

FYSIIKKA JA GEOMETRIA

JUHA-PEKKA PELLONPÄÄ

ISBN 978-951-29-5640-1

Turku 2014

Kirjan lukijalle

Aloittaessani teoreettisen fysiikan luento-opetuksen vuonna 2004 Turun yliopistossa huomasin seuraavan ongelman: suomenkielisiä oppikirjoja ei opettamiltani aloilta ollut saatavilla eikä varsinkaan sellaisia, jotka sisältäisivät mekaniikan, elektrodynamiikan ja suhteellisuusteorian samoissa kansissa. Englanninkielisiä kirjoja kyllä oli tehty, mutta ne eivät useimmiten kuitenkaan sisältäneet kaikkia asioita, joita olisin halunnut tuoda esille opetuksessa. Lisäksi monissa kirjoissa ei selitetty teorioiden syvälliseen ymmärtämiseen tarvittavaa matematiikkaa riittävän perusteellisesti. Tästä virisi idea kirjoittaa tämä oppikirja.

Matemaattisen kvanttifysiikan ja kvanttimekaniikan perusteiden tutkijana haluan kiinnittää huomiota fysiikan teorioiden matemaattisiin ja filosofisiin perusteisiin, koska mielestäni matematiikan osaaminen lisää fysiikan ymmärrystä. Haluan kiinnittää opetuksessa huomiota mm. seuraaviin kysymyksiin: Mitkä fysikaaliset oletukset johtavat fysiikan teorian matemaattisen rakenteen valintaan? Mitä likimääräistyksiä on tehty päädyttäessä kyseiseen teoriaan?

Fysiikan teoriat voidaan karkeasti jakaa kahteen leiriin, (differentiaali)geometriisiin teorioihin ja kvanttiteorioihin.¹ Tämä kirja käsittelee vain geometrisia teorioita, joihin voidaan lukea erilaiset mekaniikat (kuten Newtonin, Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikat sekä Einsteinin erityinen suhteellisuusteoria) ja kenttäteoriat (jatkuvan aineen dynamiikka, klassiset mittakenttäteoriat kuten sähkömagnetismi sekä gravitaatioteoria eli Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria). Kirja ei perustu mihinkään olemassa olevaan teokseen, joten uskoakseni sen sisällön ryhmittely on uniikki.

Keskityn kirjassa vain sellaisiin matemaattisiin tuloksiin, jotka ovat olennaisia kirjan aihepiirin kannalta. Tarkoitukseni ei ole täydellinen matemaattinen ilmaisu. Tämän vuoksi joidain keskeisiä matemaattisia määritelmiä jätetään käsittelyn ulkopuolelle. Oletan, että käsillä olevan oppikirjan lukija hallitsee klassisen mekaniikan perusteet kuten Newtonin kolme lakia sekä gravitaatiolain, jäykän kappaleen liikkeen ja näennäisvoimat (esim. Coriolis-voima). Tämän lisäksi sähkö- ja magnetismin alkeet, esimerkiksi Maxwellin yhtälöt väliaineessa, ovat hyödyksi kirjaa luettaessa. Matemaattisina ennakkotietoina oletan, että lukija osaa lineaarialgebran perusteet ja usean (reaali)muuttujan funktioiden teoriaa.²

Oppikirja sisältää 40 lukua, joista 30 on fysiikkaa (FYS) ja 10 geometriaa (GEOM). Kir-

¹Toki dynamiikka saattaa olla diskreettiä tai tarvitaan vielä mm. statistisia menetelmiä, mutta teorioiden perusteiden näkökulmasta katsottuna tämä jako riittänee tässä.

²Osittaisderivaatat, Jacobin matriisi, ketjusääntö, mahdollisesti jopa implisiittifunktio- ja käänneiskuvaslauset sekä divergenssilause ja Stokesin lause (kertaa esim. Wikipediasta).

ja on suunniteltu siten, että geometrian lukuja ei tarvitse hallita ensimmäisellä lukukerralla. Fysiikan luvuissa on merkitty kirjoituskoneteksillä käsitteitä, jotka määritellään tarkemmin geometria-luvuissa. Näiden käsitteiden intuitiivinen ymmärtäminen riittää jo seuraamaan fysiikan kappaleita. Lisäksi oppikirjaan kuuluu 90 harjoitustehtävää ja kolme esseetä, joiden avulla lukija voi reflektoida oppimaansa. Symbolilla [!] merkityissä kohdissa opiskelijan olisi hyvä pysähtyä pohtimaan, mistä kyseinen kohta seuraa. Halutessaan hän voi myös laskea joi-tain välivaiheita. Alaviitteisiin on kerätty ylimääräistä tietoa, joihin lukija voi perehtyä omien mieltymystensä mukaan. Lisäksi hän voi hakea lisätietoa kirjallisuudesta tai internetistä (Wikipedia). Esimerkiksi matemaattisten lauseiden todistukset, joita en ole kirjassa todistanut, löytyvät helposti differentiaaligeometrian alkeisoppikirjoista ja/tai netistä.

Mielestäni opitun kertaaminen on tärkeää, joten monet käsitteet mainitaan kirjassa useam-paan otteeseen. Ensimmäisellä kerralla voidaan antaa intuitiivinen määritelmä tai erikoistapaus ja vasta myöhemmin seuraa tarkempi käsittely tai kääntäen, esimerkkeinä ryhmän operointi si-vuilla 8 ja 138 tai säikeinen monisto sivuilla 17 ja 97 sekä luvuissa 8 ja 39.

Kirja jakaantuu kolmeen osaan. Ensimmäinen osa sisältää luvut 1-14, ja siinä tarkastellaan avaruutta ja aikaa. Toiseen osaan kuuluvat luvut 15-26. Tässä osassa keskitytään symmetrioi-den kuvaamiseen. Nämä osat ovat lähinnä mekaniikkaa, kun taas loppuosa kirjasta käsittelee kenttäteoriaa.

Luvussa 1 tarkastelemme syitä, jotka johtavat Newtonin mekaniikasta Einsteinin erityiseen suhteellisuusteoriaan. Koska näiden teorioiden matemaattisena mallina käytetään affinia ava-ruutta, se esitellään luvussa 2, jonka tuloksia hyödynnetään välittömästi luvuissa 3-5. Luku 2 saattaa vaikuttaa turhan monimutkaiselta, sillä siinä esitetyt asiat ovat intuitiivisestikin ym-märrettävissä. Pedagogisena ideana tässä on totuttaa lukija helpolla tavalla matemaattiseen ajattelu- tai kirjoitustapaan ilmaisemalla tuttuja tuloksia matemaattisen täsmällisesti.

Luvussa 3 käsitellään Galilein muunnoksia ja Newtonin gravitaatiota. Gravitaatiotarinaa jatketaan luvussa 10. Mitkä olettamukset johtavat erityiseen suhteellisuusteoriaan ja Minkows-kin avaruusaikaan? Mitä fysikaalisia seuraamuksia näillä olettamuksilla on? Näihin kysymyk-siin vastataan luvussa 4, jossa myös esitellään Poincarén (ja Lorentzin) muunnokset. Galilein ja Poincarén muunnosten teoriaa jatketaan luvussa 20. Erityisen suhteellisuusteorian mekaniikan tarkastelun päättää luku 5, jossa käsitellään kappaleen liikettä ja liiketilan muutoksen syitä. Kohokohtana on relativistisen liikeyhtälön esittely ja tutkiminen. Tärkein sovellus tulee kui-tenkin vasta luvussa 33, missä varatun hiukkasen liike saadaan relativistisesta liikeyhtälöstä, missä Minkowskin voimana on Lorentzin voima. Erityinen suhteellisuusteoria ja Minkowskin

avaruusaika yleistetään myöhemmin (alkaen luvusta 9), mutta sitä ennen tarvitaan lisää matematiikkaa. Tätä varten kirjassa on differentiaaligeometrian luvut 6, 7 ja 8.

Geometrian käsittely alkaa topologisen avaruuden ja moniston käsitteiden määrittelyllä. Intuitiivisena esimerkkinä (esim. 19) käytetään 2-ulotteista pintaa 3-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Tässä luvussa esiintyy myös ensimmäistä kertaa holonomiset side-ehdot, jotka pakottavat fyysikaalisen systeemin konfiguraatiovaruuden olemaan (ali)monisto. Tämä tarina jatkuu luvuissa 13 ja 31.

Tangenttiavaruuden vektorin käsite (luvussa 7) on aivan keskeinen geometriassa, sillä mm. (fyysikkasakin tärkeät) tensorit määritellään vektoreitten avulla (luvussa 8). Vektori määritellään kolmella eri tavalla: toisiaan sivuavien käyrien ekvivalenssiluokkana, komponenttien avulla ja differentiaalioperaattorina. Ensimmäinen tapa on elegantein ja yleistyy ääretönulotteisille (Banachin) monistoille, joita käytetään mm. kvanttikenttäteoriassa. Toinen tapa on yleinen ‘vanhan ajan’ fysiikan kirjallisuudessa ja kolmas on kätevin. Kaikki tavat esitellään vielä intuitiivisen esimerkkimme eli 2-ulotteisen pinnan tapauksessa esimerkissä 21. Tensoreista tärkeimpiä on eittämättä metrinen tensori, jota käytetään yleisessä suhteellisuusteoriassa (itseasiassa se on kenttä, joka pyritään ratkaisemaan Einsteinin yhtälöstä). Luvun 8 kohokohtana on metriikan Riemannin normaalikoordinaattien johto. Tämä tulos on hyvin tärkeä suhteellisuusteoriassa, kuten tullaan näkemään.

Opittuamme tarpeellista matematiikka voimme vaivattomasti aloittaa yleisen suhteellisuusteorian käsittelyn luvuissa 9 ja 10. Johdattelu aiheeseen aloitetaan yksinkertaisella kysymyksellä: Miltä Newtonin yhtälö tai relativistinen liikeyhtälö näyttää mielivaltaisessa koordinaatistossa? Vastaukseksi saadaan (muotoinvariantti) Lagrangen liikeyhtälö, jonka määrää yleistetty liike-energia. Sitten osoitetaan, että kyseiset yhtälöt yleistyvät välittömästi mielivaltaiseen metriikalla varustettuun monistoon. Itseasiassa saadaan geodeesiyhtälö, joka antaa ratkaisunaan mm. kahden pisteen välisen lyhimmän/pisimmän etäisyyden (luku 12). Geodeesiyhtälö johdetaan vielä kolmannellakin tavalla luvussa 35 käyttämällä konnektion käsitettä. Luvun 9 lopussa sovelletaan vielä Lagrangen yhtälöitä yksinkertaisiin mekaanisiin ongelmiin, joissa kaikki systeemiin vaikuttavat voimat ovat konservatiivisia.

Luvussa 10 jatketaan kirjan alussa aloitettua ‘filosofista’ pohdintaa ja esitellään mm. (Einsteinin) vahva ekivalenssiperiaate. Tästä päädytään mallintamaan yleisen suhteellisuusteorian avaruusaikaa neliulotteisena Lorentzin monistona. Avaruusajan metriikan antava Einsteinin yhtälö esitellään kuitenkin vasta luvussa 36. Newtonin gravitaatiolaki yleistetään ja osoitetaan, että gravitaatio on neliulotteisen avaruusajan näennäisvoima (kuten esim. Coriolis-voima on

pyörivän koordinaatiston näennäisvoima). Mielenkiintoinen yleisen suhteellisuusteorian sovellus, Schwartzchildin musta aukko, esitellään luvussa 11 ja sen tutkimista jatketaan luvuissa 21 ja 36. Tässä luvussa kuitenkin saadaan jo määrättyä olennaisesti kappaleen liike mustan aukon läheisyydessä ja gravitaatiopunasiirtymä.

Luvussa 12 siirrytään variaatiolaskentaan (mekaniikassa) ja johdetaan Lagrangen yhtälöt Hamiltonin pienimmän (tai ääriarvo-)vaikutuksen periaatteesta. Myös valon taipumista tarkastellaan. Lagrangen mekaniikan holonomisia side-ehtoja tutkitaan luvussa 13 ja osoitetaan, että ‘kaarevat avaruudet’ esiintyvät luonnollisesti ihan perusmekaniikassakin. Differentiaalimuotoja katsellaan luvussa 14 ennakoiden jo kirjan seuraavaa osaa. Tärkeänä tuloksena on Poincarèn lemman käänteislause, jota tullaan käyttämään monta kertaa (mutta jota ei valitettavasti kuitenkaan todisteta tässä kirjassa).

Luvussa 15 siirrytään Lagrangen mekaniikasta Hamiltonin mekaniikkaan, jossa mm. symmetriat ja säilymilait ovat helpompia käsitellä. Hamiltonin mekaniikka on myös tärkeä teoria siirryttäessä faasiavaruuskvanttimekaniikkaan. Osoitamme, että Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikat ovat ekvivalentit säännöllisten Lagrangen ja Hamiltonin funktioitten tapauksessa. Vektorikenttien integraalikäyrät (luku 16) ovat aivan keskeisiä käsitteitä esim. kappaleen liikettä tai symmetrioita tarkasteltaessa. Niitä käytetään jatkuvasti tässä kirjassa ja nyt ne sitten vihdoin määritellään. Alaluku 16.1 on irrallinen mutta hyödyllinen jo heti seuraavassa luvussa.

Luvussa 17 yleistetään Hamiltonin mekaniikka symplektisille monistoille (joita käytetään mm. säieteoriassa) ja esitellään Poissonin sulut. Tässä luvussa mainitaan Lien algebran käsite ensimmäistä kertaa. Tiloja ja suureita Hamiltonin mekaniikassa katsellaan luvussa 18. Pedagogisesti nämä (mekaniikassa lähes triviaalit) käsitteet on tärkeää määritellä kunnolla ajatellen jo kvanttimekaniikan opintoja, sillä kvanttimekaniikassa tilat ja suureet ovat vahvasti matemaattisesti epätriviaaleja objekteja.

Miten symmetriat esitetään fysiikassa ja mitkä suureet generoivat tiettyjä symmetriamuunnoksia? Näitä kysymyksiä tutkitaan luvuissa 19 ja 20. Erityisen tarkasti käsitellään kiertoryhmä $SO(3)$, koska se muodostaa intuitiivisesti, pedagogisesti ja laskuteknisesti mukavimman (epätriviaalin) esimerkin Lien ryhmistä. Tätä ryhmää sovelletaan kunnolla sitten hyrrän tapauksessa luvussa 26. Luvun 20 huipennus on Galilein ja Poincarén ryhmien generaattoreiden määrääminen; ne ovat myös tärkeitä kvanttimekaniikassa.

Luvussa 21 käsitellään symmetriamuunnoksissa invariantteja ja kovariantteja suureita. Eriytyisen tärkeinä pidän ‘klassisia kovarianssisysteemeitä’ ja kanonisia pareja, sillä niiden kvanttianalogioilla on paljon käyttöä kvanttifysiikassa. Myös Noetherin lauseen sekä Hamiltonin että

Lagrangen mekaniikan variantit johdetaan tässä luvussa. Suhteellisuusteoreettisena esimerkkinä toimii kiertosymmetrinen metriikka, joka kuvaa avaruusaikaa pallomaisen taivaankappaleen (planeetta, tähti, musta-aukko) ulkopuolella tai vaikka isotrooppista maailmankaikkeutta kosmologiassa. Koska yleisen suhteellisuusteorian antaman Newtonin gravitaation relativistisen korjaustermin vaikutusten käsittely on helpompaa Hamiltonin mekaniikassa (löytyy liikevakioita metriikan ollessa kiertosymmetrinen), niin se tehdään vasta luvussa 22.

Hamiltonin mekaniikan osuuden päättää lukujen 23-26 muodostama kokonaisuus, jossa tarkastellaan menetelmiä ratkaista Hamiltonin yhtälöt. Luvussa 23 huomataan, että Hamiltonin yhtälöt ovat muotoinvariantteja faasiavaruuden kanonisissa muunnoksissa. Pyritään siis löytämään kanoninen muunnos, joka muuttaa likeyhtälöt helpommin ratkaistavaan muotoon. Kanonisiin muunnoksiin liittyy läheisesti symplektinen ryhmä, joka on taas esimerkki klassisista Lie-ryhmistä. Se määritellään luvussa 23, jonka jälkeen lukijalle on tullut tutuksi kaikki fysiikan tärkeimmät jatkuvaparametriset (Lie) ryhmät eli ortogonaaliryhmät kuten $SO(3)$, pseudo-ortogonaaliryhmät kuten Lorentzin ryhmä ja symplektiset ryhmät. Luvun kohokohtana on kuitenkin melko triviaali havainto, että faasiavaruuden (aktiivinen symmetria)muunnos voidaan tulkita myös (passiivisesti) kanonisena (koordinaatti)muunnoksena.

Täydellisesti integroituvat systeemit ratkeavat täydellisesti. Tämä on luvun 24 sanoma. Täydellisesti integroituvilla systeemeillä on riittävän paljon toisistaan riippumattomia liikevakioita, jotka voidaan valita kanonisella muunnoksella uusiksi 'impulssikoordinaateiksi' ja täten ratkaista liike triviaalisti. Erikoistapauksena (luvussa 25) tutkitaan 'rajoitettua liikettä,' johon liittyy aina Arnoldin lauseen (ei todisteta valitettavasti) perusteella ns. vaikutus- ja kulmamuuuttujat. Kvasiperiodinen liike tulee tässä tarkastelussa hyvin esiin. Tästä vielä erikoistapauksena käsitellään hyrrä, jolle on varattu kokonainen luku 26, sillä tämä on eräs tärkeimmistä fysikaalisista esimerkeistä; vastaavaa liikettä esiintyy hyvin monissa fysikaalisissa systeemeissä, kuten esim. taivaankappaleen pyörimisliikkeessä. Myös tekniset sovellukset (kuten gyroskooppi) ovat tärkeitä.

Siirrytäänpä sitten mekaniikasta kenttäteoriaan (mekaniikkaan palataan vielä hetkeksi luvussa 33). Ehkä helpoin esimerkki kenttäteoriasta on eittämättä epärelativistisen nesteen liike, missä jokaiseen avaruusajan pisteeseen liitetään nesteen keskimääräinen nopeusvektori. Toinen tärkeä fysikaalinen esimerkki kenttäteoriasta on sähkömagneettinen kenttä. Kirjan loppuosan teemana on tarkastella nestedynamiikkaa, sähködynamiikkaa ja gravitaatiota sekä etsiä näiden yhtymäkohtia.

Luvussa 27 aloitamme nestedynamiikasta ja johdamme nesteen liikeyhtälön eli (epälineaarisen) Navierin-Stokesin yhtälön. Tarkastelemme myös Eulerin yhtälöä, Laplacen yhtälöä ja lopulta KdV-solitoniyhtälöä (luvussa 28), joka kuvaa vesiaallon etenemistä kanavassa. Luvun 28 pedagoginen tarkoitus on tämän lisäksi demonstroida kuinka melko yksikertaisenkin fysikaalisen systeemin tarkastelu johtaa moniin approksimaatioihin ja pitkiin laskuihin. ‘Lineaarisia’ aaltoja tarkastellaan luvussa 37. Nestedynamiikan ja sähkömagnetismin matemaattista yhteyttä ihmetellään luvussa 29, ja luvussa 34 onkin sitten vuorossa relativistinen neste. Luvun 36 lopussa kytketään relativistinen nestedynamiikka gravitaatioteoriaan (sovelluksia tästä nähdään kosmologiassa).

