



**TURUN
YLIOPISTO**

VIRHEKÄSITYKSET GEOMETRIASSA YLÄKOULUSSA

LuK Etti Sarkki

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2024

Tarkastajat:
Prof. P. H.
Prof. V. H.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

ETTI SARKKI: Virhekäsitykset geometriassa yläkoulussa
Pro gradu -tutkielma, 35 s.
Matematiikka
Toukokuu 2024

Tämä pro gradu -tutkielma on kirjallisuuskatsaus, joka käsittelee virhekäsityksiä geometriassa yläkoulussa. Tutkielmassa tarkastellaan yläkoulun oppilaiden yleisimpiä virhekäsityksiä geometriassa ja keinoja, joilla niitä voidaan huomioida opetuksessa. Lisäksi tutkielmassa perehdytään virhekäsityksen määritelmään ja niiden merkitykseen yläkoulussa, sekä geometrisen käsitteenmuodostuksen teorioihin.

Tutkimustulosten perusteella havaittiin, että kaikilla geometrian osa-alueilla esiintyy paljon erilaisia virhekäsityksiä, joiden yksi isoimmista syistä on hahmotusvaikeudet. Virhekäsitykset liittyvät usein käsitteiden sekoittamiseen, virheelliseen määrittelyyn, luokitteluvirheisiin ja geometrinen kuvien kuvaamiseen. Lisäksi oppilaiden matemaattisen abstraktiokyvyn ja geometrian virhekäsitysten välillä havaittiin olevan yhteys.

Virhekäsitysten tiedostaminen on hyvä lähtökohta opetuksen suunnittelulle. Niitä voi huomioida eri tavoin opetuksessa ja opetukseen valmistautuessa. Erilaiset opetusmenetelmät voivat auttaa oppilaita hahmottamaan geometrisia käsitteitä paremmin. Tutkimus tarjoaa käytännön vinkkejä opettajille virhekäsitysten havaitsemiseen ja korjaamiseen, kuten visuaalisten välineiden ja teknisten apuvälineiden hyödyntäminen opetuksessa ja mahdollisimman monenlaisten geometrinen kuvien laajan hyödyntämisen opetuksessa.

Tutkimustulokset voivat hyödyttää tulevia ja nykyisiä matematiikan opettajia geometrian opetuksen kehittämisessä sekä tarjota uusia näkökulmia virhekäsitysten huomioimiseen opetuksessa.

Asiasanat: geometria, virhekäsitys, yläkoulu.

Sisällys

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Johdanto | 1 |
| 2 | Virhekäsitys | 3 |
| 2.1 | Virhekäsitys matematiikassa | 3 |
| 2.1.1 | Virhekäsityksen määritelmä | 3 |
| 2.1.2 | Virhekäsityksen syntymisen mekanismi | 3 |
| 2.2 | Virheen ja virhekäsityksen ero | 4 |
| 2.3 | Virhekäsitysten merkitys opetuksessa | 5 |
| 3 | Geometrisen käsitteenmuodostuksen teorioita | 6 |
| 3.1 | Van Hielin teoria | 6 |
| 3.2 | Figuraaliset käsitteet | 7 |
| 4 | Geometria yläkoulussa | 9 |
| 5 | Tutkimuskysymykset ja -menetelmät | 11 |
| 5.1 | Tutkimuskysymykset | 11 |
| 5.2 | Tutkimusmenetelmät | 11 |
| 5.2.1 | Tutkimusmateriaali | 11 |
| 5.2.2 | Aineistonkäsittely | 12 |
| 6 | Yleisimmät virhekäsitykset geometriassa | 13 |
| 6.1 | Kolmio | 13 |
| 6.2 | Kulma | 15 |
| 6.3 | Monikulmiot | 17 |
| 6.4 | Muunnosgeometria | 19 |
| 6.5 | Kolmiulotteiset kappaleet | 20 |
| 6.6 | Sanalliset tehtävät ja todistaminen | 22 |
| 7 | Virhekäsitysten huomioiminen opetuksessa | 25 |
| 7.1 | Kolmio | 25 |
| 7.2 | Kulma | 26 |
| 7.3 | Monikulmiot | 27 |
| 7.4 | Muunnosgeometria | 28 |
| 7.5 | Kolmiulotteiset kappaleet | 28 |
| 7.6 | Sanalliset tehtävät ja todistaminen | 29 |
| 8 | Pohdinta | 33 |
| 8.1 | Tulosten hyödynnettävyys | 34 |
| 8.2 | Jatkotutkimusmahdollisuuksia | 34 |
| | Viitteet | 36 |

1 Johdanto

Geometria on matematiikan keskeinen osa-alue, jolla on tärkeä rooli yläkoulun matematiikan opetuksessa (Opetushallitus 2015). Yläkoulun geometrian opetuksessa kohdataan kuitenkin usein tilanteita, joissa oppilailla on virhekäsityksiä eri käsitteistä ja menetelmistä. Nämä virhekäsitykset voivat muodostua monista eri syistä, kuten aikaisemmista oppimisvaikeuksista, epätarkoista käsitteistä tai vääristyneistä intuitioista.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella näitä virhekäsityksiä yläkoulun geometrian kontekstissa. Tutkielmassa pyritään selvittämään, mitkä ovat tyypillisimmät virhekäsitykset ja mistä ne johtuvat. Lisäksi tarkastellaan keinoja, joilla opettajat voivat huomioida näitä virhekäsityksiä opetuksessa. Tutkielman tavoitteena on tarjota konkreettisia suosituksia opettajille virhekäsitysten huomioimiseksi ja korjaamiseksi sekä pyrkiä parantamaan geometrian opetusta yläkoulutasolla.

Kiinnostuin aiheesta tehdessäni seminaaritutkielmaa pedagogisten opintojen aikana. Seminaarityöni aiheena oli Geometrian heikko osaaminen. Tutkimuksessa ilmeni, että geometrian osaaminen on heikolla tasolla ja perustaidot ovat heikosti hallussa. Geometrian osaaminen on myös heikommalla tasolla verrattuna muihin matematiikan osa-alueisiin. Tutkielma tarjoaa yhden syyn siihen, miksi geometrian osaaminen on niin heikolla tasolla, nimittäin monet siihen liittyvät virhekäsitykset.

Olen itse opettajana havainnut, että monilla oppilailla on paljon haasteita geometrian kanssa. Tämä herätti minussa halun syventyä aiheeseen tarkemmin ja tutkia keinoja, joilla oppilaita voi auttaa virhekäsitysten kanssa. Lähtökohtana tähän on tietenkin itse opettajana tietää ja tunnistaa virhekäsitykset, jotta niihin voidaan puuttua tehokkaasti. Ymmärrys yläkoulun geometrian virhekäsityksistä on ensiarvoisen tärkeää opetuksen kehittämisessä ja oppilaiden matemaattisen osaamisen tukemisessa. Toivon, että tämä tutkielma tarjoaa arvokasta tietoa ja näkökulmia, jotka auttavat parantamaan geometrian opetusta yläkoulutasolla.

Tämä pro gradu -tutkielma on toteutettu kirjallisuuskatsauksena, johon on pyritty löytämään kattavasti kaikki aihetta käsittelevät tieteelliset julkaisut. Kootun aineiston perusteella olen pyrkinyt muodostamaan eheän kokonaisuuden, jossa perehdytään kattavasti erilaisiin virhekäsityksiin ja niiden huomioimiseen opetuksessa.

Tutkielma jakautuu useaan lukuun, jotka esittelevät virhekäsitysten syntymismekanismeja, geometrisen käsitteenmuodostuksen teorioita, yleisimpiä geometrian virhekäsityksiä ja niiden havaitsemisen keinoja sekä keskeisiä tuloksia ja pohdintoja. Tutkielman toisessa luvussa määritellään virhekäsitys ja sen syntymisen mekanismi. Lisäksi käsitellään virheen ja virhekäsityksen eroa ja virhekäsitysten merkitystä opetuksessa. Kolmannessa luvussa esitellään geometrisen käsitteenmuodostuksen teorioita. Luvussa tarkastellaan teorioita, jotka selittävät geometrinen käsitteiden oppimista ja ymmärtämistä. Neljännessä luvussa käydään läpi, mitä ovat geometrian keskeiset osa-alueet yläkoulussa ja miten geometrian opiskelu ja käsitteiden muodostus etenee alakoulusta yläkouluun. Viidennessä luvussa esitellään tutkimuskysymykset ja -menetelmät. Seuraavissa luvuissa pyritään vastaamaan tutkimuskysymyksiin. Luvussa kuusi käsitellään yleisimpiä virhekäsityksiä ja sitä, miten ne ilmenevät sekä syitä niiden takana. Virhekäsitykset on jaettu kuuteen eri osa-alueeseen, jotka ovat kolmio, kulma, monikulmiot, muunnosgeometria, kolmiulotteiset kappaleet se-

kä sanalliset tehtävät ja todistaminen. Luvussa seitsemän käsitellään keinoja, miten opetuksessa voi huomioida luvussa kuusi esiteltyjä virhekäsityksiä. Kahdeksannessa luvussa kootaan yhteen keskeisimpiä tuloksia ja pohditaan niiden merkitystä. Lisäksi luvussa pohditaan tutkimustuosten hyödynnettävyyttä ja jatkotutkimusmahdollisuuksia.

2 Virhekäsitys

Oppilailla on usein erilaisia virhekäsityksiä, jotka aiheuttavat oppilaissa hämmennystä ja tekevät uusien asioiden opiskelun haastavammaksi, koska matematiikassa uusi tieto rakentuu usein vanhan tiedon päälle. Tässä luvussa määritellään virhekäsitys ja käydään läpi mekanismi, jolla se syntyy. Lisäksi käsitellään eroja virheiden ja virhekäsitysten välillä sekä käydään läpi, miten virhekäsitykset tunnistaa ja voi ottaa huomioon.

2.1 Virhekäsitys matematiikassa

2.1.1 Virhekäsityksen määritelmä

Virhekäsitykset ovat väärinymmärryksiä ja väärinkäsityksiä, jotka pohjautuvat oppilaiden naiiveista teorioista, ja estävät oppilaiden rationaalisen päättelyn (Ojose 2015). Matemaattiset virhekäsitykset ovat käsityksiä, jotka perustuvat virheelliseen tai keskeneräiseen päättelyyn, jota ei ole käsitteellistetty kunnolla (Dingman et al. 2019). Yleisiä geometrian virhekäsityksiä ovat esimerkiksi neliö ei ole suorakulmio, suorakulmio ei ole suunnikas ja muut kuvioiden tunnistamis- ja luokitteluvirheet (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020). Virhekäsitys voi ilmetä oppilaan mielessä virheellisenä kuvana tai tulkintana geometrisesta ilmiöstä. Usein oppilaiden virhekäsitykset paljastuvat ennustettavissa olevien tyypillisten ja toistuvien virhemallien avulla, jotka ovat seurausta matemaattisesta ajattelusta, joka perustuu virhekäsityksiin (Dingman et al. 2019; Ojose 2015). Virhekäsitykset voivat johtua monesta eri asiasta, esimerkiksi opettajasta, oppilaasta tai opiskelijalle sopimattomasta ope- tusmenetelmästä (Riswandi, Nursalam ja Baharuddin 2022)

2.1.2 Virhekäsityksen syntymisen mekanismi

Virhekäsityksiä syntyy, kun oppilaat eivät ymmärrä menetelmien taustalla olevia käsitteitä tai eivät kykene yhdistämään käsitteitä menetelmiin (Dingman et al. 2019). Oppilaat tekevät yleensä kahta eri muotoa olevia virheitä: käsitteellisiä virheitä ja suoritusvirheitä. Käsitteelliset virheet liittyvät ymmärryksen puutteeseen, jotka ilmenevät rakenteellisina ja mielivaltaisina virheinä. Rakenteellisiin virheisiin liittyy ongelman välisten suhteiden tai olennaisten periaatteiden väärin ymmärtäminen. Mielivaltainen ratkaisu tapahtuu ilman sitoutumista ongelman alkuperäisiin lähtökohtiin tai ehtoihin. Mielivaltaiset virheet johtuvat aiemmista kokemuksista tai vaikutteista, jotka voivat ohjata ratkaisuprosessia poikkeamaan alkuperäisistä an- netuista tiedoista. Suoritusvirheitä tapahtuu, kun jonkin tehtävän suorittamisyritys epäonnistuu tai se suoritetaan vain osittain. (Ojose 2015)

Virhekäsityksiä syntyy myös osittain siksi, että opiskelijoilla on tarve ymmär- tää saamansa opetus ja ohjeet. Opetus tai tehtävän ohjeet siis ymmärretään jollain tapaa väärin, jolloin syntyy virhekäsitys. Virhekäsityksiä syntyy myös siksi, että oppilaat ovat opetelleet ulkoa sääntöjä ja luottavat niiden toimivan kaikkiin aiheen tehtäviin. Kun vastaan tulee tehtävä, joka vaatisi käsitteellistä tietoa oppilas käyttää ilman ohjausta tehtävään sopimatonta sääntöä luoden näin itselleen matemaattisen virhekäsityksen. Matematiikassa säännöt muuttuvat jatkuvasti riippuen käsitteestä

ja matemaattisesta operaatiosta, joten virhekäsityksiä ilmenee usein. Matematiikassa on myös mahdollista, että virheet kumoavat toisensa, jolloin päädytään oikeaan ratkaisuun virheistä huolimatta. Tämä johtaa siihen, että oppilaat pitävät virhekäsityksistään kiinni. (Ojose 2015)

Matematiikan oppikirjoissa ei yleensä käsitellä suoraan opiskeltaviin aiheisiin liittyviä virhekäsityksiä. Tämän takia opettajalla on tärkeä rooli minimoida virhekäsitysten syntyminen. Useat virhekäsitykset myös toistuvat jokaisella luokalla, joten on tärkeää, että matematiikan opettajat tekevät yhdessä töitä virhekäsitysten korjaamiseksi. Opettajien siis tulee olla tietoisia matematiikan virhekäsityksistä. Opettajien tietoisuuden lisääminen ja tehokkaiden virhekäsityksiä korjaavien strategioiden kehittäminen auttaisivat oppilaita ymmärtämään matemaattisia käsitteitä oikealla tavalla. (Dingman et al. 2019)

2.2 Virheen ja virhekäsityksen ero

Virhekäsitykset ilmenevät usein virheinä, mutta kaikki virheet eivät kuitenkaan johdu virhekäsityksistä. Huolimattomuusvirheiden ja virhekäsityksistä johtuvien virheiden ero on siinä, että ellei virhekäsitystä korjata, oppilas jatkaa samaa väärää menettelytapaa tai päättelyä, eli virhe toistuu aina yhä uudestaan (Dingman et al. 2019). Oppilaat tekevät virheitä, kun he lukevat tehtävänannon väärin, muistavat asioita väärin tai ovat huolimattomia (Ryan ja Williams 2007).

Opettajan on tärkeää ymmärtää, mistä virhekäsitys syntyy. Kun oppilaiden annetaan selittää oma päättelyketjunsä opettajan ja oppilaan on mahdollista tunnistaa virheellinen päättely. Kun opettaja tunnistaa yleiset virhekäsitykset, hän voi aktiivisesti tukea oppilaiden proseduurista oppimista integroimalla sen vahvaan käsitteelliseen tietoon. (Dingman et al. 2019) Yleensä virheen luonteen ja lähteen tunteminen auttaa opettajia suunnittelemaan tapoja opettaa asiat niin, että oppilaat hyötyvät opetuksesta (Ojose 2015).

