksella tarkoitetaan yhdistelmää prosessin A generoimasta sigma-algebrasta $\sigma(A)$ ja prosessiin A liittyvän todennäköisyysmitan suhteen mitattomista joukoista.

3.3 Lineaarinen Kalman-Bucy-suodin

Kalman-Bucy-suodin on menetelmä häiriötekijöitä sisältävien lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien tilaestimoinnille, kun käytettävissä on havaintoaineisto käsiteltävän differentiaaliyhtälöryhmän mallintamasta tilanteesta. Kalman-Bucy-suodin on 1960-luvun alulla kehitetty menetelmä, jota hyödynnettiin nopeasti erityisesti ilmailu- ja avaruussovelluksissa. Ensimmäinen julkisesti tunnettu käyttökohte Kalman-Bucy-suotimille olikin Apollo-avaruusohjelma[12][Luku 2.4.7]. Kalman-Bucy-suodinta käytetään nykyään laajamittaisesti sen ymmärrettävyyden vuoksi, mutta sen oletukset lineaarisesti käyttäytyvästä mallista sekä normaalijakautuneista virhearvoista rajoittavat kuitenkin sen sovellettavuutta. Seuraava esitystapa perustuu lähteen [6][Luku 6] järjestykseen. Lisätietoa Kalman-Bucy-suotimesta on löydettävissä esimerkiksi lähteistä [11][6.2] sekä [12][Luku 7].

Käsitellään d -ulotteista signaaliprosessia $X = (X^i)_{i=1}^d$ filtraatiolla varustetussa todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Oletetaan signaaliprosessin X olevan seuraavan lineaarisen stokastisen differentiaaliyhtälön ratkaisu, jota ohjaa p -ulotteinen Wiener-prosessi $V = (V^j)_{j=1}^p$. Oletetaan signaaliprosessin X toteuttavan siis lineaarisen stokastisen differentiaaliyhtälön

$$X_t = X_0 + \int_0^t (F_s X_s) ds + \int_0^t C_s dV_s,$$

missä matriisit $F_s \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ja $C_s \in \mathbb{R}^{d \times p}$. Määritetään lisäksi signaaliprosessille havaintoprosessi Y sekä toinen Wiener-prosessi W samassa todennäköisyysavaruudessa kuin signaaliprosessi X ja Wiener-prosessi V . Havaintoprosessi Y noudattaa stokastista differentiaaliyhtälöä

$$Y_t = \int_0^t (G_s X_s) ds + \int_0^t D_s dW_s,$$

missä matriisit $G_s \in \mathbb{R}^{m \times d}$ ja $D_s \in \mathbb{R}^{m \times r}$. Signaali- ja havaintoprosessiparin differentiaaliesitys on siis

$$\begin{cases} dX_t = F_t X_t dt + C_t dV_t \\ dY_t = G_t X_t dt + D_t dW_t \end{cases}.$$

Lineaarisen suodinongelman analyttinen ratkaisu esitetään vaiheittain. Notation yksinkertaistuksen vuoksi signaaliprosessin ratkaisu X johdetaan yksiulotteiselle ongelmalle, mutta periaate on kuitenkin yleistettävissä useampaan ulottuvuuteen. Kertoimia F_s , G_s , C_s sekä D_s käsitellään siis yksiulotteisen reaaliavaruuden \mathbb{R} alkioina. Näiden kertoimien oletetaan myös olevan äärellisiä, kun ajanhetkien välit ovat äärellisiä. Lisäoletuksina ratkaisuprosessin X alkutila on normaalijakautunut ja havaintoprosessin Y alkutila on nolla eli

$$\begin{cases} X_0 \sim \mathcal{N}(x_0, r_0) \\ Y_0 = 0 \end{cases}.$$

Käsitellään seuraavaksi johdatteleva esimerkki ennen lineaarisen suodinongelman ratkaisun esittämistä.

Esimerkki 6. Oletetaan tilanne, jossa yksittäisen satunnaismuuttujan X arvoa pyritään mittaamaan useammalla ajanhetkellä, mutta jokainen mittaus sisältää satunnaisen määrän mittausvirhettä. Pyritään määrittämään lineaarinen estimaatti \hat{X} tälle satunnaismuuttujalle X jokaisella ajanhetkellä k tehtävien mittausten perusteella, jotka siis sisältävät mittausvirheen. Olkoot reaaliarvoiset satunnaismuuttujat X, W_1, W_2, \dots, W_j toisistaan riippumattomia, jonka lisäksi niille oletetaan pätevän odotusarvoidentiteetit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 0, & \mathbb{E}[X^2] &= a^2 \\ \mathbb{E}[W_j] &= 0, & \mathbb{E}[W_j^2] &= m^2\end{aligned}$$

jokaisella ajanhetkellä j . Merkitään havaintosatunnaismuuttujaksi

$$Y_j = X + W_j.$$

Esimerkin tavoitteena on siis löytää satunnaismuuttujalle X parhain mahdollinen lineaarinen estimaatti \hat{X}_k perustuen satunnaismuuttujien Y_j arvoihin, jotka tunnetaan ajanhetkillä $j \leq k$. Oletetaan avaruudella \mathcal{L}_k tarkoitettavan lineaarista aliavaruutta

$$\mathcal{L}_k(Y) = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i Y_i \right\} = \{c_1 Y_1 + \dots + c_k Y_k\}, \text{ missä } c_k \in \mathbb{R}.$$

Parhaimmalla lineaarisella estimaatilla \hat{X}_k tarkoitetaan projektion P_k löytämistä jokaiselle ajanhetkelle k lineaariseen aliavaruuteen \mathcal{L}_k . Projektio P_k on siis operaattori satunnaismuuttujasta sen lineaariseen estimaattiin. Tätä varten hyödynnetään menetelmää²⁰, jolla avaruuden \mathcal{L}_k lineaarikombinaation osista saadaan ortogonaalisia eli toisistaan riippumattomia. Ortogonaalisten termien avulla voidaan virittää sama aliavaruus, jonka alkuperäinenkin lineaarikombinaatio viritti. Pyritään siis etsimään satunnaismuuttujat A_1, A_2, \dots , jotka toteuttavat ehdot

1. Satunnaismuuttujien $A_{i \leq k}$ perusteella voidaan virittää sama lineaarinen aliavaruus kuin satunnaismuuttujien $Y_{i \leq k}$ avulla eli ehdon $\mathcal{L}_k(A) = \mathcal{L}_k(Y)$ tulee olla voimassa kaikilla ajanhetkillä k ,
2. Satunnaismuuttujille A_i ja A_j pätee aina ortogonaalisuusehto eli $\mathbb{E}[A_i A_j] = 0$ kaikilla indekseillä $i \neq j$.

Kun tällaiset satunnaismuuttujat A_j määritetään, niin estimaatti \hat{X}_k on muodostettavissa summana

$$\hat{X}_k = \sum_{j=1}^k \frac{\mathbb{E}[X A_j]}{\mathbb{E}[A_j^2]} A_j$$

kaikilla ajanhetkillä k .

Muodostetaan estimaattien \hat{X}_k ja \hat{X}_{k-1} välille lisäksi rekursioyhtälö huomioimalla ehto

$$A_j = Y_j - \hat{X}_{j-1}, \tag{6}$$

²⁰Käytetään siis Gramin–Schmidtin ortogonalisoinimenetelmää.

sillä satunnaismuuttujalla A_j pätee

$$\begin{aligned} A_j &= Y_j - P_{j-1}(Y_j) \\ &= Y_j - P_{j-1}(X), \end{aligned}$$

joista ensimmäinen identiteetti pätee projektion P_k määritelmän nojalla ja toinen satunnaismuuttujan Y_j määritelmän sekä projektion P_k ominaisuuden $P_{j-1}(W_j) = 0$ perusteella. Nyt satunnaismuuttujan A_j avulla voidaan muodostaa odotusarvoyhtälöt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X A_j] &= \mathbb{E} \left[X(Y_j - \hat{X}_{j-1}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[X(X - \hat{X}_{j-1}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(X - \hat{X}_{j-1})^2 \right] \end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_j^2] &= \mathbb{E} \left[(X + W_j - \hat{X}_{j-1})^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(X - \hat{X}_{j-1})^2 \right] + m^2. \end{aligned}$$

Lineaarisen estimaatin \hat{X}_k identiteetille

$$\hat{X}_k = \sum_{j=1}^k \frac{\mathbb{E}[X A_j]}{\mathbb{E}[A_j^2]} A_j$$

voidaan siis muodostaa rekursioyhtälö

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + \frac{\mathbb{E} \left[(X - \hat{X}_{k-1})^2 \right]}{\mathbb{E} \left[(X - \hat{X}_{k-1})^2 \right] + m^2} \left(Y_k - \hat{X}_{k-1} \right).$$

Vaihe 1. Havaintoprosessin Y lineaariset ja mitalliset estimaatit

Yleistetään seuraavaksi periaate, jota aiemmassa esimerkissä käsiteltiin yksinkertaisemmin. Periaatteena on siis havaintoprosessin Y_t muuntaminen ortogonaaliseksi muutosprosessiksi N_t yleistämällä esimerkissä käsitellyn lineaarisen estimaatin \hat{X}_k rekursiokaava stokastisia prosesseja varten.

Lemma 4. *Oletetaan satunnaismuuttujien X ja $\{Y_s, s \leq t\}$ olevan L^p -avaruuden $L^2(\mathbb{P})$ jäseniä. Lisäksi satunnaisvektorin*

$$(X, Y_{s_1}, \dots, Y_{s_n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

oletetaan olevan multinormaalijakautunut²¹ kaikilla ajanhetkillä $s_n \leq t, n \geq 1$. Merkitään projektiofunktiolla $P_{\mathcal{L}}$ projektiota avaruudesta $L^2(\mathbb{P})$ lineaariseen avaruuteen \mathcal{L} . Oletusten toteutuessa lineaariselle projektiolle $P_{\mathcal{L}}$ pätee identiteetti

$$P_{\mathcal{L}}(X) = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{Y}] = P_{\mathcal{K}}(X)$$

²¹Multinormaalijakaumalla tarkoitetaan moniulotteista normaali jakaumaa.

tarkoittaen, että paras mahdollinen satunnaismuuttujien Y suhteen lineaarinen estimaatti satunnaismuuttujalle X on identtinen parhaimman \mathcal{Y} -mitallisen estimaatin kanssa.

Todistus. Oletetaan projektion $P_{\mathcal{L}}$ avulla lineaariseksi estimaatiksi $\hat{X} = P_{\mathcal{L}}(X)$ ja merkitään $\tilde{X} = X - \hat{X}$. Väitetään satunnaismuuttujan \tilde{X} olevan riippumaton satunnaismuuttujien Y_s generoimasta sigma-algebrasta \mathcal{Y} . Tiedetään, että satunnaisvektori $(X, Y_{s_1}, \dots, Y_{s_n})$ on normaalijakautunut²² kaikilla ajanhetkillä $s_n \leq t$. Koska odotusarvoidentiteetti

$$\mathbb{E}[\tilde{X}Y_{s_j}] = 0$$

pätee kaikilla indekseillä j , niin satunnaismuuttujilla \tilde{X} sekä Y_{s_j} ei ole korrelaatiota indeksivälillä $1 \leq j \leq n$, jolloin satunnaismuuttuja \tilde{X} on riippumaton satunnaisvektorin $(Y_{s_1}, \dots, Y_{s_j})$ jokaisesta alkioista Y_{s_j} . Nyt siis satunnaismuuttuja \tilde{X} on riippumaton sigma-algebrasta \mathcal{Y} , mutta sille pätevät identiteetit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X - \hat{X})] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\tilde{X}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] \cdot \mathbb{E}[\tilde{X}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

jokaisella havaintoprosessin generoiman sigma-algebran \mathcal{Y} joukolla $A \in \mathcal{Y}$ eli integraali-identiteetti

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \hat{X} d\mathbb{P}$$

toteutuu satunnaismuuttujalle X ja sen lineaariselle estimaatille \hat{X}_k . Koska lineaarinen estimaatti \hat{X} on \mathcal{Y} -mitallinen, niin identiteetti

$$\hat{X} = \mathbb{E}[X | \mathcal{Y}]$$

on vastaavasti voimassa. □

Lemma 5. *Kaksiulotteinen signaali- ja havaintoprosessin avulla muodostettu satunnaisvektori-prosessi*

$$M_t = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

on multinormaalijakautunut.

Todistus. Tulkitaan satunnaisvektori-prosessi M_t ratkaisuksi alkuarvoiselle kaksiulotteiselle lineaariselle stokastiselle differentiaaliyhtälölle

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ dM_t &= H_t M_t dt + K_t dW_t, \end{aligned}$$

²²Satunnaisvektori $(A_1, \dots, A_k) \in \mathbb{R}^k$ on normaalisti jakautunut jos ja vain jos sen alkioiden lineaarikombinaatio $c_1 A_1 + \dots + c_k A_k$ on normaalisti jakautunut kaikilla kertoimilla $c_k \in \mathbb{R}$. Normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien L^2 -avaruuden raja-arvo on myös normaalijakautunut.

missä matriisit $H_t \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $K_t \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sekä prosessilla W_t tarkoitetaan kaksiulotteista Wiener-prosessia. Ratkaistaan stokastinen differentiaaliyhtälö kiintopistemenetelmän²³ avulla. Merkitään indeksijoukolla $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

$$M_t^{(n+1)} = M_0 = \int_0^t H_s M_s^{(n)} ds + \int_0^t K_s dW_s,$$

jolloin vektorit $M_t^{(n)}$ ovat multinormaali-jakautuneita jokaisella indeksin n arvolla²⁴ ja suppenevat L^p -avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$ kohti satunnaisvektoria M_t^{25} eli

$$M_t^{(n)} \rightarrow M_t, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

□

Vaihe 2. Innovaatioprosessi

Jatketaan käsittelyä avaruudessa

$$\mathcal{L}_T(Y) = c_0 + c_1 Y_{t_1} + \dots + c_k Y_{t_k}, \text{ missä } 0 \leq t_i \leq T, c_j \in \mathbb{R},$$

jolla siis tarkoitetaan kaikkien lineaarikombinaatioiden sulkeumaa L^p -avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$. Kun funktio $f \in L^2[0, T]$ ja vakiot $a_i \in \mathbb{R}$ ovat funktiosta f riippumattomia, niin voidaan huomioida odotusarvoidentiteetti

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) dY_t \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) G_t X_t dt \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) D_t dV_t \right)^2 \right] \\ &+ 2\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) G_t X_t dt \right) \left(\int_0^T f(t) D_t dV_t \right) \right], \end{aligned}$$

sillä Cauchy-Schwartzin epäyhtälön nojalla odotusarvoepäyhtälö

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) G_t X_t dt \right)^2 \right] \leq a_1 \cdot \int_0^T f(t)^2 dt$$

on voimassa. Lisäksi Itô-isometrian nojalla ehto

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) D_t dV_t \right)^2 \right] = \int_0^T f(t)^2 (D_t)^2 dt$$

toteutuu. Prosessit X_t sekä V_t ovat riippumattomia, jolloin voidaan arvioida

$$a_0 \int_0^T f^2(t) dt \leq \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) dY_t \right)^2 \right] \leq a_2 \int_0^T f^2(t) dt. \quad (7)$$

²³Picardin iteraatiomenetelmä.

²⁴ks. esim. [6][5.2.1]

²⁵ks. esim. [6][A.7]

Lemma 6. Lineaarikombinaatioavaruus $\mathcal{L}_T(Y)$ on määriteltävissä joukkona

$$\mathcal{L}_T(Y) = \left\{ c_0 + \int_0^T f(t) dY_t \mid f \in L^2[0, T], c_0 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Todistus. Merkitään oikeaa puolta yhtälöstä muuttujalla $\mathcal{H}(Y, T)$. Riittää siis osoittaa, että

1. Avaruus \mathcal{H} on avaruuden \mathcal{L} osajoukko eli $\mathcal{H}(Y, T) \subset \mathcal{L}(Y, T)$,
2. Avaruus \mathcal{H} sisältää kaikki lineaarikombinaatiot, jotka ovat muotoa $c_0 + c_1 Y_{t_1} + \dots + c_k Y_{t_k}$, missä $0 \leq t_i \leq T$,
3. Avaruus \mathcal{H} on suljettu L^p -avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$.

Väite 1. toteutuu funktion f jatkuvuuden perusteella, jolloin

$$\int_0^T f(t) dY_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j f(j \cdot 2^{-n}) \cdot (Y_{(j+1)2^{-n}} - Y_{j \cdot 2^{-n}}).$$

Väite 2. pätee, kun oletetaan ajanhetkien järjestyneisyys eli $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq T$, jolloin identiteetit

$$\sum_{i=1}^k c_i Y_{t_i} = \sum_{j=0}^{k-1} c'_j \Delta Y_j = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} c'_j dY_t = \int_0^T \left(\sum_{j=0}^{k-1} c'_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) \right) dY_t,$$

toteutuvat, kun muuttuja $\Delta Y_j = Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j}$. Väite 3. taas toteutuu avaruuden $L^2[0, T]$ täydellisyyden sekä epäyhtälön (7) perusteella. \square

Määritelmä 26. Merkitään

$$\overline{(GX)}_s := P_{\mathcal{L}(Y, s)}(G_s X_s) = G_s \widehat{X}_s,$$

jolloin *innovaatioprosessilla* tarkoitetaan prosessia

$$N_t := Y_t - \int_0^t \overline{(GX)}_s ds$$

eli

$$dN_t = G_t(X_t - \widehat{X}_t) dt + D_t dV_t.$$

Lemma 7.

1. Innovaatioprosessilla N_t on ortogonaaliset inkrementit,
2. Odotusarvoidentiteetti $\mathbb{E}[N_t^2] = \int (D_s)^2 ds$ toteutuu,
3. Lineaarikombinaatioavaruuksille pätee identiteetti $\mathcal{L}_t(N) = \mathcal{L}_t(Y)$ kaikilla ajanhetkillä $t \geq 0$,
4. Innovaatioprosessi N_t on multinormaalijakautunut.

Todistus. Osoitetaan väitteet järjestyksessä. Kun aikaparametri $s < t$ ja prosessi $Z \in \mathcal{L}(Y, s)$, niin odotusarvoidentiteetti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(N_t - N_s) \cdot Z] &= \mathbb{E} \left[\left(G_r(X_r - \widehat{X}_r) dr + \int_s^t D_r dV_r \right) \cdot Z \right] \\ &= \int_s^t G_r \mathbb{E}[(X_r - \widehat{X}_r) \cdot Z] dr + \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t D_r dV_r \right) \cdot Z \right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

toteutuu, sillä erotus $X_r - \widehat{X}_r$ on ortogonaalinen avaruudessa $\mathcal{L}_r(Y) \supset \mathcal{L}_s(Y)$ kaikilla ajanhetkillä $r \geq s$ ja Wiener-prosessin V inkrementit ovat riippumattomia.

Väite 2 nähdään Itön lauseen perusteella hyödynnettäessä funktiota $g(t, x) = x^2$, jolle $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2$ ja

$$\begin{aligned}d(N_t^2) &= 2N_t dN_t + \frac{1}{2} \cdot 2 (dN_t)^2 \\ &= 2N_t dN_t + (D_t)^2 dt,\end{aligned}$$

jolloin odotusarvoidentiteetti

$$\mathbb{E}[N_t^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t 2N_s dN_s \right] + \int_0^t (D_s)^2 ds$$

toteutuu ja suppenemisehto

$$\int_0^t N_s dN_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum N_{t_j} [N_{t_{j+1}} - N_{t_j}]$$

on voimassa. Koska innovaatioprosessilla N on ortogonaaliset inkrementit, päädytään odotusarvoehtoon

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T N_s dN_s \right] = 0.$$

Väitteen 3 osuus sisältyvyydestä toiseen suuntaan $\mathcal{L}_t(N) \subset \mathcal{L}_t(Y)$ on selvä. Päinvastaista sisältyvyyttä $\mathcal{L}_t(N) \supset \mathcal{L}_t(Y)$ varten hyödynnetään lemmoja 4 ja 6. Sovellettaessa yhtälöä

$$\overline{GX}_r = c(r) + \int_0^r g(r, s) dY_s, \text{ missä } g(r, \cdot) \in L^2[0, r] \text{ ja } c(r) \in \mathbb{R},$$

voidaan muodostaa integraali-identiteetit

$$\begin{aligned}\int_0^t f(s) dN_s &= \int_0^t f(s) dY_s - \int_0^t f(r) G_r \widehat{X}_r dr \\ &= \int_0^t f(s) dY_s - \int_0^t f(r) \left(\int_0^r g(r, s) dY_s \right) dr - \int_0^t f(r) c(r) dr \\ &= \int_0^t \left(f(s) - \int_s^t f(r) g(r, s) dr \right) dY_s - \int_0^t f(r) c(r) dr.\end{aligned}$$

Nyt Volterra-integraaliyhtälöiden perusteella²⁶ on olemassa funktiot $f \in L^2[0, t]$ ja $h \in L^2[0, t]$, joille ehto

$$f(s) - \int_s^t f(r)g(r, s) dr = h(s)$$

toteutuu. Valittaessa funktio $h = \mathbb{1}_{[0, t_1]}$, missä ajanhetki $0 \leq t_1 \leq t$, päädytään integraaliyhtälöön

$$\int_0^t f(r)c(r)dr + \int_0^t f(s) dN_s = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, t_1]}(s) dY_s = Y_{t_1},$$

jonka perusteella sisältyvyys $\mathcal{L}_t(N) \supset \mathcal{L}_T(Y)$ toteutuu.

Väite 4 on voimassa, sillä estimaatti \widehat{X}_t on raja-arvo avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$ muodossa

$$M = c_0 + c_1 Y_{s_1} + \cdots + c_k Y_{s_k}$$

oleville lineaarikombinaatioille ajanhetkillä $s_k \leq t$, jolloin satunnaisvektori

$$(\widehat{X}_{t_1}, \dots, \widehat{X}_{t_m})$$

on raja-arvo m -ulotteisille satunnaisvektoreille $\overline{M} = (M^{(1)}, \dots, M^{(m)})$, joiden komponentit $M^{(j)}$ ovat vastaavia lineaarikombinaatioita. Satunnaisvektori \overline{M} on multinormaalijakautunut prosessin Y_t multinormaalijakautuneisuuden nojalla, jolloin myös estimaattiprosessin \widehat{X} arvot ovat multinormaalijakautuneita. Nyt siis innovaatioprosessi

$$N_t = Y_t - \int_0^t G_s \widehat{X}_s ds$$

on vastaavalla periaatteella multinormaalijakautunut. □

Vaihe 3. Innovaatioprosessi

Määritelmä 27. Sovelletaan innovaatioprosessia N_t . Määritellään prosessi R ehdoilla

$$\begin{aligned} R_0 &= 0, \\ dR_t(\omega) &= \frac{1}{D_t} dN_t(\omega), \end{aligned}$$

jossa kerroin $D_t \in \mathbb{R}, D_t \neq 0$.