Luvussa 29 kerrataan Maxwellin yhtälöt (väliaineessa) ja luvussa 30 on taas matematiikan vuoro. Esimerkiksi orientaation käsitettä tarvitaan luvussa 32 käsiteltäessä sähkö- ja magnetikenttiä. Luvun 31 tärkein tulos on yleistetty Stokesin lause (ei johdeta), josta seuraa klassinen Stokesin lause, divergenssilause ja Greenin lause tasossa. Sähkömagnetismi on Poincaré-relativistinen teoria (luku 32). Tämä oli eräs tärkeimmistä Einsteinin ideoista. Tavoitteena on esittää sähkömagnetismi myös Lorentzin monistolla. Luvussa 33 tarkastellaan sähkömagneettisen kentän muuntumista Poincarén muunnoksissa ja testivaruksen liikettä kentässä.

Massan säilymlaki nestedynamiikassa on käsitelty luvussa 27 ja nyt luvussa 34 johdetaan analogisesti varauksen, energian ja liikemäärän säilymlait sähkömagnetismissä. Energia-impulssitensorit johdetaan sekä sähkömagneettiselle kentälle tyhjiössä että relativistiselle nestelle. Luvussa 35 määritellään ‘avaruuden kaarevuus’ ja Einsteinin tensori, jota tarvitaan heti luvussa 36, kun Einsteinin yhtälö perustellaan. Lisäksi tarkastellaan varattua mustaa aukkoa, joka yhdistää mukavasti sähkömagnetismin Coulombin lain pistevaraukselle ja gravitaation.

Luku 37 sisältää aaltoyhtälön retardoidun ratkaisun sekä taso- ja palloaallot. Niitä sovelletaan sähkömagnetismiin ja gravitaatioon seuraavassa luvussa 38. Mielenkiintoista on havaita, että kiihtyvä varaus säteilee ja täten klassinen atomi ei pysy kasassa. Tutkimme myös miten tasoaallon fysikaaliset parametrit voidaan mitata kokeellisesti fotonilaskureilla ja kahdeksan portin homodyynidetektorilla.

Kirjassa on käytetty monia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä kuten Lagrangen, Hamiltonin, Navierin-Stokesin, Maxwellin ja Einsteinin yhtälöitä. Luvussa 39 esitetään osittaisdifferentiaaliyhtälöt geometrisesti eli karttariippumattomalla tavalla. Luvun tuloksia tarvitaan viimeisessä luvussa 40, missä esitetään Lagrangen kenttäteorian alkeet (kaarevissa avaruuksissa). Yleistämme luvun 12 variaatiolaskennan mekaniikasta kenttäteoriaan. Sovelluksena on sähkömagnetismi kaarevassa avaruudessa ja kirjan päättää tyhjiön gravitaatiokentän Lagrangen tiheyden esittely.

Sisältö

1 FYS: Avaruus ja aika	1
1.1 Avaruus-ajan matemaattinen esitys	5
2 GEOM: Affini avaruus	7
2.1 Affinit kuvaukset	10
2.2 Fysikaalinen tulkinta	14
2.3 Euklidinen avaruus	15
3 FYS: Galilein avaruus-aika	17
3.1 Newtonin mekaniikka	19
4 FYS: Relativistinen avaruusaika	21
4.1 Poincarén muunnokset	23
5 FYS: Relativistinen mekaniikka	28
6 GEOM: Monistot	32
7 GEOM: Vektorit	38
8 GEOM: Tensorit	44
9 FYS: Mekaniikkaa semi-Riemannin monistoilla	50
9.1 Lagrangen liikeyhtälöt	54
10 FYS: Yleistä suhteellisuusteoriaa	60
10.1 Gravitaatio	62
11 FYS: Schwarzschildin metriikka ja mustat aukot	69
12 FYS: Hamiltonin periaate ja geodeesit	76
12.1 Geodeesiyhtälö	81
13 FYS: Side-ehdot Lagrangen mekaniikassa	86
13.1 Hiukkasjoukon sidottu liike	86
13.2 Lagrangen kertoimet ja pakkovoimat	87

14 GEOM: Differentiaalimuodot	91
15 FYS: Legendren muunnos ja Hamiltonin mekaniikka	94
15.1 Hamiltonin yhtälöt	95
15.2 Ajasta riippuvat systeemit	97
16 GEOM: Vektorikentän integraalikäyrät	100
16.1 Bilineaarikuvaus lineaarikuvauksena	102
17 FYS: Faasiavaruus symplektisena monistona	105
17.1 Yleistetty faasiavaruus	107
18 FYS: Tilat, suureet ja liikevakiot	111
19 FYS: Faasiavaruuden muunnokset	116
19.1 Galilein muunnosten generaattoreita	121
20 FYS: SO(3) sekä Galilein ja Poincarén ryhmät	123
20.1 Galilein ryhmä	127
20.2 Poincarén ryhmä	129
21 FYS: Symmetriat, kanoniset parit ja Noetherin lause	132
21.1 Kovariantit suureet	135
21.2 Symmetriset metriikat ja Killingin vektorikentät	136
22 FYS: Newtonin gravitaation relativistinen korjaustermi	139
22.1 Ympyräradat	142
22.2 Muut radat	143
23 FYS: Kanoniset muunnokset	146
23.1 Generoivat funktiot	148
23.2 Ajasta riippuva tapaus	152
23.3 Faasivirrat ja kanoniset muunnokset	154
24 FYS: Täydellisesti integroituvat systeemit	156
24.1 Hamiltonin-Jacobin menetelmä	159

25 FYS: Vaikutus- ja kulmamuuttujat	164
25.1 Liike yhdessä ulottuvuudessa	165
25.2 Useampiulotteinen liike	170
26 FYS: Hyrrä	173
27 FYS: Nestedynamiikkaa ja Navierin–Stokesin yhtälö	180
28 FYS: Kortewegin–de Vriesin yhtälö	187
29 FYS: Maxwellin yhtälöt	192
29.1 Kenttien väliset yhteydet	194
29.2 Maxwellin ja NS yhtälöitten matemaattinen yhteys	196
30 GEOM: Hodgen \star-operaattori ja kodifferentiaali δ	198
30.1 Tensoritulo, kontraktio, alennus ja ylennys	198
30.2 Differentiaalimuotojen \star -operaattori ja kodifferentiaali	199
31 GEOM: Integrointiteoriaa	204
31.1 Yleistetty Stokesin lause	206
32 FYS: Maxwellin yhtälöt Minkowskin avaruudessa	211
33 FYS: Varauksen liike sähkömagneettisessa kentässä	217
34 FYS: Säilymlait	222
34.1 Sähkömagneettisen kentän energia-impulssitensori tyhjiössä	223
35 GEOM: Konnektio, kaarevuus ja Einsteinin tensori	230
35.1 Yhdensuuntaissiirtymä	232
35.2 Kaarevuustensori	233
36 FYS: Einsteinin yhtälö ja varattu musta aukko	236
36.1 Reissnerin-Nordströmin metriikka	239
37 FYS: Aaltoyhtälön ratkaisuja	245
37.1 Dipolimomentti	247

38 FYS: Säteily	249
38.1 Homodyynidetektori	252
38.2 Gravitaatiosäteily	255
39 GEOM: Suihkumonistot	257
39.1 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt	260
40 FYS: Lagrangen kenttäteoriaa	262
40.1 Sähkömagneettisen kentän Lagrangen tiheys tyhjiössä	264
41 Kirjallisuutta	267

1 FYS: Avaruus ja aika

Tässä luvussa tarkastellaan *Newtonin mekaniikkaa* (N) ja Einsteinin *erityistä* tai *suppeaa suhteellisuusteoriaa* (E). N:ssä ja E:ssä fysikaalisia systeemejä kutsutaan *kappaleiksi* tai äärimmäisenä idealisointina *massapisteiksi* eli *hiukkasiksi*, jotka ovat pistemäisiä kappaleita.³ Kappaleet sijaitsevat *avaruudessa*. *Havaitsija* havaitsee tai mittaa fysikaalisten systeemien (eli mekaniikassa kappaleitten) ominaisuuksia ja niiden muuttumista *ajan* myötä tai esimerkiksi *mittauksen* seurauksena.

Kappaleen (tai paremminkin massapisteen) hetkellisenä (*liike*)tilalla tarkoitetaan sen hetkellistä paikkaa ja nopeutta. Kappaleen ominaisuuksia tarkastellaan sen liikkeen eli liiketilän avulla ja ominaisuuksien muutokset kuvataan liiketilän muutoksina. *Vapaa kappale* on kappale, joka ei vuorovaikuta muitten kappaleitten kanssa. Tällaisen kappaleen olemassaolo on kyseenalaista, mutta joissain tapauksissa voidaan ajatella, että kappale on vapaa mittaustarkkuuden rajoissa. Vapaan kappaleen liiketilän muutoksen syynä on kummassakin teoriassa *voima*; jos kappaleen nopeus muuttuu (eli kappaleen kiihtyvyys on nollasta eriävä), niin kappaleeseen kohdistuu voima. Kappaleet vuorovaikuttavat toistensa kanssa voimien välityksellä (kappale kohdistaa toiseen kappaleeseen esim. gravitaatio- tai sähkömagneettisen voiman). Kappale pyrkii vastustamaan liiketilänsä muutoksia. Tämä ominaisuus on kappaleen (hidas tai inertia-) *massa*.

Koska eri havaitsijat tai mittaajat sijaitsevat eri avaruuden paikoissa ja voivat liikkua toisiinsa nähden, he näkevät fysikaalisen systeemin liikkeen eri tavoin. Jos havaitsijalla on käytössä etäisyyden ja ajan mittaamiseen tarvittavat mittalaitteet, hän pystyy esittämään avaruuden pisteet ja tapahtumien tapahtumisajat reaalitylukujen eli koordinaattien avulla; havaitsija mittalaitteineen muodostaa *mittausaseman* tai *vertailujärjestelmän*. Kappaleen liike voi eri vertailujärjestelmissä näyttää hyvinkin erilaiselta.

Inertiaali- eli *vitkaisjärjestelmällä* tarkoitetaan vertailujärjestelmää, jossa vapaan kappaleen liike on tasaista ja suoraviivaista eli vapaan kappaleen nopeus on vakio. N:ssä ja E:ssä oletetaan, että on olemassa ainakin yksi inertiaalijärjestelmä. Tästä seuraa, että itse asiassa inertiaalijärjestelmiä on äärettömän monta.

N:n inertiaalijärjestelmät ovat Galilein järjestelmiä eli inertiaalijärjestelmät ovat toisistaan Galilein muunnoksen päässä, kun taas E:n inertiaalijärjestelmät ovat Poincarén järjestelmiä eli inertiaalijärjestelmät ovat toisistaan Poincarén muunnoksen päässä. Täten sanotaan, että N

³Esimerkiksi Keplerin lakeja todistettaessa planeettoja voidaan käsitellä pistemäisinä kappaleina. Toisaalta voidaan ajatella, että kappale koostuu massapisteistä.

on *Galilei-relativistinen* ja E on *Poincaré-relativistinen* teoria. Näitä muunnoksia tarkastellaan myöhemmin.

Avaruus

Fysikaaliset tapahtumat sattuvat avaruudessa ja ajassa. N:ssä ja E:ssä oletetaan, että fysikaalinen avaruus on ääretön kolmiulotteinen jatkumo, jossa on euklidinen metriikka. Tällöin havaitsija kokee ja pystyy ‘mittamaan’ kolme paikkaulottuvuutta käyttäen mittakeppeinä *jäykkää sauvoja*; jäykkien sauvojen oletetaan säilyttävän pituutensa inertiaalijärjestelmässä, kun niitä siirretään paikasta toiseen ja ne ovat inertiaalijärjestelmän suhteen uudestaan levossa siirron jälkeen.

Inertiaalihavaitsija konstruoi avaruuteen (karteesisen) *koordinaatiston* eli *kartan*. Hän valitsee jonkun pisteen O avaruudesta (ns. *origon*) ja kolme kohtisuoraa suuntaa (*koordinaatiakselit*), ja mittaa pisteen etäisyydet origosta kyseisiä akseleita pitkin käyttäen esimerkiksi mittakeppejä. Näin hän pystyy ilmaisemaan jokaisen pisteen A aseman avaruudessa yksikäsitteisesti kolmen reaaliluvun eli koordinaatin $x^1(A)$, $x^2(A)$ ja $x^3(A)$ avulla. *Karteesinen kartta* on bijektio eli kääntyviä kuvaus fysikaaliselta avaruudelta \mathbb{R}^3 :lle eli jokaista reaalilukukolmikkoa $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ vastaa yksikäsitteinen avaruuden piste $A(x^1, x^2, x^3)$. On tärkeää erottaa fysikaalisen avaruuden pisteet A ja koordinaatit $(x^1(A), x^2(A), x^3(A))$, joilla havaitsija kuvaa pisteen asemaa oman koordinaatistonsa suhteen; saman pisteen kuvaamiseen voidaan käyttää eri koordinaatistoja. Huom! Usein merkitään $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z) = \mathbf{r}$, kun kyse on kolmiulotteisesta karteesisesta kartasta.

Aika

N:ssä oletetaan, että aika on absoluuttinen ja virtaa luonnostaan samanlaisena ilman, että mikään ulkoinen asiantila siihen vaikuttaisi. Aika N:ssa on siis *universaaliaika* eli kaikissa inertiaalijärjestelmissä on sama aika.

E:ssä taas oletetaan, että aika on suhteellinen ja riippuu havaitsijan liiketilasta. Tämä seikka johtuu siitä, että kokeet⁴ tukevat käsitystä, jonka mukaan *valon nopeus (ja siis vauhti) tyhjiössä on (sama) vakio $c := 299792458$ m/s kaikissa inertiaalijärjestelmissä; lisäksi oletetaan, että ei ole olemassa signaaleja, jotka etenisivät valoa nopeammin*. Kummassakin teoriassa oletetaan, että aika on yksiulotteinen euklidinen avaruus ja kukin havaitsija voi määritellä ajan suunnan

⁴Esim. Michelsonin-Morleyn kiertomatkatkoe (jossa käytetään vain yhtä kelloa).

sekä (ainakin joidenkin) tapahtumien aikajärjestyksen.

Kello eli ajankulun osoitin on mikä tahansa mekanismi, joka liittää aikajärjestyksen säilyttäen tapahtumiin reaalityyppiset eli ‘aikakoordinaatit’; käytetään tässä symbolia t kyseiselle koordinaattiajalle. Kello⁵ voi perustua esimerkiksi heiluriliikkeeseen tai se voi olla vakionopeudella etenevän hiukkasen paikka. Varsinkin E:ssä on kätevää käyttää aikakoordinaattia $x^0 := ct$, jonka yksikkö on metri mikäli ajan yksikkö on sekunti. Tarkastellaan seuraavassa kellojen synkronointia eli tahdistamista inertiaalijärjestelmässä.

Oletetaan, että havaitsijalla on kaksi samanlaista kelloa ja hän haluaa *synkronoida* ne keskenään eli ‘laittaa samaan aikaan’. Alussa kellot ovat samassa avaruuden pisteessä ja osoittavat samaa aikaa. Sitten havaitsija siirtää toisen kellon toiseen avaruuden pisteeseen, missä aikaa halutaan mitata. Myöhemmin osoitetaan, että E:ssä kello hidastuu siirron aikana ja näyttää täten eri aikaa siirron jälkeen (vaikka käykin samalla nopeudella siirron jälkeen). Jotta kello ei hidastuisi, se pitäisi siirtää ‘äärettömän’ hitaasti, mikä on mahdollista vain mittaustarkkuuden rajoissa. N:ssä tällaista ongelmaa ei ole.

Ratkaisu kellon hidastumisen ongelmaan on kellon synkronisointi siirron jälkeen (valo)signaalia käyttäen [kuva 1]: Olkoon pisteessä A kello (levossa inertiaalijärjestelmän suhteen), joka näyttää aikaa t . Lähetetään hetkellä $t = t_1$ suora (ei väliheijastuksia) valosignaali pisteestä A pisteeseen B . Se heijastuu pisteestä B ja saapuu takaisin pisteeseen A hetkellä t_3 . Signaalin saapumisaika pisteessä B on (tai määritellään olevan⁶) $t_2 := (t_1 + t_3)/2$. Tätä synkronisointia⁷ sanotaan *Einsteinin synkronoinniksi* ja se määrää myös vastaavasti *tapahtumien (Einsteinin) samanaikaisuuden* ja *aikaeron*: Tapahtumien aikaero on tapahtumien tapahtumispisteissä synkronoiduilla (levossa olevilla) kelloilla mitattujen aikojen erotus. Jos aikaero on nolla, niin tapahtumat ovat samanaikaisia. Huomaa, että samanaikaisuuden käsite E:ssä on suhteellinen eli voi riippua havaitsijasta tai havaitsijan nopeudesta [kuva 1].

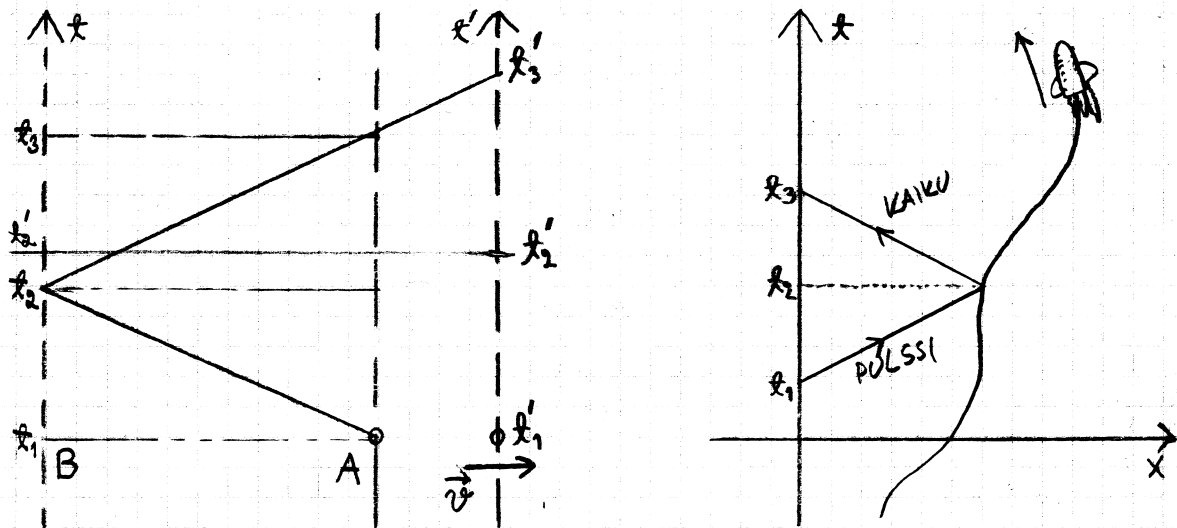
Lisäksi pisteitten A ja B välinen etäisyys hetkellä t_2 voidaan määrätä käyttämättä jäykkiä sauvoja: se on $c(t_3 - t_1)/2$. Saapumisajan ja etäisyyden kaavat ovat ns. tutkakaavoja: ajatellaan, että pisteessä A on tutka, joka lähettää pulsseja ja mittaa niiden kaikuja [kuva 1].