Pelkän virheen korjaaminen ei riitä, jos kyse on virheestä, joka johtuu virhekäsityksestä. Virhekäsityksen kumoamiseksi opettajan on esitettävä useita käsitteellisiä kokemuksia, kuten konkreettisia esimerkkejä ja harjoituksia, jotta oppilaat ymmärtävät käsitteen oikean merkityksen. (Dingman et al. 2019) Opettajien on myös hyväksyttävä tietty epävarmuus, joka liittyy virhekäsityksen tunnistamiseen. Varmin tapa tunnistaa virhekäsitys on keskustella oppilaan kanssa hänen perusteluistaan diagnostiseen tehtävään liittyen. (Ryan ja Williams 2007)

Havainnot oppilaan osaamisesta voidaan jakaa kahteen tasoon, pintatasoon ja syvempään tasoon. Tämä jako esitetään taulukossa 1. Pintason havainnot kokenut opettaja kerää helposti kokeista ja testeistä. Opettaja tunnistaa ja osaa ennakoida monia virheitä, vaikka hänellä ei olekaan selittävää teoriaa. Pintatasolla opettajan on helppo tunnistaa virheet ja tarjota oikea vaihtoehto mahdollisesti perustelujen kanssa. Syvempi taso on kokeneillekin opettajille haastavamapi ja vaatii teoreettisia käsityksiä virhekäsityksen tunnistamiseksi ja siihen liittyvän opetussuunnitelman tai strategian kehittämiseksi, joka liittyy tai on ristiriidassa taustalla olevien virhekäsitysten kanssa. Uskotaan, että virhekäsitysten tunnistaminen edellyttää oppilaan kehitysvaiheen ymmärtämistä ja on ratkaisevan tärkeää tehokkaan käsitteellisen opetuksen kannalta. (Ryan ja Williams 2007)

Taulukko 1: Pinta- ja syvemmän tason erottelu (Ryan ja Williams 2007).

| | Oppilaan tieto | Arviointi | Pedagogiikka |
|--|----------------|------------------|------------------------------|
| Pintataso: tehtävän vastaus | Virhe | Koe/testi | Virheen korjaus |
| Syvällisempi taso: selitys/päättely/ perustelu | Virhekäsitys | Oppilaan selitys | Vuorovaikutus ja ristiita |

2.3 Virhekäsitysten merkitys opetuksessa

Virhekäsitykset häiritsevät oppimista, koska oppilaat käyttävät niitä tulkitakseen uusia asioita. Opettajien on tärkeää lähestyä uutta aihetta tutkivan toiminnan kautta, jossa hyödynnetään oppilaiden aiempia tietoja ja taitoja, sekä kyseenalaistetaan mahdolliset virhekäsitykset (Dingman et al. 2019). Tutkimuksen ja keskustelun avulla oppilaat pystyvät kehittämään omaa ajattelua. Tällöin mahdollisia virhekäsityksiä usein syntyy vähemmän. Opettajien on hyödyllistä tietää ja osata tunnistaa erilaisia virhekäsityksiä ja ymmärtää, että ne eivät johdu oppilaiden tietämättömyydestä tai oppimisvaikeuksista. Virhekäsitykset voidaan usein tuoda esiin, mutta pelkästään virheiden esiintuominen ei poista virhekäsityksiä, vaan on olemassa opetustekniikoita, jotka usein auttavat kumoamaan ja vähentämään virheiden vaikutusta. (Ojose 2015) Virhekäsitysten selvittäminen opetuksessa voi olla aikaa vievää, mutta niiden korjaaminen on ratkaisevan tärkeää oppimisprosessin onnistumisen kannalta (Ryan ja Williams 2007).

Virhekäsitysten kumoaminen ja ehkäiseminen on tärkeää, jotta virhekäsitykset eivät säily oppilailla pidempään, esimerkiksi ylemmälle luokka-asteelle siirryttäessä. Tutkimukset ovat osoittaneet, että virhekäsitykset, jotka säilyvät oppilailla pitkään ilman, että niitä havaitaan, vaikuttavat negatiivisesti tulevaan matematiikan oppimiseen. (Ojose 2015)

Opettajien tulee tiedostaa, että oppilailla on luokkaan tullessaan erilaisia virhekäsityksiä, joita opettajien on pyrittävä havaitsemaan sekä tekemään töitä niiden korjaamiseksi. Opettajien tulee ymmärtää, että oppilaat voivat voittaa virhekäsitykset hyvän suunnittelun ja tehokkaiden mahdollisuuksia tarjoavien opetusstrategioiden avulla. (Ojose 2015)

3 Geometrisen käsitteenmuodostuksen teorioita

Edellisessä luvussa tarkasteltiin virhekäsitysten merkitystä ja niiden vaikutuksia matematiikan oppimisessa. Tässä luvussa käsitellään geometrisen käsitteenmuodostuksen teorioita, jotka tarjoavat laajempaa näkökulmaa oppilaiden geometrinen käsitteiden hahmottamiseen. Ymmärtämällä näitä teorioita voidaan paremmin hahmottaa, miten oppimisprosessi etenee ja miten opetus voidaan suunnitella tehokkaasti tukemaan oppilaiden geometrinen taitojen kehittymistä. Luvussa käsitellään van Hielen teoria ja figuraalisten käsitteiden teoria.

3.1 Van Hielen teoria

Van Hielen 1950-luvulla esittelemä teoria geometrisesta käsitteenmuodostuksesta on edelleen laajalti käytetty kuvaamaan geometrinen ajattelutapojen kehittymistä (Silfverberg 2018). Teorian keskeinen periaate on, että oppijan käsitetaso kehittyy viiden hierarkkisen tason kautta, ja siirtymä ylemmälle tasolle edellyttää alemmalla tasolla hankittuja kokemuksia ja taitoja (Fuys, Geddes ja Tischler 1988; Silfverberg 2018). Van Hielen tasot eivät ole sidoksissa oppijan ikään tai biologiseen kypsyymiseen vaan heijastavat oppimisprosessin tuloksia (Fuys, Geddes ja Tischler 1988). Viisi tasoa voidaan yksityiskohtaisesti kuvata seuraavasti:

Taso 1: Visualisoinnin taso

Perustasolla kuvioita tarkastellaan kokonaisuuksina ja liitetään visuaaliseen havaintomaailmaan. Kuvioita tunnistetaan, nimetään, lajitellaan, vertaillaan ja kuvataan pääasiassa niiden visuaalisen muodon, ei niinkään yksittäisten ominaisuuksien perusteella. Oppilas osaa tunnistaa ja nimetä geometrinen peruskuvioiden tavanomaiset esimerkit. Hän pystyy visualisoimaan ja piirtämään peruskuvioiden malliesimerkit. Tällä tasolla käsitteet, kuten suorakulmio, saavat merkityksensä konkreettisten esimerkkien kautta, kuten kuvailemalla suorakulmion muistuttavan esimerkiksi ikkunaa. (Silfverberg 2018)

Taso 2: Ominaisuuksien analysoinnin taso

Toisella tasolla oppilas analysoi kuvioita niiden ominaisuuksien ja ominaisuuksien välisten suhteiden avulla. Oppilas löytää empiirisesti tietyn kuvioluokan ominaisuuksia ja sääntöjä esimerkiksi taittelemalla, mittaamalla, käyttämällä ruudukkoa tai kaaviota. (Fuys, Geddes ja Tischler 1988) Oppilas siis osaa löytää ja käyttää hyväksi kaikkia tiettyyn kuvioluokkaan kuuluvia kuvioita yhdistäviä ominaisuuksia (Silfverberg 2018).

Taso 3: Ominaisuuksien järjestämisen taso

Kolmannella tasolla oppilas todistaa lauseet deduktiivisesti ja osaa muodostaa keskinäisiä suhteita lauseiden välille (Fuys, Geddes ja Tischler 1988). Oppilas osaa muotoilla määritelmiä, tunnistaa riittävät ja välttämättömät ominaisuudet kuvioita määriteltäessä, ja käyttää näitä ominaisuuksia hyödyksi tutkiessaan, kuuluvatko tietyt kuviot toiseen kuvioluokkaan vai eivät (Silfverberg 2018).

Taso 4: Formaalin päättelyn taso

Neljännellä tasolla oppilas hallitsee systemaattisen ja deduktiivisen ajattelutavan, joka on tarpeen geometrian formaalissa päättelyssä. Oppilas pystyy itsenäisesti päättämään seurauksia annetusta tiedosta ja todistamaan geometrisia lauseita. Hän osaa erottaa ongelman annetut tiedot ja osoitettavaksi edellytetyt tiedot toisistaan. Oppilas ymmärtää määritelmän, aksiooman ja lauseen välisen eron, samoin kuin lauseen ja sen käänteislauseen sekä ehtojen välttämättömyyden ja riittävyyden eron. Oppilaan geometrinen tieto on niin hyvin organisoitu, että hän kykenee laatimaan lauseelle itse todistuksen. (Silfverberg 2018)

Taso 5: Aksiomisysteemin ymmärtämisen taso

Korkeimmalla Van Hielen tasolla oppilas pystyy vertailemaan erilaisia geometrioita keskenään tarkastelemalla niiden eroja ja yhtäläisyyksiä aksiomaattisina järjestelminä. Tällä tasolla oppilas kykenee esimerkiksi tutkimaan euklidisen geometrian suorakulmiokäsitteen mahdollisia vastineita muissa geometrioissa, kuten pallogeometriassa. (Silfverberg 2018)

Viiden alkuperäisin tason lisäksi tutkimuksissa on havaittu, että myös tasoa 1, eli visualisoinnin tasoa, alempi taso 0 on olemassa. Nollataso on haluttu ottaa mukaan joihinkin tutkimuksiin, koska on olemassa oppilaita, jotka eivät yllä tasolle 1. Nollatasolla oppilas ei yleensä kykene erottamaan geometrisia muotoja virheettömästi toisistaan, mutta oppilaan päättely perustuu kuitenkin visuaalisiin skeemoihin, jotka ovat kehityksen alkuvaiheessa. (Clements 1992)

Van Hielen teoria on myös kohdannut kritiikkiä. Teoriaa on kritisoitu erityisesti teorian tasojen hierarkkisuudesta eli siitä, että se korostaa teorian rakentumista päällekkäin (Sharma 2019). Tutkimukset osoittavat, että sama oppilas voi olla eri van Hielen tasoilla eri geometrinen käsitteiden yhteydessä (Battista 2007; Bleeker, Stols ja van Putten 2013). Oppilaiden luokittelu eri van Hielen tasoille on myös koettu haastavaksi (Sharma 2019). Tutkijat ovat laajentaneet van Hielen teoriaa esimerkiksi kuvailemalla eri tasoja tasogeometriasta avaruusgeometriaan ja uudelleen tarkastelemalla tasojen luonnetta (Battista 2007).

3.2 Figuraaliset käsitteet

Figuraaliset käsitteet ovat koulugeometriassa tarkasteltuja objekteja. Näihin liittyy kuvioiden kautta syntyvä visuaalinen mielikuva sekä määrittelyjen ja sanallisten kuvailujen kautta syntyvä käsitteellinen tulkinta. (Fischbein 1993) Useissa tutkimuksissa on osoitettu, että yläkoulussa oppilaille on tyypillistä hahmottaa geometrian peruskäsitteet prototyyppisinä sumearajaisina konstruktioina (Okazaki ja Fujita 2007; Silfverberg 1999). Tämä ilmenee liiallisena sallivuutena ja karsivana luokitteluna, esimerkiksi neliötä ei pidetä suorakulmiona (Fischbein 1993).

Geometrisen käsitteen oppimiseen liittyy kolme keskeistä komponenttia: itse käsite, sen esimerkit ja käsitettä määrittelevät ominaisuudet. Geometrian käsitteen oppiminen vaatii kykyä tehdä induktiivisia yleistyksiä tarkastelluista tapauksista ja loogista päättelyä yhteisten ominaisuuksien kombinoimiseksi käsitteen kuvaukseksi. Prototyyppiteorioissa ajatellaan, että käsite syntyy ensin esimerkkitapausten synteesinä ennen kuin käsitteelle ominaiset piirteet nousevat tietoiseen tarkasteluun. Kos-

ka koulugeometriassa käsiteltävillä käsitteillä on yleensä selkeästi havaittava tausta, on luonnollista olettaa, että käsitteen oppiminen alkaa usein prototyyppisten käsitteiden muodostamisesta. Geometrian opetuksessa pyritään selventämään oppilaan intuitiivisia prototyyppisiä käsityksiä ja muuttamaan ne ajan myötä tarkasti määritellyiksi käsitteiksi. Koska useimmissa tilanteissa sekä induktiiviset että deduktiiviset oppimisprosessit ohjaavat käsitteenmuodostusta, oppilaan omaksuma geometrinen käsite sisältää usein sekä selkeästi määriteltyjä piirteitä että prototyyppisten käsitteiden epämääräisiä piirteitä. (Fischbein 1993)

Trzcieniecka-Schneiderin analyysi osoittaa, että sekä induktiivisessa että deduktiivisessa käsitteenoppimisprosessissa oppilaalle saattaa lopulta muodostua prototyyppinen käsite yksittäisten tyypillisten esimerkkien kautta, ja käsitteen määrittelyn kannalta oleelliset piirteet eivät välttämättä erotu oppilaalle. Oppimisprosessi voi tuottaa ymmärryksen käsitteen ydinsisällöstä, mutta ei välttämättä sen vaihtelusta tai sallivuudesta eri esimerkkien suhteen. (Trzcieniecka-Schneider 1993)

Geometrisen käsitteenmuodostuksen yhteydessä ilmenee karsinoiva luokittelu, joka johtuu usein prototyyppisestä käsitteenmuodostuksesta. Esimerkiksi oppilaat voivat välttää hierarkkista luokittelua geometrisissa käsitteissä, kuten kolmioissa, suorakulmioissa ja monikulmioissa, perustellen valintansa niiden visuaalisella tyypillisyydellä. Tämä ilmiö vaikuttaa olevan sidoksissa siihen kontekstiin, jossa luokittelu suoritetaan (Silfverberg 2008; Silfverberg ja Matsuo 2008). Karsinoiva luokittelu voi vaihdella eri kulttuurien oppilaiden välillä ja näyttää olevan vahvempi vapaassa luokittelussa verrattuna pakotettuun luokitteluun. Vapaassa luokittelussa oppilas saa itse ryhmitellä annetut geometriset kuviot. Vastaavasti pakotetussa luokittelussa oppilas luokittelee geometriset kuviot ennalta annettuihin luokkiin. Ymmärtäminen hierarkkisten rakenteiden takana edellyttää oppilaalta tietoista irrottautumista visuaalisesta havainnoinnista ja matemaattisen selityksen ymmärtämistä määrittelyn perusteella, ei pelkästään ulkoisen näköhavainnon perusteella. Hierarkkisen luokittelun oppiminen ja opettaminen on siis haastava tehtävä. (Silfverberg 2018)

Useat tutkimukset osoittavat, että käsitteiden määrittely ja erityisesti määrittelyn idean ymmärtäminen on erittäin haastavaa peruskoulun ja lukion oppilaille. Yksi syy tähän on se, että oppikirjat antavat määrittelyt usein valmiina oppilaille. (Silfverberg 1999, 2008; Silfverberg ja Matsuo 2008) Tämän takia oppikirjoihin tarvitaan tehtäviä, joiden avulla määrittelyä ja käsitteen rajausta voi harjoitella (Silfverberg 2018).

Oppilaan ajatusprosessissa kuvat ja käsitteet vaikuttavat toisiinsa. Toisinaan ne tukevat toisiaan, kun taas toisinaan ne voivat olla ristiriidassa eri tilanteissa. Figuraalisten käsitteiden muodostuminen ei tapahdu yleensä luonnollisesti. Yksi syy siihen, miksi geometria koetaan vaikeaksi koulussa on, että figuraaliset käsitteet eivät kehity itsestään kohti ihannemuotoaan. Geometrian opetuksessa on tärkeää luoda didaktisia tilanteita, joissa vaaditaan kuvien ja käsitteiden käyttöä yhdessä, jotte ne sulautuvat yhtenäiseksi ajatukseksi oppilaan mielessä. (Fischbein 1993)

4 Geometria yläkoulussa

Geometrian opiskelu ja samalla käsitteenmuodostus aloitetaan jo alakoulussa. Suomen peruskoulun opetussuunnitelman mukaan geometrian opiskelu sisältää monipuolisia aiheita ja tavoitteita eri luokka-asteilla. Yläkoulussa rakennetaan uutta geometrista tietoa alakoulussa opittujen perustietojen päälle. (Opetushallitus 2015)

Vuosiluokilla 1-2 tavoitteena on kehittää oppilaiden kolmiulotteisen ympäristön hahmottamista ja tasogeometrian ymmärtämistä. Tehtävät keskittyvät suunta- ja sijaintikäsitteisiin, kappaleiden ja tasokuvioiden tutkimiseen, rakentamiseen, piirtämiseen, ominaisuuksien luokitteluun ja suureiden sekä mittayksiköiden harjoitteluun. (Opetushallitus 2015)

Vuosiluokilla 3-6 geometrian opetuksessa keskitytään oppilaiden taitojen kehittämiseen kolmiulotteisen ympäristön hahmottamisessa ja tasogeometrian tutkimisessa. Oppilaat harjoittelevat kappaleiden ja tasokuvioiden rakentamista, piirtämistä, luokittelua ja tutkimista. Geometrian opetuksessa käsitellään erilaisia geometrisia muotoja, kuten lieriötä, kartioita, suorakulmaisia särmiötä, ympyrälieriötä ja monikulmioita. Lisäksi tutustutaan kulmien, suorien ja pisteiden käsitteisiin sekä symmetriaan. Koordinaatiston käyttö, mittakaava, mittayksiköt ja niiden muunnokset ovat myös opetuksen keskiössä. Oppitunneilla harjoitellaan mittaamaan ja laskemaan erilaisten kuvien piirejä, pinta-aloja ja tilavuuksia. Opetuksessa korostetaan mittayksikköjärjestelmän ymmärtämistä ja yksikönmuunnosten hallintaa. (Opetushallitus 2015)

Yläkoulussa eli perusopetuksen vuosiluokilla 7-9 vahvistetaan matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä. Geometria keskittyy laajentamaan oppilaiden käsitystä pisteestä, janasta, suorasta ja kulmasta sekä tutustuttaa uusiin käsitteisiin, kuten viiva ja puolisuora. Opetuksessa tarkastellaan suoraa, kulmia, ja monikulmioita, vahvistetaan yhdenmuotoisuuden ja yhtenevyyden käsitteitä sekä harjoitellaan geometrista konstruointia. Lisäksi käydään läpi Pythagoraan lause, sen käänteislause ja trigonometriset funktiot, sekä tutustutaan kehä- ja keskuskulmaan sekä Thaleen lauseeseen. Opetuksessa lasketaan monikulmioiden piirejä ja pinta-aloja, harjoitellaan ympyrän pinta-alan, kehän ja kaaren pituuden sekä sektorin pinta-alan laskemista. Kolmiulotteisia kappaleita tutkitaan, ja opitaan laskemaan pallon, lieriön ja kartion pinta-aloja ja tilavuuksia. Opetuksessa myös vahvistetaan ja laajennetaan mittayksiköiden ja yksikönmuunnosten hallintaa. (Opetushallitus 2015)

Perusopetuksen opetussuunnitelmasta, ja geometrian sisällöistä, voi hyvin havaita matematiikan kumulatiivisen luonteen. Alakoulun ensimmäisillä luokilla luodaan pohja geometriselle ajattelulle ja hahmottamiselle. Nämä perustaidot kehittyvät ja laajenevat oppilaiden ajattelutaitojen kehittyessä vuosiluokilla eteenpäin. Opetussuunnitelman tavoitteiden ja sisältöjen perusteella voi päätellä oppilaiden olevan van Hielin tasolla 2 peruskoulun päättyessä.