Lemma 8. *Prosessilla R_t on ominaisuudet:*

1. *Prosessin R_t polut ovat jatkuvia,*
2. *Prosessin R_t inkrementit ovat ortogonaalisia,*
3. *Prosessi R_t on multinormaalijakautunut,*

²⁶ks. esim. [13]

4. Odotusarvoehdot $\mathbb{E}[R_t] = 0$ sekä $\mathbb{E}[R_t R_s] = \min(s, t)$ ovat voimassa.

Todistus. Ominaisuus 1 on selvä. Ominaisuudet 2 ja 3 päätyvät innovaatioprosessilta N_t . Ominaisuus 4 voidaan osoittaa Itô'n kaavaan perustuen, jonka avulla

$$\begin{aligned} d((R_t)^2) &= 2R_t dR_t + (dR_t)^2 \\ &= 2R_t dR_t + dt. \end{aligned}$$

Koska prosessilla R_t on ortogonaaliset inkrementit, niin odotusarvoehto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(R_t)^2] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t ds \right] \\ &= t \end{aligned}$$

on voimassa. Ajanhetkille $s < t$ toteutuu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_t R_s] &= E[(R_t - R_s) \cdot R_s] + \mathbb{E}[(R_s)^2] \\ &= s. \end{aligned}$$

Prosessi R_t on siis yksiulotteinen Wiener-prosessi. □

Seuraus 2. Koska lineaarikombinaatioavaruudelle \mathcal{L} pätee

$$\mathcal{L}_t(N) = \mathcal{L}_t(R),$$

niin estimaattiprosessi \widehat{X}_t on esitettävissä lineaarikombinaatioavaruuden projektiona

$$\widehat{X}_t = P_{\mathcal{L}_t(R)}(X_t).$$

Lemma 9. Estimaattiprosessille X_t on voimassa identiteetti

$$\widehat{X}_t = \mathbb{E}[X_t] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{E}[X_t R_s] dR_s.$$

Todistus. Lemman 6 avulla estimaattiprosessille pätee identiteetti

$$X_t = c_0(t) + \int_0^t g_s dR_s, \text{ missä } g \in L^2[0, t] \text{ ja } c_0(t) \in \mathbb{R}.$$

Odotusarvoa hyödyntämällä saadaan identiteetit

$$c_0(t) = \mathbb{E}[\widehat{X}_t] = \mathbb{E}[X_t],$$

jolloin erotus $(X_t - \widehat{X}_t)$ ja integraali $\int_0^t f_s dR_s$ ovat keskenään ortogonaalisia kaikille funktioille $f \in L^2[0, t]$. Itô-isometrian nojalla voidaan näyttää, että

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_t \int_0^t f_s dR_s \right] &= \mathbb{E} \left[\widehat{X}_t \int_0^t f_s dR_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t g_s dR_s \cdot \int_0^t f_s dR_s \right] \\ &= \mathbb{E} [g_s f_s ds] \\ &= \int_0^t g_s f_s ds. \end{aligned}$$

Valittaessa funktioksi f indikaattorifunktio $\mathbb{1}_{[0,r]}$ jollekin aikavälille $r \leq t$, saadaan tulokset

$$\mathbb{E}[X_t R_r] = \int_0^r g_s ds \quad \text{ja} \quad g_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbb{E}[X_t R_r].$$

□

Vaihe 4. Estimaattiprosessin \widehat{X} virheen differentiaaliyhtälöesitys

Lause 4. Signaaliprosessille X on muodostettavissa Itô'n lauseen avulla esitys

$$\begin{aligned} X_t &= \exp\left(\int_0^t F_s ds\right) \cdot \left(X_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s F_u du\right) C_s dV_s\right) \\ &= \exp\left(\int_0^t F_s ds\right) \cdot X_0 + \int_0^t \exp\left(\int_s^t F_u du\right) C_s dV_s \end{aligned}$$

sekä odotusarvoidentiteetti

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] \cdot \exp\left(\int_0^t F_s ds\right).$$

Huomautus 6. Muodostettu esitystapa on yleistettävissä aikavälille $0 \leq r \leq t$, jolloin

$$X_t = \exp\left(\int_r^t F_s ds\right) + \int_r^t \exp\left(\int_s^t F_u du\right) C_s dV_s.$$

Käsiteltyjen vaiheiden avulla voidaan nyt muodostaa stokastinen differentiaaliyhtälö signaaliprosessin X estimaattiprosessille \widehat{X} . Tunnetaan siis identiteetti

$$\begin{cases} \widehat{X}_t &= \mathbb{E}[X_t] + \int_0^t f_s(t) dR_s, \\ f_s(t) &= \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{E}[X_t R_s]. \end{cases}$$

Hyödynnetään innovaatioprosessin N_t ja prosessin R_t määritelmiä

$$\begin{aligned} dN_t &= G_t(X_t - \widehat{X}_t) dt + D_t dV_t, \\ dR_t &= \frac{1}{D_t} dN_t, \end{aligned}$$

jolloin

$$R_s = \int_0^s \frac{G_r}{D_r} (X_r - \widehat{X}_r) dr + V_s.$$

Merkittäessä erotusta $\widetilde{X}_r = X_r - \widehat{X}_r$, päädytään odotusarvomotoon

$$\mathbb{E}[X_t R_s] = \int_0^s \frac{G_r}{D_r} \mathbb{E}[X_t \widetilde{X}_r] dr$$

Signaaliprosessille X muodostetun esityksen avulla saadaan odotusarvo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t \widetilde{X}_r] &= \exp\left(\int_r^t F_v dv\right) \cdot \mathbb{E}[X_r \widetilde{X}_r] \\ &= \exp\left(\int_r^t F_v dv\right) \cdot \mathbb{E}[(\widetilde{X}_r)^2]. \end{aligned}$$

Merkitään seuraavaksi

$$S_r := \mathbb{E}[(\tilde{X}_r)^2],$$

jolla tarkoitetaan signaaliprosessin estimaatin keskineliövirhettä ajanhetkellä r . Ollaan siis päästy ehtoihin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t R_s] &= \int_0^s \frac{G_r}{D_r} \exp\left(\int_r^t F_v dv\right) S_r dr, \\ f_s(t) &= \frac{G_s}{D_s} \exp\left(\int_s^t F_v dv\right) S_s.\end{aligned}$$

Osoitetaan, että signaaliprosessin estimaatin keskineliövirhe S_t toteuttaa deterministisen Riccati-differentiaaliyhtälön²⁷

$$\frac{dS}{dt} = 2F_t S_t - \frac{G_t^2}{D_t^2} S_t^2 + C_t^2.$$

Pythagoraan lauseen ja Itô-isometrian avulla

$$\begin{aligned}S_t &= \mathbb{E}[(X_t - \hat{X}_t)^2] \\ &= \mathbb{E}[X_t^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X_t \hat{X}_t] + \mathbb{E}[\hat{X}_t^2] \\ &= \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[\hat{X}_t^2] \\ &= \mathbb{E}[X_t^2] - \int_0^t (f_s(t))^2 ds - \mathbb{E}[X_t]^2.\end{aligned}$$

Merkittäessä

$$T_t = \mathbb{E}[X_t^2],$$

niin signaaliprosessin esitystavan ja Itô-isometrian avulla saadaan yhtälö

$$T_t = \exp\left(2 \int_0^t F_s ds\right) \mathbb{E}[X_0^2] + \int_0^t \exp\left(2 \int_s^t F_u du\right) C_s^2 ds.$$

Koska signaaliprosessin alkuarvo X_0 on riippumaton Wiener-prosessista V , niin

$$\frac{dT}{dt} = 2F_t \cdot \exp\left(2 \int_0^t F_s ds\right) \cdot \mathbb{E}[X_0^2] + C_t^2 + \int_0^t 2F_t \exp\left(2 \int_s^t F_u du\right) C_s^2 ds,$$

eli saadaan esitystapa

$$\frac{dT}{dt} = 2F_t T_t + C_t^2.$$

Esitettäessä aiempi keskineliövirheprosessin identiteetti $S_t = T_t - \int_0^t f_s(t)^2 ds - \mathbb{E}[X_t]^2$ differentiaalimuodossa

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dT}{dt} - f_t(t)^2 - \int_0^t 2f_s(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f_s(t) ds - 2F_t (\mathbb{E}[X_t])^2$$

²⁷Siis muotoa $y' = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 x$, $q_0, q_2 \neq 0$ olevan differentiaaliyhtälön.

ja sijoitettaessa siihen muodostettu differentiaaliesitys prosessille T_t päädytään muotoon

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= 2F_t T_t + C_t^2 - \frac{G_t^2 S_t^2}{D_t^2} - 2 \int_0^t f_s(t)^2 F_t ds - 2F_t (\mathbb{E}[X_t])^2 \\ &= 2F_t S_t + C_t^2 - \frac{G_t^2 S_t^2}{D_t^2},\end{aligned}$$

joka on väitettyä Riccati-differentiaaliyhtälömuotoa.

Vaihe 5. Estimaattiprosessin \hat{X}_t stokastinen differentiaaliyhtälö

Estimaattiprosessin \hat{X}_t integraaliesitystapa on

$$\hat{X}_t = c_0(t) + \int_0^t f_s(t) dR_s,$$

jonka differentiaaliesitystapa on

$$d\hat{X}_t = c'_0(t) dt + f_t(t) dR_t + \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_s(t) dR_s \right) dt,$$

sillä

$$\begin{aligned}\int_0^u \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_s(t) dR_s \right) dt &= \int_0^u \left(\int_s^u \frac{\partial}{\partial t} f_s(t) dt \right) dR_s \\ &= \int_0^u (f_s(u) - f_s(s)) dR_s \\ &= \hat{X}_u - c_0(u) - \int_0^u f_s(s) dR_s.\end{aligned}$$

Voidaan siis muodostaa signaaliprosessin estimaattiprosessille yhtälömuodot

$$d\hat{X}_t = c'_0(t) dt + \frac{G_t S_t}{D_t} dR_t + \left(\int f_s(t) dR_s \right) F_t dt$$

sekä

$$\begin{aligned}d\hat{X}_t &= c'_0(t) dt + F_t \cdot (\hat{X}_t - c_0(t)) dt + \frac{G_t S_t}{D_t} dR_t \\ &= F_t \hat{X}_t dt + \frac{G_t S_t}{D_t} dR_t.\end{aligned}$$

Merkittäessä

$$dR_t = \frac{dY_t - G_t \hat{X}_t dt}{D_t}$$

saadaan Kalman-Bucy-suotimen määritelmää varten hyödynnettävä differentiaaliesitysmuoto

$$d\hat{X}_t = \left(F_t - \frac{G_t^2 S_t}{D_t^2} \right) \hat{X}_t dt + \frac{G_t S_t}{D_t^2} dY_t.$$

Lause 5. (Yksiulotteinen Kalman-Bucy-suodin)
Yksiulotteisen lineaarisen suodinongelman ratkaisu

$$\widehat{X}_t = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{Y}_t]$$

signaali- ja havaintoprosesseille

$$\begin{cases} dX_t = F_t X_t dt + C_t dV_t \\ dY_t = G_t X_t dt + D_t dW_t, \\ t \in \mathbb{T} \text{ ja } F_t, G_t, C_t, D_t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

toteuttaa stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \widehat{X}_0 = \mathbb{E}[X_0] \\ d\widehat{X}_t = \left(F_t - \frac{G_t^2 S_t}{D_t^2} \right) \widehat{X}_t dt + \frac{G_t S_t}{D_t^2} dY_t \end{cases},$$

jossa keskineliövirheprosessi

$$S_t = \mathbb{E}[(X_t - \widehat{X}_t)^2]$$

toteuttaa deterministisen Riccati-differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} S_0 = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])^2] \\ \frac{dS}{dt} = 2F_t S_t \frac{G_t^2}{D_t^2} S_t^2 + C_t^2 \end{cases}.$$

Lause 6. (Moniulotteinen Kalman-Bucy-suodin)
Moniulotteisen lineaarisen suodinongelman ratkaisu

$$\widehat{X}_t = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{Y}_t]$$

moniulotteisille signaali- ja havaintoprosesseille

$$\begin{cases} dX_t = F_t X_t dt + C_t dV_t \\ dY_t = G_t X_t dt + D_t dW_t, \\ t \in \mathbb{T}, F_t \in \mathbb{R}^{n \times n}, G_t \in \mathbb{R}^{m \times n}, C_t \in \mathbb{R}^{n \times p}, D_t \in \mathbb{R}^{m \times r}, \end{cases}$$

toteuttaa moniulotteisen stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \widehat{X}_0 = \mathbb{E}[X_0] \\ d\widehat{X}_t = (F_t - S_t G_t^\top (D_t D_t^\top)^{-1} G_t) \widehat{X}_t + S_t G_t^\top (D_t D_t^\top)^{-1} dY_t \end{cases},$$

jossa keskineliövirheprosessi

$$S_t = \mathbb{E}[(X_t - \widehat{X}_t)(X_t - \widehat{X}_t)^\top] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

toteuttaa deterministisen moniulotteisen Riccati-differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} S_0 = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0])(X_0 - \mathbb{E}[X_0])^\top] \\ \frac{dS}{dt} = F_t S_t + S_t F_t^\top - S_t G_t^\top (D_t D_t^\top)^{-1} G_t S_t + C_t C_t^\top \end{cases},$$

jossa matriisin $D_t D_t^\top$ tulee olla käännettävissä jokaisella ajanhetkellä ja käänteismatriisin $(D_t D_t^\top)^{-1}$ täytyy olla äärellistä jokaisella äärellisellä ajanhetkivälillä.

Huomautus 7. Kalman-Bucy-suodin on yleistettävissä edelleen, muttei näitä yleistyksiä kuitenkaan tässä tutkielmassa käsitellä.

Esimerkki 7. (*Populaatiokasvumalli havaintoepätarkkuudella*) Mallinnetaan populaatiokasvua differentiaaliyhtälöllä

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt, & r \in \mathbb{R} \\ \mathbb{E}[X_0] = b, & b > 0 \\ \mathbb{E}[(X_0 - b)^2] = a^2 \end{cases},$$

jonka havainnot noudattavat yhtälöä

$$dY_t = X_t dt + m dV_t,$$

jossa vakio $m \in \mathbb{R}$ ja prosessi V_t on Wiener-prosessi. Esimerkkitalanteen Riccati-differentiaaliyhtälö on siis

$$\begin{cases} S(0) = a^2 \\ \frac{S}{t} = 2rS - \frac{1}{m^2}S^2 \end{cases},$$

jonka ratkaisu on logistinen funktio

$$\begin{cases} S(t) = \frac{2rm^2}{1 + Ke^{-2rt}} \\ K = \frac{2rm^2}{a^2} - 1 \end{cases}.$$

Populaatiokasvun estimaatti \hat{X}_t tietylle ajanhetkelle t noudattaa siis ehtoa

$$\begin{cases} \hat{X}_0 = \mathbb{E}[X_0] = b \\ d\hat{X}_t = \left(r - \frac{S}{n^2}\right) \hat{X}_t dt + \frac{S}{m^2} dY_t. \end{cases}$$

Oletetaan esimerkin vuoksi, että $a^2 = 2rm^2$, jolloin identiteetti $S(t) = 2rm^2$ toteutuu²⁸, jonka avulla voidaan muodostaa differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \hat{X}_0 = b \\ d(e^{rt} \hat{X}_t) = e^{rt} \cdot 2 \cdot r dY_t \end{cases},$$

joka on myös esitettävissä rekursiona

$$\hat{X}_t = e^{-rt} \left[\int_0^t 2 \cdot r e^{rs} dY_s + b \right].$$

Oletettaessa havaintojen Y_t olevan aina vakioita $H_s := \beta \in \mathbb{R}$, voidaan rekursioyhtälö esittää myös muodossa

$$\hat{X}_t = e^{-rt} \left[\int_0^t 2 \cdot r e^{rs} H_s ds + b \right],$$

²⁸Yleisessä tapauksessa $S(t)$ suppenee kohti arvoa $2rm^2$ siirryttäessä ajan suhteen rajalle $t \rightarrow \infty$.

jolloin populaation estimaatti ajanhetkellä t on

$$\widehat{X}_t = 2\beta - (2\beta - b)e^{-rt} \rightarrow 2\beta, \quad \text{kun } t \rightarrow \infty.$$

Olettaessa havaintojen H_s noudattavan ehtoa $\beta e^{\alpha s}$, jossa $s \geq 0 \in \mathbb{R}$, päädytään taas estimaattiin

$$\widehat{X}_t = e^{-rt} \left[\frac{2r\beta}{r + \alpha} e^{(r+\alpha)t} \cdot t - 1 + b \right] \approx \frac{2r\beta}{r\alpha} e^{\alpha t},$$

joka toteutuu ajanhetken t ollessa suuri. Kalman-Bucy-suodin tulkitsee havaintojen $H_s = \beta e^{rs}$ olevan pitkäaikaisesti luotettavia ainoastaan ehdon $\alpha = r$ toteutuessa. Kun ehto $\alpha = r$ toteutuu ja lisäehto $\beta = b$ on myös voimassa, niin Kalman-Bucy-suodin luottaa havaintoihin jokaisella ajanhetkellä.

Kalman-Bucy-suotimen laskennallinen kompleksisuus on $\mathcal{O}(d^3)$ matriisikertolaskujen vuoksi. Ulottuvuuksien lukumäärän pitämistä vähäisenä voidaan siis pitää hyödyllisenä. Sovelluskohteissa saattaa myös aiheutua numeerisia epätarkkuusongelmia, jotka saattavat kumuloitua hyödynnettäessä rekursiivista estimointimenetelmää, jolloin aiemmin kääntyvistä matriiseista ei enää voidakaan muodostaa kääntematriiseja [12][Luku 7.3].

3.4 Epälineaarinen Benešin suodin

Seuraavaksi lyhyesti esitettävän Benešin suotimen avulla huomataan, että tietyt ehdot toteuttavilla epälineaarissillakin malleilla on analyyttinen ratkaisu lineaarisiin ympäristöihin soveltuvan Kalman-Bucy-suotimen tavoin. Kalman-Bucy-suotimestakin on kehitetty epälineaarisiin ympäristöihin soveltuva laajennettu Kalman-suodin²⁹, joka hyödyntää lineaarista interpolointia epälineaaristen ympäristöjen approksimointia varten. Laajennettua Kalman-suodinta ei kuitenkaan tässä tutkielmassa käsitellä.

Oletetaan Benešin suotimen käsittelyä varten signaaliprosessin X olevan ratkaisu stokastiselle differentiaaliyhtälölle

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s) ds + \sigma V_t,$$

jossa funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva sekä Lipschitz-jatkuva, joka varmistaa yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon[11][Luku 6.1]. Oletetaan diffuusiotermin olevan positiivinen vakio $\sigma > 0 \in \mathbb{R}$ ja alkuarvon $X_0 \in \mathbb{R}$ olevan tunnettu. Huomioidaan funktion f Lipschitz-jatkuvuuden varmistavan yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon. Lisäksi lineaarisen sensorifunktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ollessa muotoa $h(x) = h_1 x + h_2$, missä vakiot $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, niin havaintoprosessi Y toteuttaa stokastisen differentiaaliyhtälön

$$Y_t = \int_0^t h(X_s) ds + W_t.$$

²⁹engl. Extended Kalman Filter (EKF)

Määritelmä 28. (*Benešin ehto*) Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva sekä Lipschitz-jatkuva ja funktio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on muotoa $h_1x + h_2$, joilla vakiot $a, b, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ sekä vakio $\sigma > 0 \in \mathbb{R}$, niin *Benešin ehdoksi* kutsutaan identiteettiä

$$f' + f^2(x)\sigma^{-2} + h^2(x) = P(x),$$

jossa termi f' on funktion f derivaatta ja termi $P(x)$ on toisen asteen polynomi ei-negatiivisella toisen asteen kertoimella.

Esimerkki 8. (*Benešin ehto toteutuu lineaarisille funktioille*) Olkoon funktio f lineaarista muotoa $f(x) = ax + b$. Silloin toisen asteen polynomiksi P saadaan Benešin ehdon avulla

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{d}{dx}(ax + b) + (ax + b)^2\sigma^{-2} + (h_1x + h_2)^2 \\ &= a + (ax + b)^2\sigma^{-2} + (h_1x + h_2)^2 \\ &= a + (a^2x^2 + 2axb + b^2)\sigma^{-2} + h_1^2x^2 + 2h_1xh_2 + h_2^2 \\ &= a + \frac{a^2}{\sigma^2}x^2 + \frac{2ab}{\sigma^2}x + \frac{b^2}{\sigma^2} + h_1^2x^2 + 2h_1h_2x + h_2^2 \\ &= \left(\frac{a^2}{\sigma^2} + h_1^2\right)x^2 + \left(\frac{2ab}{\sigma^2} + 2h_1h_2\right)x + \left(\frac{b^2}{\sigma^2} + h_2^2 + a\right), \end{aligned}$$

jossa toisen asteen kerroin $\left(\frac{a^2}{\sigma^2} + h_1^2\right) \geq 0$, jolloin se on ei-negatiivinen ja Benešin ehto toteutuu. Samalla voidaan todeta, että lineaarinen suodin ajanhetkistä riippumattomilla kertoimilla on Benešin suodin [11][Exercise 6.1].