Myös N:ssa kellot voidaan synkronisoida signaaleja käyttäen, mutta koska N:ssa signaalino-

⁵Myös eräänlaisena ‘kellona’ voidaan pitää eliön biologisten prosessien tapahtumisnopeutta (vanhenemisnopeus) tai radioaktiivisen ytimen puoliintumisaikaa.

⁶Voitaisiin myös määritellä, että $t_2 := t_1 + \epsilon(t_3 - t_1)$, missä $0 < \epsilon < 1$. Einsteinin valinta $\epsilon = 1/2$ johtaa yksinkertaisempaan teoriaan.

⁷Eli esimerkiksi B voi ‘koodata’ heijastuvaan signaaliin oman kellonsa lukeman (vrt. aikamerkki), jonka A vastaanottaa hetkellä t_3 . Täten A tietää mitä B :n kello näytti hetkellä t_2 .



Kuva 1: A-havaintsija lähettää signaalin, joka heijastuu B:stä takaisin. Jos A liikkuu (poispäin kuvassa) saadaan eri heijastusaika kuin jos A olisi paikoillaan.

peudella ei ole ylärajaa, kellot voidaan tahdistaa silmänräpäyksessä (*Newtonin synkronointi*). Lisäksi eri pisteiden välinen aikavertailu voidaan suorittaa välittömästi.

Jatkossa voidaan olettaa, että kunkin inertiaalijärjestelmän jokaisessa pisteessä on kello, joka on synkronoitu kyseisen inertiaalijärjestelmän 'keskuskellon' (ja täten muitten kellojen) kanssa. Lisäksi oletetaan, että avaruuden eri pisteissä oleville kelloille on asetettu sama nollakohta. Täten havaintsija voi mitata omassa inertiaalikoordinaatistossaan tapahtuman tapahtumishetken kellojensa (ja valosignaalien) avulla. Lisäksi tapahtumishetki voidaan ilmaista yhden aikakoordinaatin avulla: esim. universaaliaika N :ssä tai havaintsijan (keskuskellon) koordinaattiaika t (tai $x^0 = ct$) E :ssä. Huom! Joskus inertiaalihavaintsijan koordinaattiaikaa t sanotaan laboratorioajaksi erotuksena liikkuvan kappaleen 'mukana kulkevan' kellon ominaisajasta τ .

Liike

Massapisteen liike avaruudessa esitetään maailmanviivan käsitteen avulla; massapisteen *maailmanviiva* tai *historia* on kyseisessä pisteessä aikajärjestetty tapahtumajono. Matemaattisesti massapisteen liike on parametrisoitu (riittävän monta kertaa paloittain differentioituva) jatkuva käyrä systeemin (liike)tilan määrittelevässä (tila)avaruudessa. Parametrina käytetään yleisimmin universaaliaikaa (N) tai kappaleen ominaisaikaa (E). Liike saadaan likeyhtälön ratkaisuna.

Inertiaalijärjestelmässä voidaan avaruus-ajan tapahtuma ilmoittaa paikkakoordinaattien $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ja koordinaattiajan t avulla. Vapaasti liikkuvan hiukkasen maailmanviiva on suora

viiva eli liike toteuttaa yhtälön $\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0$, missä \mathbf{v} , $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ ovat vakioita (nopeus ja paikka hetkellä $t = 0$). E:ssa valosignaalin yhtälö on samaa muotoa ja $|\mathbf{v}| = c$. Massallisille hiukkasille $|\mathbf{v}| < c$.

1.1 Avaruus-ajan matemaattinen esitys

Kummankin teorian (N ja E) matemaattisena pohjana on *neliulotteinen affiini geometria*. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että havaitsija havaitsee kolme paikkaulottuvuutta ja yhden aikaulottuvuuden. Kummassakin teoriassa avaruus-aika on ääretön neliulotteinen affiini avaruus \mathbb{A}^4 eli ‘joukko, jonka pisteet voidaan yhdistää toisiinsa \mathbb{R}^4 :n vektoreilla luonnollisella tavalla’.⁸ Fysikaalisesti pisteitä yhdistävä vektori voi kuvata vaikka suoraa valon sädettä, joka lähetetään pisteestä toiseen.

N:n ja E:n avaruus-aikojen ero tulee selkeimmin esille siinä, että E:ssä avaruusaikaa ei voi jakaa invariantilla tavalla avaruuteen ja aikaan. Tällainen jako on mahdollinen vain kunkin inertiaalikoordinaatiston suhteen. N:ssä taasen on mahdollista ‘irroittaa’ universaaliaika-akseli avaruus-ajasta.

Affiini avaruus soveltuu paremmin avaruus-ajan kuvaamiseen kuin vektorivaruus \mathbb{R}^4 , sillä vektorivaruudella on kiinteä origo $\vec{0} := (0, 0, 0, 0)$, kun taas affinisessa aika-avaruudessa kukin havaitsija valitsee itse koordinaattinsa (esim. \mathbf{x} tai \mathbf{x}') ja origon (esim. O tai O'). Tarkastellaan seuraavassa affinia rakennetta tarkemmin.

Kun kiinnitetään piste $O \in \mathbb{A}^4$ (avaruus-ajan origo), niin mielivaltainen piste $A \in \mathbb{A}^4$ voidaan esittää vektorina $\mathbf{x}(A) := \overrightarrow{OA} \in \mathbb{R}^4$ (pisteen A karteesiset koordinaatit). Erityisesti voidaan määritellä ‘karteesinen’ eli **affiini kartta** $\mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$A \mapsto \mathbf{x}(A) = (x^0(A), x^1(A), x^2(A), x^3(A)).$$

Myöhemmin osoitetaan, että kaikki \mathbb{A}^4 :n affiinit kartat ovat muotoa

$$\mathbb{A}^4 \ni A \mapsto \mathbf{x}'(A) := \mathbf{M}\mathbf{x}(A) + \mathbf{o} \in \mathbb{R}^4,$$

missä $\mathbf{M} = (M^\mu_\nu)_{\mu,\nu=0}^3$ on kääntyvä 4×4 -reaalimatriisi ja $\mathbf{o} = (o^0, o^1, o^2, o^3) \in \mathbb{R}^4$. Usein

⁸Huom! Einsteinin yleisessä suhteellisuusteoriassa oletetaan, että avaruus-aika on vain lokaalisti eli paikallisesti affiini.

merkitään koordinaattimuunnosta $\mathbf{x}(A) \mapsto \mathbf{x}'(A)$ komponenttimuodossa

$$\begin{aligned} x'^0 &= \sum_{\nu=0}^3 M^0_{\nu} x^{\nu} + o^0, & x'^1 &= \sum_{\nu=0}^3 M^1_{\nu} x^{\nu} + o^1, \\ x'^2 &= \sum_{\nu=0}^3 M^2_{\nu} x^{\nu} + o^2, & x'^3 &= \sum_{\nu=0}^3 M^3_{\nu} x^{\nu} + o^3 \end{aligned}$$

tai lyhyesti käyttäen *Einsteinin summaussääntöä*⁹ $x'^{\mu} = M^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + o^{\mu}$. Eli siis affiini koordinaattimuunnos koostuu (kääntyvästä) lineaarikuvauksesta $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}\mathbf{x}$ ja siirrosta $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{o}$. Huom! Usein (varsinkin suhteellisuusteoriassa) kääntyvän matriisin $\mathbf{M} = (M^{\mu}_{\nu})_{\mu,\nu=0}^3$ käänteismatriisin \mathbf{M}^{-1} matriisialkioita merkitään $M_{\mu}^{\nu} := [\mathbf{M}^{-1}]^{\nu}_{\mu}$ eli $\mathbf{M}^{-1} = (M_{\mu}^{\nu})_{\nu,\mu=0}^3$ ja $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}'$ on $x^{\nu} = M_{\mu}^{\nu} x'^{\mu}$. Tällöin ehdot $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{1}$ ja $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{1}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$M_{\mu}^{\alpha} M^{\mu}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\alpha}, \quad M^{\mu}_{\nu} M_{\alpha}^{\nu} = \delta_{\alpha}^{\mu}.$$

Identiteettimatriisia merkitään aina symbolilla $\mathbf{1}$ eli (neliulotteisessa avaruudessa) $\mathbf{1} = \text{diag}(1, 1, 1, 1) = (\delta_{\nu}^{\mu})_{\mu,\nu=0}^3$, missä δ_{ν}^{μ} on Kroneckerin delta.¹⁰

Havaitсияt voivat käyttää myös muita karttoja avaruus-ajan kuvaamiseen, mutta tällöin kartat eivät säilytä affinia rakennetta eivätkä välttämättä ole edes bijektioita; ne voivat olla määritelty vain paikallisesti eli lokaalisti. Jos näin on, niin koko avaruus-ajan kartoittamiseen tarvitaan enemmän kuin yksi kartta. Esimerkiksi tason \mathbb{R}^2 karteesiset koordinaatit ovat affiineja mutta napakoordinaatit eivät. [!]

⁹Yhtälöt (ja vastaavasti epäyhtälöt) ovat yleisesti muotoa LAUSEKE1 = LAUSEKE2. Jos vain toisen lausekkeen sisällä esiintyy sama indeksi (esim. ν) kaksi kertaa, sen indeksin summamerkintä (esim. \sum_{ν}) jätetään lausekkeesta pois. Esimerkiksi $A_{\gamma}^{\alpha} B_{\alpha}^{\beta\delta} C_{\beta} = D_{\gamma}^{\delta\kappa} E_{\kappa}$ tarkoittaa $\sum_{\alpha,\beta} A_{\gamma}^{\alpha} B_{\alpha}^{\beta\delta} C_{\beta} = \sum_{\kappa} D_{\gamma}^{\delta\kappa} E_{\kappa}$, joka pätee kaikilla indeksien γ ja δ arvoilla. Toisaalta yhtälössä $A_i = B_i C_i$ ei ole mitään summaa.

¹⁰Eli $\delta_{\mu}^{\mu} = 1$ (ei summausta) ja $\delta_{\nu}^{\mu} = 0$, kun $\mu \neq \nu$. Voidaan myös merkitä $\delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$.

2 GEOM: Affiini avaruus

Joitain alkeismääritelmiä

Kuten tunnettua kuvaus eli funktio $f : X \rightarrow Y$ (missä X ja Y ovat joukkoja) on

- *injektio*, jos ehdosta $f(x_1) = f(x_2)$, missä $x_1, x_2 \in X$, seuraa, että $x_1 = x_2$,
- *surjektio*, jos kaikilla $y \in Y$ on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$ (toisin sanoen kuvajoukko¹¹ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = Y$),
- *bijektio* eli *kääntyvä*, jos se on sekä injektio että surjektio. Tällöin f :llä on *käänteiskuvaus* $f^{-1} : Y \rightarrow X$, jolle $f^{-1}(f(x)) = x$ kaikilla $x \in X$. Lisäksi f^{-1} on kääntyvä ja sen käänteiskuvaus on f eli $(f^{-1})^{-1} = f$.

Huom! Oli f kääntyvä tai ei, voidaan aina merkitä joukon $J \subseteq Y$ alkukuvaa symbolilla $f^{-1}(J)$ eli

$$f^{-1}(J) := \{x \in X \mid f(x) \in J\} \subseteq X.$$

Jos $g : Y \rightarrow Z$ on toinen kuvaus (missä Z on joukko), niin yhdistetty kuvaus $g \circ f$ määritellään kaavalla

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

kaikilla $x \in X$. Jos f on kääntyvä, niin $f^{-1} \circ f = \text{id}$, missä id on identiteettikuvaus eli $\text{id}(x) := x$ kaikilla $x \in X$. Merkintä $:=$ tarkoittaa ‘määritelmän mukaan sama.’

Affiini avaruus

Määritelmä 1. Affiini avaruus on kolmikko $\langle \mathbf{A}, V, \alpha \rangle$, missä \mathbf{A} on joukko, V on vektoriavaruus ja $\alpha : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow V$ on kuvaus sekä

(i) kaikilla $A \in \mathbf{A}$, $v \in V$ on olemassa yksikäsitteinen $B \in \mathbf{A}$ siten, että $v = \alpha(A, B)$,

(ii) kaikilla $A, B, C \in \mathbf{A}$, $\alpha(A, B) + \alpha(B, C) = \alpha(A, C)$

(Weylin aksioomat). Kuvausta $\alpha : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow V$ sanotaan joukon \mathbf{A} affiiniksi rakenteeksi mikäli se toteuttaa ehdot (i) ja (ii).

¹¹Osajoukon $U \subseteq X$ kuvajoukko $f(U) := \{f(x) \mid x \in U\} \subseteq Y$.

Määritelmä 2. *Affini avaruus* $\langle \mathbf{A}, V, \alpha \rangle$, tai lyhyesti \mathbf{A} (yli $V:n$), on reaalinen, kompleksinen, äärellisulotteinen tai ääretönulotteinen, jos vektoriavaruus V on vastaavasti reaalinen, kompleksinen, äärellisulotteinen tai ääretönulotteinen; \mathbf{A} :n ulottuvuus $\dim \mathbf{A} := \dim V$. Jos $V = \mathbb{R}^n$, niin merkitään $\mathbb{A}^n := \mathbf{A}$.

Siis affiini avaruus \mathbf{A} koostuu *pisteistä*, joita yhdistää *vektorit*, eli jos $A, B \in \mathbf{A}$, niin on olemassa (yksikäsitteinen) vektori $\alpha(A, B)$, jolle käytetään merkintää \overrightarrow{AB} . Lisäksi jokaisella $A \in \mathbf{A}$ ja $v \in V$ on olemassa (yksikäsitteinen) piste $B \in \mathbf{A}$ siten, että $v = \overrightarrow{AB}$ ja kaava

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

pätee. Välittömästi nähdään [!] ekvivalentti määritelmä¹² affiinille avaruudelle:

Määritelmä 3. *Affini avaruus on kolmikko* $\langle \mathbf{A}, V, \beta \rangle$, missä \mathbf{A} on joukko, V on vektoriavaruus ja $\beta : \mathbf{A} \times V \rightarrow \mathbf{A}$ on kuvaus sekä

(i)' kaikilla $A, B \in \mathbf{A}$ on olemassa yksikäsitteinen $v \in V$ siten, että $B = \beta(A, v)$,

(ii)' kaikilla $A \in \mathbf{A}$, $v, w \in V$, $\beta(A, v + w) = \beta(A, v) + w$.

Edellisen nojalla voidaan siis määritellä pisteen ja vektorin 'summa' $A + v := \beta(A, v) =: v + A$, joten ehdosta (ii)' tulee $A + (v + w) = (A + v) + w =: A + v + w$. Vektori v voidaan siis 'piirtää alkamaan mistä tahansa pisteestä' tai toisin sanoen vektori v voidaan *yhdensuuntaisiirtää* yksikäsitteisellä tavalla pisteestä toiseen. Kun yhdistetään affiinin avaruuden määritelmät ja niistä generoidut merkinnät $\overrightarrow{AB} := \alpha(A, B)$ ja $A + v := \beta(A, v)$ saadaan kaava $A + \overrightarrow{AB} = B$, joten voidaan määritellä pisteiden 'erotus'

$$B - A := \overrightarrow{AB}.$$

Huomaa, että *pisteiden* 'summaa' (tai lineaarikombinaatiota) ei voida yleisessä tapauksessa määritellä (vertaa esimerkki 1). Affiinin avaruuden määritelmistä on helppo johtaa kaavoja:

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}, \quad A + \vec{0} = A, \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \quad B - A = -(A - B), \quad (A + v) - A = v. \quad (1)$$

Harjoitustehtävä 1. *Johda yllä olevat kaavat (1). Osoita lisäksi, että kaikilla pisteillä* O, O', A, B *ja skalaariluvuilla* λ *kaava*

$$O + \lambda(B - O) + (1 - \lambda)(A - O) = O' + \lambda(B - O') + (1 - \lambda)(A - O')$$

¹²Eli additiivinen ryhmä V operoi joukossa \mathbf{A} vapaasti ($\beta(A, v) = A \implies v = \vec{0}$) ja transitiiivisesti (kohta (i)').

pätee. Täten voidaan yksikäsitteisellä tavalla määrittellä pisteiden A ja B affiinikombinaatio

$$\lambda B + (1 - \lambda)A := O + \lambda(B - O) + (1 - \lambda)(A - O) \in \mathbf{A}.$$

Totea, että (kun $\mathbf{A} = \mathbb{A}^n$) pisteitä A ja B yhdistävä jana koostuu pisteistä

$$\lambda B + (1 - \lambda)A = A + \lambda \overrightarrow{AB}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Mikä on nyt suoran yhtälö?

Huomautus 1. Edellisen tehtävän nojalla voidaan määrittellä affiinin avaruuden \mathbf{A} pisteiden A_k yleinen affiinikombinaatio

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k A_k \in \mathbf{A}, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1,$$

käyttäen induktiota eli $\sum_{k=1}^n \lambda_k A_k := (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_k A_k + \lambda_n A_n$, missä oletetaan, että $\lambda_n \neq 1$, ja määrittellen $\tilde{\lambda}_k := \lambda_k / (1 - \lambda_n)$, joille $\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_k = 1$ (jos $\lambda_n = 1$, niin $\sum_{k=1}^n \lambda_k A_k := A_n$).

Esimerkki 1. Vektoriavaruus V (eli määritelmässä $\mathbf{A} = V$) on affiini avaruus, kun määrittellen $\alpha(v, w) = \overrightarrow{vw} := w - v$ ja $\beta(v, w) := v + w$. Tällöin vektoriavaruuden alkioita voidaan tulkita sekä *pisteiksi* että pisteitä yhdistäviksi *vektoreiksi*. Jatkossa oletetaan aina, että vektoriavaruus on varustettu tällä affiinilla rakenteella.

Harjoitustehtävä 2. a) Osoita, että affiinin avaruuden \mathbb{R}^3 tasot, suorat ja 'pisteet' (eli yksisiöt $\{\mathbf{x}\}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) ovat affiineja avaruuksia. Mitkä ovat niiden ulottuvuudet? Milloin ne ovat vektoriavaruuksia?

b) Olkoon \bar{V} vektoriavaruus (yli \mathbb{R} :n tai \mathbb{C} :n) ja $v_1, v_2, \dots, v_n \in \bar{V}$. Määrittellen $\mathbf{A} := \{\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \mid \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1\}$ ja $V := \{\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \mid \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0\}$. Osoita, että \mathbf{A} on affiini avaruus yli V :n.