Yksittäisten maiden opetussuunnitelmat voivat vaihdella merkittävästi, ja geometrian opiskelu saattaa poiketa eri maissa. Vaikka monet keskeiset käsitteet voivat olla samankaltaisia, opetussuunnitelmissa voi olla eroja niiden painotuksissa ja esiintymisessä eri vuosiluokilla. Esimerkiksi kirjallisuuskatsauksen perusteella voidaan havaita, että monet maat sisällyttävät opetussuunnitelmiinsa samankaltaisia

aiheita kuin Suomen perusopetuksen geometrian opetussuunnitelma vuosiluokilla 7-9. Silti jotkin näistä aiheista saatetaan käsitellä eri järjestyksessä tai korostaa eri tavoin.

5 Tutkimuskysymykset ja -menetelmät

Tässä luvussa esitellään kirjallisuuskatsauksen pohjana toimineet tutkimuskysymykset ja tutkimusmenetelmät. Lisäksi esitellään tarkemmin tutkimusmateriaali ja aineistonkäsittely.

5.1 Tutkimuskysymykset

Kirjallisuuskatsauksessa on kaksi tutkimuskysymystä, joihin keskityttiin analyysissa. Tutkimuskysymykset ovat seuraavat :

1. Mitkä ovat yläkoulussa yleisiä virhekäsityksiä geometriassa ja miten ne ilmenevät?
2. Miten näitä virhekäsityksiä voi huomioida opetuksessa?

5.2 Tutkimusmenetelmät

Kirjallisuuskatsauksen tutkimusmateriaali kerättiin alkuvuodesta 2024. Aineistonkäsittely ja analyysi tehtiin keväällä 2024. Ensin suoritettiin tutkimusmateriaalin keruu eri tietokannoista, jonka jälkeen siirryttiin käsittelemään ja analysoimaan aineistoa.

5.2.1 Tutkimusmateriaali

Tutkimusaineisto haettiin useammasta eri tietokannasta. Tavoitteena oli löytää tieteellisiä julkaisuja, jotka käsittelivät virhekäsityksiä geometriassa yläkouluissa. Hakulausekkeena käytettiin aluksi "geometr*" AND "misconception*". Näillä hakusanoilla pyrittiin saamaan mukaan mahdollisimman monta geometriassa esiintyviin virhekäsityksiin kokonaan tai osittain kohdistuvaa julkaisua. Mukaan valittiin julkaisut, jotka kohdistuivat yläkouluun. Hakusanoissa ei ollut aluksi mukana esimerkiksi "middle school", koska yläkoulusta käytetään montaa eri nimitystä, joten koin helpoimmaksi käydä hakutulokset käsin läpi, jotta löydän varmasti kaikki tutkimukset, jotka on toteutettu yläkouluissa tai kohdistuvat 12-16 vuotiaisiin oppilaisiin eli yläkouluikäisiin. Kirjallisuuskatsauksen ulkopuolelle jäivät siis julkaisut, joissa käsiteltiin ainoastaa lukiolaisia tai yliopisto-opiskelijoita. Tämän jälkeen kokeilin rajata hakutuloksia lisäämällä hakuun AND "middle school" OR "junior high school" OR "secondary school". Tämä pienensi hakutulosten määrää huomattavasti, eri tietokannoissa hakutulosten määrä laski alle 30:een. Haku kohdistettiin vuonna 2010 tai myöhemmin julkaistuihin artikkeleihin, koska kirjallisuuskatsauksesta haluttiin saada mahdollisimman ajankohtainen. Vuosilukurajauksen avulla myös saatiin hakutulosten määrä rajattua sopivaksi, jotta niistä oli mahdollista tarkastella käsin, mitkä sopivat kirjallisuuskatsaukseen.

Aluksi valitsin mukaan julkaisut, joiden otsikko ja tiivistelmä vaikuttivat lupaavilta. Kun tutustuin näihin julkaisuihin paremmin karsin vielä muutaman julkaisun pois, koska ne keskittyivät enemmän eri matematiikan osa-alueiden virhekäsityksien suhteisiin tai eivät keskittyneet riittävästi geometriaan liittyviin virhekäsityksiin.

Tässä vaiheessa löysin myös muiden julkaisujen avulla muutaman hyvän julkaisun lisää.

Aineisto kerättiin kahdesta eri tietokannasta Volterista ja Ericistä. Osa julkaisusta myös löydettiin muiden julkaisujen avulla. Tieteellisiä julkaisuja on kirjallisuuskatsauksessa yhteensä 14. Kaikkien julkaisujen pohjana on tehty vähintään yksi tutkimus. Suurin osa tutkimuksista kohdistui oppilaisiin ja sisälsi testien tai kokeiden tarkastelua ja oppilaiden haastattelua. Otin mukaan myös kaksi tutkimusta, jotka oli tehty yläkoulun opettajille. Muut tutkimukset keskittyivät oppilaisiin. Julkaisut myös jakaantuvat maantieteellisesti ympäri maailmaa. Kuusi julkaisuita on Kaakkois-Aasiasta, viisi on Lounais-Aasiasta, kaksi Euroopasta, joista toinen on Suomesta ja toinen Kyprokselta ja yksi Yhdysvalloista. Kaikki julkaisut ovat vertaisarvioituja.

5.2.2 Aineistonkäsittely

Aineistonkeruun jälkeen lähdettiin analysoimaan aineistoa soveltaen aineistolähtöistä sisällönanalyysiä (Sarajärvi ja Tuomi 2017). Ensin aineistoa käsiteltiin ensimmäisen tutkimusongelman näkökulmasta, eli käytiin läpi, mitä virhekäsityksiä geometriassa julkaisuissa oli havaittu. Tein julkaisusta ja niissä esiintyvistä virhekäsityksistä taulukon. Tämän perusteella valitsin kirjallisuuskatsaukseen käsiteltävät geometrian osa-alueet; kulma, kolmio, monikulmiot, muunnosgeometria, kolmiulotteiset kappaleet ja sanalliset tehtävät ja todistaminen. Tämän jälkeen kävin julkaisut yksitellen ja tarkasti läpi, ottamalla huomioon vuorotellen molemmat tutkimuskysymykset.

6 Yleisimmät virhekäsitykset geometriassa

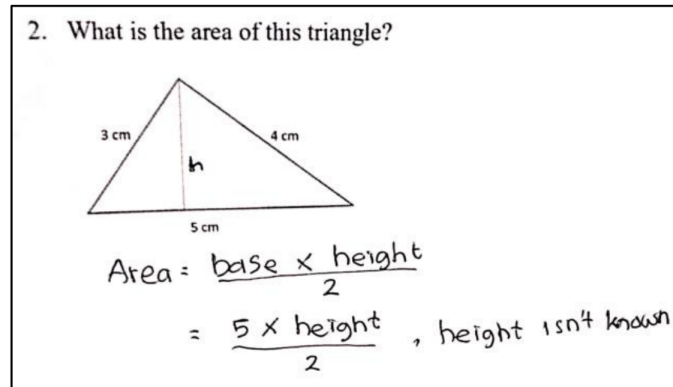
Geometrian oppiminen voi olla haastavaa monille oppilaille, erityisesti niille, joilla on heikompi matemaattinen tausta. Yksi keskeinen haaste on virhekäsitysten esiintyminen, erityisesti teoreettisten virheiden yleisyys. Opiskelijat saattavat kohdata vaikeuksia esimerkiksi pinta-alan ja tilavuuden kaavojen määrittämisessä, mikä voi johtua käsitteiden puutteellisesta ymmärtämisestä ja kaavojen ulkoa opettelusta ilman syvempää taustatietoa. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020)

Geometrian kaavojen käyttöön liittyy usein virhekäsityksiä (Angraini ja Prahmana 2019), mikä vaikuttaa opiskelijoiden kykyyn soveltaa matemaattista tietoa käytännön tilanteisiin. Diagnostisten testien perusteella on havaittu, että matalan abstraktiotason oppilaat kohtaavat erityyppisiä virhekäsityksiä, kuten teoreettisia virheitä, korrelaatiovirheitä ja luokitteluvirheitä (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020). Palojärven et al. (2023) tutkimus myös osoitti, että virhekäsitykset ovat yleisempiä nuorempian oppilaiden keskuudessa, erityisesti geometrian osalta, ja ne liittyvät usein geometrinen käsitteiden, kuten kuvioden, kuvaamiseen.

Matemaattinen ymmärrys on olennainen osa uuden tiedon rakentamista, ja se edellyttää käsitteiden, periaatteiden ja suhteiden ymmärtämistä sekä kykyä yhdistää uutta tietoa aiempaan osaamiseen (Suarsana, Widiasih ja Suparta 2018). Näin ollen on tärkeää tunnistaa ja korjata virhekäsityksiä, jotta opiskelijat voivat kehittää vahvempaa matemaattista pohjaa ja menestyä geometrian oppimisessa. Tässä luvussa tutkitaan geometrian virhekäsityksiä eri osa-alueisiin liittyen, niiden ilmenemistä ja mahdollisia syitä niiden taustalla.

6.1 Kolmio

Kolmioon liittyy monia yläkoulussa usein esiintyviä virhekäsityksiä. Yksi yleinen teoreettinen virhekäsitys näkyy virheenä määritettäessä kolmion korkeutta (Hutagalung, Mulyana ja Pangaribuan 2020; Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020). Syy tähän on mahdollisesti se, että oppilaat eivät ymmärrä korkeuden määritelmää ja eivät hallitse ennakkovaatimuksena olevaa materiaalia. Oppilaat ymmärtävät, että kolmion korkeus on pystysuora viiva kolmion kärjestä kantaan, mutta eivät kuitenkaan ymmärrä kolmion käsitettä syvällisemmin, kuten oppilaan vastauksesta kuvassa 1 olevaan tehtävään voi havaita. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Näin ollen tehtävän oikein ymmärtäminen ja ratkaiseminen on vaikeaa. Jos oppilas ymmärtäisi tehtävän oikein hän huomaisi, että kyseessä on suorakulmainen kolmio, koska Pythagoraan lause pätee kolmiossa. Tällöin oppilas saisi kuvasta suoraan kannan ja korkeuden lukuarvot.



Kuva 1: Esimerkki oppilaan virheellisestä vastauksesta tehtävään, jossa määritetään kolmion pinta-ala (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020).

Toinen yleinen virhekäsitys liittyen kolmion pinta-alaan tuli esiin Özeremin (2012) tutkimuksessa. Oppilaat laskivat kolmion pinta-alan olevan kanta kertaa korkeus, eivätkä jakaneet tätä kahdella. Tämä virhe johtuu usein kaavojen ulkoa opettelusta ilman syvempää ymmärrystä geometrisista käsitteistä. Virhekäsitys myös johtaa siihen, että oppilas ei kykene visualisoimaan kuvaa. (Özerem 2012)

Kolmioiden luokittelussa esiintyy myös virhekäsityksiä, jotka voivat johtua käsitteiden puutteellisesta hallinnasta. Oppilaiden vastauksissa saatetaan rajata kolmioiden luokittelu vain muutamaan perusmuotoon, kuten tasakylkiseen, suorakulmaiseen, tasasivuiseen ja epäsäännölliseen kolmioon, mikä osoittaa oppilailla olevan haasteita käsitteellisen moninaisuuden hahmottamisessa. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020)

Hutagalungin et al. (2020) tutkimuksessa tuli ilmi, että heikosti suoriutuvat opiskelijat taipuvat ymmärtämään kolmioita muotoina, jotka rajoittuvat kolmeen suoraan viivaan ja näiden viivojen sisäpuolelle jäävään alueeseen. He siis määrittelevät kolmion visuaalisesti. Samat oppilaat myös usein käsittävät kolmioiden pinta-alan tuloksena kaavasta, jossa kanta kerrotaan korkeudella ja jaetaan kahdella. Oppilaat tarvitsevat apua suhteiden luomisessa, jotta he kykenevät muodostamaan uuden käsityksen kolmion pinta-alasta. (Hutagalung, Mulyana ja Pangaribuan 2020)

Heikosti matematiikassa suoriutuvat oppilaat erottavat kolmion pinta-alan piiristä ainoastaan kaavan perusteella. Yksi esimerkki tästä on, että osa oppilaista tiesi diagnostisessa testissä, joka oli osa Hutagalungin et al. (2020) tutkimusta, että kolmion pinta-alaa laskettaessa kannan ja korkeuden tulee olla kohtisuorassa, mutta he eivät kuitenkaan osanneet käyttää tätä tietoa laskettaessa kolmion pinta-alaa. Oppilailla oli myös haasteita tunnistaa, mitä kolmion sivuja tulisi käyttää pinta-alaa laskettaessa. Oppilaiden vastauksissa tuli esiin myös virhekäsitys, että kolmion kanta on vaakasuorassa oleva sivu. Oppilailla on vaikeuksia muuttaa jo olemassa olevia skeemojaan uusien tietojen valossa. Lisäksi on merkkejä siitä, että heikosti suoriutuvat oppilaat tarvitsevat opettajien apua saavuttaakseen korkeamman abstraktiotason. (Hutagalung, Mulyana ja Pangaribuan 2020) Heikommin suoriutuvat oppilaat siis kaipaavat erityistä tukea geometrian käsitteiden ymmärtämisessä ja soveltamisessa.

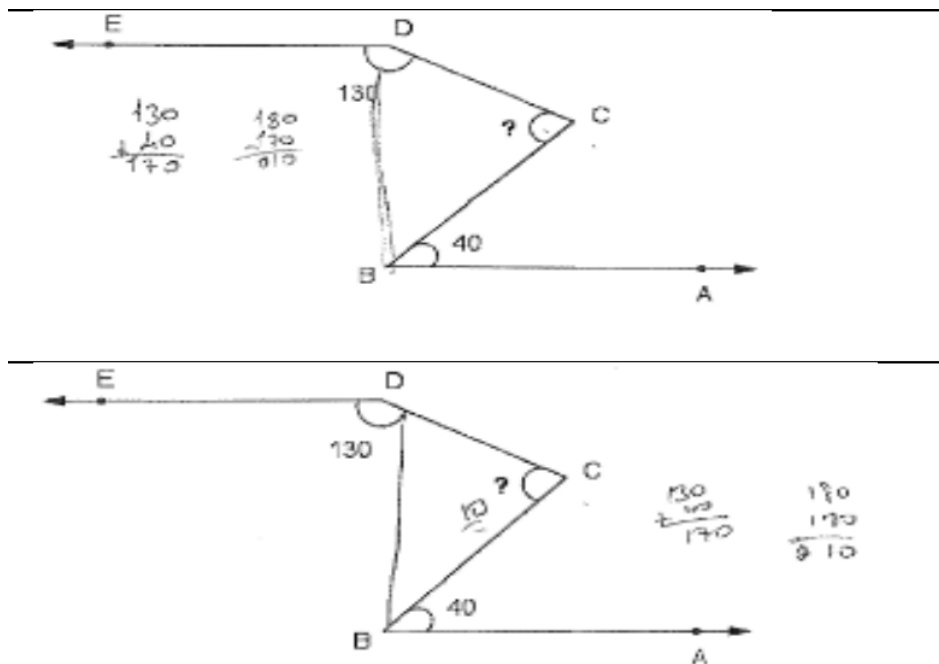
Palojärven et al. (2023) tutkimuksessa ilmeni, että oppilaat saattavat ajatella, et-

tä suorakulmaisessa kolmiossa, jossa hypotenuusan pituus on kaksi ja kolmion kaksi muuta sivua ovat yhtä pitkiä, kolmion kylkien pituus on kaksi. (Palojärvi, Koskenoja ja Ernvall-Hytönen 2023) Tällaiset virhekäsitykset osoittavat tarpeen syvemmälle ymmärrykselle geometrisista käsitteistä ja niiden soveltamisesta käytännön tehtäviin.