Lause 7. *Epälineaarinen suodinongelma on ratkaistavissa analyttisesti Benešin ehdon toteutuessa. Kun φ on mielivaltainen Borel-mitallinen testifunktio, niin todennäköisyyksimitalle π_t pätee*

$$\pi_t(\varphi) = \frac{1}{c_t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \exp(F(z)\sigma^{-2} + P_t(z)) dz,$$

missä funktio $F' = f$ ja funktio P_t on toisen asteen polynomifunktio noudattaen ehtoa

$$P_t(z) := z \cdot \left(h_1\sigma \int_0^t \frac{\sinh(s\rho\sigma)}{\sinh(t\rho\sigma)} dY_s + \frac{q + p^2x_0}{p\sigma \sinh(t\rho\sigma)} - \frac{q}{p\sigma} \coth(t\rho\sigma) \right) - \frac{p \coth(t\rho\sigma)}{2\sigma} \cdot z^2,$$

jossa muuttujat $p, q \in \mathbb{R}$ ovat mielivaltaisia vakioita. Lisäksi vakio c_t on määritelty ehdon

$$c_t := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(F(z)\sigma^{-2} + P_t(z)) dz$$

avulla kaikille ajanhetkillä t . Todennäköisyyksimitalla π on siis riippuvuus ainoastaan yksiuolotteiseen \mathcal{Y}_t -adaptoituneeseen prosessiin

$$t \mapsto \int_0^t \sinh(s\rho\sigma) dY_s.$$

*Lauseen todistusta ei kuitenkaan esitä.*³⁰

³⁰Todistus on esitetty lähteessä [11][Propositio 6.7.]

Huomautus 8. Notation yksinkertaistuksen vuoksi käsiteltiin yksiulotteisia lineaarisia signaali- ja havaintoprosesseja. Benešin ehto on määriteltävissä myös tilanteessa, jossa lineaariset signaali- ja havaintoprosessit ovat äärellisulotteisia.

4 Hiukkassuotimien periaatteita

*Hiukkassuotimella*³¹ tarkoitetaan matemaattista menetelmää, jonka avulla satunnaisuutta sisältävien mallien ja ympäristöjen tilaa pyritään muiden suotimien kaltaisesti määrittämään. Nämä mallit voivat olla esimerkiksi stokastisten differentiaaliyhtälöiden avulla muodostettuja, mutta hiukkassuodinmenetelmiä voidaan hyödyntää runsaaseen määrään muitakin mallinnusmenetelmiä. Hiukkassuotimen peruseriaate on hyödyntää aiempaa estimaattia mallin tilasta mallin uuden tilan estimaatin määrittämistä varten, jolloin se siis noudattaa rekursiivisen Bayes-suotimen periaatetta. Hiukkassuodin hyödyntää mallin tilaestimaatin päivityksessä havaintoja mallin ulkopuolelta, kuten esimerkiksi robotiikan sovelluksissa erilaisten sensorien tuottamaa tietoa. Hiukkassuodin voi samanaikaisesti hyödyntää myös täsmällisesti mallinnettavissa olevaa ja tunnettua tietoa, kuten esimerkiksi robotin liikekomentohistoriaa tilaestimaatin päivittämistä varten.

Kalman-Bucy-suotimen kaltaisesti hiukkassuotimen tavoitteena on parantaa käsitystä mallinnettavasta tilanteesta ilman, että tilatieto on täsmällisesti määritettävissä. Hiukkassuodin ei kuitenkaan edellytä yhtä rajaavia oletuksia mallista kuin lineaarisiin malleihin soveltuva Kalman-Bucy-suodin. Hiukkassuodinta voidaan hyödyntää myös epälineaaraisesti käyttäytyviin malleihin. Lisäksi hiukkassuodin ei edellytä stokastisten mallien noudattavan normaalijakautuneita virheitä tai häiriöitä, jotka taas olivat Kalman-Bucy-suotimen oletuksia. Hiukkassuotimen avulla voidaan myös kuvata mielivaltaisia todennäköisyysjakaumia, sillä se hyödyntää epäparametrista todennäköisyysjakaumamallia, hiukkasjoukkoa.

Hiukkassuotimien rakenneperiaatteena on siis käsitys joukosta hiukkasia. Jokainen hiukkanen on yksittäinen hypoteesi hyödynnetyn mallin mahdollisesta reaali-tilasta. Monien suotimien tavoin hiukkassuodin toimii myös monivaiheisella periaatteella, sillä se hyödyntää ylläpitämäänsä tilaestimaattitietoon ennustus- ja korjausaskelia. Uusien hiukkausten luonnin yhteydessä se taas hyödyntää aiempien hiukkasten merkityksellisyys- eli painokertoimia, jotka kuvaavat kuinka hyvin yksittäinen hiukkanen selittää mallin ulkopuolelta tehtyjä havaintoja. Ennustusaskelen ideana on hyödyntää aiemmin olemassa olevaa tietoa, kun taas korjausaskella pyritään määrittämään merkityksellisyyskertoimet eli kuinka hyvin yksittäinen hypoteesi selittäisi uutta mallin ulkopuolelta kerättyä tietoa.

Merkityksellisyyskertoimet kuvaavat kuinka tärkeä yksittäisen hiukkasen olemassaolo kokonaishiukkasjoukossa on. Mitä korkeampi hiukkasen merkityksellisyyskerroin, sitä oletettavampaa on, että kyseinen hiukkanen kuvaa estimoitavaa tilaa tehokkaasti. Paremmiin nykytilaa kuvaavien hiukkaset päätyvät todennäköisemmin myös seuraavan tilaestimointikierroksen hiukkasjoukkoon, sekä niille päättyy myös oletettavammin pieniä muutoksia sisältäviä jälkeläishiukkasia. Vastaavasti huonosti nykytilaa kuvaavien hiukkasten poistuminen kokonaishiukkasjoukosta on todennäköisempää alhaisempien merkityksellisyyskertoimien vuoksi. Merkityksellisyyskertoimia hyödyntävä uudelleenotanta-askel siis mukailee geneettisten algoritmien toimintaperiaatetta hiukkasjälkeläisten muodostuksen osalta.

³¹engl. particle filter

Esimerkki 9. Robotiikassa yksittäinen *hiukkanen* voisi tarkoittaa yhdistelmää useammasta numeerisesta vektorista. Hiukkanen voisi tällaisessa hiukkassuotimen sovelluskohteessa sisältää esimerkiksi robotin massakeskipisteen olinpaikan kolmiulotteisessa avaruudessa eli vektorin $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, robotin massakeskipisteen suuntavektorin eli kallistus, kääntymis- ja nyökkäyskulmavektorin $(\phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3$, nopeusvektorin $(v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ sekä kiihtyvyyksivektorin $(a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$. Näiden muuttujien yhdistelmävektori olisi siis vektori reaaliavaruudessa \mathbb{R}^{12} . Tämä vektori kuvaisi yhtä hiukkasta ja yksittäistä hypoteesia robotin tilasta.

Hiukkassuotimilla on kuitenkin niille ominaisia ongelmia. Esimerkiksi *degeneroituvuusongelmalla* tarkoitetaan tilannetta, jossa ainoastaan yhdellä hiukkasella on suuri merkityksellisyyskerroin, mutta suurin osa laskennallisista resurssikustannuksista koskee kuitenkin hiukkasia, joiden painoarvo on pieni. Resursseja siis hyödynnetään tämänkaltaisessa tilanteessa runsaasti merkityksettömiin hiukkasiin. Samalla hiukkasjoukko ei kuvaa tilahypoteesijoukkoa tehokkaasti ja suodin ei konvergoi du mihinkään tiettyyn tilaan. Degeneroituvuusongelmalta voidaan kuitenkin välttyä uudelleenotannalla [5][4.2.1] [3][Luku 1.4].

Uudelleenotantaan liittyy kuitenkin toinen ongelma, jota kutsutaan *otosköyhyydeksi*³², jolla viitataan vähäisiin eroihin hiukkasten painoarvoissa. Tämä johtuu yleensä vähäisestä virheen määrästä joko ympäristössä tai mittaushavainnoissa, jolloin uudelleenotanta-askel muodostaa saman hiukkasjoukon kuin aiemminkin. Seurauksena saatetaan päätyä degeneroituvuusongelmaan [5][4.2.2]. Yksinkertaiset hiukkassuotimet eivät yleensä toimi tehokkaasti ympäristöissä, joissa virhelähteen tuottama virhemäärä on vähäinen [3][s. 242]. Virheen määrää voidaan synteettisesti kasvattaa [5][5.2.1], mutta tämä taas saattaa aiheuttaa hiukkassuotimille konvergenssihaasteita.

Hiukkassuodin voi myös *hajaantua* rekursiivisen estimoinnin aikana, joka saattaa johtua esimerkiksi mallinnusvirheistä, kuten esimerkiksi mallinnetun tilasiirtymäjoukon oletetuista rajoituksista, taikka virhemäärien oletuksista liian suuriksi. Näitä hajaantumisongelmia voivat myös aiheuttaa odottamattomat havaintovirheet³³. Hajaantuneessa hiukkassuotimessa yksittäisten hiukkasten virheet ovat suuria verrattuna saatuihin havaintoihin, eikä niille muodostu tiettyä painopistettä. Näin myös hiukkassuotimen tuottamat tilahypoteesit eivät ole kovinkaan käyttökelpoisia. Hiukkassuodin hajaantuu tyypillisesti mallinnusongelmien taikka saatujen havaintojen laadun heikkouden seurauksena. Sovelluksissa havaintoviive saattaa myös aiheuttaa ongelmia. Hajaantuneen hiukkassuotimen voi alustaa uudelleen hajantuneen hiukkassuotimen korjaamiseksi, mutta tämä taas vaatii menetelmän, jolla hajaantunut hiukkassuodin voidaan huomata, joka riippuu usein sovellustilanteesta. Vastaavasti uudelleenalustuskaan ei välttämättä paranna ongelmatilannetta [5][4.2.3, 5.2.3].

Hiukkassuotimen mallinnusongelmiin liittyy esimerkiksi painoarvofunktion määrittäminen eli sen sovelluskohtaisen funktion muodostaminen, joka kertoo mitkä hiukkaset ovat merkittävämpiä verrattuna toisiin [5][4.2.4]. Lisäksi uudelleenotantamenetelmän valinta vaikuttaa hiukkassuodinmenetelmän käyttäytymiseen. Myös hiukkasten lukumäärän valinta saattaa aiheuttaa hankaluuksia, sillä liian pieni hiukkasjoukko ei muodosta tehokkaasti hyviä tilahypoteeseja, kun taas liian suuri määrä

³²engl. sample impoverishment

³³Esim. tutkajärjestelmissä tutkaheijastukset.

hiukkasia ei konvergoitu tietylle alueelle riittävän nopeasti. Suorituskykyongelmia saattaa myös aiheutua sovellustilanteissa [5][4.2.5]. Joissain sovellustilanteissa rajoitetaan esimerkiksi hyödyntämään uudelleenotantaa vain tilanteessa, jossa hiukkasjoukossa on suuri määrä hiukkasia pienillä painoarvoilla. Hiukkasten lukumäärää voidaan myös vaihdella suoritusaikana ja tätä menetelmää kutsutaankin adaptiiviseksi hiukkassuotimeksi, joka pyrkii pitämään hiukkasten lukumäärän kuitenkin mahdollisimman vähäisenä [5][5.5.2].

Sovellusongelmana voidaan myös pitää tilannetta, jossa hyödynnettävät havainnot eivät saavu järjestyksessä. Tämä saattaa johtua esimerkiksi tiedonsiirtoviiveestä, taikka useamman erilaisen sensorin hyödyntämisestä, joiden tuottamien havaintojen prosessointi vie merkittävästi erilaisen määrän aikaa. Esimerkiksi laseretäisyysmittari voi tuottaa yhden liukulukuarvon, joka ei välttämättä edes vaadi prosessointia verrattuna kameroista saatavaan tietoon, joka tyypillisesti edellyttää prosessointia ulottuvuuksien määrän rajoittamiseksi [5][5.5.4].

Ylläpidettävien muuttujien määrää voidaan kasvattaa yksittäisen hypoteesin tarkkuuden lisäämiseksi, mutta tämä vaatii vastaavasti usein hiukkasten lukumäärän kasvattamista, jotta hiukkaset konvergoituvat tila-avaruuden alueelle eivätkä hajaannu.

Esimerkki 10. Hiukkassuotimen *ennustusaskel* voisi robotiikassa käyttää esimerkiksi robotille annettua liikekomentoa. Kun robottia komennettaisiin liikkumaan kaksi metriä suoraan eteenpäin, niin jokaista robotin tilahypoteesia eli hiukkasta voitaisiin vastaavasti siirtää ennustusaskeleessa saman verran eteenpäin. Reaalimaailmassa robottien komentoja ei voida kuitenkaan pitää täysin täsmällisinä, vaan realisoituneeksi olinpaikan muutokseksi voisi aiheutua esimerkiksi 2 ± 0.1 metriä. Tällöin aiemmin täsmällisenkään hypoteesi robotin olinpaikasta ei enää liikekomennon jälkeen olisi enää täsmällinen, vaikka komennon suoritus voitaisiinkin tulkita onnistuneeksi. Tämän vuoksi ennustusaskeleella jokaiseen hiukkaseen lisättäisiin tyypillisesti satunnainen määrä oletettua liikevirhettä, jolloin voidaan tehdä oletus, että ainakin jokin hiukkanen tai hiukkasjoukon osa huomioisi myös robotille realisoituneen liikevirheen määrän.

Esimerkki 11. Hiukkassuotimen *korjausaskel* voisi esimerkiksi robotiikassa hyödyntää sensorihavaintoja. Korjausaskeleella määritetään jokaiselle robotin tilahypoteesille eli hiukkaselle todennäköisyys kuinka oletettavaa tietyn sensorin tuottama tieto olisi, jos robotti olisi hypoteesin osoittamassa olinpaikassa. Tällainen mittaus-tietoa tuottava sensori voisi olla esimerkiksi yksittäisen numeerisen arvon tuottama laseretäisyysmittari, taikka monimutkaisemmissa tilanteissa kamera, jolloin kameran tuottamaa pikselimatriisia verrattaisiin hypoteesiin siitä millaisen pikselimatriisin se tuottaisi kyseisellä kuvaushetkellä.

Hiukkassuodinmenetelmä kuvaa tilahypoteesijoukkoa n kappaleella hiukkasia, eli jokainen hiukkanen tarkoittaa yhtä hypoteesia. Näiden hiukkasten tilaa päivitetään jokaisella ajanhetken etenemisellä tunnetun tai oletetun muutosmallin avulla. Tämä muutosmalli voi olla esimerkiksi stokastinen differentiaaliyhtälö, jolloin muutosmallia kuvaavan yhtälön arvo realisoitaisiin jokaiselle hiukkaselle erikseen. Muutosaskeleen jälkeen kaikille uusille hiukkasille määritetään merkityksellisyyskertoimet, jonka

jälkeen kokonaishiukkaset päivitetään korjausaskeleella. Tietyllä korjausaskeleella päivitetty hiukkaset korvataan satunnaisella määrällä uusia hiukkasia, huomioiden kuitenkin merkityksellisyyskertoimet sekä haluttujen hiukkasten kokonaismäärän.

4.1 Hiukkassuodinjärjestelmä

Hiukkassuotimet ovat menetelmiä, jotka pyrkivät approksimoimaan ehdollista todennäköisyysmittaa π_t diskreeteillä todennäköisyysmitoilla [11][Luku 9.2]

$$\sum_i a_i(t) \delta_{v_i(t)},$$

jossa indeksillä i kuvataan yksittäistä hiukkasta, funktioilla a_i tietyn hiukkasen painoarvoa eli merkityksellisyyttä sekä funktioilla v_i tietyn hiukkasen sijaintia hiukkasten tila-avaruudessa \mathbb{S} . Hiukkassuotimet ovat tehokkaita ja yleiskäyttöisiä menetelmiä esimerkiksi suodinongelman ratkaisemista varten.

Alkuajanhetkellä $t = 0$ hiukkasjärjestelmä siis sisältää n kappaletta hiukkasia ekvivalenteilla painoarvoilla $1/n$ ja tila-avaruuden sijainneilla $v_j^n(0)$, $j = 1, \dots, n$. Hiukkasten alkusijainnit valitaan toisista hiukkasista riippumattomasti, mutta identtisesti jakautuneesti perustuen jakaumaan π_0 jokaiselle hiukkaselle. Hiukkasjärjestelmän approksimoiva todennäköisyysmitta ajanhetkellä $t = 0$ on silloin

$$\pi_0^n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{v_j^n(0)}.$$

Käsiteltäessä jatkuvaa aika-avaruutta $[0, \infty)$ muodostetaan tasaväliset osa-aikavälit pituudella δ . Osa-aikaväleillä $[i\delta, (i+1)\delta)$ hiukkaset liikkuvat signaaliprosessin X perusteella. Kun signaaliprosessi noudattaa stokastista prosessia, niin hiukkasille toteutuu kaikilla osa-aikavälin ajanhetkillä $t \in [i\delta, (i+1)\delta)$ ehto

$$v_j^n(t) = v_j^n(i\delta) + \int_{i\delta}^t f(v_j^n(s)) ds + \int_{i\delta}^t \sigma(v_j^n(s)) dV_s^{(j)} \quad \text{kaikille } j = 1, \dots, n,$$

missä prosessit $(V^{(j)})_{j=1}^n$ ovat toisistaan, havaintoprosessista Y sekä muista ympäristön satunnaismuuttujista riippumattomia \mathcal{F}_t -mitallisia p -ulotteisia Wienerprosesseja. Notaatiolla $V^{(j)}$ pyritään painottamaan, etteivät nämä prosessit ole p -ulotteisen Wiener-prosessin komponentteja.

Hiukkasten painokertoimet $\bar{a}_j^n(t)$ määritellään ehdolla

$$\bar{a}_j^n(t) := \frac{a_j^n(t)}{\sum_{k=1}^n a_k^n(t)},$$

missä

$$a_j^n(t) = 1 + \sum_{k=1}^m \int_{i\delta}^t a_j^n(s) h^k(v_j^n(s)) dY_s^k.$$

Toisin sanoen painokertoimille pätee

$$a_j^n(t) = \exp \left(\int_{i\delta}^t h(v_j^n(s))^\top dY_s - \frac{1}{2} \int_{i\delta}^t \|h(v_j^n(s))\|^2 ds \right).$$

Määritetään jokaiselle osa-aikavälin ajanhetkelle $t \in [i\delta, (i+1)\delta)$ myös todennäköisyyksmitta π_t^n ehdolla

$$\pi_t^n := \sum_{j=1}^n \bar{a}_j^n(t) \delta_{v_j^n(t)}.$$

Jokaisen osa-aikavälin lopussa kaikki olemassaolevat hiukkaset haarautuvat satunnaisesti määrään uusia hiukkasia. Jälkeläishiukkaset³⁴ perivät kuitenkin sijaintinsa vähintään osittain vanhemmaltaan. Haarautumisen jälkeen hiukkasille muodostetaan uusi indeksointi ja niiden painokertoimet normalisoidaan. Notaatiota $j' = 1, \dots, n$ käytetään hiukkasindekseihin ennen haarautumista ja vastaavasti merkinnällä $j = 1, \dots, n$ tarkoitetaan hiukkasindeksejä haarautumisen jälkeen.

Merkitään jälkeläishiukkasten lukumäärää hiukkaselle j' ajanhetkellä $(i+1)\delta$ muuttujalla $o_{j'}^{n,(i+1)\delta}$, kun hiukkasjärjestelmässä on n hiukkasta. Satunnainen lukumäärä $o_{j'}^{n,(i+1)\delta}$ on $\mathcal{F}_{(i+1)\delta}$ -adaptoitunut ja toteuttaa ehdot³⁵

$$o_{j'}^{n,(i+1)\delta} := \begin{cases} \left[n\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta} \right] & \text{todennäköisyydellä } 1 - \{n\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta}\} \\ \left[n\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta} \right] + 1 & \text{todennäköisyydellä } \{n\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta}\} \end{cases},$$

missä muuttujalla $\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta}$ tarkoitetaan tietyn hiukkasen painokerrointa ennen haarautumista eli

$$\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta} = \bar{a}_{j'}^{n,((i+1)\delta-)} = \lim_{t \rightarrow (i+1)\delta} \bar{a}_{j'}^n(t).$$

Jos muuttujalla $\mathcal{F}_{(i+1)\delta-}$ merkitään sigma-algebraa ajanhetkeen $(i+1)\delta$ asti eli

$$\mathcal{F}_{(i+1)\delta-} := \sigma(\mathcal{F}_s, s < (i+1)\delta),$$

niin hiukkaslukumäärän $o_{j'}^{n,(i+1)\delta}$ määritelmän perusteella ehdollinen odotusarvoehto

$$\mathbb{E} \left[o_{j'}^{n,(i+1)\delta} \mid \mathcal{F}_{(i+1)\delta-} \right] = n\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta}$$

on voimassa. Lisäksi ehdollinen varianssi jälkeläishiukkasten lukumäärälle on

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(o_{j'}^{n,(i+1)\delta} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{(i+1)\delta-} \right] - \left(\mathbb{E} \left[o_{j'}^{n,(i+1)\delta} \mid \mathcal{F}_{(i+1)\delta-} \right] \right)^2 \\ = \left\{ n\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta} \right\} \cdot \left(1 - \left\{ n\bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta} \right\} \right). \end{aligned}$$

³⁴engl. offspring particle

³⁵Notaatiolla $[a]$ tarkoitetaan lattiafunktiota eli suurinta mahdollista kokonaislukua, joka on kuitenkin pienempi kuin luku a . Notaatiolla $\{a\}$ taas tarkoitetaan luvun a desimaaliosaa. Ehto $\{a\} = a - [a]$ on siis voimassa.

4.2 Haarautumisalgoritmi

Hiukkassuotimen haarautumisaskeleen yhteydessä tavoitellaan hiukkasjälkeläisten lukumäärän ylläpitämistä muuttumattomana aikavälien väleillä eli ehto

$$\sum_{j'=1}^n o_{j'}^{n,(i+1)\delta} = n$$

toteutuu jokaiselle osa-aikavälille i . Toisaalta tämä ehto myös implikoi korrelaation satunnaismuuttujien $o_{j'}^{n,(i+1)\delta}$ välille jokaisella hiukkasindeksillä $j' = 1, \dots, n$.