Esimerkki 2. Olkoon V ja V' vektoriavaruuksia ja $T : V \rightarrow V'$ lineaarikuvaus. Kiinnitetään piste $v' \in V'$ kuvauksen T kuvajoukosta $T(V) \subseteq V'$ (eli $v' = Tv_s$ jollain vektorilla $v_s \in V$). Yhtälön $Tv = v'$ ratkaisuiden v muodostama joukko $v_s + \ker T = \{v_s + v_h \mid v_h \in \ker T\}$ on affiini avaruus yli vektoriavaruuden

$$\ker T := \{v_h \in V \mid Tv_h = \vec{0}\}$$

(lineaarikuvauksen T ydin eli 'kerneli'). Nyt V ja V' voivat olla funktioista koostuvia vektoriavaruuksia ja T lineaarinen differentiaalioperaattori. Tällöin T :n määräämän epähomogeenisen

differentiaaliyhtälön ratkaisuiden joukko on affiini avaruus. Esimerkiksi pakotetun harmonisen oskillaattorin liikeyhtälö on

$$(T\underline{x})(t) := m \frac{d^2 \underline{x}(t)}{dt^2} + k\underline{x}(t) = F(t),$$

missä \underline{x} ja F ovat (sileitä) funktioita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nyt ratkaisut ovat muotoa

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_s(t) + \underline{x}_h(t),$$

missä \underline{x}_s on yhtälön ‘yksittäisratkaisu’ ja \underline{x}_h toteuttaa homogeeniyhtälön

$$(T\underline{x}_h)(t) = m \frac{d^2 \underline{x}_h(t)}{dt^2} + k\underline{x}_h(t) \equiv 0$$

eli $\underline{x}_h \in \ker T$. Tunnetusti $\underline{x}_h(t) = A \sin(\sqrt{k/m}t) + B \cos(\sqrt{k/m}t)$, missä $A, B \in \mathbb{R}$. Täten $V = V'$ koostuu sileistä funktioista $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\ker T$:n virittää \sin ja \cos , joten $\dim V = \infty$, mutta $\dim \ker T = 2$.

2.1 Affinit kuvaukset

Määritelmä 4. *Olkoon $\langle \mathbf{A}, V, \alpha \rangle$ ja $\langle \mathbf{A}', V', \alpha' \rangle$ affineita avaruuksia.¹³ Kuvaus $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ on affiini, jos on olemassa lineaarikuvaus $T_\varphi : V \rightarrow V'$ siten, että kaikilla $A, B \in \mathbf{A}$,*

$$\alpha'(\varphi(A), \varphi(B)) = T_\varphi(\alpha(A, B)). \quad (2)$$

Affinia bijektioita $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ sanotaan affiiniksi isomorfismiksi.¹⁴

Helposti nähdään, [!] että affiinin kuvauksen $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ määrittelevä ehto (2) voidaan kirjoittaa yhtäpitävässä (mutta hieman epämääräisessä) muodossa

$$\boxed{\varphi(A + v) - \varphi(A) = T_\varphi(v)}$$

kaikilla $A \in \mathbf{A}$ ja $v \in V$, mistä välittömästi seuraa, että T_φ on yksikäsitteinen. Lisäksi \mathbf{A} :n kiinteälle pisteelle O

$$\varphi(B) = \varphi(O + \overrightarrow{OB}) = T_\varphi(\overrightarrow{OB}) + \varphi(O), \quad B \in \mathbf{A}.$$

¹³Täytyy lisäksi olettaa, että vektoriavaruuksilla V ja V' on sama skalaarikunta (esim. \mathbb{R} tai \mathbb{C}).

¹⁴Sillä affiini isomorfismi säilyttää täysin affiinin avaruuden rakenteet eli $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}'$ (bijektio), $V \cong V'$ (lineaarinen bijektio, ks. lemma 1) ja kaava (2). Affinisti isomorfiset affiinit avaruudet voidaan samaistaa, kun tarkastellaan kyseisten avaruuden affineja ominaisuuksia (esim. affiinit muunnokset, affiinit aliavaruudet, jne.).

Kiinnitetään myös \mathbf{A}' :n piste O' , joten pisteitä $\varphi(B)$ ja O' yhdistävä V' :n vektori on

$$\varphi(B) - O' = T_\varphi(\overrightarrow{OB}) + \varphi(O) - O' = T_\varphi(\overrightarrow{OB}) + o,$$

missä $o := \varphi(O) - O' \in V'$. Täten 'kiinnittämällä origot' O ja O' affiini kuvaus φ voidaan esittää muodossa $B \mapsto \varphi(B) = O' + \tilde{\varphi}(\overrightarrow{OB})$, missä affiini kuvaus

$$\tilde{\varphi}: V \rightarrow V', v \mapsto \tilde{\varphi}(v) := T_\varphi(v) + o$$

koostuu lineaarikuvauksesta T_φ ja V' :n translaatiosta $v' \mapsto v' + o$. Toisaalta helposti nähdään, että jokainen lineaarikuvauksen ja translaation yhdiste määrää affiineja kuvauksia yllä olevaan tapaan, joten ollaan saavutettu *täydellinen karakterisointi* affiineille kuvauksille.

Harjoitustehtävä 3. a) Osoita, että affiini kuvaus φ säilyttää pisteiden affinikombinaatiot, eli että

$$\varphi(\lambda B + (1 - \lambda)A) = \lambda\varphi(B) + (1 - \lambda)\varphi(A).$$

Yleistä kaava n :lle pisteelle (ks. huomautus 1). (Voitaisiinko yllä olevaa kaavaa käyttää affiinin kuvauksen määritelmänä?)

b) Olkoon $\langle \mathbf{A}, V, \alpha \rangle$, $\langle \mathbf{A}', V', \alpha' \rangle$ ja $\langle \mathbf{A}'', V'', \alpha'' \rangle$ affiineita avaruuksia sekä $\varphi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ ja $\varphi': \mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A}''$ affiineita kuvauksia. Osoita, että $\varphi' \circ \varphi$ on affiini.

Lemma 1. Olkoon T_φ affiiniin kuvaukseen φ liittyvä lineaarikuvaus. Jos φ on injektio (surjektio), niin T_φ on injektio (surjektio). Erityisesti, jos φ on bijektio, niin T_φ on bijektio ja V voidaan samaistaa V' :n kanssa sekä $\dim \mathbf{A} = \dim V = \dim V' = \dim \mathbf{A}'$.

Todistus. Jos affiini kuvaus φ on injektio, niin ehdosta $T_\varphi(v) = 0$ eli ehdosta $\varphi(A + v) = \varphi(A)$ seuraa, että $A + v = A$ eli $v = \vec{0}$ ja T_φ on injektio.¹⁵ Jos φ on surjektio, niin kaikilla $v' \in V'$ ja $A' \in \mathbf{A}'$ on olemassa pisteet $O, B \in \mathbf{A}$ siten, että $\varphi(O) = A'$ ja $\varphi(B) = A' + v'$ sekä

$$v' = (A' + v') - A' = \varphi(B) - \varphi(O) = \varphi(O + \overrightarrow{OB}) - \varphi(O) = T_\varphi(\overrightarrow{OB}),$$

joten T_φ on surjektio. □

Esimerkki 3. Olkoon $\pi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ affiini surjektio ja O mielivaltainen \mathbb{A}^m :n piste sekä $\overline{O} \in \mathbb{A}^n$ sellainen, että $\pi(\overline{O}) = O$. Nyt

$$\pi(\overline{O} + \mathbf{x}) = \mathbf{T}_\pi \mathbf{x} + \pi(\overline{O}) = \mathbf{T}_\pi \mathbf{x} + O, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

¹⁵Lineaarialgebrasta on tuttua, että lineaarikuvaus on injektio, jos se kuvaa *vain* nollavektorin nollavektoriksi. Lisäksi kääntyvän lineaarikuvauksen käänteiskuvaus on automaattisesti lineaarinen.

missä $\mathbf{T}_\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarinen surjektio eli $m \times n$ -reaalimatriisi, jossa on m lineaarisesti riippumatonta vaakariviä (mistä seuraa, että $m \leq n$). Täten

$$\pi^{-1}(\{O\}) := \{B \in \mathbb{A}^n \mid \pi(B) = O\} = \{\overline{O} + \mathbf{x} \mid \mathbf{T}_\pi \mathbf{x} = \vec{0}\} = \{\overline{O} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \ker \mathbf{T}_\pi\}$$

on $(n - m)$ -ulotteinen affiini avaruus yli $(n - m)$ -ulotteisen vektoriavaruuden $\ker \mathbf{T}_\pi$. Nyt $\pi^{-1}(\{O\})$:n pisteitä $\overline{O} + \mathbf{x}$ ja $\overline{O} + \mathbf{y}$ (missä siis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ker \mathbf{T}_\pi$) yhdistävä vektori $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \ker \mathbf{T}_\pi$. Sanotaan, että $\pi^{-1}(\{O\})$ on *affiini säie* pisteessä O .

Kun valitaan \mathbb{R}^n :n kanta $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ siten, että $\{\mathbf{e}_k\}_{k=m+1}^n$ on $\ker \mathbf{T}_\pi$:n kanta, nähdään, että jokainen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_e^k \mathbf{e}_k = \mathbf{x}_0^\perp + \mathbf{x}_0$, missä $\mathbf{x}_0 = \sum_{k=m+1}^n x_e^k \mathbf{e}_k \in \ker \mathbf{T}_\pi$. Tällöin $\overline{O} + \mathbf{x} = (\overline{O} + \mathbf{x}_0^\perp) + \mathbf{x}_0$ ja $\pi(\overline{O} + \mathbf{x}) = \mathbf{T}_\pi \mathbf{x}_0^\perp + O$.

Seuraavassa luvussa tarvitaan tapausta $m = 1$, jossa $\mathbf{T}_\pi \mathbf{e}_1 = a \neq 0$, joten määrittelemällä \mathbf{e}_1 uudelleen vektorina $a^{-1} \mathbf{e}_1$ voidaan olettaa, että $\mathbf{T}_\pi \mathbf{e}_1 = 1$. Nyt $\mathbf{x}_0^\perp = x_e^1 \mathbf{e}_1$ ja $\pi(\overline{O} + \mathbf{x}) = x_e^1 + O$. Täten (mielivaltaisen) pisteen $\overline{O} + \mathbf{x}$ koordinaateiksi voidaan valita $(x_e^1, x_e^2, \dots, x_e^n)$, missä x_e^1 on π :n kuva-avaruuden \mathbb{A}^1 (mielivaltaisen) pisteen $x_e^1 + O$ koordinaatti. Täten π voidaan esittää projektiona $\mathbb{R}^n \ni (x_e^1, \dots, x_e^n) \mapsto x_e^1 \in \mathbb{R}$.

Lause 1. *Olkoon $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ affiini isomorfismi (siis bijektio).*

- *Kuvauksen φ käänteiskuvaus $\varphi^{-1} : \mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A}$ on affiini ja siihen liittyvä lineaarikuvaus $T_{\varphi^{-1}}(v') = \varphi^{-1}(A' + v') - \varphi^{-1}(A') = T_\varphi^{-1}(v')$ kaikilla $v' \in V'$ ja $A' \in \mathbf{A}'$.*
- *Valitaan pisteet $O \in \mathbf{A}$ ja $O' \in \mathbf{A}'$ sekä määritellään $o := \varphi(O) - O'$. Kaikilla $v \in V$ ja $v' \in V'$,*

$$\varphi(O + v) = O' + T_\varphi(v) + o, \quad \varphi^{-1}(O' + v') = O + T_\varphi^{-1}(v') - T_\varphi^{-1}(o).$$

- *Kun valitaan $O' = \varphi(O)$ edellinen kohta redusoituu muotoon*

$$\varphi(O + v) = O' + T_\varphi(v), \quad \varphi^{-1}(O' + v') = O + T_\varphi^{-1}(v'),$$

ja sanotaan, että pisteet O ja O' ovat φ -yhteensopivat.

Todistus. Koska T_φ on kääntyvä edellisen lemmän mukaan, voidaan määrittellä kuvaus $\psi : \mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A}$ kaavalla $\psi(O' + v') := T_\varphi^{-1}(v') + \varphi^{-1}(O')$ kaikilla $v' \in V'$, missä $O' \in \mathbf{A}'$ on kiinnitetty piste. Nyt kaikilla $A' \in \mathbf{A}'$ ja $v' \in V'$,

$$\psi(A' + v') - \psi(A') = \psi(O' + \overrightarrow{O'A'} + v') - \psi(O' + \overrightarrow{O'A'}) = T_\varphi^{-1}(v')$$

joten ψ on affiini. Merkitään $O := \varphi^{-1}(O')$, joten kaikilla $B \in \mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}\psi(\varphi(B)) &= \psi\left(\varphi(O + \overrightarrow{OB})\right) = \psi\left(\underbrace{\varphi(O)}_{=O'} + T_\varphi(\overrightarrow{OB})\right) = T_\varphi^{-1}\left(T_\varphi(\overrightarrow{OB})\right) + \varphi^{-1}(O') \\ &= \overrightarrow{OB} + O = B\end{aligned}$$

ja täten $\psi = \varphi^{-1}$ sekä $T_{\varphi^{-1}} = T_\psi = T_\varphi^{-1}$. Loput kohdat ovat yksinkertaisia laskuja. \square

Harjoitustehtävä 4. a) *Todista edellisen lauseen toinen kohta. Oletetaan, että affiinissa avaruudessa \mathbf{A} on kaksi havaitsijaa. Toisen asema muuttuu affiinilla muunnoksella $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$. Mikä on vektorin $o := \varphi(O) - O'$ fysikaalinen merkitys? Entä mitä tilannetta ehto $O' = \varphi(O)$ kuvaa?*

b) *Palauta mieleen hiukkasjoukon massakeskipisteen määritelmä. Olkoon n kappaletta hiukkasia pisteissä $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{A}^3$. Kiinnitä origo O ja esitä pisteet \mathbb{R}^3 :n (paikka)vektoreina. Missä sijaitsee hiukkassysteemin massakeskipiste? Miten se muuttuu affiinissa muunnoksessa $\varphi : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$?*

Huomautus 2. 1) Olkoon \mathbf{A} joukko, V vektoriavaruus ja $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow V$ bijektio. On helppo osoittaa,¹⁶ että

$$\alpha^\varphi(A, B) := \varphi(B) - \varphi(A) \in V, \quad A, B \in \mathbf{A},$$

on joukon \mathbf{A} affiini rakenne ja φ on affiini isomorfismi affiinilta avaruudelta $\langle \mathbf{A}, V, \alpha^\varphi \rangle$ affiinille avaruudelle $\langle V, V, - \rangle$. Lisäksi $\varphi(B) = \alpha^\varphi(O_\varphi, B)$, missä $O_\varphi := \varphi^{-1}(\vec{0})$ eli 'origot' O_φ ja $\vec{0}$ ovat nyt φ -yhteensopivat. Voidaan sanoa, että joukko \mathbf{A} perii V :n affiinin rakenteen (eli pisteitä/vektoreita yhdistävän 'vähennyslaskun' $-$).

2) Toisaalta, jos $\alpha : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow V$ on joukon \mathbf{A} affiini rakenne, niin kiinnittämällä 'origo' $O \in \mathbf{A}$ voidaan määritellä affiini isomorfismi¹⁷ (bijektio) α_O avaruudelta $\langle \mathbf{A}, V, \alpha \rangle$ avaruudelle $\langle V, V, - \rangle$ kaavalla

$$\alpha_O(B) := \alpha(O, B), \quad B \in \mathbf{A}.$$

Nyt edellisen kohdan $\alpha^{\alpha_O} = \alpha$ ja $O_{\alpha_O} = \alpha_O^{-1}(\vec{0}) = O$. Ollaan saatu tärkeä tulos:

Lause 2. *Olkoon \mathbf{A} joukko ja V vektoriavaruus.*¹⁸

¹⁶Osoita, että α^φ toteuttaa määritelmän 1 ehdot (i) ja (ii). Tsekkaa sitten määritelmän 4 ehto (2), jossa $T_\varphi = \text{id}$.

¹⁷Sillä se on eittämättä bijektio ja affiini: $\alpha_O(A + v) - \alpha_O(A) = [(A + v) - O] - (A - O) = v$.

¹⁸Jotka ovat yhtä mahtavia eli joiden välillä (ylipäättään) on olemassa bijektio $\mathbf{A} \rightarrow V$.

- Jokaista bijektiota $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow V$ kohden löytyy (yksikäsitteiset) piste O ja affiini rakenne $\alpha : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow V$, jolle $\alpha(O, B) = \varphi(B)$. Lisäksi φ on affiini isomorfismi.
- Jokaista pistettä $O \in \mathbf{A}$ ja affinia rakennetta $\alpha : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow V$ kohden löytyy affiini isomorfismi $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow V$, jolle $\alpha(O, B) = \varphi(B)$.

Seuraavassa luvussa käsitellään yllä olevan lauseen fysikaalista merkitystä.

2.2 Fysikaalinen tulkinta

1) Kuvataan avaruutta ja/tai aikaa¹⁹ joukolla \mathbb{A}^n . Havaintaja kartoittaa²⁰ joukon \mathbb{A}^n eli konstruoi bijektion $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tämä on tietenkin käytännössä mahdotonta, sillä \mathbb{R}^n on ‘äärettömän suuri’). Mutta edellisen lauseen perusteella tämä tarkoittaa, että joukosta \mathbb{A}^n tulee affiini avaruus, jonka suhteen φ on *affiini kartta*:

Määritelmä 5. Affiini kartta on affiini isomorfismi affiinilta avaruudelta \mathbb{A}^n affinille avaruudelle \mathbb{R}^n .

2) Toisaalta tarkastelemamme fysikaaliset teoriat N ja E sisältävät suoria (tai paremminkin janoja): esimerkiksi N:ssa vapaa kappale liikkuu *suoraviivaisesti* tai E:ssä käytetään *suoria* (valo)signaaleja. Affiini avaruus sisältää luonnollisella tavalla suoran käsitteen; pisteitä A ja B yhdistää vektori \overrightarrow{AB} ja täten jana $[0, 1] \ni \lambda \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AB} \in \mathbb{A}^n$, joka laajenee suoraksi mikäli λ käy läpi kaikki reaaliluvut.

3) Ei ole väliä mistä pisteestä (tai millä hetkellä) suora signaali (jota kuvaa \mathbb{R}^n :n vektori \mathbf{x}) lähetetään. Jos havaintaja käyttää affinia karttaa $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, niin sille automaattisesti pätee

$$\varphi(A + \mathbf{x}) - \varphi(A) = \varphi(B + \mathbf{x}) - \varphi(B)$$

kaikille $A, B \in \mathbb{A}^n$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Eli pisteitä A ja $A + \mathbf{x}$ yhdistävän vektorin \mathbf{x} ‘koordinaatit’ $\varphi(A + \mathbf{x}) - \varphi(A) \in \mathbb{R}^n$ eivät riipu alkupisteestä A missään affiinissa kartassa.

4) Miltä sitten jana näyttää toisen havaintajan mielestä? Yleensä oletetaan, että jos havaintaja on inertiaalihavaintaja, niin ‘jana näyttää janalta’ eli jos ensimmäinen inertiaalihavaintaja näkee, että kappale tai valosignaali etenee tasaisesti ja suoraviivaisesti, niin toinenkin inertiaalihavaintaja näkee, että kappale tai valosignaali etenee tasaisesti ja suoraviivaisesti. Tässä mielessä inertiaalihavaintajoiden havainnot ovat ekvivalentit (kumpikin havaitsee suoran liikkeen).

¹⁹Yleensä $n \leq 4$. Perusoletus on, että joukkona \mathbb{A}^n on yhtä mahtava \mathbb{R}^n :n kanssa.