6.2 Kulma

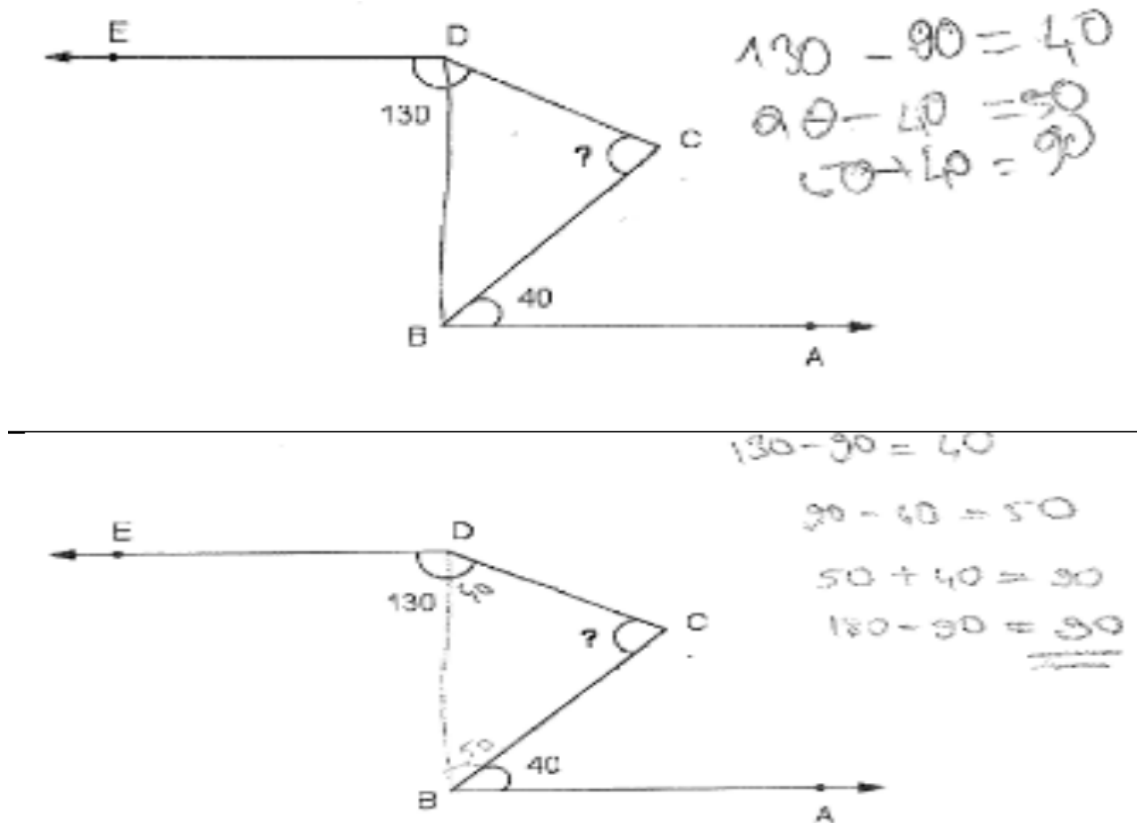
Kulmiin liittyy useita virhekäsityksiä, jotka voivat vaikuttaa oppilaiden kykyyn ymmärtää geometrisia suhteita. Biberin et al. (2013) tutkimuksessa ilmeni, että kulmiin liittyvät virhekäsitykset, johtuivat usein siitä, että oppilailla on virhekäsityksiä liittyen yhdensuuntaisuuden ominaisuuksiin. Samankaltaisia havaintoja tehtiin myös Özeremin (2012) tutkimuksessa. Tehtävissä, joissa oppilaiden olisi pitänyt ymmärtää, että supplementtikulmien summa on 180° ja kolmion sisäkulmien summa on 180° oppilailla havaittiin kaksi yleistä virhekäsitystä, jotka toistuivat myös toisessa samantyyolisessä tehtävässä samoilla oppilailla. Oppilaat eivät tienneet, mitä kolmas viiva, joka leikkaa kaksi yhdensuuntaista janaa tarkoittaa ja kiinnittivät ainoastaan huomioita geometrisen kuvion ulkomuotoon, eivätkä sen ominaisuuksiin. Tämän voi havaita oppilaiden virheellisistä vastauksista tehtävään kuvista 2 ja 3. (Biber, Tuna ja Korkmaz 2013)

Kuvasta 2 voidaan havaita, että oppilaat eivät tiedä, mitä kolmas viiva, joka leikkaa yhdensuuntaiset suorat merkitsee. Oppilaat ovat saaneet kolmion yhdistämällä pisteet B ja D. He ovat olettaneet, että kysymyksessä annettujen numeroarvojen ja oletuksella, että tehtävässä näkyvien kolmen kulman summa on 180° avulla voi ratkaista tehtävän. (Biber, Tuna ja Korkmaz 2013)



Kuva 2: Oppilaiden virheellisiä vastauksia, jotka tukevat tutkimustuloksia (Biber, Tuna ja Korkmaz 2013).

Kuvasta 3 voi havaita, että oppilaat ovat kiinnittäneet huomiota vain geometrisen kuvion visuaaliseen ulkomuotoon, eivätkä ole ottaneet huomioon sen geometrisia ominaisuuksia. Pisteet D ja B on yhdistetty kuvion ulkomuodon perusteella. Oppilaat ovat ratkaisseet kysymyksen oletuksen perusteella, että suora BD on kohisuorassa suoriin DE ja BA nähden. (Biber, Tuna ja Korkmaz 2013)



Kuva 3: Oppilaiden virheellisiä vastauksia, jotka tukevat tutkimustuloksia (Biber, Tuna ja Korkmaz 2013).

Biberin et al. (2013) tutkimuksessa esiintyi myös muita virhekäsityksiä. Useissa tehtävissä ilmeni samankaltaisia virhekäsityksiä, kuin kuvien 2 ja 3 vastauksissa. (Biber, Tuna ja Korkmaz 2013) Vastaavanlaisia virhekäsityksiä havaittiin myös Özeremin (2012) tutkimuksessa. Virhekäsitykset liittyivät siihen, että yhdensuuntaisiin suoriin liittyviä kulmien suhteita ei ymmärretty, eli vieruskulmien ja ristikulmien käsitteitä ei ymmärretty tai osattu hyödyntää. Näiden virhekäsitysten syynä on mahdollisesti se, että oppilaat eivät ymmärrä kulmien tärkeyttä yhdensuuntaisten suorien yhteydessä. (Özerem 2012) Myös tehtävässä, jossa piti hyödyntää nelikulmion ominaisuutta, jonka mukaan sen kulmien summa on 360° sekä yhdensuuntaisiin suoriin liittyviä ominaisuuksia, oppilailla oli haasteita yhdistää tietojaan nelikulmiosta muihin tehtävän ratkaisemiseksi vaadittaviin ominaisuuksiin. Tämänkaltaisia haasteita esiintyi myös muissa tutkimuksen tehtävissä. Lisäksi oppilaiden ratkaisuihin ilmeni virhekäsitys, jonka mukaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret nelikulmiossa. Tämä ominaisuus pätee vain tietynlaisille nelikulmioille. Tutkimuksessa huomattiin myös, että virhekäsitykset toistuivat samoilla oppilailla samankaltaisissa tehtävissä.

Eli löydetty virheet olivat seurausta virhekäsityksistä eivätkä vain yksittäisiä virheitä. (Biber, Tuna ja Korkmaz 2013)

6.3 Monikulmiot

Useita virhekäsityksiä liittyy myös monikulmioiden käsitteisiin ja ominaisuuksiin. Oppilailla on erityisesti vaikeuksia ymmärtää nelikulmioiden välisiä suhteita ja tunnistaa erilaisia monikulmioita.

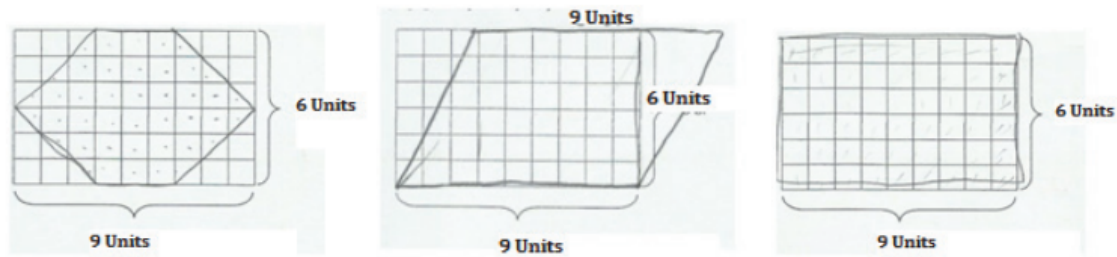
Korrelaatioon liittyviä virhekäsityksiä ilmenee monikulmioon liittyvissä tehtävissä. Tämä näkyy muun muassa virheenä määritettäessä nelikulmioiden välisiä suhteita ja on mahdollisesti seurausta oppilaan matalasta visualisointikyvystä. Yksi esimerkki tästä on, että oppilaat vastaavat yleensä, että neliö ei ole suorakulmio heiltä kysyttäessä, myöskään suorakulmiota ja vinoneliötä ei tunnusteta suunnikkaaksi. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020)

On myös huomattu, että oppilailla on suorakulmioon liittyviä virhekäsityksiä. Yksi näistä on, että suorakulmion pinta-alaa laskettaessa oppilaat luulevat, että suorakulmiolla on myös korkeus. Oppilaat käyttävät pinta-alaa laskiessa kaavaa $A = \text{syvyys} \cdot \text{leveys} \cdot \text{korkeus}$. (Angraini ja Prahmana 2019) Oppilaat siis sekoittavat kaavoja keskenään, eivätkä selvästi erota käsitteitä toisistaan. Palojärven et al. (2023) tutkimuksessa huomattiin, että monella oppilaalla oli virhekäsitys, että neliön pinta-ala on neljä kertaa sen sivu.

Virheitä esiintyy paljon myös kaikkien tasokuvioiden ja niiden ominaisuuksien tunnistamisessa. Esimerkiksi, kun oppilaalle kuvailtiin useampi suunnikkaan ominaisuus ja kuvio piti tämän perusteella nimetä sekä piirtää, oppilas vastasi, että kyseessä on suorakulmio ja piirsi tästä myös kuvan. (Angraini ja Prahmana 2019) Myös nelikulmion ominaisuuksien havaitsemisessa ja tunnistamisessa on havaittu puutteita. Näiden syynä on todennäköisesti oppilaan heikko visualisointikyky tai oppilas ei kykene omaksumaan tai ole omaksunut nelikulmion ominaisuuksia. (Özerem 2012)

Yksi yleinen virhekäsitys tuli myös esiin Ozkanin ja Balin (2017) tutkimuksessa. Tutkimuksessa ilmeni, että oppilailla on usein virhekäsitys liittyen monikulmion diagonaaliin eli lävistäjään. Monet oppilaat piirsivät lävistäjän väärin tai piirsivät monikulmioon useamman lävistäjän. Havaittiin, että oppilaat sekoittivat lävistäjän käsitteen korkeuden tai sivun käsitteisiin. Oppilaille oli myös haastavaa ymmärtää, että monikulmiolla voi olla monia lävistäjiä. (Ozkan ja Bal 2017)

Tehtävä, jossa oppilailla ilmeni eniten virhekäsityksiä Ozkanin ja Balin (2017) tutkimuksessa liittyi säännölliseen monikulmioon. Tehtävässä oppilaita pyydettiin piirtämään pinta-alaltaan suurin mahdollinen säännöllinen nelikulmio yksikköneliöiden sisään annettuun rajattuun alueeseen. Tutkimukseen osallistuneista oppilaisista 69,4% koki virhekäsityksiä liittyen tehtävään. Kuvassa 4 on oppilaiden virheellisiä vastauksia tehtävään. Oppilaat vastasivat tehtävään kuusikulmion, suunnikkaan ja suorakulmion, jotka kaikki olivat epäsäännöllisiä. Vastauksista voi havaita, että oppilaat yrittivät luoda erilaisia kuvioita ja säännöllisen nelikulmion käsite ei ollut oppilailla hallussa. (Ozkan ja Bal 2017)



Kuva 4: Oppilaiden virheellisiä vastauksia tehtävään, jossa piti piirtää suurin mahdollinen säännöllinen nelikuomio, joka mahtuu ruudukkoon (Ozkan ja Bal 2017).

Toinen tehtävä, jossa yli puolella tutkimukseen osallistuneista oppilaista ilmeni virhekesityksiä, liittyi suunnikkaan pinta-alan laskemiseen, kun tehtävässä annettiin suunnikkaan sivujen pituudet, sekä korkeus. Oppilaat esimerkiksi eivät osanneet liittää korkeutta kuvaan oikein ja laskivat suunnikkaan pinta-alan väärin muun muassa kertomalla kannan korkeudella ja jakamalla tuloksen kahdella. (Ozkan ja Bal 2017) Myös Özeremin (2012) tutkimuksessa oppilaat laskivat suunnikkaan pinta-alan samalla tavalla väärin. Tämä on siis selvästi yleinen virhekesitys. Syynä tähän on mahdollisesti, että aihetta ei harjoitella tarpeeksi tai oppilailla on vaillinainen ymmärrys aiheesta. Voi myös olla, että oppilas ei ymmärrä käsitettä tai kaavoja kunnolla. (Özerem 2012)

Myös monikulmioihin liittyen ilmeni virhekesityksiä yhdensuuntaisuuden liittyen, kuten myös Biberin et al. (2013) tutkimuksessa. Oppilaat kykenivät usein tunnistamaan nelikulmiosta yhdensuuntaiset sivut, kun sitä pyydettiin, mutta kun kysyttiin onko neliössä yhdensuuntaisuutta, oppilaat vastasivat ei. Toisin sanoen oppilaat tiesivät määritelmään, mutta eivät osanneet soveltaa sitä. (Ozkan ja Bal 2017)

Akkaşin ja Türnüklün (2015) tutkimuksen tavoitteena oli selvittää yläkoulun matematiikan opettajien pedagogista sisältöä koskevaa tietoa nelikulmioista. Tutkimuksessa oppilaiden virheet liittyen nelikulmioihin jaettiin aluksi kolmeen kategoriin opettajilta saatujen tietojen perusteella. Nämä olivat virheet nelikulmion määrittelyssä, virheet visuaalisiin ominaisuuksiin liittyen, nelikulmioiden luokittelu ja niiden väliset suhteet. Oppilaiden haasteet tiivistettiin vielä tämän jälkeen kahteen ryhmään puolisuunnikkaisiin liittyviin haasteisiin ja muihin nelikulmioihin liittyviin vaikeuksiin. (Akkaş ja Türnüklü 2015)

Nelikulmion määrittelyyn liittyvät virheet jaettiin kahteen osaan. Ensimmäiseen ryhmään kuuluvat virheet ovat seurausta siitä, että oppilaat eivät tunne nelikulmioiden ominaisuuksia, joten he eivät pysty tunnistamaan nelikulmioita asianmukaisesti. Esimerkkejä näistä virheistä ovat muun muassa: oppilas ei tunnista puolisuunnikkaasta, oppilas ei erota kärkeä ja diagonaalia, joten hän päätyy väärään määritelmään, oppilas osaa määrittellä nelikulmion vain kulmien ja sivujen perusteella, eikä tiedä sen muita ominaisuuksia. Oppilaat myös opettelevat ulkoa kaavoja, kuten aiemmissa tutkimuksissakin kävi ilmi. Toiseen ryhmään kuuluvat virheet liittyvät siihen, että oppilaat eivät ymmärrä alueen ja ympärysmittan käsitteitä. Tämä on seurausta kaavojen ulkoa opettelusta. Tämä näkyy esimerkiksi niin, että oppilaat yrittävät käyttää vinonelikulmiolle samaa kaavaa kuin nelikulmiolle, jolloin lasku tai päättely menee väärin. Toinen esimerkki on, että oppilas käyttää puolisuunnikkaalle neliön

kaavaa a^2 , koska osaa tämän ulkoa. (Akkaş ja Türnüklü 2015)

Toinen yleinen virhetyyppi liittyy nelikulmion visuaalisiin ominaisuuksiin. Nämä virheet voidaan opettajien mukaan jakaa vielä kolmeen tyyppiin: virheisiin, joita tehdään piirtäessä kulmia, sivuja ja lävistäjiä nelikulmioon. Havaittiin, että oppilaat piirtävät usein vääristyneitä kulmia, esimerkiksi yhdeksänkymmenenasteen kulmaa ei esitetä yhdeksänäkymmenenä asteena. Toinen esimerkki on, että oppilas piirtää suorakulmaisen nelikulmion vastakkaiset sivut eri mittaisiksi, eli näyttää siltä, että jokainen sivu olisi eri mittainen. (Akkaş ja Türnüklü 2015)

Viimeinen yleinen virhekäsitys liittyy oppilaiden tekemiin virheisiin nelikulmioiden luokittelussa sen perusteella, miten ne liittyvät toisiinsa samankaltaisten ominaisuuksien perusteella (Akkaş ja Türnüklü 2015; Özerem 2012). Tämä on seurausta siitä, että oppilailla on virheellistä tai olematonta tietoa nelikulmioiden ominaisuuksista. Puolisuunnikas on nelikulmio, jonka luokittelussa on yleensä haasteita tai virhekäsityksiä. Toinen yleinen esimerkki on, että oppilas ei luokittele neliötä nelikulmioihin. Tutkimuksessa ilmeni myös, että opettajat tekevät virheitä luokittelussa. (Akkaş ja Türnüklü 2015) Tämä on myös yksi syy siihen, miksi oppilailla on virhekäsityksiä.