Olkoot $u_{j'}^{n,(i+1)\delta}$ toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia jokaisella hiukkasindeksillä $j' = 1, \dots, n - 1$, jotka ovat jakautuneet tasaisesti reaaliarvoisen tila-avaruuden välille $[0, 1] \in \mathbb{S} = \mathbb{R}_{[0,1]}$. Käsiteltävien satunnaismuuttujien oletetaan olevan myös riippumattomia kaikista muista ympäristön satunnaismuuttujista. Notation yksinkertaistuksen vuoksi seuraavassa algoritmiesityksessä osa-aikaväleihin liittyvää notaatiota $(i+1)\delta$ ei esitetä. Algoritmi perustuu lähteeseen [11][Luku 9.2.1].

Algoritmi 1 Hiukkasten haarautumisalgoritmi

```

 $g \leftarrow n$ 
 $h \leftarrow n$ 
kaikille  $n = 1, \dots, n - 1$  suorita
  jos  $\{n\bar{a}_{j'}^n\} + \{g - n\bar{a}_{j'}^n\} < 1$  niin
    jos  $u_{j'}^n < 1 - \left(\frac{\{n\bar{a}_{j'}^n\}}{\{g\}}\right)$  niin
       $o_{j'}^n \leftarrow \lfloor n\bar{a}_{j'}^n \rfloor$ 
    muuten
       $o_{j'}^n \leftarrow \lfloor n\bar{a}_{j'}^n \rfloor + (h - \lfloor g \rfloor)$ 
    muuten
      jos  $u_{j'}^n < 1 - \left(1 - \frac{\{n\bar{a}_{j'}^n\}}{\{g\}}\right)$  niin
         $o_{j'}^n \leftarrow \lfloor n\bar{a}_{j'}^n \rfloor + 1$ 
      muuten
         $o_{j'}^n \leftarrow \lfloor n\bar{a}_{j'}^n \rfloor + (h - \lfloor g \rfloor)$ 
       $g \leftarrow g - n\bar{a}_{j'}^n$ 
       $h \leftarrow h - o_{j'}^n$ 
   $o_n^n \leftarrow h$ 

```

Huomautus 9. Jatkuvaan aikäkäsitteeseen liittyvät osa-aikavälit voi jättää huomiotta käsiteltäessä diskreettiaikaisia suotimia, jolloin osa-aikavälit yksinkertaistuvat yhdeksi ajanhetkeksi t verrattuna osa-aikaväleihin $[i\delta, (i+1)\delta)$.

4.3 Bayes-päätelyä diskreetissä ajassa

Filosofisemmin tilastotiede sekä käsite *todennäköisyydestä* jaetaan usein kahteen erillaiseen lähestymistapaan tai näkökulmaan. Nämä ovat frekventistinen eli klassinen

tilastotiede sekä Bayesilainen tilastotiede. Klassisessa tilastotieteessä tietyn tapahtuman esiintymistiheys eli frekvenssi tulkitaan tietyn tapahtuman todennäköisyydeksi, kunhan toistokoe suoritetaan äärettömän monta kertaa. Esimerkiksi joko kruunaan tai klaavaan johtavassa kolikonheittokokeessa on mahdollista mitata muutamalla heittokerralla pelkkä klaava. Klassisessa tilastotieteessä olisi kuitenkin tyypillistä tehdä hypoteesi todennäköisyyksistä $\frac{1}{2}$ kruunalle sekä klaavalle, kunhan toistokoe suoritetaan äärettömän monta kertaa.

Klassinen tilastotiede tulkitsee mittausdatan olevan satunnaista, mutta ympäristön muuttujien olevan vakioita, kun taas Bayesilainen lähestymistapa tulkitsee mittausdatan olevan tunnettua, mutta ympäristöön liittyvän satunnaisuutta. Bayesilaisessa lähestymistavassa esimerkiksi kolikonheittokokeeseen liittyen voitaisiin tehdä hypoteesi tasajakaumasta, mutta luottamusta tasajakaumaan vähentää mikäli mitausten perusteella saataisiin vaikkapa pelkkiä klaavoja. Bayesilaisessa lähestymistavassa todennäköisyydet voidaan siis ymmärtää luottamuksina aiempia oletuksia kohtaan.

Esimerkki 12. (*Ero klassisen tilastotieteen ja Bayesilaisen tilastotieteen välillä*) Oletetaan mallinnustilanne, jossa ehdollinen todennäköisyysjakauma $\mathbb{P}(y_i | \theta)$ toisistaan riippumattomista satunnaismuuttujista tai mittauksista y_i on tunnettu. Parametria $\theta \in \mathbb{R}^d$ ei kuitenkaan tunneta, vaan sille on tavoitteena muodostaa estimaatti. Klassisen tilastotieteen perusmenetelmänä parametrin θ määrittämiseksi olisi suurimman uskottavuuden estimointi³⁶, jossa määritettäisiin uskottavuusfunktion

$$L(\theta) := \prod_i \mathbb{P}(y_i | \theta)$$

maksimoiva parametriestimaatti

$$\hat{\theta} := \arg \max_{\theta} L(\theta).$$

Bayesilainen näkökulma taas tulkitseisi parametrin θ satunnaismuuttujaksi ja määrittäisi sen Bayesin ehdon avulla

$$\mathbb{P}(\theta | y_1, \dots, y_i) := \frac{\mathbb{P}(y_1, \dots, y_i | \theta) \mathbb{P}(\theta)}{\mathbb{P}(y_1, \dots, y_i)},$$

jossa todennäköisyys $\mathbb{P}(\theta)$ perustuisi mielivaltaiseen priorijakaumaan ennen yhdenkään mittauksen huomiointia. Bayesilaisen menettelyn perusteella muodostetusta posteriorijakaumasta voitaisiin myös valita esimerkiksi odotetuin arvo parametrille θ , joskin valinta olisi myös mahdollista tehdä muillakin menetelmillä, joista parhain valinta liittyisi sovelluskontekstiin [3][Luku 2.1].

Bayesilaisen menettelyn hankaluutena voidaan pitää varsinkin ensimmäisen priorijakauman valintaa, jonka mallintaja voi tehdä informatiivisesti tai epäinformatiivisesti. Tämän priorijakauman valinta vaikuttaa merkittävästi Bayesilaisen mallin käyttäytymiseen erityisesti mitausten määrän ollessa vähäinen. Klassisessa tilastotieteessä taas tulkitaan toistomittauksen olevan lähtökohtaisesti mahdollista ja

³⁶engl. Maximum Likelihood Estimation (MLE)

asymptoottisten ominaisuuksien johtavan esimerkiksi estimoitavan parametrin konvergenssiin.

Matemaattisesti optimaalisten suotimien määrittämistä käsitellään tilastollisina käänteisongelmina eli inversio-ongelmina Bayesilaisella näkökulmalla. Tämän tilastollisen käänteisongelman ratkaisutavoitteena on siis päätellä mahdollisten tilojen yhteinen posteriorijakauma, joka ehdollistetaan havainnoille. Sovelluksissa kokonainen posteriorijakauma tulisi siis määrittää uudelleen jokaisen havainnon jälkeen optimaalista suodinta varten, joka toisaalta tarkoittaisi samalla laskennallisen kompleksisuuden kasvamista havaintojen kokonaismäärän suhteen. Tämänkaltaisen periaate ei kuitenkaan ole sovellusten näkökulmasta toivottua laskentakapasiteetin pysyessä tyypillisesti vakiona tai vähintäänkin rajattuna. Tyypillisissä sovellustilanteissa kokonaista posteriorijakaumaa ei siis pyritä määrittämään, vaan rajoitutaan määrittämään se osittain reumatodennäköisyysjakaumien avulla. Toisaalta tämä menettely rajoittaa käsiteltävien mallien monimutkaisuutta niin kutsuttuihin Markovin malleihin. Tämän mallinnusrajoitteen vaikutus on kuitenkin melko vähäinen, sillä mallinnettavissa oleva ongelma-avaruus pysyy edelleen hyvin laajana [3][Luku 1.3].

Bayes-suotimet yhdistävät aiemman käsityksen tilan tulevaisuuden muutoksista havaintoihin nykytilasta. Verrattuna esimerkiksi pienimmän neliösumman minimointiin, jossa havaintojoukko prosessoidaan etsimällä dataa parhaiten kuvaava funktio, Bayes-suotimet parantavat käsitystä tilaestimaatista jokaisella uudella havainnolla [5][s. 6].

Oletetaan tässä luvussa stokastisen prosessin X olevan diskreettiaikainen Markovin prosessi³⁷ eli se toteuttaa ehdot

$$X_0 \sim \mu(x_1) \text{ ja} \tag{8}$$

$$X_n | (X_{t-1} = x_{t-1}) \sim K^X(x_t | x_{t-1}), \tag{9}$$

missä notaatiolla $a \sim \mu(\cdot)$ tarkoitetaan muuttujan a olevan jakautunut todennäköisyysmitan μ mukaisesti ja funktiolla $K^X(c | b)$ tarkoitetaan tilasiirtymätodennäköisyysmittaa tilasta b tilaan c . Prosessi X kuvaa jälleen signaaliprosessia, jota voidaan kuitenkin mitata ainoastaan havaintoprosessin Y avulla. Tavoitteena on siis aiemman kaltaisesti estimoida signaaliprosessin X ajanhetkien X_t arvoja havaintoprosessista Y_t kerätyn mittaustiedon avulla. Rakennetta varten oletetaan havaintoprosessin arvojen Y_t olevan toisistaan riippumattomia. Havaintoprosessin arvot perustuvat kuitenkin ehdolliseen jakaumaan

$$Y_t | (X_t = x_t) \sim K^Y(y_t | x_t), \tag{10}$$

missä funktio K^Y kuvaa havaintoprosessin tilasiirtymätodennäköisyysmittaa. Havaintojen arvoille Y_t oletetaan siis riippuvuus signaaliprosessista X , joka on edellytys signaaliprosessin tilojen estimoinnille. Yleisemmin yhtälöiden (8), (9) ja (10) muodostamaa mallijoukkoa kutsutaan Markovin piilomalleiksi³⁸, ja näiden yhtälöiden avulla voidaankin muodostaa yleinen Bayesialainen malli. Markovin piilomallit ovat varsin hyödyllisiä aikasarjamallinnuksen yhteydessä. Toisaalta niiden avulla

³⁷Markovin prosessien tarkempi käsittely löytyy esimerkiksi lähteestä[12][Luku 4].

³⁸engl. hidden Markov model [12][Luku 2.4.8]

kuvattavissa oleva mallijoukko on niin laaja, etteivät ongelmat ole analyttisesti ratkaistavissa kuin yksinkertaisissa tilanteissa [1][Luku 1].

Yhtälöt (8) ja (9) muodostavat priorijakauman signaaliprosessille X ja yhtälö (10) määrittää uskottavuusfunktion, jolle pätevät todennäköisyydet

$$\mathbb{P}(x_{1:t})^{39} = \mu(x_1) \prod_{k=2}^t K^X(x_k | x_{k-1})$$

ja

$$\mathbb{P}(y_{1:t} | x_{1:t}) = \prod_{k=1}^t K^Y(y_k | x_k).$$

Käsiteltävässä Bayesilaisessa ympäristössä päättely satunnaismuuttujista $X_{1:t}$ nojaa epänormalisoituun posteriorijakaumaan

$$\mathbb{P}(x_{1:t} | y_{1:t}) = \frac{\mathbb{P}(x_{1:t}, y_{1:t})}{\mathbb{P}(y_{1:t})},$$

missä

$$\mathbb{P}(x_{1:t}, y_{1:t}) = \mathbb{P}(x_{1:t}) \mathbb{P}(y_{1:t} | x_{1:t})$$

ja

$$\mathbb{P}(y_{1:t}) = \int \mathbb{P}(x_{1:t}, y_{1:t}) dx_{1:t}.$$

Bayesilaisessa ympäristössä on mahdollista muodostaa rekursioyhtälöehdot ajanhetkien tilatodennäköisyysjakaumille, perustuen havaintoprosessista Y kerättyyn tietoon tiettyyn ajanhetkeen t mennessä. Epänormalisoidulle posteriorijakaumalle $p(x_{1:t} | y_{1:t})$ on voimassa ehdolliseen todennäköisyyteen perustuva rekursioehto

$$\mathbb{P}(x_{1:t} | y_{1:t}) = \mathbb{P}(x_{1:t-1} | y_{1:t-1}) K^X(x_t | x_{t-1}) K^Y(y_t | x_t),$$

joka on myös esitettävissä muodossa

$$\mathbb{P}(x_{1:t} | y_{1:t}) = \mathbb{P}(x_{1:t-1} | y_{1:t-1}) \frac{K^X(x_t | x_{t-1}) K^Y(y_t | x_t)}{\mathbb{P}(y_t | y_{1:t-1})},$$

missä

$$\mathbb{P}(y_t | y_{1:t-1}) = \int \mathbb{P}(x_{t-1} | y_{1:t-1}) K^X(x_t | x_{t-1}) K^Y(y_t | x_t) dx_{t-1:t}.$$

³⁹Notaatiolla $A_{a,b}$ tarkoitetaan polkurealisaatiohistoriaa ajanhetkien a ja b välillä prosessille A . Se siis sisältää prosessin A koko historian ajanhetkien a ja b välillä, eikä pelkästään viimeisen ajanhetken realisaatiota A_b .

4.4 Bayes-päätelyä jatkuvassa ajassa

Määritelmä 29. Olkoot funktiot μ ja ν mittoja samassa mitallisessa avaruudessa $(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$. Mitan ν sanotaan olevan *absoluuttisesti jatkuva* mitan μ suhteen, kun ehto $\nu(A) = 0$ pätee kaikilla sigma-algebran $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ joukoilla A , joille $\mu(A) = 0$. Absoluuttisesta jatkuvuudesta käytetään myös notaatiota $\nu \ll \mu$, jolloin mitan μ sanotaan myös dominoivan mittaa ν . Mittoja kutsutaan *ekvivalenteiksi* mikäli kummatkin mitat ν ja μ dominoivat toisiaan eli ne ovat absoluuttisesti jatkuvia toistensa suhteen.

Absoluuttisen jatkuvuuden voi myös mieltää ehtona, että dominoiva mitta kykenee mittaamaan vähintään samat asiat kuin dominoitavakin mitta. Vastaavasti mittojen ekvivalenttius ei tarkoita täsmälleen identtisiä mittoja, vaan pikemminkin ominaisuutta, että ekvivalentit mitat mittaavat samoja asioita. Jotta useamman mitan ekvivalenttius olisi voimassa, yhdenkin mitan alaisuudessa nollamittaiseksi mitatun joukon täytyy olla nollamittainen myös jokaisen toisen ekvivalentin mitan alaisuudessa mitattuna.

Määritelmä 30. Mittaa μ kutsutaan *sigma-äärelliseksi* mitallisessa avaruudessa $(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$, kun joukko A on unioni numeroituvasta määrästä joukkoja, joiden mitat ovat äärellisiä eli

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \text{ missä } A_i \in \mathcal{A} \text{ ja } \mu(A_i) < \infty \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}.$$

Sigma-äärellisyyden avulla mitallista avaruutta voidaan tarvittaessa käsitellä osissa tai se on mahdollista jakaa uudelleen soveltuviin alijoukkoihin tiettyä käsittelyä varten.

Määritelmä 31. (*Radon-Nikodymin lause ja derivaatta*) Kun funktiot μ ja ν ovat sigma-äärellisiä mittoja mitallisessa avaruudessa $(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}})$ ja mitta ν on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen, niin on olemassa $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ -mitallinen funktio $f : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$, jolle ehto

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

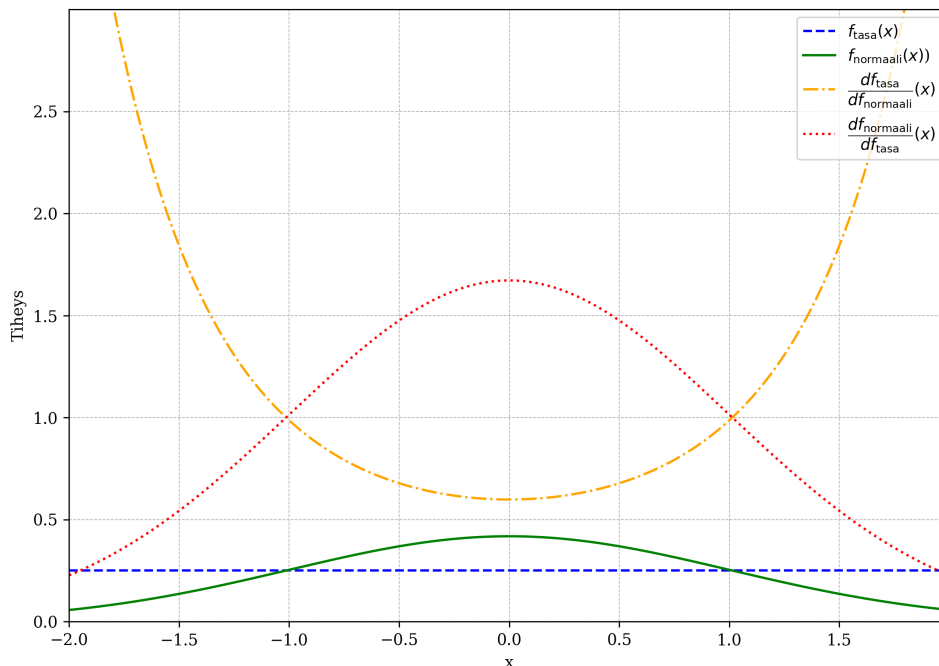
on voimassa kaikille mitallisille joukoille $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Kun on olemassa vastaavan ehdon toteuttava toinen funktio g , niin ehto $f = g$ toteutuu melkein kaikkialla. Funktiosta f käytetään usein notaatiota

$$\frac{d\nu}{d\mu},$$

jota kutsutaan *Radon-Nikodymin derivaataksi*⁴⁰.

⁴⁰ks. esim. [12][Definition 4.2 →]

Radon-Nikodymin derivaatta tasa- ja normaalijakauman välillä



Kuva 2: Radon-Nikodymin derivaatta tasa- ja normaalijakauman välillä, kun $x \in [-2, 2]$. Tavoitteena on havainnollistaa todennäköisyysmitan tiheyden muutosta suhteessa toiseen todennäköisyysmittaan samassa avaruudessa kahdella jakaumalla. Tasajakauman $y = 1/4$ Radon-Nikodymin derivaatta normaalijakauman $\mathcal{N}(0, 1)$ suhteen kasvaa kohti ääretöntä, kun $|x| \rightarrow \infty$, sillä normaalijakauman tiheys sen hännissä lähestyy kohti nollaa. Päinvastainen normaalijakauman Radon-Nikodymin derivaatta suhteessa tasajakaumaan kasvaa kohti normaalijakauman suurinta arvoa normaalijakauman odotetuimmalla arvolla $x = 0$, jossa derivaatan arvo maksimoiduu ja normaalijakauman ero tasajakaumaan on kaikkein suurin. Tasajakauman derivaatta normaalijakauman suhteen minimoituu samassa pisteessä. Derivaattojen arvot ovat ekvivalentit pisteissä $|x| = 1$, jossa tasajakauman ja normaalijakauman todennäköisyystiheydet vastaavasti kohtaavat.

Lause 8. (Girsanovin lause⁴¹) *Olkoon stokastinen prosessi M jatkuva martingaali ja prosessi Z prosessin M avulla määritetty eksponentiaalinen martingaali*

$$Z_t = \exp\left(M_t \frac{1}{2} - \langle M \rangle_t\right).$$

Kun prosessi Z on tasaisesti integroitava martingaali, niin prosessin M taustalla olevan todennäköisyysavaruuden mitasta \mathbb{P} voidaan muodostaa ekvivalentti mitta \mathbb{Q} Radon-Nikodymin derivaatan avulla

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := Z_\infty.$$

⁴¹Lauseeseen viitataan useissa lähteissä myös Cameron-Martin-Girsanovin lauseena.

Jos tämän lisäksi stokastinen prosessi X on jatkuva \mathbb{P} -lokaali martingaali, niin erotusprosessi $X_t - \langle X, M \rangle_t$ on myös \mathbb{Q} -lokaali martingaali.

Todistus. Koska prosessi Z on tasaisesti integroituva martingaali, niin martingaalien konvergenssilauseen⁴² nojalla seuraa ehto $Z_t = \mathbb{E}[Z_\infty | \mathcal{F}_t]$, jolloin mitta \mathbb{Q} on ekvivalentti todennäköisyyksimitta.