²⁰Eli valitsee origon ja koordinaattiakselit.

Täten \mathbb{N} :ssä ja \mathbb{E} :ssä minimivaatimus inertiaalikoordinaatistoille on, että ne ovat affineja karttoja.

Jos φ ja φ' ovat kaksi affiinia karttaa $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, niin 'koordinaattimuunnos' $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on lauseen 1 ja harjoitustehtävän 3 nojalla affiini isomorfismi eli lauseen 1 nojalla muotoa

$$(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{o}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

missä \mathbf{M} on kääntyvä $n \times n$ -reaalimatriisi (eli lineaarinen bijektio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) ja $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$. Usein fysiikassa *merkitään* hieman epätäsmällisesti $\mathbf{x}(A) := \varphi(A)$, $\mathbf{x}'(A) := \varphi'(A)$, $A(\mathbf{x}) := \varphi^{-1}(\mathbf{x})$ ja $\mathbf{x}'(\mathbf{x}) := (\varphi' \circ \varphi^{-1})(\mathbf{x})$ eli $\mathbf{x}'(A) = \varphi'(A) = (\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(A)) = \mathbf{x}'(\mathbf{x}(A))$, jne. Lisäksi \mathbb{R}^n :n vektoreita tai \mathbb{R}^n -arvoisia funktioita \mathbf{z} merkitään komponenttimuodossa

$$\mathbf{z} = (z^1, z^2, \dots, z^n) = (z^k)_{k=1}^n = (z^k).$$

Huomautus 3. Yllä on oletettu, että affiinit kartat φ ja φ' ovat *saman* affiinin avaruuden $\langle \mathbb{A}^n, \mathbb{R}^n, \alpha \rangle$ karttoja. Jos ne olisi määritelty eri avaruuksissa (eri rakenteet α ja α'), niin tietenkään välttämättä $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ ei olisi yllä olevaa muotoa.

2.3 Euklidinen avaruus

Olkoon $|\cdot|$ on vektoriavaruuden \mathbb{R}^n (standardi) *normi* eli

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2},$$

missä $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$.

Määritelmä 6. n -ulotteinen euklidinen avaruus \mathbb{E}^n on *affiini avaruus* $\langle \mathbb{A}^n, \mathbb{R}^n, \alpha \rangle$ varustettuna euklidisella metriikalla *eli etäisyydellä*

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow [0, \infty), \quad (A, B) \mapsto d(A, B) := |\alpha(A, B)| = |\overrightarrow{AB}|.$$

Siis pisteiden A, B välinen etäisyys on pisteitä yhdistävän vektorin $\alpha(A, B) = \overrightarrow{AB}$ pituus.

Määritelmä 7. Euklidinen kartta (koordinaatisto) on *affiini kartta* $\varphi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolle

$$|\varphi(B) - \varphi(A)| = d(A, B)$$

kaikille $A, B \in \mathbb{E}^n$.

Eli euklidinen kartta säilyttää pisteiden etäisyyden.

Olkoon sitten $O(n)$ ortogonaalisten $n \times n$ -reaalimatriisien ryhmä.²¹ Eli $\mathbf{M} = (M^i_j)_{i,j=1}^n \in O(n)$, jos ja vain jos \mathbf{M} :n matriisialkiot M^i_j ovat reaalityyppisiä, \mathbf{M} :llä on käänteismatriisi \mathbf{M}^{-1} ja \mathbf{M} :n transpoosi \mathbf{M}^T on \mathbf{M}^{-1} . Ortogonaalimatriisi säilyttää vektoreiden pituuden: $|\mathbf{M}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ eli $\sum_i (\sum_j M^i_j x^j)^2 = \sum_{i,j,k} M^i_j M^i_k x^j x^k = \sum_j (x^j)^2$ (kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$), jos ja vain jos $\sum_i M^i_j M^i_k = \delta^j_k$ eli $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$ eli $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{1}$.

Lause 3. *Olkoon $\varphi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ euklidinen kartta ja $O \in \mathbb{E}^n$. Tällöin kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(O + \mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \varphi(O)$ missä $\mathbf{M} \in O(n)$. On olemassa piste $O_\varphi \in \mathbb{E}^n$ (φ :n origo) ja matriisi $\mathbf{M} \in O(n)$ siten, että kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(O_\varphi + \mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x}$.*

Todistus. Ensimmäinen kohta seuraa lauseesta 1. Koska $|\mathbf{M}\mathbf{x}| = |\varphi(O + \mathbf{x}) - \varphi(O)| = |\mathbf{x}|$, niin $\mathbf{M} \in O(n)$. Valitse $O_\varphi := \varphi^{-1}(\vec{0})$. □

Esimerkki 4. Affiini avaruus \mathbb{R}^n (ks. esimerkki 1) on euklidinen avaruus, ns. *euklidinen koordinaattiavaruus*, missä siis pisteitä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ yhdistävä vektori on $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja pisteiden etäisyys on $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Jatkossa oletetaan aina, että \mathbb{R}^n on varustettu tällä kanonisella euklidisella rakenteella.

Harjoitustehtävä 5. a) *Tarkastellaan ryhmää $O(n)$. Olkoon $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in O(n)$. Osoita, että $\mathbf{M}\mathbf{N} \in O(n)$, $\mathbf{1} \in O(n)$ ja $\mathbf{M}^{-1} \in O(n)$ (ryhmäaksiomat). Osoita, että $\det \mathbf{M} = \pm 1$.*

b) *Tarkastellaan erikoistapausta $n = 3$ eli ryhmää $O(3)$. Olkoon $\mathbf{M} \in O(3)$. Osoita, että $-\mathbf{M} \in O(3)$ ja $\det(-\mathbf{M}) = -\det \mathbf{M}$. (Riittää siis tarkastella matriiseja, joiden determinantti on 1.) Määrä seuraavien kuvausten matriisit: peilaus origon suhteen ja peilaus xy -tason suhteen. Millainen kuvaus on näitten tulo?*

c) *Osoita, että*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3).$$

Laske $\det \mathbf{M}$ ja \mathbf{M}^2 . Mikä on \mathbf{M} :n geometrinen tulkinta? (Piirrä kuva.)

²¹Ryhmä G on joukko varustettuna kuvauksella $G \times G \rightarrow G$, $(g, g') \mapsto gg'$ (ryhmätulo), jolle pätee (i) $(gg')g'' = g(g'g'')$, (ii) on olemassa (identiteetti-, ykkös- tai neutraalialkio) $e \in G$ siten, että $ge = eg = g$, ja (iii) jokaiselle g :lle on olemassa (käänteisalkio) $g^{-1} \in G$ siten, että $gg^{-1} = e = g^{-1}g$. Esimerkiksi vektoriavaruus V on (additiivinen) ryhmä vektoreitten yhteenlaskun suhteen (eli V :n ryhmätulo on $+$).

3 FYS: Galilein avaruus-aika

Newtonin mekaniikassa käytetyn avaruus-ajan määrittelyssä keskeinen käsite on **euklidinen avaruus** \mathbb{E}^n . Siis \mathbb{E}^n on n -ulotteinen affiini avaruus \mathbb{A}^n , jossa on määritelty pisteiden $A, B \in \mathbb{E}^n$ välinen etäisyys pisteitä yhdistävän vektorin $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^n$ pituutena.

Newtonin mekaniikassa²² fysikaalinen avaruus-aika on *Galilein avaruus-aika* eli affiini surjektio $\pi : \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{E}^1$, missä \mathbb{E}^1 on *universaaliaika-akseli* ja kaikilla $\mathbf{t} \in \mathbb{E}^1$ alkukuva $\mathbb{E}_{\mathbf{t}}^3 := \pi^{-1}(\{\mathbf{t}\})$ on kolmiulotteinen *euklidinen* avaruus (ks. esimerkki 3). Galilein avaruus-ajan pisteitä A sanotaan *(piste)tapahtumiksi*. Yleensä merkitään $A = A_{\mathbf{t}}$ mikäli $\pi(A) = \mathbf{t}$ eli $A \in \mathbb{E}_{\mathbf{t}}^3$. Tapahtumien $A_{\mathbf{t}_1}$ ja $A_{\mathbf{t}_2}$ *aikaväli* on $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = \overrightarrow{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2} \in \mathbb{R}$ (ei siis $\overrightarrow{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2}$:n pituus, joten voidaan puhua siitä kumpi tapahtuma tapahtui aiemmin²³). Tapahtumat ovat *samanaikaisia*, jos niiden aikaväli on 0 eli yllä $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}$. Täten samanaikaiset tapahtumat kuuluvat samaan *avaruuteen* $\mathbb{E}_{\mathbf{t}}^3$. Olkoon sitten $d_{\mathbf{t}} : \mathbb{E}_{\mathbf{t}}^3 \times \mathbb{E}_{\mathbf{t}}^3 \rightarrow [0, \infty)$ euklidisen avaruuden $\mathbb{E}_{\mathbf{t}}^3$ euklidinen metriikka. Samanaikaisten tapahtumien $A_{\mathbf{t}}$ ja $B_{\mathbf{t}}$ välinen *etäisyys* on $d_{\mathbf{t}}(A_{\mathbf{t}}, B_{\mathbf{t}}) \geq 0$; eriaikaisille tapahtumille etäisyyttä ei määritellä, joten Galilein avaruus-aika *ei ole* \mathbb{E}^4 !

Esimerkki 5. Esimerkiksi $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ on (triviaali) Galilein avaruus-aika, kun $\pi(\mathbf{t}, \mathbf{x}) := \mathbf{t}$ kaikilla $\mathbf{t} \in \mathbb{E}^1$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$. Erityisesti $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ on Galilein avaruus-aika, ns. *Galilein koordinaattiavaruus-aika*.

Kun kiinnitetään *avaruus-ajan origo* $O_{\mathbf{t}_0} \in \mathbb{A}^4$ tulee kiinnitetyksi myös *ajan nollakohta* $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{E}^1$. Olkoon $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^3 \in \mathbb{R}^4$:n kanta. Nyt Galilein avaruus-ajan piste $A_{\mathbf{t}}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$A_{\mathbf{t}} = O_{\mathbf{t}_0} + \overrightarrow{O_{\mathbf{t}_0} A_{\mathbf{t}}} = O_{\mathbf{t}_0} + t(A_{\mathbf{t}})\mathbf{e}_0 + x^1(A_{\mathbf{t}})\mathbf{e}_1 + x^2(A_{\mathbf{t}})\mathbf{e}_2 + x^3(A_{\mathbf{t}})\mathbf{e}_3.$$

Esimerkin 3 nojalla valitaan \mathbf{e} siten, että $\mathbf{t} = \pi(A_{\mathbf{t}}) = \pi(O_{\mathbf{t}_0} + \overrightarrow{O_{\mathbf{t}_0} A_{\mathbf{t}}}) = t(A_{\mathbf{t}}) + \mathbf{t}_0$ eli $t(A_{\mathbf{t}}) := \mathbf{t} - \mathbf{t}_0 \in \mathbb{R}$ ja vektorit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ja \mathbf{e}_3 muodostavat ortonormaalin joukon. Määritellään $\mathbf{r}(A_{\mathbf{t}}) := (x^1(A_{\mathbf{t}}), x^2(A_{\mathbf{t}}), x^3(A_{\mathbf{t}})) \in \mathbb{R}^3$ ja Galilein avaruus-ajan rakenteen säilyttävä affiini kartta eli *Galilein kartta*

$$\varphi : \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, A_{\mathbf{t}} \mapsto (t(A_{\mathbf{t}}), \mathbf{r}(A_{\mathbf{t}})).$$

²²Newton oletti, että myös avaruus on absoluuttinen eli Newtonin (tai Aristoteleen) avaruus-aika oikeastaan on $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1$. Koska Galilein muunnokset sisältävät nopeussysäykset, avaruus ei ole absoluuttinen niiden suhteen vaan riippuu havaitsijan liikkeestä.

²³Jos $\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 > 0$, niin $A_{\mathbf{t}_2}$ tapahtui *myöhemmin* kuin $A_{\mathbf{t}_1}$ ja $A_{\mathbf{t}_1}$ tapahtui *aiemmin* kuin $A_{\mathbf{t}_2}$.

Nyt esimerkiksi, jos $t_2 - t_1 > 0$, niin $t(A_{t_2}) = t_2 - t_0 > t_1 - t_0 = t(A_{t_1})$ eli aikajärjestys säilyy. Lisäksi

$$\begin{aligned} d_t(A_t, B_t) &= |[x^1(B_t) - x^1(A_t)]\mathbf{e}_1 + [x^2(B_t) - x^2(A_t)]\mathbf{e}_2 + [x^3(B_t) - x^3(A_t)]\mathbf{e}_3| \\ &= |\mathbf{r}(B_t) - \mathbf{r}(A_t)| = |B_t - A_t|. \end{aligned}$$

Huomaa, että voidaan kirjoittaa

$$A_t = O_{t_0} + t(A_t)\mathbf{e}_0 + \sum_{k=1}^3 x^k(A_t)\mathbf{e}_k = O_t + \sum_{k=1}^3 x^k(A_t)\mathbf{e}_k,$$

missä $O_t := O_{t_0} + t(A_t)\mathbf{e}_0$ on koordinaatistomme *avaruusosan* origo hetkellä t . Tämä on pistetahtuma, jonka suhteen havaitsija mittaa pistetahtuman A_t aseman $\mathbf{r}(A_t) \in \mathbb{R}^3$ avaruudessa sen tapahtumahetkellä t .²⁴

Olkoon $(\underline{t}, \mathbf{o}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $\mathbf{M} \in \text{O}(3)$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Muunnosta

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, (t, \mathbf{r}) \mapsto (t'(t), \mathbf{r}'(t, \mathbf{r})) := (t + \underline{t}, \mathbf{M}\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{o})$$

sanotaan *Galilein muunnokseksi*. Parametri \underline{t} on *aikatranslaatio*, \mathbf{o} on *avaruustranslaatio* ja \mathbf{v} *nopeussäys*. Galilein muunnokset muodostavat *Galilein ryhmän* \mathcal{G} .

Galilein karttojen avulla Galilein avaruus-aika voidaan samaistaa koordinaattiavaruuden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ kanssa. Voidaan osoittaa, että kaikki Galilein kartat ovat muotoa $\varphi' := g \circ \varphi$, missä $g \in \mathcal{G}$. Merkitään (hiukan epätäsmällisesti²⁵) $\varphi' = (t', \mathbf{r}')$ ja

$$\begin{aligned} t'(A_t) &= t(A_t) + \underline{t}, \\ \mathbf{r}'(A_t) &= \mathbf{M}\mathbf{r}(A_t) + \mathbf{v}t(A_t) + \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Erityisesti siis φ on Galilein kartta vastaten \mathcal{G} :n identiteettimuunnosta id ja Galilein muunnos g on karttojen φ ja φ' välinen koordinaattimuunnos. Helposti nähdään, että *Galilein kartta on affiini kartta ja säilyttää tapahtumien aikajärjestyksen sekä samanaikaisten tapahtumien etäisyyden* eli Galilein avaruuden rakenteen.

Harjoitustehtävä 6. a) Osoita, että $\varphi' : \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ on affiini kartta eli muotoa

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix},$$

²⁴Muista, että Newtonin mekaniikassa sallitaan 'äärettömän' nopeat signaalit.

²⁵Jatkossa käytetään samaa merkintää (t', \mathbf{r}') Galilein muunnokselle g , Galilein kartalle φ' tai jopa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:n pisteelle. Tämän ei pitäisi aiheuttaa ongelmaa, sillä funktion muuttujan symboli (t, \mathbf{r}) tai A_t kertoo kummasta funktiosta on kyse.

missä \mathbf{A} on kääntyvä 4×4 -reaalimatriisi ja $a^\mu \in \mathbb{R}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

b) Osoita, että φ' säilyttää tapahtumien aikajärjestyksen ja samanaikaisten tapahtumien etäisyyden.

Harjoitustehtävä 7. Osoita, että Galilein muunnokset muodostavat ryhmän eli osoita, että

a) kahden Galilein muunnoksen yhdistetty muunnos on Galilein muunnos (tee siis kaksi eri Galilein muunnosta peräkkäin),

b) identiteettimuunnos on Galilein muunnos (triviaalia!),

c) jokaisella Galilein muunnoksella on käänteismuunnos (joka on myös Galilein muunnos).

3.1 Newtonin mekaniikka

Olkoon $\varphi = (t, \mathbf{r})$ Galilein kartta eli *inertiaalikoordinaatisto*, $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ väli eli muotoa (t_1, t_2) , $[t_1, t_2)$, $(-\infty, t_2]$, jne., oleva joukko²⁶ ja

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

voima(kenttä) (jatkuva funktio). Jos massapisteen (massa m) liike $\underline{\mathbf{r}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (eli 'riittävän siisti' käyrä²⁷) toteuttaa Newtonin liikeyhtälön

$$m\underline{\ddot{\mathbf{r}}}(t) = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{r}}(t), \underline{\dot{\mathbf{r}}}(t), t)$$

koodinaatistossa φ , niin se toteuttaa yhtälön

$$m\underline{\ddot{\mathbf{r}}}'(t') = \mathbf{F}'(\underline{\mathbf{r}}'(t'), \underline{\dot{\mathbf{r}}}'(t'), t')$$

(mielivaltaisessa) Galilein kartassa $\varphi' = g \circ \varphi = (t', \mathbf{r}')$; edellä

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}}'(t') &:= \mathbf{M}\underline{\mathbf{r}}(t' - \underline{t}) + \mathbf{v}(t' - \underline{t}) + \mathbf{o}, \\ \underline{\dot{\mathbf{r}}}'(t') &:= \mathbf{M}\underline{\dot{\mathbf{r}}}(t' - \underline{t}) + \mathbf{v}, \quad \underline{\ddot{\mathbf{r}}}'(t') := \mathbf{M}\underline{\ddot{\mathbf{r}}}(t' - \underline{t}) \end{aligned}$$

ja $\mathbf{F}'(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t') := \mathbf{M}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t', \mathbf{r}'), \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}}'), t(t'))$, missä

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t', \mathbf{r}') &:= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}' - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}t' - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{o} - \mathbf{v}\underline{t}), \\ \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}}') &:= \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{r}}' - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}, \quad t(t') := t' - \underline{t} \end{aligned}$$

²⁶Itseasiassa voidaan aina olettaa, että \mathcal{T} on *avoin* väli eli muotoa (t_1, t_2) , sillä muutoin väli voidaan laajentaa avoimeksi: esim. $[t_1, t_2) \subset (t_1 - \epsilon, t_2)$, missä $0 \approx \epsilon > 0$.

²⁷Ainakin kaksi kertaa derivoituva käyrä, jotta nopeus $\underline{\dot{\mathbf{r}}}(t) := d\underline{\mathbf{r}}(t)/dt$ ja kiihtyvyys $\underline{\ddot{\mathbf{r}}}(t) := d^2\underline{\mathbf{r}}(t)/dt^2$ olisivat olemassa kaikilla hetkillä $t \in \mathcal{T}$.

on koordinaattimuunnoksen $\mathbf{r}'(t, \mathbf{r}) := \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{o}$, $\dot{\mathbf{r}}'(\dot{\mathbf{r}}) := \mathbf{M}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v}$, $t'(t) := t + \underline{t}$ käänteismuunnos.