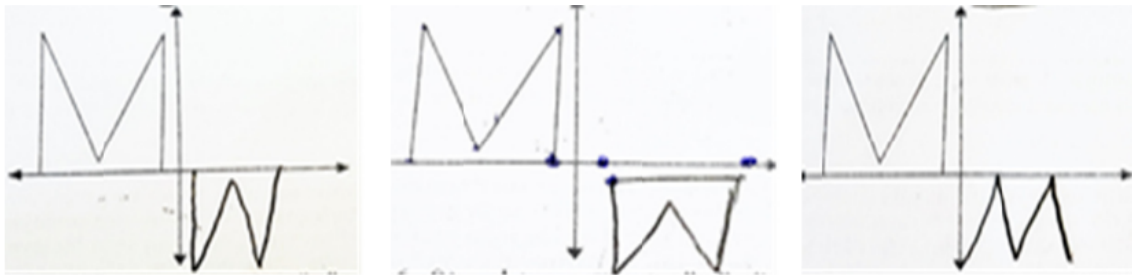
Nelikulmiot, joiden yhteydessä oppilailla esiintyy eniten haasteita, ovat puolisuunnikas, vino suunnikas ja tasasivuinen nelikulmio. Oppilailla on ongelmia puolisuunnikkaan kanssa, koska sille ei ole selkeää sääntöä, sillä on monia ominaisuuksia ja sen piiri ja pinta-ala on vaikea laskea. Lisäksi se esitellään oppilaille ensimmäisen kerran suhteellisen myöhään. Monet virhekäsityksistä syntyvät, koska oppilaat eivät ymmärrä käsitteitä kunnolla. Tutkimuksen perusteella ilmenee, että oppilaat eivät yleisesti koe vaikeuksia neliöiden ja suorakulmioiden kanssa, koska nämä muodot ovat heille tuttuja. (Akkaş ja Türnüklü 2015) Tämän perusteella siis mahdollisimman monista käsitteistä olisi hyvä tehdä oppilaille tuttuja, jotta he tottuvat mahdollisimman moneen erilaiseen kuvioon ja sen ominaisuuksiin.

6.4 Muunnosgeometria

Muunnosgeometrialla tarkoitetaan geometrian osa-aluetta, johon kuuluu siirrot, peilaukset ja rotaatiot (Aktaş ja Ünlü 2017). Yksi merkittävä huomio on, että oppilaat ymmärtävät siirron eli translaation tarkoittavan kappaleen sijainnin muuttamista, säilyttäen samalla sen muodon ja koon. He kuitenkin tekevät virheitä siirron suunnassa. (Aktaş ja Ünlü 2017; Özerem 2012) Toinen yleinen virhe oppilailla liittyy muodon sijainnin ymmärtämiseen muunnoksen sisällä. Tämä ilmenee oppilailla haasteena siirtää kuvioiden pisteitä koordinaatistossa. (Aktaş ja Ünlü 2017) Nämä virheet ovat mahdollisesti seurausta väärin opitusta muunnostekniikasta tai oppilaiden heikosta keskittymisestä (Özerem 2012).

Oppilailla on myös useita virhekäsityksiä peilaukseen liittyen. Aktasin et al. (2017) tutkimuksessa ilmeni, että aluksi oppilaat osasivat pääosin vastata oikein kahden muodon peilikuvana olemisen perusteella, mutta osa oppilaista teki virheitä, koska heillä oli virhekäsitys, että kuvan muodon tulisi olla identtinen eikä vain samankaltainen. Toiseksi oppilaat tekivät virheitä, koska he eivät hyödyntäneet tietoa siitä, että kuva voidaan peilata määrittämällä piste saman etäisyyden päässä pystysuorasta symmetria-akselista. Näitä virheitä voi havaita kuvasta 5. Vasemman-

puoleinen vastaus on osittain oikein, ainoastaan koko on väärä. Keskimmäisestä ja oikeanpuoleisesta vastauksesta voi havaita, että oppilaat tekivät virheitä rotaatiossa tai muodossa, koska he eivät osanneet yhdistää vaaka-akselin yhteneviä pisteitä. Kolmanneksi havaittiin, että oppilaat eivät osanneet käyttää peilausominaisuuden säilyttämistä löytäessään kuvan annetusta muodosta. Neljänneksi oppilaat luulivat peilausta siirtomuunnokseksi, jolloin he eivät muuttaneet suuntaa. Viidenneksi oppilaat tekivät virheitä pystysuoran symmetria-akselin leikkauspisteen määrittämisessä ja kuudenneksi heillä oli vaikeuksia löytää suljettujen muotojen symmetriat. Virhekäsitysten syynä on, että oppilaat eivät osanneet yhdistää sivujen ja symmetria-akselin välisiä yhteyksiä säännöllisissä monikulmioissa. (Aktaş ja Ünlü 2017)



Kuva 5: Oppilaiden virheellisiä vastauksia tehtävään, jossa piti peilata kuvio pisteen kautta (Aktaş ja Ünlü 2017).

Kiertoa eli rotaatiota koskevassa tutkimuksen Aktaş ja Ünlü 2017 tuloksissa ilmeni, että oppilaat kohtasivat vaikeuksia löytää kiertokulman ja myös kierron suunnan. Kun oppilaat suorittivat kiertomuunnosta, he yleensä siirsivät kysymysarkkia pöydällä istuessaan. Vaikka tämä on käytännöllinen tapa konkretisoida muunnosta, se saattoi estää mielikuvituksen, visuaalisen ja tilallisen ajattelun taitojen kehittymistä. Oppilaiden puutteellinen visuaalinen ja tilallinen ajattelu voi olla näiden virheiden syynä. Oppilas, joka hahmottaa lineaariset muodot kokonaisuuksina kiinteiden muotojen käsitteellisen ymmärtämisen yhteydessä, voi kuvitella ne mielessään jälkikäteen. Ja kun hän soveltaa heijastusta, kiertoa ja translaatiota kuvitelluille abstrakteille asioille, hän voi siirtyä geometriseen ulottuvuuteen. Tämä voi parantaa oppilaan tilallista ajattelutaitoa. (Aktaş ja Ünlü 2017)

6.5 Kolmiulotteiset kappaleet

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelma korostaa konkreettisten esimerkkien ja abstraktien käsitteiden yhdistämistä, mikä tukee oppilaiden kokonaisvaltaista oppimista myös kolmiulotteisista kappaleista. Kolmiulotteisten kappaleiden opetuksessa keskitytään oppilaiden kykyyn tunnistaa ja nimetä erilaisia kappaleita, ymmärtää niiden ominaisuuksia sekä soveltaa geometrisia käsitteitä käytännön tilanteisiin. Lisäksi opetuksessa korostetaan oppilaiden kykyä hahmottaa kolmiulotteisia muotoja eri näkökulmista ja visualisoida niitä (Opetushallitus 2015)

Kolmiulotteisten kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämiseen liittyy useita virhekäsityksiä. Oppilailla on haasteita tunnistaa kappaleita ja niiden ominaisuuksia. (Sudirman et al. 2023). Oppilaat eivät ymmärrä, että kaikki kolmiulotteisiin kappaleisiin liittyvät käsitteet ovat keskenään yhteydessä (Kadarisma, Fitriani

ja Amelia 2020). Teoreettiset virhekäsitykset ilmenevät myös kolmiulotteisiin kappaleisiin liittyvien kaavojen ymmärtämisessä. Oppilaat sekoittavat kaavoja, koska he eivät ymmärrä tilavuuden käsitettä eivätkä suhteita muotojen välillä. Sen sijaan he opettelevat kaavat ulkoa. Toinen yleinen virhekäsityksestä johtuva virhe on väärin määritetty pohjaan liittyvän sivun särmä. Tämä virhekäsitys on mahdollisesti seurausta oppilaan heikosta avaruudellisesta hahmottamiskyvystä tai siitä, että oppilaalla on heikko ymmärrys särmän määritelmästä. Heikosta avaruudellisesta hahmottamisesta seuraa usein myös virhe määritettäessä diagonaalia eli lävistäjää esimerkiksi kuutiossa. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Myös kolmiulotteisiin kappaleisiin liittyvä yleinen virhekäsitys, joka ilmenee lähes kaikkien geometrinen kuvien yhteydessä, eli oppilaat eivät tunnista tai osaa luokitella kappaleita oikein. (Özerem 2012)

Özeremin (2012) tutkimuksessa tuli esiin kuution liittyvä virhekäsitys. Virhe tapahtui määritettäessä kuution syvyyttä, jolloin kuution pinta-alaksi saatiin väärä tulos. Tämä on mahdollisesti seurausta siitä, että oppilaat eivät ymmärrä pituuden ja pinta-alan käsitteiden välistä yhteyttä kunnolla. Virhekäsitykset, jotka liittyvät pinta-alan tai tilavuuden määrittämiseen kolmiulotteisissa kappaleissa johtuvat taustatietojen tai päättelytaitojen puutteesta ja virheistä peruslaskutoimituksissa. (Özerem 2012)

Kolmiulotteisiin kappaleisiin liittyvä myös monia korrelaatioon liittyviä virhekäsityksiä. Ensimmäinen ilmenee virheenä määritettäessä suhdetta särmiön ja kuution tai sylinterin käsitteen välillä. Toinen ilmenee virheenä määritettäessä pyramidin ja kartioiden käsitteen välistä suhdetta. Näiden virheiden syynä on todennäköisesti oppilaan heikko visualisointikyky tai matala kyky muodostaa matemaattisia ideoita. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020)

Tekin-Sitravan ja Isiksal-Bostan (2017) tutkimuksessa, joka keskittyi yläkoulun opettajiin ja heidän luokkiensa havainnointiin ilmeni myös useita särmiöön liittyviä virhekäsityksiä. Ensimmäisen virhekäsityksen mukaan särmiön tilavuus muodostuu näkyvien yksikkökuutioiden lukumäärästä. Eli toisin sanoen oppilas laskee vain kuvassa näkyvät yksikkökuutiot. Syynä tähän on, että oppilas ei kykene ymmärtämään särmiön rakennetta tai oppilas ei kykene visualisoimaan särmiön muotoa. Oppilaat myös laskivat virheellisesti saman yksikkökuution useampaan kertaan, koska se sijaitsi särmiön kulmassa, jolloin oppilaat eivät todennäköisesti ymmärtäneet, että sama yksikkökuutio on osa useampaa tahkoa. Opettajien mukaan oppilaille on haasteita visualisoida särmiöitä, koska he eivät kohtaa niitä jokapäiväisessä elämässään. Toisen virhekäsityksen mukaan särmiön tilavuus on sen pintojen kokonaispinta-ala. Oppilaat laskivat särmiön pinta-alan, kun kysyttiin tilavuutta. Syynä tähän on oppilaan käsitteellisen tiedon puute tai kyvyttömyys ymmärtää särmiön rakennetta. Osa oppilaista näkee särmiön kaksiulotteisena, joka johtaa sekaannukseen särmiön pinta-alan ja tilavuuden käsitteissä. (Tekin-Sitrava ja Isiksal-Bostan 2018) Samanlaisia virhekäsityksiä, jotka liittyivät yksikkökuutioiden lukumäärän laskemiseen, huomattiin myös Sudirmanin et al. (2023) tutkimuksessa. Virhekäsitykset olivat pääosin seurausta oppilaiden heikosta visuaalisesta hahmottamiskyvystä. (Sudirman et al. 2023)

Sudirmanin et al. (2023) tutkimuksessa ilmeni myös muita virhekäsityksiä, jotka olivat seurausta heikosta hahmotuskyvystä. Esimerkiksi vain pieni osa oppilaista

kykeni piirtämään kolmiulotteisen kappaleen pyydetyistä perspektiiveistä. Monilla oppilaista oli jo selkeästi haasteita ymmärtää tehtävä, eli he eivät ymmärtäneet, mitä tarkoitettiin, kun kysyttiin, miltä kuvio näyttäisi sivusta tai ylhäältä katsottuna. Tutkimuksessa ilmeni myös useampi pinta-alaan ja tilavuuteen liittyvä virhekäsitys. Osa oppilaista sekoitti kaavat keskenään tai käytti väärin kaavoja. Yleinen virhekäsitys myös oli, että kolmiulotteisten kappaleiden pinta-ala muodostuu kappaleiden tahkoista, jotka sijaitsevat sivuilla, sekä edessä ja takana. Usein oppilaiden virheet myös olivat seurausta siitä, että he eivät kyenneet tunnistamaan tahkojen pituuksia kolmiulotteisesta kappaleesta. (Sudirman et al. 2023) Virhekäsitykset ovat toisaalta ymmärrettäviä, koska kolmiulotteisten kappaleiden visualisointi ja käsitteellistäminen on monimutkainen prosessi.

Fitrianin et al. (2018) tutkimuksessa oppilaiden piti ratkaista tehtävä, jossa vaadittiin yhtälönmuodostus- ja ratkaisutaitoja sekä geometrian taitoja. Tehtävässä piti ratkaista katkaistun kartion tilavuus, kun kokonaisen kartion korkeus ei ollut tiedossa, mutta pohjan ja kannen halkaisijat ja katkaistun kartion korkeus olivat tiedossa. Tutkimuksessa ilmeni, että oppilaiden matemaattinen abstraktiokyky oli tehtävän vastausten perusteella heikolla tasolla. Moni oppilaista ei edes tunnistanut kuviota oikein, vaan ajatteli sen olevan jonkinlainen putki eli ympyrälieriö. Heikon ja keskitason matemaattisen tason oppilaat tekivät virheitä kuvion tunnistamisessa, mikä puolestaan johti virheellisten kaavojen käyttöön tai järjettömiin vastauksiin. He eivät myöskään kyenneet ennakoimaan kohtaamiaan vaikeuksia ja virheitä ja tämän seurauksena muuttamaan ratkaisuprosessien elementtejä, jolloin he pääsisivät seuraavalla abstraktiotasolle esitys- ja rakenteellinen abstraktio tasolta. Ainoastaan korkeammalla matemaattisella tasolla olevat oppilaat saivat ratkaistua tehtävän ja osasivat selittää vastauksensa haastattelussa tai vastauksen yhteydessä. Eli he olivat ainoita, jotka pääsivät rakenteellisen tiedon tasolle. (Fitriani, Suryadi ja Darhim 2018)

6.6 Sanalliset tehtävät ja todistaminen

Yläkoulussa oppilailla on haasteita muotoilla sanalliset tehtävät matemaattiseen muotoon. Oppilaat eivät kykene muodostamaan ongelmaa matemaattisessa muodossa tai ymmärtämään matemaattista logiikka, mikä johtaa virheellisiin vastauksiin tai kaavojen väärinkäyttöön. Tämä näkyy usein oppilaiden vastauksissa. (Angraini ja Prahmana 2019) Todistamisen yhteydessä ilmenee myös tehtävästä riippuen moniin eri geometrian osa-alueisiin liittyviä virhekäsityksiä.