Tulkitaan seuraavaksi prosessia X , joka on \mathbb{P} -lokaali martingaali. Määritellään jono päättymisaikoja $T^{(n)}$, jotka lähestyvät ääretöntä

$$T^{(n)} := \inf \{t \geq 0, |X_t| \geq n \text{ tai } |\langle X, M \rangle_t| \geq n\}.$$

Määritellään lisäksi prosessi Y , jolle

$$Y := X_t^{T^{(n)}} - \left\langle X^{T^{(n)}}, M \right\rangle_t.$$

Soveltamalla Itön lausetta martingaalien Z määritelmään saadaan sille differentiaalimuoto

$$dZ_t = Z_t dM_t$$

ja hyödyntämällä Itön lausetta toistamiseen päädytään yhtälöön

$$\begin{aligned} d(Z_t Y_t) &= \mathbb{1}_{t \leq T^{(n)}} (Z_t dY_t + Y_t dZ_t + \langle Z, Y \rangle_t) \\ &= \mathbb{1}_{t \leq T^{(n)}} (Z_t (dX_t - d\langle X, M \rangle_t) + Y_t Z_t dM_t + \langle Z, Y \rangle_t) \\ &= \mathbb{1}_{t \leq T^{(n)}} (Z_t (dX_t - d\langle X, M \rangle_t) + X_t - \langle X, M \rangle_t Z_t dM_t + Z_t d\langle X, M \rangle_t) \\ &= \mathbb{1}_{t \leq T^{(n)}} ((X_t - \langle X, M \rangle_t) Z_t dM_t + Z_t dX_t), \end{aligned}$$

jossa tulos $\langle Z, Y \rangle_t = Z_t \langle X, M \rangle_t$ seuraa Kunita-Watanaben identiteetistä⁴³, jolloin yhtälön ratkaisuprosessi ZY on \mathbb{P} -lokaali martingaali. Martingaali Z on kuitenkin tasaisesti integroituva, jolloin prosessi Y on rajattu päättymisaikajonon $T^{(n)}$ määrittelyn perusteella ja prosessi ZY on varsinainen \mathbb{P} -martingaali. Näin ollen ajanhetkille $s < t$ ja joukolle $A \in \mathcal{F}_s$ saadaan identiteetit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(Y_t - Y_s)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Z_\infty(Y_t - Y_s)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[(Z_t Y_t - Z_s Y_s)\mathbb{1}_A] = 0,$$

jolloin prosessi Y on \mathbb{Q} -martingaali. Lisäksi erotusprosessi $X_t - \langle X, M \rangle_t$ on \mathbb{Q} -lokaali martingaali, sillä päättymisaikajono $T^{(n)}$ on sille redusoiva siten, että erotusprosessi $(X - \langle X, M \rangle)^{T^{(n)}}$ on \mathbb{Q} -martingaali ja päättymisaikajono $T^{(n)}$ hajaantuu, kun $n \rightarrow \infty$. \square

⁴²Kun prosessi $M = \{M_t, t \geq 0\}$ on L^p -avaruudessa äärellinen oikealta jatkuva martingaali kaikilla $p \geq 1$ eli $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|M_t|^p] < \infty$, niin on olemassa L^p -integroituva satunnaismuuttuja M_∞ , jolle $M_t \rightarrow M_\infty$ melkein varmasti, kun $t \rightarrow \infty$. Edelleen, jos (1) prosessi M on äärellinen L^p -avaruudessa, kun $p > 1$, niin suppenemisehto $M_t \rightarrow M_\infty$ toteutuu L^p -avaruudessa, kun $t \rightarrow \infty$. Kun taas (2) prosessi M on äärellinen avaruudessa L^1 ja prosessi M on tasaisesti integroituva, niin suppenemisehto $M_t \rightarrow M_\infty$ toteutuu avaruudessa L^1 , kun $t \rightarrow \infty$. Kumman tahansa ehdon toteutuessa laajennettu prosessi $\{M_t, t \in [0, \infty)\}$ on martingaali.

⁴³Kun prosessit M ja N ovat jatkuvia lokaaleja martingaaleja ja prosessit H sekä K ovat mitallisia, niin epäyhtälöehto $\int_0^t |H_s| |K_s| |d\langle M, N \rangle_s| \leq \sqrt{\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle} \sqrt{\int_0^t K_s^2 d\langle N \rangle}$ toteutuu, missä integraalit tulkitaan Lebesgue-Stieltjes-integraaleina.

Girsanovin lauseen ehtojen toteutuessa kahden eri todennäköisyysavaruuden todennäköisyysmittojen välille on muodostettavissa satunnaismuuttuja, jonka avulla todennäköisyysmittojen tuottamat todennäköisyydet ovat esitettävissä kummankin todennäköisyysmitan alaisuudessa, joissa varsinaiset todennäköisyydet voivat kuitenkin olla eriarvoisia.

Yleistetympin Girsanovin lauseen avulla voidaan siis tulkita, että tietyssä todennäköisyysavaruudessa määritelty stokastinen prosessi tai martingaali on vastaavasti stokastinen prosessi tai martingaali myös toisessa todennäköisyysavaruudessa, vaikka tämä toinen todennäköisyysavaruus hyödyntääkin toisenlaista todennäköisyysmittaa kuin alkuperäinen prosessin tai martingaalin määritelmäavaruus. Stokastista prosessia tai martingaalia saattaa esimerkiksi olla yksinkertaisempi analysoida, esittää tai numeerisesti simuloida erilaisen todennäköisyysmitan alaisuudessa, minkä Girsanovin lause siis mahdollistaa.

Lause 9. (*Kallianpurin–Striebelin lause*) Määritellään prosessi Z ehdolla

$$Z_t = \exp \left(- \sum_{i=1}^m \int_0^t h^i(X_s) dW_s^i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t h^i(X_s)^2 ds \right),$$

jossa funktio h tulkitaan sensorifunktioksi, prosessi X signaaliprosessiksi ja prosessi W Wiener-prosessiksi. Prosessi Z oletetaan martingaaliksi⁴⁴ ja sensorifunktion h oletetaan toteuttavan äärellisyys ehdot

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \|h(X_s)\|^2 ds \right] < \infty \quad \text{ja} \quad \mathbb{E} [Z_s \|h(X_s)\|^2 ds] < \infty$$

kaikilla ajanhetkillä $t > 0$.

Kun ajanhetki $t \geq 0$ on kiinnitetty, niin notaatiolla $\tilde{\mathbb{P}}^t$ tarkoitetaan ajanhetken t sigma-algebraan \mathcal{F}_t kiinnitettyä todennäköisyysmittaa, jolle pätee ehto

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_t}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t.$$

Vastaavasti notaatiolla $\tilde{\mathbb{E}}$ tarkoitetaan odotusarvoa mitan $\tilde{\mathbb{P}}$ suhteen.

Nyt kaikille testifunktioille $\varphi \in B(\mathbb{S})$ sekä kiinnitetylle ajanhetkelle $t \in [0, \infty]$ pätee Kallianpurin–Striebelin ehto

$$\pi_t(\varphi) = \frac{\tilde{\mathbb{E}} [Z_t^{-1} \varphi(X_t) | \mathcal{Y}]}{\tilde{\mathbb{E}} [Z_t^{-1} | \mathcal{Y}]}$$

mitan $\tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{P})$ -suhteen melkein varmasti.

Todistus. Prosessin Z_t määritelmän perusteella sen käänteisprosessi on aina positiivinen $\frac{1}{Z_t} = Z_t^{-1} \geq 0$ ja identiteetit

$$0 = \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{[Z_t^{-1}=0]} Z_t^{-1} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[Z_t^{-1}=0]} \right] = \mathbb{P}(Z_t^{-1} = 0),$$

⁴⁴Todettavissa Novikovin ehdon avulla, muttei tätä käsitellä.

toteutuvat, jolloin käänteisprosessi $Z_t^{-1} > 0$ on \mathbb{P} -mitallinen melkein varmasti. Lisäksi odotusarvo $\tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1} | \mathcal{Y}] > 0$ on vastaavasti \mathbb{P} -mitallinen melkein varmasti ja Kallianpurin-Striebelin ehdon oikea puoli on silloin hyvin määritelty. Odotusarvon ominaisuuden perusteella⁴⁵ riittää osoittaa, että ehto

$$\pi_t(\varphi)\tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1} | \mathcal{Y}_t] = \tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1}\varphi(X_t) | \mathcal{Y}_t]$$

toteutuu mitan $\tilde{\mathbb{P}}$ suhteen melkein varmasti. Koska käsiteltävän yhtälön kummatkin puolet ovat \mathcal{Y}_t -mitallisia, niin riittää näyttää, että kaikille äärellisille \mathcal{Y}_t -mitallisille satunnaismuuttujille B pätee odotusarvoehto

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\pi_t(\varphi)\tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1} | \mathcal{Y}_t] \cdot B \right] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1} | \mathcal{Y}_t] \cdot B \right].$$

Prosessin π_t määritelmän perusteella yhtälö $\pi_t(\varphi) = \mathbb{E}[\varphi(X_t) | \mathcal{Y}_t]$ toteutuu mitan $\tilde{\mathbb{P}}$ suhteen melkein varmasti, jolloin Kolmogorovin ehdollisen odotusarvon⁴⁶ avulla odotusarvoehto

$$\mathbb{E}[\pi_t(\varphi) \cdot B] = \mathbb{E}[\varphi(X_t) \cdot B]$$

toteutuu. Yhtäpitävä odotusarvoehto mitan $\tilde{\mathbb{P}}$ suhteen on

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\pi_t(\varphi) \cdot BZ_t^{-1} \right] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\varphi(X_t) \cdot BZ_t^{-1} \right].$$

Iteroidun odotusarvon⁴⁷ sekä satunnaismuuttujan B mitallisuusoletuksen nojalla odotusarvoehto

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\pi_t(\varphi)\tilde{\mathbb{E}} \left[Z_t^{-1} | \mathcal{Y}_t \right] \cdot B \right] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{\mathbb{E}}[\varphi(X_t)Z_t^{-1} | \mathcal{Y}_t] \cdot B \right],$$

toteutuu, jolloin myös Kallianpurin-Striebelin ehto on voimassa mitan $\tilde{\mathbb{P}}$ suhteen melkein varmasti. \square

Määritelmä 32. (*Normalisoimaton ehdollinen jakauma*) Määritellään prosessi $\xi = \{\xi_t, t \geq 0\}$, missä

$$\xi_t = \tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1} | \mathcal{Y}_t].$$

Käänteisprosessi Z_t^{-1} on siis \mathcal{F}_t -martingaali mitan $\tilde{\mathbb{P}}$ alaisuudessa ja sigma-algebroille pätee ehto $\mathcal{Y}_s \subseteq \mathcal{F}_s$, jolloin ajanhetkille $0 \leq s < t$ pätee

$$\tilde{\mathbb{E}}[\xi_t | \mathcal{Y}_s] = \tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1} | \mathcal{Y}_s] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1} | \mathcal{F}_s] | \mathcal{Y}_s \right] = \tilde{\mathbb{E}}[Z_s^{-1} | \mathcal{Y}_s].$$

Nyt signaaliprosessin X *normalisoimattomalla ehdollisella jakaumalla* tarkoitetaan prosessia $\rho = \{\rho_t, t \geq 0\}$, jonka arvot ovat mittoja. Prosessin ρ arvot $\rho_t(\varphi)$ testifunktiolle $\varphi \in B(\mathbb{S})$ määrittyvät ehdosta

$$\rho_t(\varphi) := \pi_t(\varphi)\xi_t.$$

⁴⁵Kun U on integroitava \mathcal{F}_t -mitallinen stokastinen prosessi, niin ehto $\tilde{\mathbb{E}}[U | \mathcal{Y}_t] = \mathbb{E}[U | \mathcal{Y}]$ toteutuu. Tämä voidaan osoittaa muodostamalla sigma-algebra $\mathcal{Y}'_t = \mathcal{Y}_{t+u} \vee \mathcal{Y}_t$, missä $u \geq 0$. Nyt kokonaissigma-algebra \mathcal{Y} on muodostettavissa sigma-algebroista \mathcal{Y}_t ja \mathcal{Y}'_t . Todennäköisyyksimitan $\tilde{\mathbb{P}}$ alaisuudessa sigma-algebra $\mathcal{Y}'_t \subset \mathcal{Y}$ on riippumaton sigma-algebrasta \mathcal{F}_t , sillä prosessi Y on \mathcal{F}_t -adaptoitunut Wiener-prosessi. Nyt prosessi U on \mathcal{F}_t -adaptoitunut ehdollisen odotusarvon nojalla, eli $\tilde{\mathbb{E}}[U | \mathcal{Y}_t] = \tilde{\mathbb{E}}[U | \mathcal{Y}_t \vee \mathcal{Y}'_t] = \tilde{\mathbb{E}}[U | \mathcal{Y}]$.

⁴⁶Kun sigma-algebroille \mathcal{G} ja \mathcal{F} pätee $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, niin prosessin X ehdollinen odotusarvo alisigma-algebran \mathcal{G} suhteen on $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$, joka \mathcal{G} -mitallinen satunnaismuuttuja, joka toteuttaa integraalidentiteetin $\int_A \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$ kaikille joukoille $A \in \mathcal{G}$.

⁴⁷Kun muuttujat \mathcal{G} ja \mathcal{H} ovat sigma-algebroja ja X on satunnaismuuttuja, niin ehto $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X | \mathcal{H}]$ toteutuu kaikilla alisigma-algebroilla $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$.

Huomautus 10. Normalisoimattaman ehdollisen jakauman yhteydessä käsitteellä *jakauma*⁴⁸ tarkoitetaan siis yleistettyä funktiota, joka operoi testifunktioilla. Epäonnekkaasti jakauma-käsitteen tulkitsee herkästi tarkoittamaan laajasti käytettyä lyhennettä yksinkertaisemmasta *todennäköisyysjakaumasta*⁴⁹. Tämä taas saattaa aiheuttaa tulkinnallista hankaluutta erityisesti tässä yhteydessä, jossa käsitellään yleistettyjen todennäköisyysjakaumien jakaumia eli todennäköisyysmittojen jakaumia.

Seuraus 3. *Kallianpurin-Striebelin kaavan oletusten toteutuessa kaikille testifunktioille $\varphi \in B(\mathbb{S})$ pätee ehto*

$$\pi_t(\varphi) = \frac{\rho_t(\varphi)}{\rho_t(\mathbb{1})}$$

kaikilla ajanhetkillä $t \in [0, \infty)$ ja mitan $\tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{P})$ suhteen melkein varmasti. Normalisoimattoman ehdollisen jakauman perusteella $\xi_t = \rho_t(\mathbb{1})$, jolloin väite toteutuu ja mitta $\rho_t(\mathbb{1})$ on tulkittavissa normalisoivaksi tekijäksi.

Esiteltyjä ehtoja

$$\pi_t(\varphi) = \frac{\tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1}\varphi(X_t | \mathcal{Y})]}{\tilde{\mathbb{E}}[Z_t^{-1} | \mathcal{Y}]} \quad \text{ja} \quad \pi_t(\varphi) = \frac{\rho_t(\varphi)}{\rho_t(\mathbb{1})}$$

voi verrata tunnettuun Bayesin ehtoon

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Näiden notaatioiden samankaltaisuus ei olekaan sattumaa, sillä Kallianpurin-Striebelin ehtoon viitataan usein myös *jatkuva-aikaisena Bayesin ehtona*. Kallianpurin-Striebelin ehto mahdollistaa siis uuden ajanhetkeen sidonnaisen posteriorimitan eli ehdollisen todennäköisyysmitan $\pi_t(\varphi)$ muodostamisen lisäinformaation keräämisen jälkeen, jonka avulla taas voidaan esittää teoreettiset lähtökohdat suodinteorian soveltamiseen epälinearisissakin ympäristöissä.

Määritelmä 33. (*Zakain yhtälö*) Kun Kallianpurin-Striebelin lauseen oletukset toteutuvat ja lisäksi jokaiselle ajanhetkelle $t \geq 0$ toteutuu äärellisysehto

$$\tilde{\mathbb{P}} \left(\int_0^t (\rho_s(\|h\|))^2 ds < \infty \right) = 1$$

ja operaattorilla A tarkoitetaan toisen asteen differentiaalioperaattoria

$$A = \sum_{i=1}^d f^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1, j=1}^d a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

⁴⁸engl. distribution

⁴⁹engl. probability distribution

niin normalisoimattomalle ehdolliselle jakaumalle ρ toteutuu kaikilla avaruuden $\mathcal{D}(A)$ ⁵⁰ testifunktioille $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ lineaarinen stokastinen osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\rho_t = \pi_0(\varphi) + \int_0^t \rho_s(A\varphi) ds + \int_0^t \rho_s(\varphi h^\top) dY_s,$$

mitan $\tilde{\mathbb{P}}$ suhteen melkein kaikkialla. Tätä yhtälöä kutsutaan *Zakain yhtälöksi*, jota ei kuitenkaan johdeta⁵¹.

Zakain yhtälön avulla epälineaarinen suodinongelma on siis muunnettavissa lineaariseksi stokastiseksi osittaisdifferentiaaliyhtälöksi. Numeerisesti Zakainkin yhtälön ratkaiseminen on kuitenkin raskasta, vaikkakin joissain sovellustilanteissa mahdollista. Toisaalta Zakain yhtälön ongelmana voidaan pitää ominaisuutta normalisoimattomuudesta, jolloin sen tuottaman jakauman käyttö todennäköisyysmittana ei ole suoraan mahdollista.

Määritelmä 34. (*Kushnerin-Stratonovichin yhtälö*) Kun Zakain yhtälön oletukset toteutuvat, niin normalisoidulle ehdolliselle jakaumalle π_t toteutuu kaikilla testifunktioilla $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ epälineaarinen stokastinen osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} \pi_t(\varphi) = \pi_0(\varphi) + \int_0^t \pi_s(A\varphi) ds \\ + \int_0^t (\pi_s(\varphi h^\top) - \pi_s(h^\top) \cdot \pi_s(\varphi)) (dY_s - \pi_s(h) ds), \end{aligned}$$

jota kutsutaan *Kushnerin-Stratonovichin yhtälöksi*. Tätä yhtälöä ei myöskään johdeta.

Huomautus 11. Zakain sekä Kushnerin-Stratonovichin yhtälöt ovat yleistettävissä myös aikaepähomogeenisille testifunktioille.

Kushnerin-Stratonovichin yhtälö on epälineaarisen stokastisen osittaisdifferentiaaliyhtälönä lähtökohtaisesti numeerisesti raskaampi ratkaista verrattuna Zakain yhtälöön, joka hyödyntää lineaarisuutta. Toisaalta Kushnerin-Stratonovichin yhtälön ratkaisuna on suoraan normalisoitu ehdollinen jakauma π_t verrattuna Zakain yhtälön tuottamaan normalisoimattomaan ehdolliseen jakaumaan ρ_t . Huomionarvoisesti Zakainkin yhtälön tuottama ratkaisu on mahdollista normalisoida, joskin normalisointi saattaa olla laskennallisesti myös hyvin raskasta riippuen sovellustilanteesta. Jakauman normalisointi on siis edellytys todennäköisyysmitan muodostamiselle, joka edellyttää koko avaruuden mitaksi arvon 1.

Zakain sekä Kushnerin-Stratonovichin yhtälöiden avulla voidaan teoreettisesti perustella normalisoimattoman ehdollisen jakauman ρ sekä normalisoidun ehdollisen jakauman π konvergenssi sekä yksikäsitteisyys. Näiden yhtälöiden monimutkaisuu- den johdosta niiden analyttinen ratkaiseminen rajoittuu kuitenkin erikoistapauk- siin, kuten aiemmin johdettuihin Kalman-Bucyn- sekä Benešin-suotimiin. Zakain ja

⁵⁰Avaruuden $\mathcal{D}(A)$ testifunktioiden tulee olla äärellisiä operaattorin realisoimisen jälkeen, eli funktion Af tulee olla äärellinen. Avaruudeksi $\mathcal{D}(A)$ voidaan valita esimerkiksi kaksi kertaa jatku- vien ja derivoituvien funktioiden avaruus $C^2(\mathbb{R}^d)$.

⁵¹Todistus on esitetty esimerkiksi lähteessä [11]Lause 3.24.

Kushnerin-Stratonovichin yhtälöt kuitenkin aikaansaavat teoreettiset lähtökohdat suodinteorian sekä hiukkassuotimien toimintaperiaatteille epälinearisissakin ympäristöissä, jotka siis yleistävät yksinkertaisempia lineaarisia ympäristöjä. Lineaariset ympäristöt sekä niihin soveltuvat suotimet ovat tyypillisesti yksinkertaisempia, tulkittavampia sekä numeerisesti yksinkertaisempia ratkaista, mutta lineaaristen menetelmien sovelluskohteet ovat kuitenkin lähtökohtaisesti rajatumpia verrattuna epälineaarisiiin vastineisiin.

5 Suodinongelma diskreetissä ajassa

5.1 Monte Carlo -menetelmistä

Monte Carlo -menetelmä on yleinen ratkaisuperiaate matemaattisille ongelmille, joille ei tunneta täsmällistä analyttistä ratkaisua taikka tehokkaampaa numeerista laskentamenetelmää. Monte Carlo -menetelmät approksimoivat siis tuntematonta todennäköisyysmittaa sellaisten otosten avulla, joiden oletetaan tätä todennäköisyysmittaa noudattavan. Esitettävän periaatteen lähteenä on hyödynnetty julkaisua [1][Luku 3.1], joskin aiheeseen liittyvää käsittelyä löytyy myös muista lähteistä, kuten [3][Luku 1.3] sekä [12][Luku 8.1].

Käsitellään ajanhetkisdonnaisen tilatodennäköisyysmitan $\pi_T = p(x_{1:T} \mid y_{1:T})$ estimaatin $\hat{\pi}_T$ määrittämistä ajanhetkelle $T \in \mathbb{T} = \mathbb{N}_{\geq 0}$ diskreettiaikaiselle signaaliprosessille X , joka on Markovin prosessi. Muodostetaan signaaliprosessin X tilatodennäköisyysmitan $\hat{\pi}_T$ estimointia varten aineisto, joka sisältää N kpl toisistaan riippumattomia polkurealisaatioita signaaliprosessista X ajanhetken T asti, jolloin päättävän ajanhetken arvo jokaiselle polkurealisaatiolle $i = 1, \dots, N$ on satunnaismuuttuja $X_{1:T}^i$. Nämä satunnaismuuttujat $X_{1:T}^i$ noudattavat estimoitavan tilatodennäköisyysmitan jakaumaa päättävällä ajanhetkellä T eli $X_{1:T}^i \sim \pi_T(x_{1:T})$. Monte Carlo -menetelmä muodostaa tilatodennäköisyysmitalle siis empiirisen estimaatin

$$\hat{\pi}_T(x_{1:T}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_{1:T}^i}(x_{1:T})$$

perustuen useaan polkurealisaatioon samasta prosessista.

Tässä yhteydessä testifunktioiden $\varphi_t : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ odotusarvoille on muodostettavissa identiteetti

$$I_T(\varphi_T) := \int \varphi_t(x_{1:T}) \pi_T(x_{1:T}) dx_{1:T},$$

jota varten voidaan myös ilmaista estimaattori estimoidun tilatodennäköisyysmitan $\hat{\pi}_T(x_{1:T})$ avulla eli

$$\begin{aligned} I_T^{MC}(\varphi_T) &:= \int \varphi_t(x_{1:T}) \hat{\pi}_T(x_{1:T}) dx_{1:T} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_T(X_{i:T}^i). \end{aligned}$$

Näiden testifunktioiden odotusarvojen avulla on mahdollista esimerkiksi analysoida todennäköisyysmittaa tai käsiteltävän todennäköisyysmitan estimaatin kehittymistä, joka saattaa kokonaisvaltaisesti olla hankalaa. Testifunktioiden odotusarvojen estimaattorit ovat myös harhattomia, ja niiden varianssit noudattavat ehtoa

$$\text{Var} [I_T^{MC}(\varphi_T)] = \frac{1}{N} \left(\int \varphi_t(x_{1:T}) \pi_T^2(x_{1:T}) dx_{1:T} - I_T^2(\varphi_T) \right).$$

Monte Carlo -menetelmien hyötynä voidaan pitää estimaattorivirheen varianssin vähentymistä nopeudella $\mathcal{O}(1/N)$ riippumatta prosessin tila-avaruuden ulottuvuudesta. Monte Carlo -menetelmien käyttö ei ole kuitenkaan aina mahdollista, sillä

1. Jakaumasta $\pi_T(x_{1:T})$ täytyy pystyä muodostamaan otos, joka ei aina ole realistista;
2. Vaikka otoksen muodostaminen jakaumasta $\pi_T(x_{1:T})$ olisikin mahdollista, laskennallinen kustannus näiden otosten muodostamiseen saattaa olla liian suuri. Tyypillisesti aikakompleksisuus myös kasvaa vähintään lineaarisesti ajanhetkien kokonaislukumäärän suhteen.