Jos kappale on vapaa kartassa φ eli $\mathbf{F} = 0$ ja nopeus $\dot{\mathbf{r}}$ on vakio, niin myös $\mathbf{F}' = 0$ ja nopeus $\dot{\mathbf{r}}'$ on vakio eli $\varphi' = g \circ \varphi$ on myös *inertiaalikoordinaatisto*. Eli jos oletetaan, että on olemassa yksi inertiaalikoordinaatisto, niin \mathcal{G} generoi äärettömän määrän uusia inertiaalikoordinaatistoja. Siis *Newtonin mekaniikka on Galilei-relativistinen teoria*. Huomaa, että vaikka voiman \mathbf{F} muoto muuttuu hieman Galilein muunnoksessa, niin siihen ei *lisätä* näennäisvoimia, kuten epäinertiaalisissa koordinaattimuunnoksissa.

Esimerkki 6. Olkoon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ keskeisvoimakenttä (erityisesti Newtonin gravitaatiovoima) eli muotoa $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|)|\mathbf{r}|^{-1}\mathbf{r}$, missä $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ on (jatkuva) funktio. Tarkastellaan kahden hiukkasen (massat m_1 ja m_2) liikettä Galilein avaruudessa. Kiinnitetään Galilein kartta φ ja oletetaan, että hiukkasten liikkeet saadaan Newtonin yhtälöitten

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)) \end{aligned}$$

ratkaisuna, missä $\mathbf{r}_1 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{r}_2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ovat hiukkasten 1 ja 2 liikkeet koordinaatistossa φ . Huomaa, että on oltava $\mathbf{r}_1(t) \neq \mathbf{r}_2(t)$ kaikilla $t \in \mathcal{T}$.

Vaihdetaan Galilein karttaa Galilein muunnosta g käyttäen. Merkitään liikkeitä koordinaatistossa $\varphi' = g \circ \varphi$ symboleilla \mathbf{r}'_1 ja \mathbf{r}'_2 . Koska $\mathbf{r}'_2(t') - \mathbf{r}'_1(t') = \mathbf{M}(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t))$ ja $\mathbf{M}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{M}\mathbf{x})$, niin

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1(t') &= \mathbf{F}(\mathbf{r}'_2(t') - \mathbf{r}'_1(t')), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2(t') &= \mathbf{F}(\mathbf{r}'_1(t') - \mathbf{r}'_2(t')). \end{aligned}$$

Eli liikeyhtälöt ‘näyttävät samanlaisilta’ kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Tästä seuraa, että keskeiskentän Newtonin yhtälöitten ratkaisujoukko on *invariantti* Galilein muunnoksen suhteen (eli jos ratkaisuun tehdään Galilein muunnos, niin saadaan uusi ratkaisu); sanotaan, että *Newtonin gravitaatioteoria on Galilei-invariantti*.

Tarkastellaan seuraavassa luvussa Einsteinin erityistä suhteellisuusteoriaa ja verrataan Minkowskin avaruuden geometriaa Galilein geometriaan ja Poincarén muunnoksia Galilein muunnoksiin.

4 FYS: Relativistinen avaruusaika

Olkoon $n \geq 2$ ja \tilde{e} kuvaus

$$\tilde{e} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \mapsto -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n-1})^2.$$

Määritelmä 8. n -ulotteinen Minkowskin avaruus \mathbb{M}^n on affiini avaruus \mathbb{A}^n varustettuna pseudometriikalla

$$e : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto e(A, B) := \tilde{e}(\overrightarrow{AB}).$$

Nyt pisteiden A ja B ‘etäisyys’ on $e(A, B)$. Kuvaus e ei suoraan määrää metriikkaa, koska on olemassa vektoreita, jotka \tilde{e} kuvaa negatiivisiksi luvuiksi.²⁸

Erytisessä suhteellisuusteoriassa fysikaalinen avaruus-aika on neliulotteinen Minkowskin avaruus \mathbb{M}^4 eli *relativistinen avaruusaika* ja \mathbb{M}^4 :n pisteet ovat (*piste*)*tapahtumia*. Samalla tavalla kuin euklidisen avaruuden tapauksessa voidaan kiinnittää origo $O \in \mathbb{M}^4$ ja esittää avaruusaikan piste (tapahtuma) \mathbb{R}^4 :n vektorina $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, missä $x^0 = ct$ on *aikakoordinaatti* ja koordinaatit x^i , $i = 1, 2, 3$, ovat *paikkakoordinaatit*. Jos määritellään diagonaalimatriisi $\boldsymbol{\eta} = (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3 := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, niin voidaan kirjoittaa $\tilde{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta} \mathbf{x} = \sum_{\mu,\nu=0}^3 x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$ (edellä \cdot on vektoreitten pistetulo). Sanotaan, että \mathbf{x} on *avaruudenluonteinen*, jos $\tilde{e}(\mathbf{x}) > 0$, *ajanluonteinen*, jos $\tilde{e}(\mathbf{x}) < 0$, tai *valonluonteinen (nolla)*, jos $\tilde{e}(\mathbf{x}) = 0$. Edellä mainittuja \mathbf{x} :n ominaisuuksia sanotaan \mathbf{x} :n *kausaaliseksi luonteeksi*. Jos tapahtumille A ja B vektori \overrightarrow{AB} on avaruuden-, ajan- tai valonluonteinen, niin sanotaan, että kyseiset tapahtumat on *avaruuden*, *ajan* tai *valon luonteisesti erotetut*. Kaikki nollavektorit muodostavat *nolla-* tai *valokartion*, sillä yhtälön $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$ ratkaisujoukko on kolmiulotteinen ‘kartio’ $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^4$. **[!]** Kuvausta $\mathbb{M}^4 \ni O \mapsto O + \mathcal{K} = \{O + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{K}\} \subset \mathbb{M}^4$ sanotaan *aikajärjestykseksi* eli joka tapahtumaan O liitetään valokartio, jonka ‘kärki’ on pisteessä O . Huomaa, että Galilein avaruudessa vain koordinaatiston origoa vastaava vektori on nollavektori.

Olkoon inertiaalinen havaitsija pisteessä O ja tarkastellaan tapahtumaa $A = O + \mathbf{x}(A)$, missä $\mathbf{x}(A) := \overrightarrow{OA}$ (eli tapahtuman A koordinaatit inertiaalijärjestelmässä). Sanotaan, että tapahtuma A kuuluu havaitsijan *menneisyyteen* tai on *aikaisempi* kuin tapahtuma O , jos $\mathbf{x}(A)$ on ajanluonteinen (tai nolla) ja $x^0(A) < 0$. Vastaavasti, jos $\mathbf{x}(A)$ on ajanluonteinen (tai nolla) ja $x^0(A) > 0$, niin A kuuluu havaitsijan *tulevaisuuteen* tai on *myöhempi* kuin O . Ajan tai valon luonteisesti erotetut tapahtumat voidaan *aikajärjellä* aikakoordinaatin x^0 avulla: jos A ja B

²⁸Toisaalta, jos rajoittaudutaan pisteisiin A , joilla on sama $x^0(A)$, niin silloin tässä ‘saman ajan avaruudessa’ on \mathbb{E}^3 :n euklidinen metriikka, joka on kuvauksen \sqrt{e} rajoittuma kyseiseen avaruuteen.

ovat ajanluonteisesti erotetut ja $x^0(A) > x^0(B)$, niin A on myöhempi kuin B jne. Jos $\mathbf{x}(A)$ on paikanluonteinen sanotaan, että tapahtumat O ja A ovat *topologisesti samanaikaiset*, tai joskus jopa että tapahtuma A kuuluu havaitsijan *nykyhetkeen*. Jos $x^0(A) = 0$, niin tapahtumat O ja A ovat *samanaikaiset*, ja jos $\mathbf{x}(A) = 0$ eli $A = O$, niin tapahtumat ovat *yhteensattuvia* (koincidenssi). Tarkastellaan seuraavassa näiden määritelmien fysikaalista merkitystä.

Pisteiden O (koordinaatit $(0,0,0,0)$) ja $A \neq O$ kautta kulkevan suoraviivaisen ja tasaisesti etenevän signaalin yhtälö on

$$x^1(x^0) = \beta^1 x^0, \quad x^2(x^0) = \beta^2 x^0, \quad x^3(x^0) = \beta^3 x^0,$$

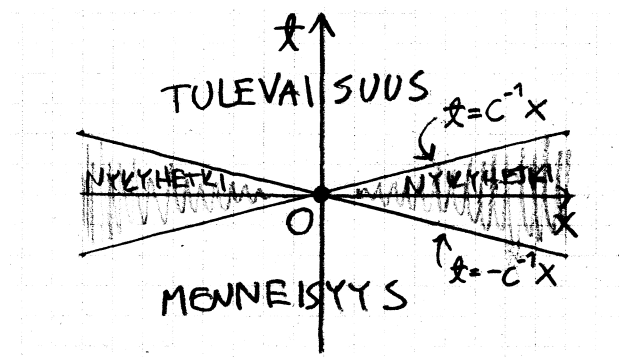
missä $\boldsymbol{\beta} = (\beta^1, \beta^2, \beta^3) := (x^1(A), x^2(A), x^3(A))/x^0(A)$ on signaalin nopeus jaettuna valon nopeudella c (huomaa, että $x^0 = ct$). [!] Signaalin ‘skaalattu’ vauhti on

$$\beta := |\boldsymbol{\beta}| = \frac{\sqrt{x^1(A)^2 + x^2(A)^2 + x^3(A)^2}}{|x^0(A)|}.$$

Jos $\mathbf{x}(A)$ on ajanluonteinen tai valonluonteinen, niin

$$-x^0(A)^2 + x^1(A)^2 + x^2(A)^2 + x^3(A)^2 \leq 0$$

eli $\beta \leq 1$. Siis signaalin vauhti on pienempi tai yhtäsuuri (A on valonluonteinen) kuin valon nopeus c . Tämä tarkoittaa sitä, että, tapahtumat O ja A voidaan yhdistää signaalilla: Jos A kuuluu havaitsijan tulevaisuuteen eli $x^0(A) > 0$ niin havaitsija voi lähettää hetkellä $x^0(O) = 0$ signaalin, joka saapuu avaruuden pisteeseen $(x^1(A), x^2(A), x^3(A))$ hetkellä $x^0(A)$. Jos $x^0(A) < 0$, niin havaitsijan menneisyyden tapahtumasta A voidaan lähettää signaali, joka saapuu havaitsijan paikkaan $(0,0,0)$ hetkellä $x^0(O) = 0$.



Kuva 2: Havaitsijan O nykyhetki on ‘pieni’ sillä $c \gg 0$ ja täten kulmakerroin $c^{-1} \approx 0$. Vertaa Galilein avaruus-aika diagrammiin, jolloin muodollisesti suurin sallittu signaalinopeus $c \rightarrow \infty$.

Jos $\mathbf{x}(A)$ on paikanluonteinen, niin $\beta > 1$. Mutta jos valon nopeus on suurin mahdollinen signaalinopeus, niin tapahtumia O ja A ei voi yhdistää millään signaalilla! Havaittsijan nykyhetken tapahtumat eivät siis voi vaikuttaa mitenkään havaittsijaan tai havaittsija niihin. Havaittsijan nykyhetken tapahtumaa A sanotaan topologisesti²⁹ samanaikaiseksi, koska aina löytyy toinen inertiaalinen havaittsija, joka näkee tapahtumat A ja O samanaikaisina. Tämä osoitetaan seuraavassa luvussa (esimerkki 11).

4.1 Poincarén muunnokset

Tarkastellaan seuraavaksi kahta inertiaalista havaittsijaa. Havaittsijat käyttävät koordinaatteja \mathbf{x} ja \mathbf{x}' tapahtumien kuvaamiseen. Inertiaalikoordinaatistossa \mathbf{x} tapahtumien A ja $B = A + \mathbf{y}$ aikaero on y^0 ja etäisyys $\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}$, eli ne eivät riipu tapahtumasta A . On luontevaa olettaa, että myös inertiaalikoordinaatistossa \mathbf{x}' aikaero $x'^0(A + \mathbf{y}) - x'^0(A)$ ja etäisyys

$$\sqrt{[x'^1(A + \mathbf{y}) - x'^1(A)]^2 + [x'^2(A + \mathbf{y}) - x'^2(A)]^2 + [x'^3(A + \mathbf{y}) - x'^3(A)]^2}$$

eivät riipu pisteen A valinnasta. Tästä seuraa, [!] että kartan \mathbf{x}' on oltava affiini eli muotoa $\mathbf{x}' = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{o}$.

Ajatellaan sitten, että kumpikin havaittsija mittaa saman valon säteen nopeuden omassa inertiaalijärjestelmässään: Oletetaan, että tapahtumat A ja B voidaan yhdistää valonsäteellä (eli ne ovat valonluonteisesti erotetut) ja havaittsijat mittaavat valon nopeuden tapahtumasta A tapahtumaan B etenevälle valon säteelle. Karttaa \mathbf{x} käyttävä havaittsija mittaa tulokset $\mathbf{x}(A)$ ja $\mathbf{x}(B)$, jotka toteuttavat yhtälön

$$-[x^0(B) - x^0(A)]^2 + [x^1(B) - x^1(A)]^2 + [x^2(B) - x^2(A)]^2 + [x^3(B) - x^3(A)]^2 = 0,$$

ja toinen havaittsija päätyy yhtälöön

$$-[x'^0(B) - x'^0(A)]^2 + [x'^1(B) - x'^1(A)]^2 + [x'^2(B) - x'^2(A)]^2 + [x'^3(B) - x'^3(A)]^2 = 0$$

(eli siis kummallekin havaittsijalle valon vauhti on sama vakio c). Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että ehdot $\tilde{e}(\mathbf{y}) = 0$ ja $\tilde{e}(\mathbf{M}\mathbf{y}) = 0$ ovat yhtäpitäviä. Mutta voidaan osoittaa [!] suoraviivaisella laskulla, että $\tilde{e}(\mathbf{M}\mathbf{y}) = k\tilde{e}(\mathbf{y})$ pätee jopa kaikille $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$, missä $k \neq 0$ on vakio. Yleisyyttä loukkaamatta voidaan valita $k = 1$. [!] Täten matriisiin \mathbf{M} on toteutettava ehto $\mathbf{M}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{M} = \boldsymbol{\eta}$. Usein käytetään symbolia $\boldsymbol{\Lambda}$ matriisille \mathbf{M} , joka toteuttaa kyseisen ehdon, ja sanotaan, että $\boldsymbol{\Lambda}$ on Lorentzin matriisi:

²⁹Eli inertiaalihavaittsijoita yhdistää jatkuva (Poincarén) muunnos.

Määritelmä 9. Lorentzin matriisi on 4×4 -reaalimatriisi $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)_{\mu,\nu=0}^3$, joka toteuttaa ehdon $\Lambda^T \boldsymbol{\eta} \Lambda = \boldsymbol{\eta}$ eli $\Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu}$. Lorentzin matriisit muodostavat Lorentzin ryhmän³⁰ $O(3,1)$ ja muunnos $\mathbf{x} \mapsto \Lambda \mathbf{x}$ on Lorentzin muunnos. Muunnos

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'(\mathbf{x}) := \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{o}$$

on Poincarén muunnos ja Poincarén muunnokset muodostavat Poincarén ryhmän \mathcal{P} .

Poincarén muunnokset säilyttävät vektoreitten kausaalisen luonteen. Erityisesti, jos inertiaalinen havaitsija (joka käyttää karttaa \mathbf{x}) havaitsee, että tapahtumat A ja B ovat avaruuden (tai valon tai ajan) luonteisesti erotetut, niin myös toinen havaitsija (joka käyttää karttaa $\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{o}$) on samaa mieltä, sillä $e(A, B) = \tilde{e}(\mathbf{x}(B) - \mathbf{x}(A)) = \tilde{e}(\mathbf{x}'(B) - \mathbf{x}'(A))$.

Karttaa $A \mapsto \mathbf{x}'(A) = \Lambda \mathbf{x}(A) + \mathbf{o}$, missä $\Lambda \in O(3,1)$ ja $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^4$ sanotaan *Poincarén kartaksi*. Se on siis Minkowskin avaruuden rakenteen säilyttävä bijektio. Poincarén muunnos on Poincarén karttojen välinen koordinaattimuunnos. Parametri \mathbf{o} vastaa avaruusajan kartan origon siirtoa (siis ajan nollakohdan ja avaruuden origon siirto), joten jatkossa voidaan tarkastella vain Lorentzin muunnoksia, joille siis $\mathbf{o} = \vec{0}$.

Esimerkki 7. Koska $\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}$, niin $\boldsymbol{\eta}$ on Lorentzin matriisi vastaten ajan kääntöä $x'^0 = -x^0$ ja $x'^i = x^i$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Muunnos vaihtaa ajanluonteisten tapahtumien aikajärjestyksen eikä täten ole fyysikaalisesti mielekäs. Usein tällaiset Lorentzin muunnokset rajataan pois ja rajoittaudutaan pienempään Lorentzin (ali)ryhmään.

Esimerkki 8. Olkoon $\phi \in \mathbb{R}$. Koska $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$, muunnos

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \cosh \phi - x^1 \sinh \phi, \\ x'^1 &= -x^0 \sinh \phi + x^1 \cosh \phi, \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

on Lorentzin muunnos. [!] Olkoon $P \in \mathbb{M}^4$ tapahtuma, jolle $x'^i(P) = 0$ kaikille $i = 1, 2, 3$ (inertiaalijärjestelmän \mathbf{x}' avaruusosan origo). Koska $x'^1(P) = 0 = -x^0(P) \sinh \phi + x^1(P) \cosh \phi$, niin

$$x^1(P) = \beta x^0(P),$$

³⁰Vastaavasti voidaan määritellä ‘pseudo-ortogonaaliset’ matriisiryhmät $O(k, l)$, jotka koostuvat $(n \times n)$ -reaalimatriiseista \mathbf{M} , joille pätee $n = k + l$ ja $\mathbf{M}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{M} = \boldsymbol{\eta}$, missä $\boldsymbol{\eta}$ on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalilla on k kappaletta ykkösiä ja l kappaletta miinusykkösiä. Täten $O(k, 0) = O(k)$.

missä

$$\beta := \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \tanh \phi \in (-1, 1).$$

Koska $t = x^0/c$ ja $t' = x'^0/c$ ovat inertiaalihavaintijoiden (keskus)kellojen ajat, niin \mathbf{x}' -havaintija etenee nopeudella $v = \beta c$ akselin x^1 suuntaan havaintijan \mathbf{x} suhteen. Lisäksi saadaan [!]