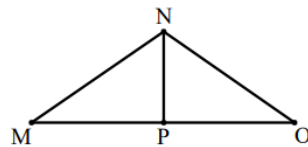
Suomen perusopetuksen opetussuunnitelma korostaa todistamisen merkitystä matematiikan opetuksessa. Opetussuunnitelman perusteet 2014 määrittelevät, että matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää oppilaiden matemaattista osaamista sekä ymmärrystä matemaattisten käsitteiden perusteista ja niiden soveltamisesta erilaisissa tilanteissa. Todistamisen rooli yläkoulun opetussuunnitelmassa näkyy erityisesti geometrian opetuksessa, missä oppilaita kannustetaan perustelemaan geometrisia väittämiä ja ratkaisemaan geometrisia ongelmia järjestelmällisesti ja loogisesti. (Opetushallitus 2015)

Opetussuunnitelmassa todistaminen nähdään osana matemaattisen ajattelun kehittymistä ja oppilaiden valmistautumista kohti abstraktimpia matemaattisia käsit-

teitä ja sovelluksia. Todistaminen tarjoaa oppilaille mahdollisuuden syventää ymmärrystään matematiikan perusteista ja kehittää analyyttisiä ja loogisia ajattelutaitojaan. Se myös tukee oppilaiden matemaattista itsevarmuutta ja luottamusta omiin päättely- ja argumentointitaitoihinsa.

Yläkoulussa geometriassa todistamiseen liittyy viisi yleistä virhekäsitystä. Ensimmäisen virhekäsityksen mukaan kaavioista voi tehdä johtopäätöksiä. Vaikka oppilaille painotetaan, että johtopäätöksiä ei voi tehdä pelkän kuvan perusteella, he tekevät silti johtopäätöksiä sen perusteella, mikä näyttää todelta, eikä annettujen tietojen ja olennaisten määritelmien perusteella. Esimerkiksi, kun osana Cirillon ja Hummerin (2019) tutkimusta oppilaita pyydettiin ratkaisemaan tehtävä 1, joka näkyy kuvassa 6, useimmat oppilaat tekivät johtopäätöksiä koko kuviosta. Kuvan 6 tehtävässä oppilailta kysyttiin, mitä annetun tiedon avulla voi päätellä. Oppilaille oli annettu komio ja kerrottu, että sen jana puolittaa yhden kolmion kulmista. Vain 28% oppilaista teki oikean johtopäätöksen, eli kulmanpuolittajan molemmin puolin sijaitsevat kulmat ovat yhtä suuria. Yli puolet oppilaista uskoi, että kolmion sivut \overline{NP} ja \overline{MO} ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden, \overline{MP} ja \overline{OP} ovat yhtä pitkiä, kulmat M ja O ovat yhtä suuria ja kolmio \overline{MNO} on tasakylkinen. (Cirillo ja Hummer 2019)

1. Given: \overline{NP} bisects $\angle MNO$



What can you conclude
from this Given information?

Kuva 6: Esimerkkitehtävä, jonka avulla voi testata hallitsevatko oppilaat oikean johtopäätöksen tekemisen kuvan perusteella (Cirillo ja Hummer 2019).

Toisen virhekäsityksen mukaan kaavioista ei voi tehdä mitään oletuksia. Oppilaat saattavat päätellä tämän kuullessaan opettajien sanovan esimerkiksi: "Emme voi sanoa jonkin olevan totta vain siksi, että se näyttää siltä." Vaikuttaa järkevältä päätelmältä. Itse asiassa on olemassa asioita, joiden tulisi perustua kaavioihin ja joiden voi olla hyödyllistä perustua niihin. Osa oppikirjoista selittää hyvin nämä asiat nostamalla ne esiin. Cirillon ja Hummerin (2019) tutkimuksessa kuitenkin ilmeni, että opettajat eivät käsitelleet näitä asioita oppilaiden kanssa. (Cirillo ja Hummer 2019)

Kolmannen virhekäsityksen mukaan määritelmä voi sisältää kaikki ominaisuudet, jotka tiedetään geometrisesta kappaleesta. Oppilailta on mielenkiintoisia käsityksiä matemaattisista määritelmistä. Koska he tuovat geometriaan mukaan monia käsitteitä tutkimistaan geometrisista kohteista, heillä on usein vain osittaisia käsityksiä näiden kohteiden määritelmistä. Lisäksi he tuntevat monia kohteiden ominaisuuksia,

mukaan lukien ne, jotka eivät sisälly niiden määritelmiin. Siksi, kun heiltä pyydetään määritelmiä termeistä, kuten tasasivuiset kolmiot tai suunnikkaat, oppilailla on tapana mainita kaikki, mitä he tietävät näistä käsitteistä. Esimerkiksi kun heiltä kysytään suunnikkaan määritelmää, oppilaat saattavat kuvailla muotoja, joilla on vastakkaiset yhdensuuntaiset ja yhtenevät sivut sekä vastakkaiset kulmat, jotka ovat yhtenevät, sen sijaan että he mainitsisivat vain tarpeellisen ja riittävän tiedon. (Cirillo ja Hummer 2019)

Neljäs virhekästys koskee kulmanpuolittajia tai janan keskinormaalia. Virhekäsityksen mukaan kulmanpuolittaja tai janan keskinormaali jakaa kolmion puoliksi tai toimii symmetria-akselina. Tarkkailemalla ja analysoimalla oppilaiden ajattelua selvisi, kuinka haastavaa oppilaille on ymmärtää janan keskinormaalien, janan puolittajan ja kulmanpuolittajien merkitys geometrian todistuksissa. (Cirillo ja Hummer 2019)

Viidennessä virhekäsityksessä oppilaat yrittävät todistaa oletuksen lauseeksi oletamalla väitteen johtopäätöksen. Kun oppilaita pyydetään muotoilemaan oletuksia, he eivät aina tee niistä ehdollisia lausuntoja. Vaikka heille annetaan valmiita oletuksia, oppilailla voi olla vaikeuksia muuttaa ne ehdollisiksi lausunnoiksi. Esimerkiksi, kun 389 oppilasta pyydettiin muotoilemaan uudelleen oletus "Neliönmuotoisen suorakulmion lävistäjät jakavat toisensa puoliksi," jos–niin -lauseeksi, vain 14 % opiskelijoista sai täydet pisteet tähän kohtaan. Yleinen virhe oli hypoteesin ja johtopäätöksen sekoittaminen. Cirillon ja Hummerin (2019) tutkimustulokset viittaavat siihen, että oppilailla on vaikeuksia muuntaa oletuksiaan ehdollisiksi lausunnoiksi ja valita, mitä he olettavat todeksi ja mitä he yrittävät todistaa, kun oletukset esitetään yksinkertaisina lauseina ja sovelletaan konkreettisiin tilanteisiin. (Cirillo ja Hummer 2019)

7 Virhekäsitysten huomioiminen opetuksessa

Virhekäsitysten huomioiminen opetuksessa on merkittävä osa opettajan työtä matematiikan opetuksessa. Erityisesti kolmiulotteisten kappaleiden käsittely voi olla haastavaa oppilaille, ja virhekäsitykset voivat vaikuttaa negatiivisesti oppimistuloksiin. Tässä luvussa tarkastellaan erilaisia opetusstrategioita virhekäsitysten havaitsemiseksi, korjaavien toimenpiteiden merkitystä virhekäsitysten vähentämisessä sekä oppimisympäristön roolia virhekäsitysten ehkäisyssä ja korjaamisessa. Lisäksi esitellään käytännön vinkkejä opettajille virhekäsitysten huomioimiseksi ja käsittelyksi matematiikan opetuksessa.

Tutkimusten mukaan oppilaiden matemaattinen abstraktiokyky ja virhekäsitykset ovat läheisessä yhteydessä (Fitriani, Suryadi ja Darhim 2018; Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020). Mitä paremmin oppilas menestyy matematiikassa, sitä pienempi riski virhekäsitysten esiintymiselle on (Ozkan ja Bal 2017). Tämä korostaa tarvetta keskittyä erityisesti oppilaiden abstraktiotason kehittämiseen matematiikan opetuksessa.

Opettajilla on keskeinen rooli virhekäsitysten ehkäisyssä ja korjaamisessa. On tärkeää varmistaa, että oppilailla on vahva perustaso ennen uuden aiheen opettamista ja he hallitsevat pohjatiedot ja taidot, joita aihe vaatii. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Oppilaita on myös tärkeä rohkaista kriittiseen ajatteluun ja havaintojen analysointiin. On myös tärkeää, että oppilaat pystyvät kuvaamaan ja analysoimaan tuloksia havainnoistaan piirtämällä. Piirtäessä oppilaat tunnistavat rakenteita ja niiden osia sekä analysoivat havaintojen ominaisuuksia. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Lisäksi oppimisympäristön merkitys on merkittävä, ja avoimen ilmapiirin luominen virheiden hyväksymiseen ja niistä oppimiseen on ensiarvoisen tärkeää.

7.1 Kolmio

Kolmioon liittyvien virhekäsitysten välttämiseksi erilaisia kolmioita olisi tärkeä havainnollistaa myös fyysisten esineiden avulla. Eli opetuksessa tulisi olla mukana visuaalisten objektien käyttöä (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020; Özerem 2012). On myös tärkeää antaa oppilaille mahdollisuus esittää omia havaintoja. Tällöin on todennäköistä, että käsitteiden välistä koordinaatiota tapahtuu ja käsitteiden välille muodostuu riittävä yhteys. Opiskelijoiden on tärkeää kokea abstraktioprosessi käsitteen löytämisessä, jotta luokitteluvirhekäsityksiä ei synny. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Tällöin oppilaan on myös mahdollista havaita omia luokitteluvirheitään. Lisäksi on tärkeää, että ennen kuin siirrytään opiskelemaan kolmioita on varmistettu, että oppilailla on hallussa suoran ja kulman käsitteet (Hutagalung, Mulyana ja Pangaribuan 2020). Tähän voi hyödyntää esimerkiksi erilaisia lähtötasotestejä.

Virhekäsitys kolmion korkeuden sekoittamisesta pinta-alaan syntyy yleensä oppilaille, koska heitä opetetaan rutiininomaisilla esimerkeillä. Oppilaille ei anneta selkeää määritelmää, eivätkä he saa mahdollisuutta rakentaa sitä. Sen sijaan heille annetaan vain selitys, joka sisältää kolmion korkeuden tai kannan perusteellisten esimerkkien kautta. Käsitteiden esittely vältetään suurelta osin abstraktioprosessista,

eikä oppilaita ohjata muistamaan aiempia kokemuksiaan Pythagoraan lauseesta ja sen ominaisuuksista, jotka voivat vahvistaa kolmion pohjan ja korkeuden käsitettä. Opetusprosessi ei myöskään kannusta suoraan fyysiseen havainnointiin, eikä opiskelijoita ohjata esittämään havaintojaan geometrisessa muodossa. Lopputuloksena opiskelijat eivät pysty yhdistämään Pythagoraan lausetta kolmion korkeuden tai kannan käsitteeseen, mikä johtaa virhekäsitykseen pinta-alan ratkaisemisessa. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Opettajan olisi siis tärkeää liittää opetukseensa aiemmin opittu Pythagoraan lause, antaa selkeitä määritelmiä kolmion eri ominaisuuksille sekä kannustaa oppilaita fyysiseen havainnointiin virhekäsitysten minimoimiseksi.

Kolmion pinta-alaan liittyviä virhekäsityksiä voi mahdollisesti kumota tai ehkäistä käyttämällä opetuksessa säännöllisesti kuvia osana interaktiivista opetusta. Virhekäsityksiä myös pystyy välttämään lisäämällä aiheeseen käytettyä aikaa ja harjoitusten määrää. (Özerem 2012) Tämä ei kuitenkaan usein ole mahdollista, koska jokaiseen aiheeseen on vain rajallisesti käytössä aikaa koulussa. Tämän takia kannattaa keskittyä enemmän muiden keinojen hyödyntämiseen.

Heikolla matemaattisella tasolla olevilla oppilailla on myös haasteita ymmärtää kolmioon liittyviä käsitteitä ja niiden välisiä suhteita. Tähän ja abstraktioprosessiin kaivataan opettajan tukea ja apua. (Hutagalung, Mulyana ja Pangaribuan 2020) Opetuksessa on siis tärkeää esittää kaikki peruskäsitteet selkeästi. Lisäksi tulee painottaa tiettyjä kolmioiden perusominaisuuksia, eli esimerkiksi, että kannan ja korkeuden tulee olla kohtisuorassa toisiaan kolmion pinta-alaa laskettaessa. Tämä oli Hutagalungin et al. (2020) tutkimuksessa lähes kaikille heikolla matemaattisella tasolla oleville oppilaalle epäselvää.

Heikosti menestyneet oppilaat kaipaavat yksilöllistä ohjausta opettajalta, jotta oppilaat pystyvät tunnistamaan, organisoimaan ja rakentamaan saamansa tiedon uudeksi tiedoksi ja yhdistämään sen aiemmin oppimaansa. Opetuksessa tulisi selkeästi erottaa kolmion ja kolmion pinta-alan käsite toisistaan. Opetuksessa on myös tärkeää ottaa mukaan mahdollisimman erilaisia kolmioita ja tunnistaa niiden korkeus ja kanta. On myös tärkeää, että oppilaat ymmärtävät, että korkeutta ja kantaa tunnistessa ensimmäinen huomioon otettava asia on niiden kohtisuoruus. Opetuksessa tulee siis harjoitella erilaisten kolmioiden korkeuden ja kannan määrittämistä erityisesti heikommalla matemaattisella tasolla olevien oppilaiden kanssa. Hutangin et al. (2020) tutkimus viittaa siihen, että heikommin matematiikassa menestyvät oppilaat hyötyvät opettajien avusta, kun he pyrkivät saavuttamaan korkeampaa abstraktiotasoa. Tämä tapahtuu luomalla yhteyksiä eri prosessien välille uuden ymmärryksen muodostamiseksi ja poistamalla epäolennaisia tekijöitä. (Hutagalung, Mulyana ja Pangaribuan 2020)

7.2 Kulma

Biberin et al. (2013) tutkimuksessa ilmeni, että oppilaat usein opettelevat ulkoa kulmiin liittyvää geometriaa, kun he eivät ymmärrä täysin geometrinen tilanteiden logiikkaa. Oppilaat kuitenkin unohtavat usein ulkoa opitun tiedon nopeasti. Tämä aiheuttaa ongelmia geometrian opetuksessa, jossa aiheet liittyvät tiukasti toisiinsa. Näin ollen opettajilla on tärkeä rooli oppilaiden virhekäsitysten poistamisessa. Oppilaiden virheet ja virhekäsitykset niiden takana tulisi tunnistaa ja eliminoida

ennen kuin ne johtavat uusiin virhekäsityksiin tulevaisuudessa opiskeltavissa aiheissa. Tämän takia opetuksessa tulisi korostaa loogisia perusteita kuvioille. Lisäksi opetuksessa olisi suositeltavaa esittää kysymyksiä, missä esiintyy erilaisia kuvioita, jotka liittyvät samaan aihepiiriin, jotta oppilaat voivat hahmottaa yhteyksiä, joita muodostuu eri geometrian osa-alueiden välille. (Biber, Tuna ja Korkmaz 2013)

Özeremin (2012) tutkimuksessa ilmeni yhdensuuntaisiin suoriin ja niihin liittyviin kulmiin liittyviä virhekäsityksiä. Ratkaisuna näihin ehdotettiin, että kulmien havainnoinnin tärkeyttä korostettaisiin enemmän oppitunneilla. Lisäksi opetuksessa voisi käyttää värikkäitä kuvia, jolloin kuvista pystyy korostamaan muun muassa ristikulmat ja vieruskulmat. (Özerem 2012) Värien käyttö auttaa usein muistamisessa ja on hyödyllistä erityisesti visuaalisesti oppiville.

7.3 Monikulmiot

Monikulmioiden opetuksessa tulisi kiinnittää erityisesti huomiota siihen, että opetusmateriaali ja oppimistehtävät suunnitellaan niin, että ne ovat keskinäisessä yhteydessä. Tämä tarkoittaa sitä, että opettajan tulisi esittää neliöön ja geometriaan liittyvät käsitteet ja tehtävät niin, että ne tukevat toisiaan ja auttavat oppilaita hahmottamaan käsitteitä kokonaisvaltaisesti. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Opetusmateriaalin ja tehtävien tulisi olla johdonmukaisia ja rakentua oppimistavoitteen ympärille.