5.2 Hiukkassuodin diskreetissä ajassa

Hiukkassuodinmenetelmän avulla voidaan siis ratkaista numeerisesti sellaisiin Markovin piilomalleihin liittyviä ongelmia, joihin ei ole olemassa analyttistä ratkaisua [1][Luku 1]. Hiukkassuotimet perustuvat Bayesilaiseen estimaattoriteoriaan sekä yleisempään Monte Carlo -estimaattorin periaatteisiin.

Hiukkassuotimia kutsutaan myös jaksottaisiksi Monte Carlo -menetelmiksi⁵² sekä jaksottaista painoarvoudenotantaa hyödyntäviksi estimaattorimenetelmiksi [3][Luku 11.8]. Esitettävä diskreettiaikaisen hiukkassuotimen rakenne pohjautuu lähteeseen [11][Luvut 8.6, 9.2, 10], mutta niitä on käsitelty myös lähteissä [4], [14][Luku 3] sekä [12][Luku 10].

Käsitellään diskreettiaikaista hiukkassuodinta ympäristössä, jossa signaaliprosessi X on diskreettiaikainen reaaliarvoinen n -ulotteinen stokastinen prosessi eli $X = \{X_t, t \in \mathbb{T} = \mathbb{N}_{t \geq 0}\}$ ja $X_t \in A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Merkitään signaaliprosessin X generoimaa filtraatiota muuttujalla \mathcal{F}_t^X ja oletetaan signaaliprosessin toteuttavan Markovin ehdon

$$\mathbb{P}(X_{t+1} \in A \mid \mathcal{F}_t^X) = \mathbb{P}(X_{t+1} \in A \mid X_t),$$

jolloin prosessin tulevaisuuden käyttäytyminen riippuu ainoastaan sen nykyhetken tilasta eikä arvoista ennen ajanhetkeä t . Signaaliprosessi on siis Markovin ketju, jonka tilasiirtymätodennäköisyysdintä⁵³ merkitään funktiolla $K_t^X : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, jolle

1. Siirtymäehto $K_t^X(x, A) = \mathbb{P}(X_{t+1} \in A \mid X_t = x)$ toteutuu,
2. Ydin $K_t^X(x, \cdot)$ on todennäköisyysmitta mitallisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ kaikilla ajanhetkillä t ja arvoilla $x \in \mathbb{R}^d$,
3. Sisältyvyysehto $K_t^X(\cdot, A) \in B(\mathbb{R}^d)$ toteutuu kaikilla ajanhetkillä t ja joukoilla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Signaaliprosessin X jakauma on määritettävissä todennäköisyysytimen K_t^X avulla. Merkitään muuttujalla q_t tietyn signaaliprosessin ajanhetkellä t realisoituvan satunnaismuuttujan X_t jakaumaa eli

$$q_t(A) := \mathbb{P}(X_t \in A).$$

Ytimen K_t siirtymäehdon avulla voidaan muodostaa rekursioyhtälö

$$q_{t+1} = K_t^X q_t(A),$$

$$(K_t^X q_t)(A) := \int_{\mathbb{R}^d} K_t^X(x, A) q_t dx,$$

⁵²engl. sequential Monte Carlo (SMC)

⁵³engl. probability kernel, ks. [12][Definition 4.1]

jolloin tietyn ajanhetken jakauma q_t on

$$q_t = K_{t_1}^X \dots K_1^X K_0^X q_0.$$

Oletetaan havaintoprosessin Y olevan reaaliarvoinen m -ulotteinen stokastinen prosessi ehdoilla

$$\begin{cases} Y_0 = 0 \\ Y_t := h(t, X_t) + W_t \end{cases},$$

missä sensorifunktio $h : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ on Borel-mitallinen funktio kaikilla ajanhetkillä ja muuttujat $W_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ovat toisistaan riippumattomia sekä absoluuttisesti jatkuvia satunnaisvektoreita suhteessa Lebesgue-mittaan $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Tiheysfunktiolla $g_t(\cdot)$ kuvataan satunnaisvektorin W_t tiheyttä suhteessa tila-avaruuden mittaan λ , jonka lisäksi tiheysfunktion g edellytetään olevan positiivinen ja $g_t(\cdot) \in B(\mathbb{R}^d)$.

Diskreettiaikaisella suodinongelmalla tarkoitetaan siis signaaliprosessin ehdollisen jakauman π_t määrittämistä ajanhetkelle t , kun havaintoprosessin generoiva sigma-algebra $\mathcal{F}_t^{Y_{0:t}}$ tunnetaan. Toisin sanoen pyritään selvittämään satunnainen todennäköisyysmitta π_t , missä ehdot

$$\begin{aligned} \pi_t(A) &:= \mathbb{P}(X_t \in A \mid F_t^{Y_{0:t}}), \\ \pi_t f &= \mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_t^{Y_{0:t}}] \end{aligned}$$

toteutuvat kaikilla joukoilla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ja Borel-mitallisilla funktioilla $f \in B(\mathbb{R}^d)$. Merkinnällä $Y_{0:t}$ tarkoitetaan siis havaintoprosessin Y satunnaismuuttujien Y_t realisaatioiden muodostamaa satunnaisvektoria ajanhetkeen t asti eli $Y_{0:t} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_t)$. Toisin sanoen merkintä $Y_{0:t}$ kuvaa havaintoprosessin Y kaikkien mahdollisten polkurealisaatioiden arvoja ajanhetkeen t asti.

Hyödynnetään lisäksi merkintää $y_{0:t}$ tietyn yksittäisen havaintoprosessin polku-realisaation kuvaamiseen eli

$$y_{0:t} := (y_0, y_1, \dots, y_t) \in (\mathbb{R}^m)^{t+1}.$$

Nyt merkinnällä $\pi_t^{y_{0:t}}$ tarkoitetaan tietyn yksittäisen todennäköisyysmitan määrittämistä eli

$$\begin{aligned} \pi_t^{y_{0:t}}(A) &:= \mathbb{P}(X_t \in A \mid Y_{0:t} = y_{0:t}), \\ \pi_t^{y_{0:t}} f &= \mathbb{E}[f(X_t) \mid Y_{0:t} = y_{0:t}], \end{aligned}$$

jolloin ehto

$$\pi_t = \pi_t^{Y_{0:t}}$$

toteutuu. Merkinnällä π_t tarkoitetaan siis satunnaista todennäköisyysmittaa, kun taas merkintä $\pi_t^{y_{0:t}}$ tarkoittaa determinististä todennäköisyysmittaa.

Asetetaan lisäksi muuttujat p_t sekä $p_t^{y_{0:t-1}}$ kuvaamaan estimoituja ehdollisia todennäköisyysjakaumia

$$\begin{aligned} p_t^{y_{0:t-1}}(A) &:= \mathbb{P}(X_t \in A \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}), \\ p_t^{y_{0:t-1}} f &= \mathbb{E}[f(X_t) \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}], \end{aligned}$$

jolloin jälleen $p_t = p_t^{Y_{0:t-1}}$. Muuttujaa q_t kutsutaan myös priorijakaumaksi, kun taas muuttujaa π_t posteriorijakaumaksi.

Seuraava lemma aikaansaa havaintoprosessin Y satunnaisvektorirealisaation $Y_{s:t} = (Y_s, \dots, Y_t)$ todennäköisyyssmitan mielivaltaisten ajanhetkien $s, t \in \mathbb{T} = \mathbb{N}_{\geq 0}$, $s \leq t$ välille.

Lemma 10. *Asetetaan tila-avaruudeksi $\mathbb{S} = (\mathbb{R}^m)^{t-s+1}$. Olkoon $\mathbb{P}_{Y_{s:t}} \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$ satunnaisvektorin $Y_{s:t}$ todennäköisyyssmitta sekä kuvataan funktiolla λ mitallisen tila-avaruuden $(\mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}))$ mitta. Tällöin todennäköisyysjakauma $\mathbb{P}_{Y_{s:t}}$ on absoluuttisesti jatkuva suhteessa mittaan λ ajanhetkillä $0 < s \leq t < \infty$ ja sen Radon-Nikodymin derivaatta on*

$$\frac{d\mathbb{P}_{Y_{s:t}}}{d\lambda}(y_{s:t}) := \int_{(\mathbb{R}^m)^{t-s+1}} \prod_{i=s}^t g_i(y_i - h(i, x_i)) \mathbb{P}_{X_{s:t}}(dx_{s:t}),$$

jossa $\mathbb{P}_{X_{s:t}} \in \mathcal{P}(S)$ on todennäköisyyssmitta signaaliprosessin X polkurealisaatiolle $X_{s:t}$, funktio $h: \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ on sensorifunktio ja mitta $g_t(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, joka kuvaa satunnaisvektorin $W_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiheyttä suhteessa mittaan λ .

Todistus. Olkoon joukko $C_{s:t} = C_s \times \dots \times C_t$ mielivaltaisten Borel-joukkojen $C_r \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ avulla muodostettu polkurealisaatioiden avaruus ajanhetkien $s \leq r \leq t$ välillä. Näytetään aluksi identiteetti

$$\mathbb{P}_{Y_{s:t}}(C_{s:t}) = \mathbb{P}(\{Y_{s:t} \in C_{s:t}\}) = \int_{C_{s:t}} \frac{d\mathbb{P}_{Y_{s:t}}}{d\lambda}(y_{s:t}) dy_s \cdots dy_t. \quad (11)$$

Ehdollisen todennäköisyyden ominaisuuksien avulla voidaan todeta, että

$$\mathbb{P}(Y_{s:t} \in C_{s:t}) = \int_{(\mathbb{R}^m)^{t-s+1}} \mathbb{P}(Y_{s:t} \in C_{s:t} \mid X_{s:t} = x_{s:t}) \mathbb{P}_{X_{s:t}}(dx_{s:t}). \quad (12)$$

Koska satunnaisvektori $X_{s:t}$ on riippumaton satunnaisvektorista $W_{s:t}$, niin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{s:t} \in C_{s:t} \mid X_{s:t} = x_{s:t}) &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=s}^t \mathbb{1}_{C_i}(h(i, X_i) + W_i) \mid X_{s:t} = x_{s:t} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=s}^t \mathbb{1}_{C_i}(h(i, x_i) + W_i) \right]. \end{aligned}$$

Koska satunnaisvektorit W_s, \dots, W_t ovat toisistaan riippumattomia, niin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{s:t} \in C_{s:t} \mid X_{s:t} = x_{s:t}) &= \prod_{i=s}^t \mathbb{E} [\mathbb{1}_{C_i}(h(i, x_i) + W_i)] \\ &= \prod_{i=s}^t \int_{C_i} g_i(y_i - h(i, x_i)) dy_i, \end{aligned} \quad (13)$$

jolloin yhtälöön (11) päädytään hyödyntämällä identiteettejä (12) ja (13) sekä soveltamalla Fubinin lausetta eli iteroitua integraalia. \square

Huomautus 12. Yhtälön (13) erikoistapaus

$$\mathbb{P}(Y_t \in dy_t \mid X_t = x_t) = g_t(y_t - h(t, x_t)) dy_t$$

kuvaa myös miksi funktiota $g_t^{y_t} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_t^{y_t}(x) := g_t(y_t - h(t, x)), x \in \mathbb{R}^d$$

kutsutaan *uskottavuusfunktioiksi*, sillä mitta $g_t^{y_t}$ kuvaa erotusta varsinaisen havainnon y_t sekä oletetun havainnon $h(t, x)$ välillä.

Määritelmä 35. (*Projektiotulo*⁵⁴) Kuvatkoon muuttuja $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ todennäköisyysmittaa ja olkoon $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ ei-negatiivinen testifunktio, joka toteuttaa ehdon $p(\varphi) > 0$. Nyt projektiotulolla $\varphi * p$ tarkoitetaan joukolle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ reaalityön määräävää funktiota $\varphi * p : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, missä ehto

$$\varphi * p(A) := \frac{\int_A \varphi(x) p(dx)}{p(\varphi)}$$

toteutuu kaikille joukoille $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ja aiemmin määritellysti

$$p(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) p(dx).$$

Projektiotulo $\varphi * p$ on siis absoluuttisesti jatkuva todennäköisyysmitta suhteessa mittaan p ja sen Radon-Nikodymin derivaatta mitan p suhteen on suhteessa myös testifunktioon φ eli

$$\frac{d(\varphi * p)}{dp} = c\varphi,$$

missä muuttujalla c tarkoitetaan normalisoivaa vakiota eli $c = 1/p(\varphi)$.

Projektiotulo kertoo siis suhdeluvun, joka voidaan tulkita kertomaan joukon tai alueen A merkittävyydestä, kun rajatun joukon A yli laskettua arvoa verrataan koko testifunktion määritelmäalueen \mathbb{R}^d yli laskettuun arvoon $p(\varphi)$. Valittu testifunktio φ voi myös painottaa tiettyjä ali-avaruuksia $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eri tavoin eli suhdeluku on myös riippuva testifunktiosta φ .

Esimerkki 13. (*Projektiotulon riippuvuudet*) Olkoon todennäköisyysmitta $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ määritelty tasajakaumaehdolla

$$p(\cdot) := \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}.$$

Olkoot testifunktiot φ_1 ja φ_2 määritellyt ehdoilla

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= x, \\ \varphi_2 &:= x^2. \end{aligned}$$

⁵⁴engl. projective product

Nyt projektiotulon $\varphi_1 * p$ arvoksi saadaan joukossa $A := [0, \frac{1}{2}] \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\varphi_1 * p(A) &= \frac{\int_A \varphi_1(x) p(dx)}{p(\varphi_1)} = \frac{\int_{[0, \frac{1}{2}]} \varphi_1(x) p(dx)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x) p(dx)} = \frac{\int_{[0, \frac{1}{2}]} x p(dx)}{\int_{\mathbb{R}} x p(dx)} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x p(dx)}{\int_{-\infty}^{\infty} x p(dx)} = \frac{\frac{(1/2)^2}{2}}{\frac{1^2}{2}} = \frac{(1/4)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \approx 0.25.\end{aligned}$$

Vastaavasti projektiotulon $\varphi_2 * p$ arvoksi saadaan samassa joukossa A

$$\varphi_2 * p(A) = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 p(dx)}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(dx)} = \frac{\frac{(1/2)^3}{3}}{\frac{1^3}{3}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{8} \approx 0.125.$$

Lineaarinen testifunktio $\varphi_1 = x$ painottaa siis joukkoa $A = [0, \frac{1}{2}]$ eri tavoin verrattuna epälineaariseen testifunktioon $\varphi_2 = x^2$. Toisaalta kummatkin projektiotulot päätyisivät identtiseen arvoon hyödynnettäessä toista aluetta $A_2 = [0, 1]$, jolloin kummankin projektiotulon arvot olisivat $\varphi_1 * p([0, 1]) = \varphi_2 * p([0, 1]) = 1$ aiemmallalla todennäköisyysmitalla p . Samalla voidaan huomata, että todennäköisyysmitan p vaihtaminen vaikuttaisi myös hyvin herkästi projektiotulon aikaansaamiin arvoihin.

Lause 10. *Mielivaltaiselle havaintoprosessin Y polkurealisaatiolle $(y_0, y_1, \dots, y_t, \dots)$ muodostettujen determinististen todennäköisyysmittojen $(\pi_t^{y_0:t})_{t \geq 0}$ jono toteuttaa rekursioyhtälön*

$$(\pi_t^{y_0:t})_{t \geq 0} = g_t^{y_t} * K_{t-1}^X \pi_{t-1}^{y_0:t-1},$$

joka on voimassa mitan $\mathbb{P}_{Y_{0:t}}$ suhteen melkein varmasti. Vastaavasti signaaliprosessin ehdollinen jakauma π_t noudattaa rekursioyhtälöä

$$\pi_t = g_t^{Y_t} * K_{t-1}^X \pi_{t-1}$$

melkein varmasti todennäköisyysmitan \mathbb{P} suhteen.

Todistus. Hyödynnettäessä funktiota $f \in B(\mathbb{R}^d)$, signaaliprosessin X Markovin ehtoa sekä tilasiirtymätodennäköisyysytimen K^X määritelmää saadaan ehto

$$\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_{t-1}^X] = \mathbb{E}[f(X_t) | X_{t-1}] = K_{t-1}^X f(X_{t-1}).$$

Koska polkurealisaatiovektori $W_{0:t-1}$ on riippumaton signaaliprosessin polkurealisaatiovektorista $X_{0:t}$, niin ehdollisen odotusarvon ominaisuuden perusteella odotusarvoehto

$$\mathbb{E}[f(X_t) | F_{t-1}^X \vee F_t^{W_{0:t-1}}] = \mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_{t-1}^X]$$

ja identiteetit⁵⁵

$$\begin{aligned}p_t f &= \mathbb{E}[f(X_t) | Y_{0:t-1}] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_{t-1}^X \vee \mathcal{F}_t^{W_{0:t-1}}] | \mathcal{F}_t^{Y_{0:t-1}} \right] \\ &= \mathbb{E}[K_{t-1}^X f(X_{t-1}) | \mathcal{F}_t^{Y_{0:t-1}}] \\ &= \pi_{t-1}(K_{t-1}^X f)\end{aligned}$$

⁵⁵Operaattorilla \vee tarkoitetaan sigma-algebroiden unionin generoimaa sigma-algebraa.

toteutuvat, jolloin

$$p_t = K_{t-1}^X \pi_{t-1}.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että deterministiselle todennäköisyysmitalle pätee projektiotuloidentiteetti $\pi_t^{y_{0:t}} = g_t^{y_t} * p_t^{y_{0:t-1}}$. Olkoon

$$C_{0:t} = C_0 \times \cdots \times C_t, \quad \text{missä } C_r \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

kaikilla ajanhetkillä $r = 0, 1, \dots, t$. Tulee siis näyttää, että kaikille joukoille $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ toteutuu integraaliehto

$$\int_{C_{0:t}} \pi_t^{y_{0:t}}(A) \mathbb{P}_{Y_{0:t}}(y_{0:t}) = \int_{C_{0:t}} g_t^{y_t} * p_t^{y_{0:t-1}}(A) \mathbb{P}_{Y_{0:t}}(dy_{0:t}).$$

Ehdollisen todennäköisyyden⁵⁶ nojalla integraaliyhtälön vasen puoli on esitettävissä todennäköisyytenä

$$\mathbb{P}(\{X_t \in A\} \cap \{Y_{0:t} \in C_{0:t}\}).$$

Koska sisältyvyysehto

$$\mathcal{F}_t^{X_{0:t}} \vee F_t^{W_{0:t-1}} \supset \mathcal{F}_t^{X_t} \vee F_t^{Y_{0:t-1}}$$

on voimassa, niin ehdollisen odotusarvon nojalla

$$\mathbb{P}(Y_t \in C_t \mid X_t, Y_{0:t-1}) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_t \in C_t \mid X_{0:t}, W_{0:t-1}) \mid X_t, Y_{0:t-1}]$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_t \in C_t \mid X_{0:t}, W_{0:t-1}) &= \mathbb{P}(Y_t \in C_t \mid X_{0:t}) \\ &= \mathbb{P}(Y_{0:t} \in (\mathbb{R}^m)^t \times C_t \mid X_{0:t}) \\ &= \int_{C_t} g_t(y_t - h(t, X_t)) dy_t. \end{aligned}$$

Tämän yhtälön ja sisältyvyys ehdon avulla päädytään ehtoon

$$\mathbb{P}(Y_t \in C_t \mid X_t = x_t, Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) = \int_{C_t} g_t^{y_t}(x_t) dy_t,$$

missä funktiolla g^{y_t} tarkoitetaan aiemmin nimettyä uskottavuusfunktiota. Päästään siis yhtälöön

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{Y_{0:t}}(C_{0:t}) &= \mathbb{P}(\{Y_t \in C_t\} \cap \{X_t \in \mathbb{R}^d\} \cap \{Y_{0:t-1} \in C_{0:t-1}\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times C_{0:t-1}} \mathbb{P}(Y_t \in C_t \mid X_t = x_t, Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \mathbb{P}_{X_t, Y_{0:t-1}}(dx_t, dy_{0:t-1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times C_{0:t-1}} \int_{C_t} g_t^{y_t}(x_t) dy_t p_t^{y_{0:t-1}}(dx_t) \mathbb{P}_{Y_{0:t-1}}(dy_{0:t-1}) \\ &= \int_{C_{0:t}} \int_{\mathbb{R}^d} g_t^{y_t}(x_t) p_t^{y_{0:t-1}}(dx_t) \mathbb{P}_{Y_{0:t-1}}(dy_{0:t-1}) dy_t, \end{aligned}$$

⁵⁶Kun \mathcal{F} on sigma-algebra ja joukko $A \in \mathcal{F}$, niin joukon A ehdollinen todennäköisyys suhteessa sigma-algebraan \mathcal{G} on satunnaismuuttuja $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$, missä $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{G}]$ ja ehto $\mathbb{P}(A \cap B) = \int_B \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}$ toteutuu kaikille joukoille $B \in \mathcal{G}$.

jossa viimeisessä vaiheessa hyödynnettiin mittaidentiteettiä

$$\mathbb{P}_{X_t, Y_{0:t-1}}(dx_t, dy_{0:t-1}) = p_t^{y_{0:t-1}}(dx_t) \mathbb{P}_{Y_{0:t-1}}(dy_{0:t-1}).$$

Tämä mittaidentiteetti toteutuu, sillä kaikille joukoille $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pätee