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vc^{-2}x^1), \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - vt), \end{aligned} \quad (3)$$

missä

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Helposti nähdään, [!] että käänteismuunnos on

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + vc^{-2}x'^1), \\ x^1 &= \gamma(x'^1 + vt'). \end{aligned} \quad (4)$$

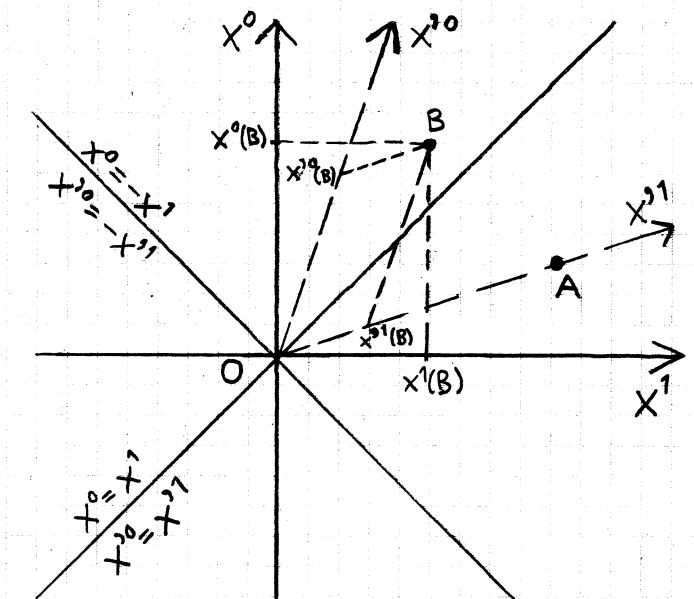
Kun $|v| \ll c$, niin $\gamma \approx 1$, ja muunnos on likimäärin Galilein muunnos

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x'^1 &= x^1 - vt. \end{aligned}$$

Seuraavissa esimerkeissä tarkastellaan tämän esimerkin sovelluksia.

Esimerkki 9. Oletetaan, että kartta \mathbf{x}' etenee nopeudella v kartan \mathbf{x} suhteen x^1 -akselin suuntaan. Olkoon jäykkä sauva levossa kartan \mathbf{x}' suhteen. Olkoon $(0, 0, 0)$ ja $(l_0, 0, 0)$ sauvan päätepisteiden (x'^1, x'^2, x'^3) -koordinaatit eli sauva sijaitsee x'^1 -akselilla ja $l_0 > 0$ on sauvan (lepo)pituus. Kaavasta (3) seuraa, että $x^1 = vt + \gamma^{-1}x'^1$ ja täten päätepisteiden (x^1, x^2, x^3) -koordinaatit hetkellä t ovat $(vt, 0, 0)$ ja $(vt + \gamma^{-1}l_0, 0, 0)$ (huomaa, että kyseiset tapahtumat ovat samanaikaisia \mathbf{x} :n suhteen). Havaintija, joka käyttää karttaa \mathbf{x} , mittaa sauvan pituuden olevan $l := \gamma^{-1}l_0 < l_0$. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että liikkuva sauva näyttäisi visuaalisesti lyhyemmältä kuin levossa oleva (sama sauva). Tätä ilmiötä sanotaan *pituukskontraktioksi*.

Esimerkki 10. Oletetaan, että kartta \mathbf{x}' etenee nopeudella v kartan \mathbf{x} suhteen x^1 -akselin suuntaan. Olkoon kello levossa kartan \mathbf{x}' suhteen pisteessä $(0, 0, 0)$. Kun kello näyttää aikaa t'_a tämä vastaa tapahtumaa $A \in \mathbb{M}^4$, jolle $\mathbf{x}'(A) = (ct'_a, 0, 0, 0)$. Kaavasta (4) seuraa, että $\mathbf{x}(A) = (\gamma ct'_a, \gamma vt'_a, 0, 0)$. Vastaavasti kellon aika t'_b vastaa tapahtumaa B , jolle $\mathbf{x}(B) = (\gamma ct'_b, \gamma vt'_b, 0, 0)$. Huomaa, että tapahtumat A ja B tapahtuvat eri paikoissa kartan \mathbf{x} suhteen, joten niiden



Kuva 3: Havaittajan O valokartio (x^1, x^0) - ja (x'^1, x'^0) -kartoissa. Jälkimmäinen kartta voidaan valita siten, että mielivaltaiselle paikanluonteiselle tapahtumalle A koordinaatti $x'^0(A) = 0$.

tapahtumisaikojen mittaukseen havaittaja \mathbf{x} tarvitsee kaksi keskenään synkronoitua kelloa (tai yhden kellon ja valosignaalin). Tapahtumien aikaero kartan \mathbf{x} suhteen on

$$t(B) - t(A) = \gamma(t'_b - t'_a) > t'_b - t'_a = t'(B) - t'(A).$$

Täten tasaisesti liikkuva kello käy hitaammin kuin levossa oleva (sama kello). Tätä ilmiötä sanotaan *aikadilataatioksi*.

Esimerkki 11. Tarkastellaan paikanluonteisten tapahtumien aikajärjestystä ja samanaikaisuutta. Olkoon O kartan \mathbf{x} origo ja sekä A paikanluonteinen tapahtuma [kuva 3]. On olemassa havaittaja \mathbf{x}' joka näkee tapahtumat A ja O samanaikaisina (eli $x'^0(O) = x'^0(A)$): Voidaan olettaa käyttämällä sopivaa rotaatiota, että A sijaitsee x^1 -akselilla. Tehdään sitten esimerkin 8 Lorentzin muunnos, missä ϕ on sellainen, että $x'^0(A) = x^0(A) \cosh \phi - x^1(A) \sinh \phi = 0 = x'^0(O)$. Eli $\beta = \tanh \phi = x^0(A)/x^1(A)$. Koska A on paikanluonteinen eli $-x^0(A)^2 + x^1(A)^2 > 0$, niin $|\beta| < 1$. Sanotaan, että O ja A ovat topologisesti samanaikaiset. On myös olemassa havaittajat, joista ensimmäinen näkee A :n tapahtuvan ennen O :ta ja jälkimmäinen A :n tapahtuvan O :n jälkeen. [!]

Esimerkki 12. Tarkastellaan tilannetta, missä *epäinertiaalinen* havaittaja liikkuu inertiaalikoordinaatiston \mathbf{x} suhteen seuraavasti: hän lähtee avaruuden origosta $(0, 0, 0)$ hetkellä $t = 0$ ja palaa takaisin hetkellä $t = t_1 > 0$. Epäinertiaalisella havaittajalla on kello (samanlainen kuin

inertiaalihavaintijallakin) mukana, joka näyttää aikaa 0 lähtöhetkellä. Mitä aikaa kello näyttää paluuhetkellä?

Esimerkissä 10 osoitettiin, että jos *inertiaalihavaintija* \mathbf{x}' liikkuu toisen inertiaalihavaintijan \mathbf{x} suhteen (vakio) vauhdilla v , niin hänen kellonsa näyttää aikaa $t' = \gamma^{-1}t$, eli $dt'/dt = \gamma^{-1} = \sqrt{1 - c^{-2}v^2}$. E:ssä *oletetaan*, että tämä yhtälö pätee myös epäinertiaalisten havaintijoiden kelloille: Olkoon $v(t) < c$ epäinertiaalisen havaintijan vauhti ja $\tau(t)$ ($= t'(t)$) hänen kellonsa aika, ns. *ominaisaika*, hetkellä t . **Oletetaan**, että

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \sqrt{1 - c^{-2}v(t)^2},$$

mikä tarkoittaa sitä, että *epäinertiaalisen havaintijan kiihtyvyys (inertiaali)kartan \mathbf{x} suhteen ei vaikuta hänen kellonsa käyntinopeuteen*. Täten epäinertiaalisen havaintijan kello näyttää aikaa

$$\tau(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{d\tau(t)}{dt} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - c^{-2}v(t)^2} dt < \int_0^{t_1} dt = t_1$$

paluuhetkellä t_1 . Tätä ilmiötä sanotaan *kello-* tai *kaksosparadoksiksi*.

Huom! Samoin **oletetaan**, että (kiihtyvästi) liikkuvan sauvan pituus lyhenee tekijällä $\sqrt{1 - c^{-2}v(t)^2}$ samoin kuin tasaisessa liikkeessäkin (ks. esimerkki 9).

Harjoitustehtävä 8. a) *Milloin Galilein muunnos on Poincarén muunnos (vinkki: käytä harjoitustehtävää 6)?*

b) *Laske Lorentzin matriisin determinantti ja osoita, että kyseinen matriisi on kääntyvä. Onko kääntematriisi myös Lorentzin matriisi?*

c) *Osoita, että Poincarén muunnokset muodostavat ryhmän. (Siis osoita, että kahden Poincarén muunnoksen yhdiste on Poincarén muunnos, etsi Poincarén muunnoksen kääntemuuunnos jne.)*

5 FYS: Relativistinen mekaniikka

Kiinnitetään origo $O \in \mathbb{M}^4$ ja käytetään inertiaalikoordinaatistoa \mathbf{x} tapahtumien kuvaamiseen. Käyrä $\alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow \mathbb{M}^4$ (missä $\lambda_0 < \lambda_1$) voidaan ilmaista kartassa $\mathbf{x} : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ funktiona³¹ $\underline{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ \alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow \mathbb{R}^4$. Jos α on m -massaisen hiukkasen *maailmanviiva*, niin on oltava $d\underline{\mathbf{x}}^0(\lambda)/d\lambda \neq 0$ kaikilla $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$, jotta hiukkasen ‘ c :llä skaalattu’ *nopeus*

$$\underline{\beta}(\lambda) := \left(\frac{d\underline{x}^1(\lambda)}{d\lambda}, \frac{d\underline{x}^2(\lambda)}{d\lambda}, \frac{d\underline{x}^3(\lambda)}{d\lambda} \right) : \frac{d\underline{x}^0(\lambda)}{d\lambda}$$

olisi olemassa. Jos $m > 0$, niin oletetaan, että $\underline{\beta}(\lambda) := |\underline{\beta}(\lambda)| < 1$, $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$, eli α on *ajanluonteinen käyrä*. Jos $m = 0$, niin oletetaan, että $\underline{\beta}(\lambda) \equiv 1$ eli α on *valonluonteinen*.³² Huomaa, että jos $d\underline{x}^0(\lambda)/d\lambda \neq 0$, $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$, niin (käänteiskuvauslauseen nojalla) funktio $\lambda \mapsto \underline{x}^0(\lambda)$ on bijektio, jonka käänteiskuvausta merkitään lyhyesti $\mathcal{X}_0 \ni x^0 \mapsto \lambda(x^0) \in \mathbb{R}$, missä $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathbb{R}$ on (avoin) väli. Tällöin määritellään kaikilla $x^0 \in \mathcal{X}_0$, $\underline{x}^i(x^0) := \underline{x}^i(\lambda(x^0))$, $i = 1, 2, 3$, ja $\underline{\beta}(x^0) = \underline{\beta}(\lambda(x^0))$, joten $\underline{\mathbf{x}}$ voidaan esittää fysikaalisesti mielekkäässä muodossa

$$\mathcal{X}_0 \ni x^0 \mapsto (\underline{x}^1(x^0), \underline{x}^2(x^0), \underline{x}^3(x^0)) \in \mathbb{R}^3.$$

Hiukkasen vauhti (jaettuna valon nopeudella) hetkellä $x^0 = ct$ on siis

$$\underline{\beta}(x^0) = \sqrt{\left[\frac{d\underline{x}^1(x^0)}{dx^0} \right]^2 + \left[\frac{d\underline{x}^2(x^0)}{dx^0} \right]^2 + \left[\frac{d\underline{x}^3(x^0)}{dx^0} \right]^2},$$

ja jos $m > 0$, niin $\underline{\beta}(x^0) < 1$ kaikilla $x^0 \in \mathcal{X}_0$ eli voidaan määritellä hiukkasen *ominaisaika* eli ‘oman kellon lukema’ hetkellä $\tilde{x}^0 \in \mathcal{X}_0$:

$$\underline{\tau}(\tilde{x}^0) := \int_a^{\tilde{x}^0} \sqrt{1 - \underline{\beta}(x^0)^2} \frac{dx^0}{c},$$

missä $a \in \mathcal{X}_0$ on vakio.³³ Massattomille hiukkasille $\underline{\tau}(\tilde{x}^0) \equiv 0$, joten niille ei voida määritellä ominaisaikaa; voidaan sanoa, että ‘massattoman hiukkasen aika ei kulu’.

Helposti nähdään, että $\underline{\tau}$:n arvo ei muutu Poincarén muunnoksessa $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'(\mathbf{x}) := \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{o}$ eli

$$\int_{x'^0(\underline{\mathbf{x}}(a))}^{x'^0(\underline{\mathbf{x}}(\tilde{x}^0))} \sqrt{1 - \left[\frac{d\underline{x}'^1(x'^0)}{dx'^0} \right]^2 - \left[\frac{d\underline{x}'^2(x'^0)}{dx'^0} \right]^2 - \left[\frac{d\underline{x}'^3(x'^0)}{dx'^0} \right]^2} \frac{dx'^0}{c} = \underline{\tau}(\tilde{x}^0)$$

³¹Oletetaan, että $\underline{\mathbf{x}}$ on ainakin kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva.

³²Vastaavasti voidaan määritellä *paikanluonteinen käyrä*, jolle $\underline{\beta}(\lambda) > 1$, $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$. On tietenkin olemassa käyriä, jotka eivät ole mitään aiempaa kolmea tyyppiä.

³³Vakion a arvolla ei ole merkitystä; se ainoastaan siirtää τ :n arvoja, sillä $\int_b^{\tilde{x}^0} (\dots) = \int_a^{\tilde{x}^0} (\dots) + \tau_0$ missä $\tau_0 := \int_b^a (\dots)$ on vakio.

eli $\underline{\tau}$:n ‘määritelmä on muotoinvariantti’ Poincarén muunnoksissa. Koska τ on aidosti kasvava kuvaus eli $c d\underline{\tau}(x^0)/dx^0 = \sqrt{1 - \underline{\beta}(x^0)^2} \in (0, 1]$ (ja täten kääntyvä), voidaan hiukkasen liike parametrisoida uudelleen ominaisajan avulla. Saadaan liike

$$\mathcal{T} \ni \tau \mapsto \underline{\mathbf{x}}(\tau) \in \mathbb{R}^4,$$

missä \mathcal{T} on (avoin) väli ja $\tau \mapsto \underline{x}^0(\tau)$ on kuvauksen $x^0 \mapsto \underline{\tau}(x^0)$ käänteiskuvaus sekä $\underline{x}^i(\tau) := \underline{x}^i(\underline{x}^0(\tau))$ kaikilla $i = 1, 2, 3$ (sekä samoin parametrisoidaan muut kuvaukset τ :n avulla kuten $\underline{\beta}(\tau)$).

Määritellään hiukkasen *nelinopeus* hetkellä $\tau \in \mathcal{T}$,

$$\underline{\mathbf{u}}(\tau) := \frac{d\underline{\mathbf{x}}(\tau)}{d\tau} \in \mathbb{R}^4.$$

Helposti nähdään, että $\underline{u}^0(\tau)/c = \underline{\gamma}(\tau) := 1/\sqrt{1 - \underline{\beta}(\tau)^2} \in [1, \infty)$ ja kaikilla $i = 1, 2, 3$

$$\underline{u}^i(\tau) = \underline{u}^0(\tau)\underline{\beta}^i(\tau) = \underline{\gamma}(\tau)c\underline{\beta}^i(\tau) = \underline{\gamma}(\tau)\underline{v}^i(\tau),$$

missä $\underline{\mathbf{v}}(\tau) := c\underline{\beta}(\tau)$ on hiukkasen nopeus, sekä (kaikissa Poincarén kartoissa)

$$\tilde{e} \circ \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\boldsymbol{\eta}}\underline{\mathbf{u}} \equiv -c^2 < 0$$

eli nelinopeus $\underline{\mathbf{u}}(\tau)$ on aina ajanluonteinen vektori. Hiukkasen (lepomassa $m > 0$) *neli-impulssi* (tai neli-liikemäärä) on $\underline{\mathbf{P}} := m\underline{\mathbf{u}}$ ja liike $\tau \mapsto \underline{\mathbf{x}}(\tau)$ saadaan (*Einsteinin*) *relativistisen liikeyhtälön*

$$\frac{d\underline{\mathbf{P}}(\tau)}{d\tau} = m \frac{d\underline{\mathbf{u}}(\tau)}{d\tau} = m \frac{d^2\underline{\mathbf{x}}(\tau)}{d\tau^2} = \mathbf{K}(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau)) \quad (5)$$

ratkaisuna; edellä $\mathbf{K} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ (jatkuva) on ns. *Minkowskin voima*. Kuten myöhemmin osoitetaan, varatun (testi)hiukkasen liike sähkömagneettisessa kentässä saadaan relativistisen liikeyhtälön (5) ratkaisuna, missä \mathbf{K} :n avaruusosa on Lorentzin voima.

Olkoon $\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{o}$ toinen Poincarén kartta. Relativistinen liikeyhtälö (5) tässä kartassa on muotoa

$$m \frac{d^2\underline{\mathbf{x}}'(\tau)}{d\tau^2} = \mathbf{K}'(\underline{\mathbf{x}}'(\tau), \underline{\mathbf{u}}'(\tau)),$$

missä $\underline{\mathbf{x}}'(\tau) = \mathbf{\Lambda}\underline{\mathbf{x}}(\tau) + \mathbf{o}$ ja \mathbf{K}' on $\mathbf{\Lambda}\mathbf{K}$ laskettuna koordinaateissa $(\mathbf{x}', \mathbf{u}')$, $\mathbf{u}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{u}$. Jos $\mathbf{K} \equiv \vec{0}$ eli hiukkasen liike inertiaalikoordinaatistossa \mathbf{x} on vapaata, niin $\mathbf{K}' \equiv \vec{0}$ ja myös kartassa \mathbf{x}' hiukkanen liikkuu vakionopeudella. Eli \mathbf{x}' on inertiaalikoordinaatisto. Täten *inertiaalikoordinaatistot E:ssä ovat Poincarén karttoja ja erityinen suhteellisuusteoria on Poincaré-relativistinen teoria*.

Harjoitustehtävä 9. Osoita, että jos $\mathbf{K} \equiv \vec{0}$, niin relativistisen liikeyhtälön $d^2\underline{\mathbf{x}}(\tau)/d\tau^2 \equiv \vec{0}$ ratkaisu on suora \mathbb{R}^4 :ssa ja siis myös \mathbb{R}^3 :ssa. Osoita, että vapaa kappale liikkuu vakionopeudella.