Lisäksi opettajan tulisi ohjata oppilaita ymmärtämään käsitteiden välisten suhteiden merkitys ja opastaa heitä koordinoimaan eri käsitteitä toisiinsa. Abstraktioprosessin merkitystä tulisi korostaa opetuksessa (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020). Oppilaille tulisi myös tarjota mahdollisuuksia harjoitella käsitteiden soveltamista erilaisissa tilanteissa ja tehtävissä.

Monikulmioihin liittyvässä opetuksessa tulisi välttää pysyviä kaavoja ja prototyyppikuvioita. Opetuksessa on hyvä korostaa konkreettisia tosielämän esimerkkejä ja visuaalista havainnollistamista. (Ozkan ja Bal 2017) Oppilaita voi esimerkiksi pyytää etsimään erilaisia kuvioita omasta elämästään. Tämä voi mahdollisesti auttaa käsitteiden ja kaavojen ymmärtämisessä ja muistamisessa. (Özerem 2012) Myös luokitteluharjoitusten käyttöä suositellaan käytettäväksi osana opetusta. Samaan kuvioon tulisi myös opettaa eri näkökulmia ja erilaisia lähestymistapoja, jolloin oppiminen on pysyvämpää. (Ozkan ja Bal 2017)

Nelikulmioiden luokittelussa esiintyviä virhekäsityksiä voi ottaa huomioon opetuksessa antamalla enemmän painoarvoa nelikulmioiden yhtäläisyyksien ja erojen tunnistamiseen opetuksessa. Oppilaita tulisi osallistaa enemmän yhtäläisyyksien ja erojen havaitsemiseen eri tasolla opetuksessa. (Özerem 2012)

Tekin-Sitravan ja Isiksal-Bostan (2017) tutkimuksessa havaittiin, että oppilailta on usein haasteita visualisoida ja ymmärtää särmiön rakennetta, joka johtaa virhekäsityksiin (Tekin-Sitrava ja Isiksal-Bostan 2018). Näitä virhekäsityksiä voi ehkäistä ottamalla opetukseen mukaan palikoita tai muita vastaavia apuvälineitä, joiden avulla pystyy rakentamaan särmiöitä. Näin oppilaiden ymmärrys tilavuuskäsitteestä paranisi. Tällaisen oppimisympäristön avulla opettaja voi vähentää oppilaiden mahdollisia virhekäsityksiä ja tehostaa oppimista (Tekin-Sitrava ja Isiksal-Bostan 2018).

Akkaşın ja Türnüklün (2015) tutkimuksessa selvisi, että oppilaat tekevät virheitä nelikulmioihin liittyen, koska heillä ei ole tarkkaa tietoa niistä ja tietyistä ominaisuuksista. Kun oppilaat tekevät määritelmiä omien havaintojensa pohjalta, he tekevät virheitä nelikulmioiden määrittelyssä. Tutkimuksessa ilmeni myös, että alakoulun lopussa opettajat piirtävät usein vain tyypillisiä nelikulmioita. (Akkaş ja Türnüklü 2015) Tällöin oppilaat eivät tutustu jo aiemmassa vaiheessa erilaisiin nelikulmioihin, jolloin niiden luokittelu ja määrittely on haastavampaa yläkoulussa. Tutkimuksessa todettiin, että oppilaat kykenevät yhdistämään uutta tietoaan aiempaan tietoon, joten opetuksessa on hyvä painottaa oppilaiden aiemmin näkemiä nelikulmioita. (Akkaş ja Türnüklü 2015) On myös erittäin tärkeää, että opetuksessa käytetään oikeita termejä, jotta tämä ei aiheuta oppilaille lisää virhekäsityksiä. Opetuksessa pitäisi myös käyttää laajasti erilaisia nelikulmioita, eikä käyttää aina samoja nelikulmioita esimerkeissä ja muussa opetuksessa, jotta mahdollisimman monenlaiset nelikulmiot tulevat oppilaille tutuksi. Akkaşin ja Türnüklün (2015) tutkimuksessa ilmeni, että jos kuviot ovat oppilaille tuttuja, kuten neliö ja suorakulmio esimerkiksi ovat, oppilailla ei ole niiden kanssa haasteita ja niihin liittyy vähän virhekäsityksiä (Akkaş ja Türnüklü 2015).

7.4 Muunnosgeometria

Aktaşin ja Ünlün (2017) tutkimuksessa havaittiin, että oppilailla oli haasteita ja virhekäsityksiä liittyen peilaukseen, rotaatioon ja translaatioon. Opettajan olisi tärkeää luoda oppimisympäristö, jossa hän kykenee välittämään selkeästi ja ymmärrettävästi käsitteellistä tietoa ja parantaa omaa kykyään harjoittaa näitä käsitteitä oppilailla. Esimerkkinä mainitaan, että monikulmion translaatiota voi havainnollistaa oppilaille käyttämällä apuna muovikalvoa paperin päällä. Lisäksi opetukseen suositellaan ottamaan mukaan aktiviteetteja, kuten kuvan heijastamista veteen ja symmetriapeilin käyttöä. Oppilaiden käsitteiden ymmärryksen takia aktiviteettien järjestäminen, jossa oppilaat esimerkiksi tunnistavat muunnoksia taiteesta, on tärkeää. (Aktaş ja Ünlü 2017)

Rotaatioon liittyviä virhekäsityksiä voi mahdollisesti välttää tai ehkäistä kolmen keinon avulla. Ensimmäinen on, että kannattaa lähteä liikkeelle siitä, että oppilaat osaavat tunnistaa paikat ja sijainnit. Lisäksi tässäkin tapauksessa on hyvä hyödyntää värikkäitä kuvia aihetta opettaessa. Kolmas tärkeä seikka on laittaa oppilaat itse töihin, eli laittaa heidät piirtämään omiin vihkoihinsa kuvioita ja tulkitsemaan itse rotaatiota. (Özerem 2012) Näiden lisäksi rotaatioiden opetuksessa suositellaan hyödynnettävien erilaisia geometriaohjelmia, kuten GeoGebraa, koska ne usein herättävät oppilaiden kiinnostuksen sekä auttavat käsitteiden oppimisessa. (Aktaş ja Ünlü 2017)

7.5 Kolmiulotteiset kappaleet

Kadarisman et al. (2020) tutkimuksessa ilmeni, että opiskelijoilta vaaditaan useiden kaavojen ulkoa muistamista, vaikka tärkeämpää olisi, että oppilaat ymmärtäisivät kaavat. Oppilaat opettelevat kaavoja ulkoa useiden tekijöiden vaikutuksesta, joista yksi on se, että opettajat opettavat käsitteitä suoraan ja oppimistavoitteena on, että

opiskelijoiden on pystyttävä työskentelemään annettujen tehtävien parissa. Myös käytössä olevissa oppikirjoissa on samankaltainen tavoite, sillä ne sisältävät kaavoja, joiden jälkeen tulee harjoituksia, joissa kaavoja pitää käyttää. Sekä opettajat että oppikirjat, jotka on suunniteltu, ovat suuntautuneet lopputuloksiin tai kokeeseen ja kiinnittävät liian vähän huomiota käsitteiden muodostumiseen. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020)

Opetettu materiaali on yleensä hyvin irrallaan toisistaan. Tämä kasvattaa korrelaatioon liittyviä virhekäsityksiä oppilaiden keskuudessa. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Tämän takia opetuksessa olisi hyvä huomioida, miten eri kappaleet liittyvät toisiinsa. Oppilaat eivät usein esimerkiksi tunnista, mitä yhteistä pyramidilla ja kartiolla on (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020). Opettajan tehtäväksi jää siis luoda yhteyksiä eri kappaleiden välille. Tätä on mahdollista tehdä esimerkiksi erilaisten esimerkkien avulla. Opettajien tulee siis kiinnittää huomiota oppitunneilla hyödyntämänsä materiaalin ominaisuuksiin (Sudirman et al. 2023).

Parhaiten voi välttää mahdolliset virhekäsitykset kolmiulotteisten kappaleiden tilavuuteen liittyen, jos käyttää abstraktioprosessia, joka lähtee liikkeelle kappaleen pohjan tunnistamisesta. Pohjimmiltaan geometrinen rakenne rakentuu kappaleen pohjan päälle, kun pohja on tunnistettu siihen liittyvä korkeus on yksinkertaisempi määrittää. Oppilaita kannattaa usein myös rohkaista piirtämään luonnoksia tilanteesta, jos hahmottaminen tuntuu vaikealta. Geometriassa tilavuuden ymmärtäminen vaatii tietoisuutta muodon ja tilavuuden välisestä suhteesta, joita oppilaiden on tärkeä harjoitella erilaisten kuvioden avulla. (Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020) Opettajan tulee myös kehittää erilaisia strategioita opettaa oppilaita hahmottamaan geometrisia kuvioita, kuten kuutioita ja suorakulmaisia särmiöitä, esimerkiksi käyttämällä visuaalisia esimerkkejä, joiden avulla voi hahmottaa paremmin pinta-alan ja tilavuuden käsitteitä (Özerem 2012). Näiden lisäksi opettaja voi esitellä esimerkkejä ja tehtäviä, jotka edistävät oppilaiden kykyä soveltaa abstraktiota geometrian ongelmiin.

Fitriani et al. (2018) tutkimuksessa tultiin johtopäätökseen, että yläkoulun oppilaiden abstraktiokyky on jatkuvasti kehitettävä, koska abstraktioprosessi on käsitteiden löytämistä. Oppilailla on ongelmia korkeammilla abstraktiotasoilla, kuten rakenteellisen tietoisuuden tasolla. Mitä korkeampi abstraktiotaso on, sitä enemmän oppilaalta vaaditaan ja vaatimukset muuttuvat monimutkaisemmiksi. Tämän vuoksi geometrian oppimismalleja ja opetusmateriaaleja on kehitettävä siten, että ne tukevat abstraktioprosessin kehittymistä. Alkuvaiheessa painotetaan fyysisten tilojen ja muotojen havainnointia ja mittaamista, siirtyen sitten Euklidisen geometrian abstrakteihin aksioomiin ja myöhemmin epäeuklidiseen geometriaan, jotka ovat yhä kauempana havaitusta fyysisestä maailmasta. (Fitriani, Suryadi ja Darhim 2018)

7.6 Sanalliset tehtävät ja todistaminen

Geometrian sanallisiin tehtävien huomioimiseen opetuksessa ei tarjota mitään suoraa ratkaisua. Niiden osalta pätee kuitenkin monet eri geometrian osa-alueiden keinot riippuen tehtävästä. Visualisointi, konkreettiset esimerkit, keskustelu ja vertaisoppiminen ovat tärkeässä roolissa. Myös erilaisten ratkaistapojen esiintuominen on keskeistä sanallisissa tehtävissä.

Ratkaisu ensimmäiseen todistamiseen liittyvään geometrian virhekäsitykseen, eli siihen, että kaavioista voi tehdä johtopäätöksiä on opettaa oppilaat ensin laatimaan päteviä johtopäätöksiä ennen kuin opettaa heidät todistamaan. Pätevien päätelmien tekeminen on taito, joka voidaan opettaa yksinään, erillisenä ja edeltävänä opetuksena todistuksen opettamiselle. Näin tehdessä käsitellään virhekäsitystä siitä, että on perusteltua vetää johtopäätöksiä sen perusteella, miltä kaavio näyttää, ja voidaan opettaa oppilaille, kuinka vetää päteviä johtopäätöksiä käyttäen annettuja tietoja ja asiaankuuluvia määritelmiä. Tällä tavoin osoitetaan, että ei ole perusteltua vetää johtopäätöksiä sen perusteella, miltä kaavio näyttää ja voidaan opettaa oppilaille, kuinka vetää päteviä johtopäätöksiä käyttäen annettuja tietoja ja asiaankuuluvia määritelmiä. Opettajilta saadun palautteen perusteella päätelmien vetäminen on yksittäinen vaikutusvaltaisin muutos käytännössä, joka voidaan tehdä geometrian todistuksen opetuksessa. Oppilaille annettavat formatiiviset arviointitehtävät sen jälkeen, kun he ovat oppineet vetämään päätelmiä, osoittavat, että tämä lähestymistapa oli tehokas tukemaan opiskelijoita vetämään päteviä päätelmiä. (Cirillo ja Hummer 2019)

Toinen yleinen virhekäsitys eli kaavioista ei voi olettaa mitään tulisi myös huomioida opetuksessa. Suositus on, että opetetaan eksplisiittisesti, mitä kaavioista voidaan olettaa ja mitä ei. On havaittu, että on erittäin tärkeää määritellä selkeästi, mitä oletuksia voidaan tehdä kaavioiden perusteella, ja opettaa nämä asiat vastapainona niille oletuksille, joita ei voi tehdä. Nämä esitetään taulukossa 2. (Cirillo ja Hummer 2019)

Taulukko 2: Oletuksia, joita kaavioiden perusteella voi ja ei voi tehdä (Cirillo ja Hummer 2019).

| Mitä voi olettaa | Mitä ei voi olettaa |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Jos suorat leikkaavat, ne leikkaavat yhdessä pisteessä. • Jos pisteet näyttävät kollineaarisilta ne ovat. • Pisteiden suhteellinen sijainti: jos piste näyttää olevan kahden muun pisteen välissä tai sen oikealla tai vasemmalla puolella se on. • Jos kulmat näyttävät vieruskulmilta, ne ovat. • Jos kulmat näyttävät ristikulmilta ne ovat. | <ul style="list-style-type: none"> • Jos suorat vaikuttavat yhdensuuntaisilta tai kohtisuorilta, ne eivät välttämättä ole sitä. • Jos kulmat tai segmentit näyttävät yhteneväsiltä ne eivät välttämättä ole sitä. • Segmenttien ja kulmien suhteellinen koko: jos yksi kulma tai jana näyttää isommalta kuin toinen se ei välttämättä ole. • Jos kulmat näyttävät suorilta kulmilta ne eivät välttämättä ole sitä. |

Oppikirjojen tarkastelu osoittaa, että jos kaavioista tehtäviä oletuksia käsitellään ollenkaan, niin keskitytään yleensä vain niihin oletuksiin, jotka voidaan tehdä. Kuitenkin näiden erottaminen niistä oletuksista, joita ei voi tehdä, auttaa luomaan vakaan perustan kaavioiden kanssa työskentelyyn ja tukee oppilaita johtopäätösten tekemisessä. Tutkimuksessa havaittiin, että kun oppilaille opetetaan tämän taito selvästi ja käytetään tehtävää, jossa kysytään, mitä oletuksia voi tehdä kuvion perusteella, huomattiin, että suurin osa Cirillon ja Hummerin (2019) tutkimukseen osallistuneista SGI-opiskelijoista kehitti tämän taidon, lukuunottamatta tarvetta oppia asianmukaista merkintätapaa. (Cirillo ja Hummer 2019)

Myös kolmas virhekäsitys eli se, että määritelmä voi sisältää kaikki geometrisesta kappaleesta tiedetyt ominaisuudet on hyvä huomioida opetuksessa. Oppilaita tulee ohjata harjoittelemaan määritelmien laatimista ja samalla korostaa määritelmien tuntemisen tärkeyttä. Osallistaminen määritelmien laatimiseen kehittää oppilaiden ymmärrystä siitä, mitä tarkoittaa hyvä määritelmä ja auttaa heitä kiinnittämään huomiota tarkkuuteen. Esimerkiksi oppilaat tunnistavat, että hyvän määritelmä tulisi kertoa "mitä se on" ja "mikä tekee siitä erityisen". Määriteltäessä on olennaista tunnistaa luokka, johon geometrinen kohde kuuluu, esimerkiksi "Tasaviuinen kolmio on kolmio...", ja mainita, mikä tekee tästä luokasta erityisen esimerkiksi "jolla on kaksi yhtenevää sivua." Lisäksi opettaessa, että määritelmät ovat käänteisiä, oppilaita tulee kannustaa ilmaisemaan määritelmänsä kaksisuuntaisina lausuntoina, mikä vahvistaa, että määritelmät pätevät aina molempiin suuntiin. Esimerkiksi kolmio on tasaviuinen kolmio, jos ja vain jos sillä on kaksi yhtenevää sivua. Cirillon ja Hummerin (2019) tutkimuksessa ilmeni, että muiden määritelmiä arvioimalla ja tarkistamalla, oppilaille kehittyi kyky antaa määritelmässään juuri tarpeeksi tietoa. (Cirillo ja Hummer 2019)