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X_t, Y_{0:t-1}) \in A \times C_{0:t-1}) &= \int_{C_{0:t-1}} \mathbb{P}(X_t \in A \mid Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \mathbb{P}_{Y_{0:t-1}}(dy_{0:t-1}) \\ &= \int_{A \times C_{0:t-1}} p_t^{y_{0:t-1}}(dx_t) \mathbb{P}_{Y_{0:t-1}}(dy_{0:t-1}). \end{aligned}$$

Jatkamalla edellisestä yhtälöstä saadaan identiteetti

$$\mathbb{P}_{Y_{0:t}}(dy_{0:t}) = p_t^{y_{0:t-1}}(g_t^{y_t}) dy_t \mathbb{P}_{Y_{0:t-1}}(dy_{0:t-1}).$$

Väitteen toiselle termille saadaan siis esitykset

$$\begin{aligned} \int_{C_{0:t}} g_t^{y_t} * p_t^{y_{0:t-1}}(A) \mathbb{P}_{Y_{0:t}}(dy_{0:t}) &= \int_{C_{0:t}} \frac{\int_A g_t^{y_t}(x_t) p_t^{y_{0:t-1}}(dx_t)}{p_t^{y_{0:t-1}}(g_t^{y_t})} \mathbb{P}_{Y_{0:t}}(dy_{0:t}) \\ &= \int_{C_{0:t}} \int_A g_t^{y_t}(x_t) p_t^{y_{0:t-1}}(dx_t) dy_t \mathbb{P}_{Y_{0:t-1}}(dy_{0:t-1}). \end{aligned}$$

Muodostettuja yhtälöitä yhdistämällä päädytään muotoihin

$$\begin{aligned} &\int_{C_{0:t}} g_t^{y_t} * p_t^{y_{0:t-1}}(A) \mathbb{P}_{Y_{0:t}}(dy_{0:t}) \\ &= \int_{A \times C_{0:t-1}} \left(\int_{C_t} g_t^{y_t}(x_t) dy_t \right) p_t^{y_{0:t-1}}(dx_t) \mathbb{P}_{Y_{0:t-1}}(dy_{0:t-1}) \\ &= \int_{A \times C_{0:t-1}} \mathbb{P}(Y_t \in C_t \mid X_t = x_t, Y_{0:t-1} = y_{0:t-1}) \times \mathbb{P}_{X_t, Y_{0:t-1}}(dx_t, dy_{0:t-1}) \\ &= \mathbb{P}(\{X_t \in A\} \cap \{Y_{0:t} \in C_{0:t}\}), \end{aligned}$$

jolloin väite rekursioyhtälön olemassaoloehdosta on voimassa. \square

Rekursioyhtälö satunnaiselle todennäköisyysmitalle π_t on siis toisin tavoin esitettyä

$$\pi_{t-1} \mapsto \pi_t = K_{t-1}^X \pi_{t-1} \mapsto \pi_t = g_t^{Y_t} * p_t,$$

joista ensimmäisen kuvaus on *estimointiaskel*. Tämä estimointiaskel siis tapahtuu ennen uuden havainnon Y_t saapumista. Vastaavasti toinen kuvaus on niin kutsuttu *päivitysaskel*, joka huomioi myös uuden havainnon Y_t . Deterministisen todennäköisyysmitan $\pi_t^{y_{0:t}}$ rekursiokaava on esitettävissä vastaavalla tavalla

$$\pi_{t-1}^{y_{0:t-1}} \mapsto \pi_t^{y_{0:t-1}} = K_{t-1}^X \pi_{t-1}^{y_{0:t-1}} \mapsto \pi_t^{y_{0:t}} = g_t^{Y_t} * p_t.$$

Näiden tilasiirtymien yksinkertainen esitystapa kuitenkin peittää laskennallisia ongelmia. Posteriorijakauman suljettu muoto on harvoin olemassa, josta lineaarinen Kalman-Bucy-suodin on erikoistapauksen esimerkki. Merkittävin ongelma aiheutuu päivitysaskeleesta, joka hyödyntää epälineaarista projektiotulo-operaattoria (35). Projektiotulon hyödyntäminen edellyttää normalisoivan vakion $p_t(g_t^{Y_t})$ tai $p_t^{y_{0:t-1}}(g_t^{y_t})$ määrittämistä, joka taas perustuu usein laskennallisesti raskaan integraalin arvon määrittämiseen mahdollisesti moniulotteisen ja laajan avaruuden yli [11][s.264].

5.3 Hiukkassuodinalgoritmi diskreetissä ajassa

Esitettävä hiukkassuodinalgoritmi hyödyntää parametrin $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ osoittamaa määrää hiukkasia, jotka kehittyvät diskreetissä hiukkassuodinalgoritmissa signaaliprosessin X ehtojen mukaisesti. Tässä yhteydessä signaaliprosessi on siis aiemminkin mainittu Markovin ketju. Jokaisen hiukkasjoukon tilasiirtymän jälkeen hiukkasjärjestelmää korjataan muodostamalla aiemmille hiukkasille satunnainen määrä jälkeläisiä perustuen hiukkasten painoarvoihin eli merkityksellisyyksiin. Kun hiukkaspainoarvo on yksittäiselle hiukkaselle suurempi, syntyy sille todennäköisemmin enemmän jälkeläisiä, sillä suuremmat hiukkaspainoarvot kertovat tietyn yksittäisen hiukkasen merkittävyydestä kokonaishiukkasjoukossa. Pienempien painoarvojen hiukkaset eivät taas ole hiukkasjoukossa merkittäviä, eli niiden kuvaamat tilat eivät vastaa estimoitavan järjestelmän tilaa. Pienien painoarvojen hiukkaset katoavat päivityksien yhteydessä hiukkasjoukosta.

Merkitään hiukkasen i sijaintia ajanhetkellä $t - 1$ notaatiolla $x_{t-1}^{(i)}$ ja olkoon K^X signaaliprosessin tilasiirtymätodennäköisyysydin. Lisäksi muuttujalla π_t^n tarkoitetaan todennäköisyysmitan π_t estimaattia ja vastaavasti muuttujalla p_t^n todennäköisyysmitan p^t estimaattia. Hiukkasten alustusta varten muodostetaan jakauma π_0 , joka voi perustua esimerkiksi normaalijakaumaan. Yleisemmin jakauma asetetaan noudattamaan ehtoja

$$\begin{cases} \pi_0^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_0^{(i)}} \\ \pi_t^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_t^{(i)}} \end{cases},$$

joiden lisäksi notaatiolla

$$\bar{\pi}_t^n := \sum_{i=1}^n w_t^{(i)} \delta_{\bar{x}_t^{(i)}}$$

tarkoitetaan hiukkasille asetettavien painokertoimien $w_t^{(i)}$ avulla painotettua jakaumaa.

Diskreettiaikainen hiukkassuodin noudattaa siis sigma-algebroja

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &= \sigma(x_s^{(i)}, \bar{x}_s^{(i)}, s \leq t, i = 1, \dots, n), \\ \bar{\mathcal{F}}_t &= \sigma(x_s^{(i)}, \bar{x}_s^{(i)}, s < t, \bar{x}_t^{(i)}, i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

joille pätee $\bar{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$. Satunnaiset todennäköisyysmitat p_t^n sekä $\bar{\pi}_t^n$ ovat kummatkin $\bar{\mathcal{F}}_t$ -mitallisia, mutta todennäköisyysmitta π_t^n on \mathcal{F}_t -mitallinen kaikilla ajanhetkillä. Tämä hiukkassuodin hyödyntää siis todennäköisyysmitan edellisen ajanhetken estimaattia π_{t-1}^n seuraavan ajanhetken todennäköisyysmitan estimaattiin π_t^n , muttei tätä aiempia. Mitta p_t^n on siis hiukkasten empiirinen jakauma tilasiirtymäaskeleen jälkeen eli

$$p_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\bar{x}_t^{(i)}}.$$

Algoritmi 2 Diskreettiaikainen hiukkassuodin

arvolle $t = 0$ **suorita**

kaikille $i = 1, \dots, n$ **suorita**

$x_0^{(i)} \leftarrow \pi_0(\cdot)$

kaikille $t = 1, \dots, T$ **suorita**

kaikille $i = 1, \dots, n$ **suorita**

$\bar{x}_t^{(i)} \leftarrow K_{t-1}(x_{t-1}^{(i)})$

$w_t^{(i)} = g_t(\bar{x}_t^{(i)}) / \sum_{j=1}^n g_t(\bar{x}_t^{(j)})$

kaikille $i = 1, \dots, n$ **suorita**

Määritä hiukkasen i jälkeläiset aiemmin kuvatun haarautumisalgoritmin avulla, perustuen painokertoimiin $w_t^{(i)}$ ja sijainteihin $\bar{x}_t^{(i)}$.

Hiukkassuotimen tarkkuutta sekä laskennallista tehokkuutta on mahdollista parantaa muodostamalla hiukkassuotimen uudelleenotantamenetelmä sovellustilannekohtaisesti. Vastaavasti myös hiukkasten painoarvojen määrittämistä sekä otosmenetelmää voidaan myös muuttaa[3][Luku 11.8].

Mitä enemmän hiukkassuodin hyödyntää satunnaisuutta, sitä hitaammin se supenee. Valinta-askelta ei välttämättä kannata siis suorittaa jokaisen uuden havainnon jälkeen. Tämä kannattaa huomioida erityisesti tilanteissa, joissa havaintojen voidaan olettaa olevan epäinformatiivisia. Havaintojen tietoarvo on pieni, kun niiden signaali-kohina⁵⁷ suhde on pieni [11][Luku 10.7].

⁵⁷engl. signal-to-noise ratio

6 Suodinongelma jatkuvassa ajassa

Käsitellään seuraavaksi signaaliprosessia $X = (X^i)_{i=1}^d$, joka on ratkaisu moniulotteiselle stokastiselle differentiaaliyhtälölle

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma(X_t) dV_t,$$

missä funktiot $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ja $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times p}$ ovat äärellisiä sekä Lipschitz-jatkuvia ja prosessi $V = (V^j)_{j=1}^p$ on p -ulotteinen Wiener-prosessi. Merkitään muuttujalla A jälleen toisen asteen differentiaalioperaattoria

$$A := \sum_{i=1}^d f^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1, j=1}^d a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

missä muuttuja $a = \frac{1}{2} \sigma \sigma^\top$. Koska molemmat funktiot f ja a ovat äärellisiä, generaattorin A lähtöjoukko on $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ eli kahdesti derivoituvien jatkuvien funktioiden joukko, joilla on äärellinen ensimmäisen ja toisen asteen derivaatta.

Prosessi $M^\varphi = \{M_t^\varphi, t \geq 0\}$ määritetään testifunktioille $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ ehdolla

$$\begin{aligned} M_t^\varphi &:= \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t A\varphi(X_s) ds \\ &= \int_0^t ((\nabla\varphi)^\top \sigma)(X_s) dV_s, \end{aligned}$$

jossa notaatiolla $(\nabla\varphi)^\top$ tarkoitetaan testifunktion φ osittaisderivaattojen rivivektoria $(\partial_1\varphi, \dots, \partial_d\varphi)$. Prosessi M_t on lisäksi \mathcal{F}_t -adaptoitunut martingaali.

Havaintoprosessi $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ on m -ulotteinen stokastinen prosessi, joka toteuttaa ehdon

$$dY_t = h(X_t) dt + dW_t,$$

missä funktio $h = (h_i)_{i=1}^m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ on äärellinen mitallinen funktio ja prosessi W on m -ulotteinen signaaliprosessista X riippumaton Wiener-prosessi. Tämä esitystapa perustuu lähteeseen [11][Luku 9].

Lemma 11. *Prosessin $\pi^n = \{\pi_t^n, t \geq 0\}$ arvot ovat todennäköisyysmittoja ja sen polut ovat cadlag-polkuja. Erityisesti prosessi π^n on jatkuva millä tahansa osa-aikavälillä $[i\delta, (i+1)\delta)$, $i \geq 0$. Lisäksi kaikille osa-aikavälkien indekseille $i > 0$ toteutuu identiteetti*

$$\mathbb{E}[\pi_{i\delta}^n | \mathcal{F}_{i\delta-}] = \lim_{t \rightarrow i\delta} \pi_t^n, \quad (14)$$

joka on voimassa vastaavalla tavalla myös todennäköisyysmitan $\tilde{\mathbb{P}}$ alaisuudessa eli

$$\tilde{\mathbb{E}}[\pi_{i\delta}^n | \mathcal{F}_{i\delta-}] = \lim_{t \rightarrow i\delta} \pi_t^n.$$

Todistus. Koska prosessiparit $(\bar{a}_j^n(t), v_j^n(t))$ kaikille indekseille $j = 1, \dots, n$ ovat jatkuvia osa-aikavälillä $[i\delta, (i+1)\delta)$, niin kaikille testifunktioille $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ pätee, että

$$\pi_t^n(\varphi) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_j^n(t) \varphi(v_j^n(t))$$

on jatkuva kaikilla ajanhetkillä $t \in (i\delta, (i+1)\delta)$. Nyt prosessi π^n on äärellisten positiivisten reaaliarvoisten mittojen avaruuden heikon topologian⁵⁸ suhteen jatkuva. Vastaavasti prosessi π^n on oikealta jatkuva ja vasemmalta rajallinen ajanhetkellä $i\delta$ eli sen polut ovat cadlag-polkuja kaikilla osa-aikaväleillä i . Lisäksi kaikilla ajanhetkillä $t \geq 0$ pätee

$$\pi_t^n(\mathbb{1}) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_j^n(t) = 1,$$

jolloin prosessin π^n arvot ovat mittoja.

Väitteen identiteetti (14) toteutuu huomioimalla painoarvojen asetettavan normalisoituun arvoon ajanhetkellä $i\delta$, jonka jälkeen jokaiselle testifunktiolle $\varphi \in B(\mathbb{R}^d)$ pätee

$$\pi_{i\delta}^n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{j'=1}^n o_{j'}^{n,i\delta} \varphi(v_{j'}^n(i\delta)),$$

jolloin hiukkasjärjestelmän määritelmän ehtojen

$$\begin{aligned} \bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta} &= \bar{a}_{j'}^n((i+1)\delta-) = \lim_{t \rightarrow (i+1)\delta} \bar{a}_{j'}^n(t), \\ \mathbb{E} \left[o_{j'}^{n,(i+1)\delta} \mid \mathcal{F}_{(i+1)\delta-} \right] &= n \bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta} \end{aligned}$$

avulla saadaan odotusarvotentiteetit

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\pi_{i\delta}^n(\varphi) \mid \mathcal{F}_{i\delta-}] &= \frac{1}{n} \sum_{j'=1}^n \mathbb{E} \left[o_{j'}^{n,i\delta} \mid \mathcal{F}_{i\delta-} \right] \varphi(v_{j'}^n(i\delta)) \\ &= \sum_{j'=1}^n o_{j'}^{n,i\delta} \varphi(v_{j'}^n(i\delta)) \\ &= \lim_{t \rightarrow i\delta} \sum_{j'=1}^n o_{j'}^n(t) \varphi(v_{j'}^n(t)). \end{aligned}$$

Koska mittamuunnos todennäköisyysmittojen \mathbb{P} ja $\tilde{\mathbb{P}}$ välillä ei aiheuta satunnaismuuttujien jakaumaan muutoksia, niin odotusarvoehto

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[o_{j'}^{n,i\delta} \mid \mathcal{F}_{(i+1)\delta-} \right] = n \bar{a}_{j'}^{n,(i+1)\delta}$$

on voimassa, jolloin lemmän väite toteutuu myös todennäköisyysmitan $\tilde{\mathbb{P}}$ alaisuudessa. □

⁵⁸Kun avaruus G on normilla varustettu vektoriavaruus, niin avaruuden G heikolla topologiolla tarkoitetaan topologiaa G^* , jolla kuvaus $x \mapsto f(x)$ on jatkuva kaikilla funktioilla $f \in G^*$.

Lause 11. *Todennäköisyysmitta-arvoinen prosessi $\pi^n = \{\pi_t^n, t \geq 0\}$ toteuttaa kaikille testifunktioille $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ rekursioyhtälön*

$$\begin{aligned} \pi_t^n(\varphi) &= \pi_0^n(\varphi) + \int_0^t \pi_s^n(A\varphi) ds \\ &\quad + S_t^{n,\varphi} + M_{[t/\delta]}^{n,\varphi} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \int_0^t (\pi_s^n(h_k\varphi) - \pi_s^n(h_k)\pi_s^n(\varphi)) (dY_s^k - \pi_s^n(h_k) ds), \end{aligned}$$

missä prosessi $S^{n,\varphi} = \{S_t^{n,\varphi}, t \geq 0\}$ on \mathcal{F}_t -adaptoitunut martingaali ehdolla

$$S_t^{n,\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \int_{i\delta \wedge t}^{(i+1)\delta \wedge t} \bar{a}_j^n(s) ((\nabla\varphi)^\top \sigma)(v_j^n(s)) dV_s^{(j)}$$

ja prosessi $M^{n,\varphi} = \{M_k^{n,\varphi}, k > 0\}$ on diskreettiparametrinen martingaali ehdolla

$$M_k^{n,\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j'=1}^n \left(o_{j'}^n(i\delta) - n\bar{a}_{j'}^{n,i\delta} \right) \varphi \left(v_{j'}^n(i\delta) \right). \quad (15)$$

Todistus. Kuvatkoon sigma-algebra $\mathcal{F}_{k\delta-} = \sigma(\mathcal{F}_s, 0 \leq s < k\delta)$ ajanhetkeen $k\delta$ mennessä kertyneiden tapahtumien tietoa. Ajanhetkellä $k\delta$ tapahtuu siis haarautuminen k . Asetetaan lisäksi mitoksi $\pi_{k\delta-}^n := \lim_{t \rightarrow k\delta} \pi_t^n$.

Nyt ajanhetkille $t \in [i\delta, (i+1)\delta)$ ja testifunktioille $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ voidaan muodostaa rekursiokaava⁵⁹

$$\pi_t^n(\varphi) = \pi_0^n(\varphi) + M_i^{n,\varphi} + \sum_{k=1}^i (\pi_{k\delta-}^n(\varphi) - \pi_{(k-1)\delta}^n(\varphi)) + (\pi_t^n(\varphi) - \pi_{i\delta}^n(\varphi)), \quad (16)$$

jossa prosessi $M^{n,\varphi} = \{M_j^{n,\varphi}, j \geq 0\}$ toteuttaa ehdon

$$M_j^{n,\varphi} = \sum_{k=1}^j (\pi_{k\delta}^n(\varphi) - \pi_{k\delta-}^n(\varphi))$$

kaikilla indekseillä j . Prosessin $M^{n,\varphi}$ martingaaliominaisuus seuraa lemmasta 11, jonka lisäksi se toteuttaa myös ehdon (15), sillä mitoille $\pi_{k\delta}^n$ ja $\pi_{k\delta-}^n$ pätevät ehdot

$$\pi_{k\delta}^n = \frac{1}{n} \sum_{j'=1}^n o_{j'}^{n,k\delta} \delta_{v_{j'}^n(k\delta)} \quad \text{ja} \quad \pi_{k\delta-}^n = \sum_{j'=1}^n \bar{a}_{j'}^{n,k\delta} \delta_{v_{j'}^n(k\delta)}.$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälön (16) oikean puolen kolmas ja neljäs termi. Hyödynnetään Itön lausetta, hiukkasjärjestelmämuuttujien v_j^n ja a_j^n määritelmiä sekä havaintoprosessin Y ja Wiener-prosessin riippumattomuutta. Nyt kaikille testifunktioille $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ pätee

$$\begin{aligned} d(a_j^n(t)\varphi(v_j^n(t))) &= a_j^n(t)A\varphi(v_j^n(t)) dt \\ &\quad + a_j^n(t) ((\nabla\varphi)^\top \sigma)(v_j^n(t)) dV_t^{(j)} \\ &\quad + a_j^n(t)\varphi(v_j^n(t)) h^\top(v_j^n(t)) dY_t \end{aligned}$$

⁵⁹Erikoistilanteena $\sum_{k=1}^n = 0$.

ja

$$d \left(\sum_{k=1}^n a_k^n(t) \right) = \sum_{k=1}^n a_k^n(t) h^\top (v_k^n(t)) dY_t,$$

jolloin jokaiselle osa-aikavälin ajanhetkelle $t \in [k\delta, (k+1)\delta)$ ja indekseille $k = 0, 1, \dots, i$ pätee

$$\begin{aligned} \pi_t^n(\varphi) - \pi_{(k-1)\delta}^n(\varphi) &= \int_{(k-1)\delta}^t d \left(\sum_{j=1}^n \bar{a}_j^n \varphi(v_j^n(s)) \right) \\ &= \int_{(k-1)\delta}^t \sum_{j=1}^n d \left(\frac{a_j^n(s) \varphi(v_j^n(s))}{\sum_{p=1}^n a_p^n(s)} \right) \\ &= \int_{(k-1)\delta}^t \pi_s^n(A\varphi) ds \\ &\quad + \sum_{r=1}^m \int_{(k-1)\delta}^t (\pi_s^n(h_r \varphi) - \pi_s^n(h_r) \pi_s^n(\varphi)) \times (dY_s^r - \pi_s^n(h_r) ds) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{(k-1)\delta}^t \bar{a}_j^n(s) ((\nabla \varphi)^\top \sigma)(v_j^n(s)) dV_s^{(j)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ottamalla osa-aikavälin oikean puolen raja-arvon $t \rightarrow k\delta$ päädytään yhtälöön

$$\begin{aligned} \pi_{k\delta-}^n(\varphi) - \pi_{(k-1)\delta}^n(\varphi) &= \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \pi_s^n(A\varphi) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \bar{a}_j^n(s) ((\nabla \varphi)^\top \sigma)(v_j^n(s)) dV_s^{(j)} \\ &\quad + \sum_{r=1}^m \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} (\pi_s^n(h_r \varphi) - \pi_s^n(h_r) \pi_s^n(\varphi)) \times (dY_s^r - \pi_s^n(h_r) ds), \end{aligned}$$

jolloin lauseen rekursioyhtälö toteutuu tämän yhtälön sekä yhtälöiden (16) ja (17) perusteella. \square

6.1 Ratkaisu osittaisdifferentiaaliyhtälön avulla

Käsitellään ennen jatkuva-aikaisen suodinongelman ratkaisuun soveltuvan hiukkasuotimen esittämistä toisenlaista osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriaan perustuvaa numeerista ratkaisutyylä. Kuvattava menetelmä [11][Luku 8.5] hyödyntää signaaliprosessin epänormalisoidun ehdollisen jakauman mittaa p_t . Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden numeeriseen ratkaisuun kehityt menetelmät toimivat tehokkaasti suodinongelman ratkaisuun ulottuvuuksien lukumäärän ollessa pieni.

Olkoon $0 < t_n < \dots$ tasavälinen aika-avaruuden jako, jossa aikavälien erotus on $\Delta = t_n - t_{n-1}$. Todennäköisyysmittaa $p_{t_n}(z)$ approksimoidaan siis mitoilla $p_n^\Delta(z)$, jossa tilasiirtymä mitasta $p_{t_{n-1}}^\Delta(z)$ mittaan $p_n^\Delta(z)$ noudattaa kuvattavaa menetelmää.

Merkitään ehdollisen todennäköisyysmitan prioriestimaattia notaatiolla $\bar{p}_n^\Delta := p_{t_n}^n$. Ensimmäisessä vaiheessa pyritään estimoimaan tilasiirtymää välillä $[t_{n-1}, t_n]$ ratkaisemalla Fokker-Planck-differentiaaliyhtälö⁶⁰

$$\begin{cases} \frac{\partial p_t^n}{\partial t} = A^* p_t(z) \\ p_{t_{n-1}}^n = p_{n-1}^\Delta \end{cases},$$

missä operaattorilla A^* tarkoitetaan toisen asteen differentiaalioperaattorin A adjungoitua operaattoria eli

$$\begin{aligned} A\varphi &= \sum_{i=1, j=1}^d a^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d f^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ A^* \varphi &= \sum_{i=1, j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a^{ij} \varphi) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (f^i \varphi). \end{aligned}$$

Käsiteltävä differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista numeerisesti hyödyntämällä impliittistä Eulerin menetelmää. Ratkaistaan siis aluksi yhtälö

$$\bar{p}_n^\Delta - \Delta A^* \bar{p}_n^\Delta = \partial_{n-1}^\Delta, \quad (18)$$

jonka jälkeen toisessa vaiheessa korjataan estimoitua priorimittaa \bar{p}_n^Δ havainnon Y_{t_n} avulla. Määritellään muuttuja z_n^Δ ehdolla

$$z_n^\Delta := \frac{1}{\Delta} (Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_{n-1}}^{t_n} h(X_s) ds + \frac{1}{\Delta} (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}).$$

Määritellään lisäksi ehdollinen todennäköisyysmitta p_n^Δ kaikille muuttujille $z \in \mathbb{R}^d$ Kallianpurin-Striebelin kaavan avulla

$$p_n^\Delta(z) := c_n \psi_n^\Delta \bar{p}_n^\Delta(z),$$

missä funktio ψ_n^Δ noudattaa ehtoa

$$\psi_n^\Delta(z) := \exp\left(-\frac{1}{2} \Delta \|z_n^\Delta - h(z)\|^2\right)$$

ja muuttuja c_n on normalisoiva vakio ehdolla

$$\int_{\mathbb{R}^d} p_n^\Delta(z) dz = 1.$$

Kun signaalin muutosten generaattorin oletetaan olevan toisen asteen differentiaalioperaattori A , niin yhtälöä (18) voidaan approksimoida välillisesti approksimoidulla differentiaalioperaattorilla A . Tätä varten hyödynnetään numeerista differenssimenetelmää d -ulotteisessa tasavälisessä taulukossa Ω^h , jota rajaa reunapisteiden

⁶⁰Lisätietoa on esimerkiksi lähteessä [7][Luku 5.2]

joukko $h = (h_1, \dots, h_m)$. Kun φ on Borel-mitallinen testifunktio ja vektorit e_i ovat koordinaatin i yksikkövektoreita, niin derivaattojen approksimaatiot pisteessä x differentiaalioperaattorille A ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big|_x &\simeq \begin{cases} \frac{\varphi(x + e_i h_i) - \varphi(x)}{h_i}, & \text{kun } f_i(x) \geq 0 \\ \frac{\varphi(x) - \varphi(x - e_i h_i)}{h_i}, & \text{kun } f_i(x) < 0 \end{cases}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \Big|_x &\simeq \frac{\varphi(x + e_i h_i) - 2\varphi(x) + \varphi(x - e_i h_i)}{h_i^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_x &\simeq \begin{cases} \frac{1}{2h_i} \left(\frac{\varphi(x + e_i h_i + e_j h_j) - \varphi(x + e_i h_i)}{h_j} - \frac{\varphi(x + e_j h_j) - \varphi(x)}{h_j} \right. \\ \quad \left. + \frac{\varphi(x) - \varphi(x - e_j h_j)}{h_j} - \frac{\varphi(x - e_i h_i) - \varphi(x - e_i h_i - e_j h_j)}{h_j} \right), & \text{kun } a_{ij} \geq 0 \\ \frac{1}{2h_i} \left(\frac{\varphi(x + e_i h_i) - \varphi(x + e_i h_i - e_j h_j)}{h_j} - \frac{\varphi(x) - \varphi(x - e_j h_j)}{h_j} \right. \\ \quad \left. + \frac{\varphi(x + e_j h_j) - \varphi(x)}{h_j} - \frac{\varphi(x - e_i h_i + e_j h_j) - \varphi(x - e_i h_i)}{h_j} \right), & \text{kun } a_{ij} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Asetetaan jokaiselle taulukon jäsenpisteelle $x \in \Omega^h$ joukko V^h pisteitä, joihin pisteestä x on mahdollista edetä eli

$$V^h(x) := \{x + \varepsilon_i e_i h_i + \varepsilon_j e_j h_j, \text{ kaikilla } \varepsilon_i, \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}, i \neq j\}.$$

Merkitään lisäksi joukolla $N^h(x)$ pisteen x sekä sen lähimpien naapureiden muodostamaa joukkoa eli

$$N^h(x) := \{x + \varepsilon_1 e_1 h_1 + \dots + \varepsilon_d e_d h_d, \text{ kaikilla } \varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}\}.$$

Differentiaalioperaattoria A approksimoi operaattori A^h , joka noudattaa ehtoa

$$A^h \varphi(x) := \sum_{y \in V^h(x)} A^h(x, y) \varphi(y)$$

missä kertoimet A^h pisteille $x \in \Omega^h$ perustuvat ehtoihin⁶¹

$$\begin{cases} A^h(x, x) = - \sum_{i=1}^d \left[\frac{1}{h_i^2} a_{ii}(x) - \sum_{j, j \neq i} \frac{1}{2h_i h_j} \|a_{ij}(x)\| \right] - \sum_{i=1}^d \frac{1}{h_i} \|f_i(x)\| \\ A^h(x, x \pm e_i h_i) = \frac{1}{2h_i^2} a_{ii}(x) - \sum_{j, j \neq i} \|a_{ij}(x)\| + \frac{1}{h_i} f_i^\pm(x) \\ A^h(x, x + e_i h_i \pm e_j h_j) = \frac{1}{2h_i h_j} a_{ij}^\pm(x) \\ A^h(x, x - e_i h_i \mp e_j h_j) = \frac{1}{2h_i h_j} a_{ij}^\pm(x) \\ A^h(x, y) = 0, \text{ kun muut ehdot eivät toteudu.} \end{cases}.$$

⁶¹Notaatioilla tarkoitetaan siis $x^+ = \max(x, 0)$ ja $x^- = \min(x, 0)$

6.2 Hiukkassuodinalgoritmi jatkuvassa ajassa

Käsitellään seuraavaksi jatkuva-aikaisen hiukkassuotimen numeerinen algoritmitoetus. Hiukkasten lukumääräksi asetetaan n ja hiukkaset haarautuvat ajanhetkellä $k\delta$. Jokainen haarautumisaikaväli $[(k-1)\delta, k\delta]$ jaetaan edelleen parametrin m osoittamaan määrään tasavälisiä osa-aikavälejä, eli haarautumisaikavälien osavälien pituus on δ/m . Parametrien δ sekä m valinta riippuu havaintoaikavälien pituuksista, ja hankaluutta jatkuva-aikaisen hiukkassuotimen hyödyntämisessä aiheuttaa varsinkin ajallisen diskretisointiparametrin δ valinta. Suurella δ -arvolla diskretisointiharha on suuri, kun taas pienellä arvolla hiukkassuotimen laskentakompleksisuus kasvaa suureksi [12][Luku 19.4].

Hiukkaset alustetaan jakauman estimaattiin π_0 perustuen, joka voidaan muodostaa esimerkiksi normaalijakauman avulla. Havaintojen Y_t oletetaan olevan käytettävissä ajanhetkellä t , joka on δ/m -jaollinen kokonaisluku. Ajanhetkien välillä hyödynnetään Eulerin menetelmää approksimoimaan numeerisesti hiukkasten kehitystä.

Aiemmin kuvatun haarautumisalgoritmin sijaan voidaan myös hyödyntää toisenlaisia menetelmiä uuden hiukkasjoukon muodostamista varten, muttei näitä kuitenkaan käsitellä. Kuvattava uudelleenotantamenetelmä muodostaa myös multinormaalien jälkeläisjakauman, jonka tunnetaan olevan epäoptimaalinen. Tehokkaampia uudelleenotantamenetelmiä on kehitetty, muttei näitäkään käsitellä tässä tutkielmassa. Myös muita stokastisten differentiaaliyhtälöiden approksimoimiseen hyödynnettäviä algoritmeja voi hyödyntää tämän jatkuva-aikaisen hiukkassuotimen numeerisessa toteutuksessa.

Algoritmi 3 Hiukkassuotimen alustus, $t = 0$

alusta $t \leftarrow 0, \pi_0$

kaikille $j = 1, \dots, n$ suorita

$$v_j(0) \leftarrow \pi_0(\cdot)$$

$$a_j(0) \leftarrow 1$$

$$\pi_0 \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{v_j(0)}$$

Algoritmi 4 Hiukkasten kehitys

kaikille $l = 0, \dots, m-1$ suorita

kaikille $j = 1, \dots, n$ suorita

$$\Delta V \leftarrow U \text{usi normaalijakautunut } p\text{-ulotteinen satunnaisvektori}$$

$$v_j(t + \delta/m) \leftarrow v_j(t) + f(v_j(t)) \cdot \delta/m + \sigma(v_j(t)) \cdot \Delta V \cdot \sqrt{\delta/m}$$

$$b_j(t + \delta/m) \leftarrow h(v_j(t))^\top \cdot (Y_{t+\delta/m} - Y_t) - (\delta/2m) \cdot \|h(v_j(t))\|^2$$

$$a_j(t + \delta/m) \leftarrow a_j(t) \cdot \exp(b_j(t + \delta/m))$$

$$t \leftarrow t + \delta/m$$

$$\sum(t) \leftarrow \sum_{j=1}^n a_j(t)$$

$$\pi_t^n \leftarrow \frac{1}{\sum(t)} \sum_{j=1}^n a_j(t) \cdot \delta_{v_j(t)}$$

Algoritmi 5 Hiukkasten haarautuminen

kaikille $j = 1, \dots, n$ suorita

└ $\bar{a}_j(t) \leftarrow a_j(t) / \sum(t)$

kaikille $j' = 1, \dots, n$ suorita

└ Määritä hiukkasen j' jälkeläiset aiemmin kuvatun haarautumisalgoritmin avulla, perustuen painokertoimiin $\bar{a}_j(t)$ ja sijainteihin $v_j(t)$.

Uusia hiukkasia on nyt n kappaletta uusilla sijainneilla.

Uudelleenindeksoi hiukkaset välille $1, \dots, n$.

kaikille $j = 1, \dots, n$ suorita

└ $a_j(t) \leftarrow 1$

Algoritmi 6 Hiukkasten uudelleenotanta

kaikille $j = 1, \dots, n$ suorita

└ $\bar{a}_j(t) \leftarrow a_j(t) / \sum(t)$

kaikille $j' = 1, \dots, n$ suorita

└ Valitse uusi sijainti $v_j(t)$ hiukkasjoukosta hyödyntämällä hiukkasten normalisoituja painokertoimia $\bar{a}_j(t)$ todennäköisyyksinä. Palauta sijainti joukkoon seuraavaa iteraatiota varten.

Uudelleenindeksoi hiukkasten sijainnit otoksella $v_j(t)$

kaikille $j = 1, \dots, n$ suorita

└ $a_j(t) \leftarrow 1$

7 Suodinteorian sovelluksista

Suodinteoriaa sekä hiukkassuotimia hyödynnetään laaja-alaisesti eri tieteenaloilla. Esimerkit perustuvat lähteisiin [3][Luku 1.1] [7][Luku 3] [15][Luku 2.4] [10][Luku 7].

Hiukkassuotimia voidaan hyödyntää esimerkiksi kohteenseurantaan, jolla tarkoitetaan sensorimittausten perusteella pääteltävää tietoa siitä, miten jokin kohde liikkuu. Sensoreina voivat toimia esimerkiksi aktiivi- tai passiivitutkat, radiovastaanottimet sekä kamerat. Näiden sensoreiden ja niiden perusteella saatavien havaintojen avulla voidaan päätellä esimerkiksi kohteen suunta, nopeus sekä kiihtyvyys. Mitä enemmän sensorihavaintoja on hyödynnettävissä, sitä paremmin niiden perusteella voidaan seurata esimerkiksi robotin, auton, satelliitin taikka lentokoneen liikerataa. Monimutkaisempana sovelluksena on esimerkiksi seurata useampaa kohdetta samojen mittaushavaintojen perusteella samanaikaisesti.

GPS-navigointi on laaja-alaisesti käytetty satelliittipaikannusjärjestelmä, joka hyödyntää kellosignaaleiden lähettämistä vastaanottimille. Nämä vastaanottimet hyödyntävät matemaattisia suotimia paikannustarkkuuden parantamiseen ja tähän käytetäänkin tyypillisesti esimerkiksi Kalman-Bucy-suodinta tai sen muunnelmia.

Inertiaalinavigointia voidaan taas hyödyntää ympäristössä, jossa esimerkiksi GPS-satelliitteihin ei saada yhteyttä. Tämäntyyppisellä navigointimenetelmällä tarkoitetaan kiihtyvyysanturien sekä gyroskooppien avulla kerättävää dataa, jonka perusteella esimerkiksi robotin oman sijainnin määrittäminen liikkeessä on mahdollista. Näiden anturien tuottamaan aikasarjadataan voidaan soveltaa suodinteorian menetelmiä paremman tilatiedon aikaansaamiseksi varten. Vastaavasti näiden antureiden kalibrointiinkin voidaan hyödyntää suotimia.

Robotiikassa usein käytetty samanaikaisen paikannuksen ja kartoituksen menetelmä⁶² hyödyntää erityisesti hiukkassuotimia. Tämän menetelmän avulla autonomiset järjestelmät voivat toimia niille aiemmin tuntemattomissa ympäristöissä, ja mitä kauemmin ne viettävät tietystä ympäristössä aikaa, sitä enemmän ne sen ominaispiirteitä myös oppivat.

Monet lääketieteelliset laitteet sekä menetelmät hyödyntävät suotimia muodostaakseen tietoa taikka parantaakseen sen laatua. Tällaisia laitteita tai käyttötarkoituksia ovat esimerkiksi aivosähkökäyrän⁶³ sekä aivomagneettikäyrän⁶⁴ muodostustekniikat. Lisäksi suotimia ollaan hyödynnetty toiminnallisessa magneettikuvauksessa⁶⁵ sekä diffuusissa optisessa tomografiassa⁶⁶. Näillä menetelmillä pyritään siis muodostamaan käsitystä aivojen tilasta.

Neurotieteellisissä sovelluksissa suotimia voidaan hyödyntää esimerkiksi aivokäyttöliittymissä⁶⁷, joiden avulla aivojen tuottamilla sähkösignaaleilla voidaan kontrolloida esimerkiksi ulkoisia laitteita, kuten proteeseja. Suotimia voidaan hyödyntää myös biologisissa sovellustilanteissa, kuten ekologiassa populaatiokasvun määrittämisessä taikka epidemiologiassa infektioautien leviämisen mallintamisessa. Niillä on myös käyttökohteita genetiikassa.

⁶²engl. simultaneous localization and mapping (SLAM)

⁶³engl. electroencephalography (EEG)

⁶⁴engl. magnetoencephalography (MEG)

⁶⁵engl. functional magnetic resonance imaging (fMRI)

⁶⁶engl. diffuse optical tomography (DOT)

⁶⁷engl. brain-computer interface (BCI)

Finanssimatematiikassa ajallisen tilan määrittäminen on myös tyypillinen ongelma, jonka lisäksi merkittävä määrä aikasarjadataa on usein käytettävissä. Monet finanssimatemaattiset mallit hyödyntävät myös stokastisia differentiaaliyhtälöitä, jolloin näihinkin malleihin ja havaintoihin voidaan soveltaa suodinteoriaa parempien tilaestimaattien määrittämistä varten. Tyypillinen esimerkki suodinteorian käyttökohteesta on esimerkiksi tietyn omaisuuden tai arvopaperin reaaliarvon tai volatilitetin määrittäminen.

8 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa esitettiin suodinteorian lähtökohtia sekä numeeristen menetelmien teoriaperusteita noudattaen todennäköisyysteorian täsmällisyyttä. Käsiteltyjä tuloksia sekä menetelmiä on jatkokehitetty merkittävästi teorian osalta, kuten myös sovellustilanteita varten. Merkittävä määrä suotimien teoreettisiakin ominaisuuksia on todistettu esimerkiksi konvergenssin osalta, joita ei kuitenkaan tässä tutkielmassa käsitelty kovinkaan laajasti.

Parhaimman ratkaisun tai tilaestimaatin löytämiseen hyödynnettävät iteratiiviset estimointimenetelmät ovat monen sovellustilanteen kannalta mielekkäitä. Periaatteellisesti varsinkin hiukkassuotimien toimintaperiaatetta voidaan pitää myös ymmärrettävänä ja intuitiivisena. Samalla niiden teoriarakenne kuitenkin perustuu merkittävään määrään tuloksia todennäköisysteoriasta ja Bayesilaisesta estimaattoriteoriasta, jonka tulkinta ja ymmärtäminen saattaa olla aikaavievää.

Satunnaisuuden johdosta monet suodinteorian menetelmät saattavat käyttäytyä sovelluksissa myös odottamattomasti. Suotimien määrittämät estimaatit eivät välttämättä ole järkeviä sovellettaessa niitä tilanteisiin, tapahtumiin tai havaintoihin, joissa niitä ei ole testattu. Suodinteorian menetelmiä sovellettaessa on siis myös olennaista tulkita hyödynnetyn suotimen aiheuttamia virhetilannemahdollisuuksia.

Viitteet

- [1] Arnaud Doucet ja Adam Johansen. ”A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen Years Later”. *Handbook of Nonlinear Filtering* 12 (tammikuu 2009). URL: https://www.stats.ox.ac.uk/~doucet/doucet_johansen_tutorialPF2011.pdf.
- [2] P. Davidson, J. Collin ja J. Takala. ”Application of particle filters to a map-matching algorithm”. en. *Gyroscope and Navigation* 2.4 (lokakuu 2011), s. 285–292. ISSN: 2075-1087. DOI: 10.1134/s2075108711040067. URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S2075108711040067>.
- [3] Simo Särkkä ja Lennart Svensson. *Bayesian Filtering and Smoothing. Second Edition*. Cambridge University Press, 2023. ISBN: 9781108926645. URL: https://users.aalto.fi/~ssarkka/pub/bfs_book_2023_online.pdf.
- [4] N.J. Gordon, D.J. Salmond ja A.F.M. Smith. ”Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation”. en. *IEE Proceedings F Radar and Signal Processing* 140.2 (1993), s. 107. ISSN: 0956-375X. DOI: 10.1049/ip-f-2.1993.0015. URL: <https://www3.nd.edu/~lemmon/courses/ee67033/pubs/GordonSalmondSmith93.pdf>.
- [5] Jos Elfring, Elena Torta ja René van de Molengraft. ”Particle Filters: A Hands-On Tutorial”. en. *Sensors* 21.2 (9. tammikuuta 2021), s. 438. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s21020438. URL: <http://dx.doi.org/10.3390/s21020438>.
- [6] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. en. Springer Science Business Media, 15. heinäkuuta 2003. ISBN: 9783540047582.
- [7] Simo Särkkä ja Arno Solin. *Applied Stochastic Differential Equations*. Cambridge University Press, 16. huhtikuuta 2019. ISBN: 9781108186735. URL: https://users.aalto.fi/~ssarkka/pub/sde_book.pdf.
- [8] Adolph Fick. ”V. On liquid diffusion”. en. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 10.63 (heinäkuu 1855), s. 30–39. ISSN: 1941-5982. DOI: 10.1080/14786445508641925. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/14786445508641925>.
- [9] Ioannis Karatzas ja Steven Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. en. Springer Science Business Media, 1991. ISBN: 9780387976556.
- [10] Peter E. Kloeden ja Eckhard Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg, 1992. ISBN: 9783642081071. DOI: 10.1007/978-3-662-12616-5. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>.
- [11] Alan Bain ja Dan Crisan. *Fundamentals of Stochastic Filtering*. en. Springer, 26. marraskuuta 2008. ISBN: 9780387768953.
- [12] Nicolas Chopin et al. ”On resampling schemes for particle filters with weakly informative observations” (2022). DOI: 10.48550/ARXIV.2203.10037. URL: <https://arxiv.org/abs/2203.10037>.

- [13] Hermann Brunner. *Volterra Integral Equations*. Cambridge University Press, 20. tammikuuta 2017. ISBN: 9781107098725. DOI: 10.1017/9781316162491. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/9781316162491>.
- [14] Pierre Del Moral. "Nonlinear filtering: Interacting particle resolution". en. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics* 325.6 (syyskuu 1997), s. 653–658. ISSN: 0764-4442. DOI: 10.1016/s0764-4442(97)84778-7. URL: <https://people.bordeaux.inria.fr/pierre.delmoral/mprfs.pdf>.
- [15] Nicolas Chopin ja Omiros Papaspiliopoulos. *An Introduction to Sequential Monte Carlo*. en. Springer International Publishing, 2020. ISBN: 9783030478445. DOI: 10.1007/978-3-030-47845-2. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-47845-2>.