Opetuksessa kannattaa keskittyä kolmenlaisiin puolittajiin, kulmanpuolittajiin, janan keskinormaaleihin ja mediaaneihin, ja arvioida oppilaiden edistymistä. Piirtämällä päätelmiä on hyvä tapa tunnistaa oppilaiden virhekäsityksiä, mutta sen avulla niitä ei pysty ehkäisemään. Oppilaita on myös tarpeen arvioida toistuvasti, jotta havaitsee tietävätkö he erot eli puolittajien välillä. Erilaisten puolittajien erojen opettaminen etukäteen ja todistusprosessin ulkopuolella on todennäköisesti tehokkaampaa kuin niiden opettaminen oppilaille samalla, kun he opettelevat todistamista. Oppilaille on hyvä opettaa, että kohdatessaan jonkin puolittajan, ensin kannattaa miettiä, minkä se puolittaa ja sen jälkeen, minkä tyyppinen puolittaja on. (Cirillo ja Hummer 2019)

Oppilaille tulisi opettaa, miten voi muotoilla oletukset ehdollisiksi lauseiksi ja tunnistaa hypoteesi eli oletus ja johtopäätös, jotta vältetään näihin liittyviltä virhekäsityksiltä. Oppilaiden matemaattisen todistamisen ymmärtämisen tukemiseksi heidän tulisi saada mahdollisuuksia kehittää omia oletuksiaan eikä vain kirjoittaa todistuksia annetuista lausunnoista. Tämän haasteen käsittelemiseksi suositellaan antamaan oppilaille mahdollisuus kirjoittaa oletuksensa, missä tahansa muodossa ja pyytää heitä sitten muotoilemaan ne uudelleen ehdollisiksi lausunnoiksi. Tämän uudelleenkirjoituksen ohjaamiseen tarvitaan todennäköisesti opettajan apua. Tämän jälkeen voidaan opettaa oppilaat tunnistamaan ehdollisen lausunnon hypoteesi ja johtopäätös sekä tukea heitä näiden soveltamisessa tiettyihin kuviin. On tärkeää käsitellä tätä väärinkäsitystä, sillä nykyisten standardien mukaan oppilaiden odo-

tetaan todistavan geometrisia teoreemoja, ja pätevien argumenttien rakentaminen ja toisten päättelyn arviointi edellyttävät oletusten tekemistä ja niiden tutkimista. (Cirillo ja Hummer 2019)

8 Pohdinta

Geometria muodostaa merkittävän osan yläkoulun matematiikan opetusta ja samalla se koetaan yleisesti yhdeksi vaikeimmista matematiikan osa-alueista. Tämän haasteen lisäksi geometriassa ilmenee useita virhekäsityksiä, jotka voivat vaikeuttaa oppimista entisestään.

Ensimmäinen tutkimuskysymys oli, mitkä ovat yleisiä virhekäsityksiä geometriassa yläkoulussa ja miten ne ilmenevät. Tuloksissa ilmeni, että yläkoulun geometriaan liittyy useita virhekäsityksiä, joita ilmenee kaikilla geometrian osa-alueilla. Yleisiä virhekäsityksiä, joita ilmenee kaikilla geometrian osa-alueilla ovat käsitteiden sekoittaminen ja virheellinen määrittäminen, luokitteluvirheet, geometrinen kuvioiden kuvaaminen väärin ja kaavojen virheellinen käyttö.

Toinen tutkimuskysymys oli, miten erilaisia virhekäsityksiä voi huomioida opetuksessa. Tähän ei saatu yhtä selkeää vastausta, mutta monia ehdotuksia, miten opetustilanteissa voi toimia ja, miten oppituntiin kannattaa valmistautua. Tärkeä havainto, mikä kuitenkin tuli ilmi on, että opettajan tulisi olla tietoinen geometrian virhekäsityksistä, kun hän alkaa suunnitella opetuskokonaisuutta tai oppituntia. Opettajan omat opetussuunnitelmat ovat siis tärkeitä. Niissä on tärkeä huomioida, mitkä aiheet käsitellään ja missä järjestyksessä ne käsitellään. Tuloksista myös käy ilmi, että oppimisympäristöllä on suuri vaikutus oppilaiden virhekäsityksiin. Erilaiset oppimismenetelmät tai opetusstrategiat voivat auttaa oppilaita hahmottamaan geometrisia käsitteitä paremmin.

Matematiikan suurimpiin haasteisiin kuuluu usein riittämätön ajattelu- ja päätelykyky. Opettajalla on merkittävä rooli ongelman ratkaisemisessa. Opettajan tehtävänä on selittää oppilaille yksityiskohtaisesti, mihin heidän tulisi kiinnittää huomiota kuvapohjaisissa tehtävissä. Matematiikan opetuksessa on hyödyllistä käyttää visuaalisia ja konkreettisia apuvälineitä, sillä ne auttavat oppilaita ymmärtämään erilaisten kappaleiden rakenteita (Aktaş ja Ünlü 2017; Tekin-Sitrava ja Isiksal-Bostan 2018; Özerem 2012). Opetuksessa olisi suositeltavaa käyttää erilaisia menetelmiä, jotka aktivoivat opiskelijoiden eri aisteja.

Geometrian oppimisessa on keskeistä määrittellä selkeästi käsiteltävät objektit ja niiden määrittelyt. Myös käsitteiden ja prosessien välisten yhteyksien luominen on erittäin tärkeää (Aktaş ja Türnüklü 2015; Biber, Tuna ja Korkmaz 2013; Hutagalung, Mulyana ja Pangaribuan 2020; Kadarisma, Fitriani ja Amelia 2020). Oppilaat saattavat sekoittaa erilaiset muodot tunnistaessaan niitä. Tämän ongelman ratkaisemiseksi opettajan tulisi ensin auttaa oppilaita tunnistamaan erilaisia muotoja ja sen jälkeen opettaa heitä kuvittelevaan ja pyörittelemään esineitä mielessään selkeämmän käsityksen saamiseksi. Tässä voi myös käyttää apuna konkreettisia apuvälineitä sekä geometriaohjelmia. Opettajan tulisi myös muistuttaa jatkuvasti oppilaita siitä, että esineen pyörittäminen ei muuta sen perusmuotoa. (Özerem 2012) Myös erilaiset sähköiset visuaaliset menetelmät ovat nykyään keskeisessä roolissa opetuksessa. Ne antavat helpon keinon hyödyntää erilaisia kuvia ja värejä, sekä geometriaohjelmia osana opetusta. Geometrinen ominaisuuksien tai suhteiden testaamiseen tai luomiseen voi muun muassa käyttää geometrisia tietokoneohjelmia tai laskimia (Aktaş ja Ünlü 2017).

Tutkimuksissa (Ozkan ja Bal 2017; Özerem 2012) myös kannustetaan liittämään

geometria osaksi arkipäivää. Tämän voi tehdä esimerkiksi antamalla oppilaille tehtäväksi etsiä geometrisia muotoja ja kappaleita omasta elämästään. Toinen tapa voi olla viedä tuntiesimerkit lähelle oppilaita ottamalla niihin mukaan oppilaille tuttuja esineitä.

Virhekäsitykset voi siis huomioida opetuksessa monin eri tavoin. Tärkeintä opettajana on kuitenkin osata tunnistaa virhekäsitykset, jotta niihin pystyy reagoimaan. Opettajan rooli on ratkaiseva virhekäsitysten tunnistamisessa ja korjaamisessa. Virhekäsitysten minimoimiseksi geometrian opetuksessa on tärkeää luoda ja korostaa käsitteiden ja prosessien välisiä yhteyksiä, sillä se auttaa oppilaita hahmottamaan geometrisia käsitteitä kokonaisvaltaisemmin. Käsitteiden selkeä määrittely ja niiden väliset suhteet ovat avainasemassa virhekäsitysten vähentämisessä ja oppimisen syventämisessä. Lisäksi visuaalisten ja konkreettisten apuvälineiden hyödyntäminen sekä erilaisten oppimismenetelmien käyttö voivat auttaa oppilaita hahmottamaan geometrisia käsitteitä paremmin. Kokonaisuudessaan oppilaiden virhekäsitysten huomioiminen edellyttää jatkuvaa vuorovaikutusta opettajan ja oppilaiden välillä sekä monipuolisten opetusmenetelmien käyttöä. Näin varmistetaan, että oppilaat saavat tarvitsemansa tuen ja ohjauksen geometrian oppimisessa ja virhekäsitysten korjaamisessa.

8.1 Tulosten hyödynnettävyys

Tämän tutkimuksen tulokset tarjoavat arvokasta tietoa virhekäsityksistä geometriassa ja niiden huomioimisesta oppitunneilla. Tutkimustuloksia pystyvät hyödyntämään kaikki tulevat matematiikan opettajat, sekä myös jo työelämässä oleville opettajille tutkimus tarjoaa uusia näkökulmia. Yksi tärkeä kohde, johon tutkimuksesta on hyötyä, on opetuksen kehittäminen. Tulokset auttavat opettajia ymmärtämään paremmin, mitkä ovat yleisiä virhekäsityksiä geometriassa yläkoulussa. Tämä tieto voi auttaa opettajia muokkaamaan oppitunteja ja -materiaaleja vastaamaan paremmin oppilaiden tarpeita ja haasteita. Tulokset auttavat myös opettajia tukemaan oppilaita paremmin, sekä valmistautumaan mahdollisiin virhekäsityksiin, joita oppilaille tulee. Näin opettajat voivat etukäteen miettiä muun muassa esimerkkejä, joiden avulla voi kumota virhekäsityksiä.

Tutkimustuloksia voi myös hyödyntää laajemmin oppimateriaalin ja opetus suunnitelman kehittämiseen. Oppimateriaali voidaan suunnitella tutkimustulosten avulla niin, että se tukee paremmin oppilaiden ymmärrystä ja käsitteiden muodostusta sekä auttaa vähentämään virhekäsityksiä, joita ilmenee geometrian eri osa-alueilla.

8.2 Jatkotutkimusmahdollisuuksia

Tutkimustulokset tarjoavat monia mielenkiintoisia jatkotutkimusmahdollisuuksia. Tutkimusta pystyisi hyödyntämään muun muassa geometrian opetuksen parantamiseen keskittyvissä tutkimuksissa tai tutkimuksessa, jonka tarkoituksena on keskittyä virhekäsitysten vähentämiseen. Esimerkiksi voisi tutkia, miten erilaiset teknologian hyödyntämisen muodot voivat auttaa virhekäsitysten korjaamisessa tai miten opettajien koulutusta voitaisiin kehittää, jotta he olisivat paremmin valmistautuneita käsittelemään virhekäsityksiä opetuksessa.

Yksi erittäin mielenkiintoinen jatkotutkimusmahdollisuus on myös se, miten näihin virhekäsityksiin ja niistä johtuviin virheisiin tulisi suhtautua opetuksessa, sekä, mikä on paras tapa huomioida ne oppitunnilla. Toinen kiinnostava jatkotutkimusmahdollisuus olisi tutkia erilaisia pedagogisia lähestymistapoja ja niiden vaikutusta oppilaiden ymmärrykseen geometrisista käsitteistä.

Viitteet

- Akkaş, E. N., Türnüklü, E. (2015). “Middle school mathematics teachers’ pedagogical content knowledge regarding student knowledge about quadrilaterals”. *İlköğretim Online* 14.2, s. 744–756.
- Aktaş, G. S., Ünlü, M. (2017). “Understanding of Eight Grade Students about Transformation Geometry: Perspectives on Students’ Mistakes.” *Journal of Education and Training Studies* 5.5, s. 103–119.
- Angraini, P., Prahmana, R. C. I. (2019). “Misconceptions of seventh grade students in solving geometry problem type national examinations”. Teoksessa: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1188. 1. IOP Publishing, s. 012101.
- Battista, M. (2007). “The development of geometric and spatial thinking”. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* 2, s. 843–908.
- Biber, C., Tuna, A., Korkmaz, S. (2013). “The Mistakes and the Misconceptions of the Eighth Grade Students on the Subject of Angles.” *European Journal of science and mathematics education* 1.2, s. 50–59.
- Bleeker, C., Stols, G., van Putten, S. (2013). *The relationship between teachers’ instructional practices and their learners’ level of geometrical thinking*. eng.
- Cirillo, M., Hummer, J. (2019). “Addressing misconceptions in secondary geometry proof”. *The Mathematics Teacher* 112.6, s. 410–417.
- Clements D. & Battista, M. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: (A project of the national council of teachers of mathematics)*. IAP, s. 429–430.
- Dingman, S. W. (2019). *The language of mathematics education: An expanded glossary of key terms and concepts in mathematics teaching and learning*. Vol. 1. Brill.
- Fischbein, E. (1993). “The theory of figural concepts”. *Educational studies in mathematics* 24.2, s. 139–162.
- Fitriani, N., Suryadi, D., Darhim, D. (2018). “Analysis of mathematical abstraction on concept of a three dimensional figure with curved surfaces of junior high school students”. Teoksessa: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1132. 1. IOP Publishing, s. 012037.
- Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1988). “The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents”. eng. *Journal for research in mathematics education. Monograph* 3, s. i–196. ISSN: 0883-9530.

- Hutagalung, E. E., Mulyana, E., Pangaribuan, T. (2020). “Mathematical abstraction: students’ concept of triangles”. Teoksessa: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1521. 3. IOP Publishing, s. 032106.
- Kadarisma, G., Fitriani, N., Amelia, R. (2020). “Relationship between misconception and mathematical abstraction of geometry at junior high school”. *Infinity Journal* 9.2, s. 213–222.
- Ojose, B. (2015). *Common misconceptions in mathematics : strategies to correct them*. eng. Lanham, Maryland: University Press of America, Inc. ISBN: 0-7618-5886-5.
- Okazaki, M., Fujita, T. (2007). “Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland”. Teoksessa: *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4. Seoul: PME, s. 41–48.
- Opetushallitus (2015). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. fin. Määräykset ja ohjeet / Opetushallitus, 2014:96. Helsinki: Opetushallitus. ISBN: 978-952-13-5998-9.
- Ozkan, M., Bal, A. P. (2017). “Analysis of the misconceptions of 7th grade students on polygons and specific quadrilaterals”. *Eurasian Journal of Educational Research* 16.67.
- Palojärvi, N., Koskenoja, M., Ernvall-Hytönen, A.-M. (2023). “On the Math Kangaroo Finland: Homogeneous subgroups, misconceptions and answering choices”. *Cogent Education* 10.2, s. 2263624.
- Riswandi, A., Nursalam, N., Baharuddin, B. (2022). “Misconception Analysis of Math Class VII Using Three Tier-Test”. *MaPan: Jurnal matematika dan Pembelajaran* 10.1, s. 39–49.
- Ryan, J., Williams, J. (2007). *Children’s Mathematics 4-15*. eng. 1. painos. Buckingham: McGraw-Hill Education. ISBN: 0335220428.
- Sarajärvi, A., Tuomi, J. (2017). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi: Uudistettu laitos*. Tammi.
- Sharma, S. (2019). “Use of theories and models in geometry education research: A critical review”. *Waikato Journal of Education* 24.1, s. 43–54.
- Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto*. fin. Tampere.

- Silfverberg, H. (2008). “Comparative study of Finnish and Japanese students’ understanding of class inclusion and defining in a geometrical context”. English. Teoksessa: *Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka. Ainedidaktinen ymposiumi 8.2.2008 Helsingissä. Osa 2.* Toim. Kallioniemi, A., s. 650–666. ISBN: 978-952-10-4970-5.
- (2018). “Geometrisen käsitteenmuodostus oppimisen tutkimuksen kohteena”. Teoksessa *J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen, (toim.), Matematiikan opetus ja oppiminen*, s. 86–109.
- Silfverberg, H., Matsuo, N. (2008). “Comparing Japanese and Finnish 6th and 8th graders’ ways to apply and construct definitions”. Teoksessa: *Proceedings of the 32nd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4, s. 257–264.
- Suarsana, I., Widiasih, N. P. S., Suparta, I. N. (2018). “The Effect of Brain Based Learning on Second Grade Junior Students’ Mathematics Conceptual Understanding on Polyhedron.” *Journal on mathematics education* 9.1, s. 145–156.
- Sudirman, S. (2023). “Epistemological Obstacle in 3D Geometry Thinking: Representation, Spatial Structuring, and Measurement”. *Pegem Journal of Education and Instruction* 13.4, s. 292–301.
- Tekin-Sitrava, R., Isiksal-Bostan, M. (2018). “The nature of middle school mathematics teachers’ pedagogical content knowledge: The case of the volume of prisms”. *Australian Mathematics Teacher, The* 74.1, s. 22–30.
- Trzcieniecka-Schneider, I. (1993). “Some remarks on creating mathematical concepts”. *Educational Studies in Mathematics* 24.3, s. 257–264.
- Özerem, A. (2012). “Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students”. *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 55, s. 720–729.