Jaetaan relativistinen liikeyhtälö (5) kahteen osaan: Olkoon $\mathbf{F} := (K^1, K^2, K^3)$, joten

$$\begin{aligned} mc \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= K^0(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau)), \\ mc \frac{d\gamma(\tau)\underline{\boldsymbol{\beta}}(\tau)}{d\tau} &= \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau)). \end{aligned}$$

Käyttämällä tulon derivointisääntöä saadaan

$$\frac{d\gamma\underline{\boldsymbol{\beta}}}{d\tau} \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} = \frac{d\gamma}{d\tau} \underline{\boldsymbol{\beta}} \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} + \gamma \frac{d\underline{\boldsymbol{\beta}}}{d\tau} \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} = \frac{d\gamma}{d\tau} \beta^2 + \frac{1}{2} \gamma \frac{d\beta^2}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\tau} (1 - \gamma^{-2}) - \frac{1}{2} \gamma \frac{d\gamma^{-2}}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\tau},$$

joten relativistisen liikeyhtälön (5) ratkaisulle $\underline{\mathbf{x}}$ pätee [!]

$$\boxed{K^0(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}}.} \quad (6)$$

Huomautus 4. Jos hiukkanen liikkuu reilusti valoa hitaammin eli $v(\tau) \ll c$ (jotenka $\underline{\beta}(\tau) \approx 0$) kaikilla $\tau \in \mathcal{T}$, niin $\underline{\tau}(x^0) \approx x^0/c - a = t - a = t$ valitsemalla $a = 0$ eli hiukkasen ominaisaika on (likimäärin) koordinaattiaika t . Ilmaistaan sitten kaikki τ :sta riippuvat funktiot t :n avulla (eli sijoitetaan t :n funktio $\tau = \underline{\tau}(ct)$ yhtälöihin). Käyttämällä Taylorin sarjakehitelmää funktiolle $x \mapsto (1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)$ nähdään, että $\underline{\gamma}(\tau) \approx 1 + \frac{1}{2}\underline{\beta}(\tau)^2$ ja $\underline{u}^0(\tau) = d\underline{x}^0(\tau)/d\tau = c\underline{\gamma}(\tau) \approx c$ sekä

$$\begin{aligned} \tau &\approx t, & \underline{\mathbf{x}}(\tau) &\approx (ct, \underline{\mathbf{r}}(t)), & \underline{\mathbf{u}}(\tau) &\approx (c, \underline{\mathbf{v}}(t)), \\ \frac{d}{dt} \left[mc^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}(t)^2 \right] &\approx \mathbf{F}(ct, \underline{\mathbf{r}}(t), c, \underline{\mathbf{v}}(t)) \cdot \underline{\mathbf{v}}(t), \\ m \frac{d\underline{\mathbf{v}}(t)}{dt} &\approx \mathbf{F}(ct, \underline{\mathbf{r}}(t), c, \underline{\mathbf{v}}(t)). \end{aligned}$$

Eli saatiin Newtonin toinen laki ja tunnettu tulos, että liike-energian muutosnopeus on voiman teho hiukkasen radalla eli toisin sanoen voiman tekemä työ on liike-energioitten erotus. Erityinen suhteellisuusteoria siis redusoituu Newtonin mekaniikaksi, kun hiukkanen liikkuu riittävän hitaasti. Huomaa, että saatiin sivutuotteena ‘lepoenergialle’ ($\underline{v} \equiv 0$) Einsteinin tuttu kaava

$$\boxed{E = mc^2.}$$

Newtonin mekaniikan tuloksia mukailien voidaan relativistinen liikeyhtälö tulkita myös seuraavasti: Määritellään hiukkasen ‘liikemassa’ $\underline{m}(\tau) := \gamma(\tau)m$, jolle pätee $\underline{m}(\tau) = m$, jos ja vain jos $\underline{\mathbf{v}}(\tau) = 0$. Toisaalta $\underline{m}(\tau) \rightarrow \infty$ mikäli $\underline{v}(\tau) \rightarrow c$ eli massallisen hiukkasen on kuljettava valoa hitaammin. Nyt toinen yhtälö

$$\frac{d\underline{m}(\tau)\underline{\mathbf{v}}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau))$$

on Newtonin toinen laki muuttuvamassaiselle hiukkaselle. Lisäksi neli-impulssi on

$$\underline{\mathbf{P}}(\tau) = m\underline{\mathbf{u}}(\tau) = (\underline{m}(\tau)c, \underline{m}(\tau)\underline{\mathbf{v}}(\tau)), \quad \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\boldsymbol{\eta}}\underline{\mathbf{P}} \equiv -m^2c^2 < 0,$$

ja ensimmäinen yhtälö

$$c \frac{d\underline{P}^0(\tau)}{d\tau} = mc^2 \frac{d\underline{\gamma}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau)) \cdot \underline{\mathbf{v}}(\tau)$$

kuvaa voiman tehoa (työ aikayksikössä). Nyt siis

$$c\underline{P}^0(\tau) = \underline{m}(\tau)c^2 = mc^2\underline{\gamma}(\tau) \approx mc^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}(t)^2, \quad \underline{\beta}(\tau) \approx 0$$

on tulkittavissa hiukkasen *relativistiseksi energiaksi* hetkellä τ .

Harjoitustehtävä 10. Tarkastellaan kahta inertiaalihavaintijaa \mathbf{x} ja \mathbf{x}' . Havaintija \mathbf{x}' etenee nopeudella v akselin x^1 suuntaan esimerkin 8 mukaisesti; katso kaava (3). Kappale liikkuu x^1 -akselilla, ja sen liike olkoon $t \mapsto \underline{x}^1(t)$. Miltä liike näyttää \mathbf{x}' -havaintijan mielestä? Siis ilmaise liike kartassa \mathbf{x}' käyränä $t' \mapsto \underline{x}'^1(t')$ sekä ilmaise nopeus

$$\frac{d\underline{x}'^1(t')}{dt'}$$

ja kiihtyvyys

$$\frac{d^2\underline{x}'^1(t')}{dt'^2}$$

nopeuden $d\underline{x}^1(t)/dt$ ja kiihtyvyyden $d^2\underline{x}^1(t)/dt^2$ avulla. Miten tulokset redusoituu, jos hetkellä t valitaan $v = d\underline{x}^1(t)/dt$? Tällöin karttaa \mathbf{x}' sanotaan hetkellisesti (kappaleen) mukana liikkuvaksi inertiaalikoordinaatistoksi. Jos (joka hetkellä t) hetkellisesti mukana liikkuvassa inertiaalikoordinaatistossa \mathbf{x}' kiihtyvyys $d^2\underline{x}'^1(t')/dt'^2$ on (koko ajan sama) vakio, niin sanotaan, että kappale kiihtyy tasaisesti. Mistä yhtälöstä voisit ratkaista tasaisesti kiihtyvän liikkeen $t \mapsto \underline{x}^1(t)$?

6 GEOM: Monistot

Käydään aluksi läpi joitain topologisia peruskäsitteitä. Niitä tarvitaan lähinnä vain määritelmässä.

Olkoon M joukko ja τ joukon M osajoukkojen muodostama joukko, johon kuuluu M , tyhjä joukko \emptyset , jokaisen joukkoperheen³⁴ $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \tau$ unioni $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ ja jokaisen äärellisen joukkoperheen $\{U_i\}_{i=1}^k \subseteq \tau$ leikkaus $\bigcap_{i=1}^k U_i$ (missä $k = 1, 2, \dots$). Tällöin sanotaan, että (M, τ) , tai lyhyesti M , on *topologinen avaruus* ja τ :n alkio on *avoin joukko*. Voidaan myös sanoa, että τ on joukon M topologia. Joukko S on *suljettu*, mikäli sen *komplementti* $S^c := M \setminus S$ on avoin eli $S^c \in \tau$. Joukko $U \in \tau$ on *pisteen* $\mathbf{m} \in M$ (*avoin*) *ympäristö*, jos $\mathbf{m} \in U$. Topologisen avaruuden (M, τ) (*topologinen*) *aliavaruus* on M :n osajoukko A varustettuna topologialla $\tau|_A := \{A \cap U \mid U \in \tau\}$. [!]

Esimerkki 13. Joukon M *triviaalitopologia* on $\{\emptyset, M\}$ ja *diskreettitopologia* on 2^M eli kaikkien M :n osajoukkojen muodostama joukko.

Esimerkki 14. Olkoon $M = \{0, 1, 2\}$, jolla on seuraavat osajoukot: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$ ja M . Nyt $\tau := \{\emptyset; \{1\}; \{0, 2\}; M\}$ on M :n topologia, sillä esim. $\{1\} \cup \{0, 2\} = M \in \tau$ ja $\{1\} \cap \{0, 2\} = \emptyset \in \tau$. Nyt $\{1\} \in \tau$ on avoin joukko ja myös suljettu, sillä $\{1\}^c = \{0, 1, 2\} \setminus \{1\} = \{0, 2\} \in \tau$. Joukko $\{0, 2\}$ on pisteen 2 ympäristö kuten myös M on. Joukko $\{0, 1\}$ varustettuna topologialla³⁵ $\{\emptyset; \{1\}; \{0\}; \{0, 1\}\}$ on M :n aliavaruus. Joukko $\tau' := \{\emptyset; \{0, 1\}; \{0, 2\}; M\}$ ei ole M :n topologia, sillä $\{0, 1\} \cap \{0, 2\} = \{0\} \notin \tau'$.

Harjoitustehtävä 11. Määrää kaikki edellisen esimerkin joukon M topologiat. Mitkä joukot ovat niiden suljettuja joukkoja? Entä pisteen $0 \in M$ ympäristöjä?

Esimerkki 15. Esimerkiksi \mathbb{R}^n on topologinen avaruus, jonka avoimet joukot ovat reunattomien ‘pallojen’ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$, $r \geq 0$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, (mielivaltaisia) unioneja, missä $|\mathbf{x}| := [\sum_{i=1}^n (x^i)^2]^{1/2}$ on \mathbb{R}^n :n normi. [!] Täten \mathbb{R}^k ‘on’ \mathbb{R}^n :n (aito) aliavaruus, kun $k < n$.

Kuvaus f topologiselta avaruudelta M topologiseen avaruuteen N on *jatkuva pisteessä* $\mathbf{m} \in M$, jos jokaiselle $f(\mathbf{m})$:n sisältävälle avoimelle joukolle V on olemassa \mathbf{m} :n sisältävä avoin joukko U siten, että $f(U) \subseteq V$. Kuvaus on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä.

Topologinen avaruus M on (*sileä* n -*ulotteinen*) *monisto*, jos on olemassa sellainen avointen joukkojen perhe $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, että $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i = M$ ja jokaisella $i \in \mathcal{I}$ on olemassa \mathbb{R}^n :n avoin joukko V_i

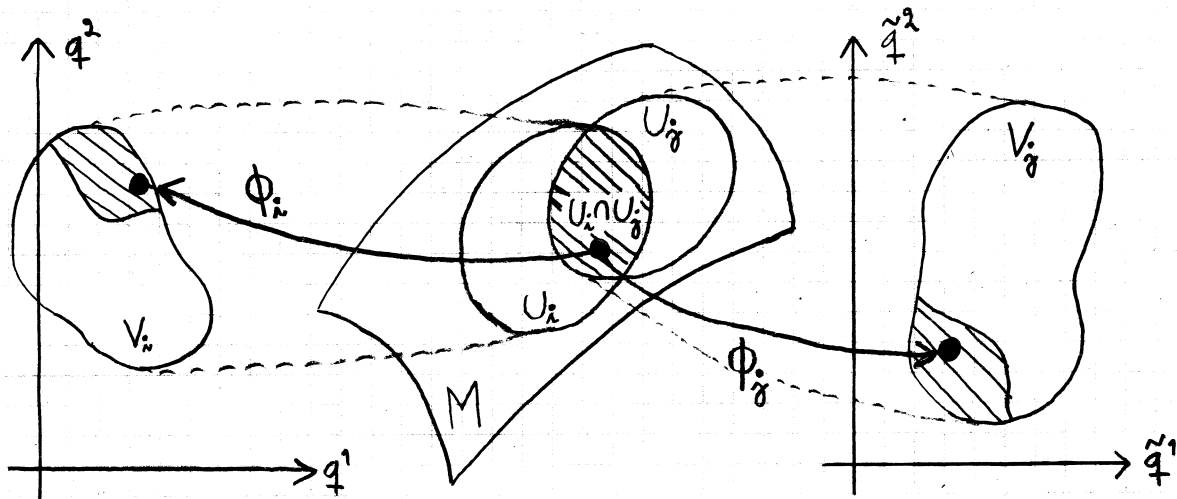
³⁴ \mathcal{I} on mielivaltainen (indeksi)joukko. Perhe on indeksoitu joukko.

³⁵Muttei muulla topologialla kuten triviaalitopologialla $\{\emptyset, \{0, 1\}\}$. [!]

($= \phi_i(U_i)$) ja jatkuva bijektio $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, jonka käänteiskuvaus on jatkuva. Lisäksi vaaditaan, että kaikilla $i, j \in \mathcal{I}$, joilla $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, koordinaattimuunnos eli *transitiofunktio*

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

on sileä eli sillä on joukossa $\phi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaattafunktiot. Moniston M kuvauksia ϕ_i sanotaan *kartoiksi* ja karttojen joukkoa *kartastoksi*.



Kuva 4: Karttojen $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ ja $\phi_j : U_j \rightarrow V_j$ välinen koordinaattimuunnos $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$.

Huomaa, että kartastoon voidaan lisätä karttoja kunhan ne ovat *yhteensopivia* edellä esitetyllä tavalla alkuperäisten karttojen kanssa ja näin saada kartasto, jossa on enemmän karttoja. Usein voidaan ajatella, että moniston kartasto on *maksimaalinen* eli sisältää kaikki yhteensopivat kartat. Kun kartalle $\phi : U \rightarrow V$ määritellään *koordinaattifunktiot*³⁶ $q^k := \text{pr}^k \circ \phi$, voidaan kirjoittaa $\phi = (q^1, q^2, \dots, q^n)$ tai lyhyesti $\phi = \mathbf{q}$ eli siis $\phi(\mathbf{m}) = (q^1(\mathbf{m}), \dots, q^n(\mathbf{m}))$, $\mathbf{m} \in U$.

Määritelmä 10. *Fysikaalisen systeemin konfiguraatioavaruus tai 'paikka-avaruus' on monisto, jonka dimensiota sanotaan systeemin vapausasteiden lukumääräksi. Konfiguraatioavaruuden kartan \mathbf{q} koordinaattifunktioita q^i sanotaan yleistyiksi koordinaateiksi.*

Esimerkki 16. Affiini avaruus \mathbb{A}^n on monisto, jonka rakenteen riittää määräämään yksi kartta, nimittäin kuvaus $A \mapsto \overrightarrow{OA}$, missä O on joku \mathbb{A}^n :n piste. Muita karttoja ovat mm. affiinit kartat: \mathbb{A}^4 :n karttoja ovat mm. Galilein ja Poincarén kartat, mutta näillä on eri fysikaalinen

³⁶Kaikilla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ määritellään projektio $\text{pr}^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto x^k$.

tulkinta (inertiaalikoordinaatistot N:ssä ja E:ssä).³⁷ Erityisesti \mathbb{R}^n on monisto (karttana esim. identiteettikuvaus $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$). Esimerkiksi avaruudessa vapaasti liikkuvan hiukkasen konfiguraatio-avaruudeksi voidaan valita \mathbb{R}^3 ja \mathbb{R}^2 voi olla tasolla liikkuvan hiukkasen konfiguraatioavaruus. Tietenkin muitakin yhteensopivia karttoja on. Esim. \mathbb{R}^3 :n ja \mathbb{R}^2 :n kartastoihin voidaan liittää lisää karttoja (esimerkiksi pallo-, sylinteri- ja napakoordinaatistot).

Esimerkki 17. Moniston M avoin osajoukko U ajateltuna M :n topologisena aliavaruutena on monisto eli M :n *avoin alimonisto*. Sen kartasto koostuu M :n karttojen rajoittumista U :lle. Esimerkiksi R -säteisen pallon sisälle liikkumaan rajoitetun hiukkasen konfiguraatioavaruus on \mathbb{R}^3 :n avoin alimonisto $\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{r}| < R\}$. Avaruudessa vapaasti liikkuvien hiukkasten (k kappaletta) konfiguraatioavaruus on $(\mathbb{R}^3)^k$:n avoin **[!]** alimonisto $\mathbf{X}_k := \{(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) \in (\mathbb{R}^3)^k \mid \mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j \forall i \neq j\}$ (koska hiukkaset eivät saa olla ‘päällekkäin’ eli samassa pisteessä samalla hetkellä).

Esimerkki 18. Torus (ympyrä) $\mathbb{T} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ on yksiulotteinen monisto. Sen rakenteen määrittämiseen vaaditaan vähintään kaksi karttaa, esimerkiksi kuvausten $\phi_1^{-1} : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{T} \setminus \{(1, 0)\}$, $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ ja $\phi_2^{-1} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{T} \setminus \{(-1, 0)\}$, $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ käänteiskuvaukset ϕ_1 ja ϕ_2 . Esimerkiksi $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \rightarrow (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, missä $\phi_1(\phi_2^{-1}(\theta)) = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$, ja $\phi_1(\phi_2^{-1}(\theta)) = \theta + 2\pi$, $\theta \in (-\pi, 0)$. Ympyrä \mathbb{T} on yksiulotteisen jaksollisen liikkeen (esim. tasoheilurin) konfiguraatioavaruus.

Esimerkki 19. Kaksiulotteinen pinta kolmiulotteisessa avaruudessa \mathbb{R}^3 parametrisityksensä

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v),$$

missä sileät funktiot f , g ja h on määritelty jossain \mathbb{R}^2 :n (avoimessa) osajoukossa A , on kaksiulotteinen monisto, kun rajoitaudutaan *säännöllisiin* (eli ei-singulaarisiin) pisteisiin $(u, v) \in A$.

³⁷Esimerkiksi E:ssä voidaan valita kartasto, joka koostuu pelkästään Poincarén kartoista (inertiaalikoordinaatistoista). Selvästikin tämä kartasto ei ole maksimaalinen. Sitten voidaan tutkia jonkun suureen (esim. ominaisaika) tai yhtälön (esim. relativistinen liikeyhtälö) muotoinvarianttisuutta tai kovarianttisuutta tässä kartastossa.

Näissä pisteissä voidaan määrittellä *pinnan normaalivektori*³⁸

$$\mathbf{N}(u, v) = (N^1(u, v), N^2(u, v), N^3(u, v)) := \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \neq \vec{0},$$

missä $\mathbf{r} := (f, g, h)$. (Singulaarisissa pisteissä $\mathbf{N}(u, v) = \vec{0}$.) Selvästikin $\mathbf{N}(u, v)$ on *kohtisuorassa* pintaa $\mathbf{r}(A)$ vastaan säännöllisissä pisteissä, sillä esim. $u \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ on käyrä pinnalla ja $\partial \mathbf{r}(u, v)/\partial u$ on sen (ja täten myös pinnan) tangenttivektori pisteessä (u, v) . Nyt jos $\mathbf{N}(u, v) \neq \vec{0}$, niin tangenttivektorit $\partial \mathbf{r}(u, v)/\partial u$ ja $\partial \mathbf{r}(u, v)/\partial v$ virittävät pinnan *tangenttitason* pisteeseen (u, v) . Ristitulona $\mathbf{N}(u, v)$ on kohtisuorassa tangenttitasoa ja täten pintaa vastaan. Luonnollisesti kaksiulotteinen pinta kuvaa esimerkiksi hiukkasen liikettä pinnalla. (Samoin myös riittävän säännölliset käyrät voidaan nähdä yksiulotteisina monistoina.)

Esimerkiksi yksikköpallon pinta $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ voidaan parametrisoida pallokoordinaatein (lukuunottamatta singulaarisia pisteitä); tällöin $f(u, v) = \sin u \cos v$, $g(u, v) = \sin u \sin v$ ja $h(u, v) = \cos u$.

Harjoitustehtävä 12. *Tarkastellaan pallon pintaa \mathbb{S}^2 . Nyt piste $(0, 0, 1)$ [vastaavasti $(0, 0, -1)$] on pohjoisnapa [vast. etelänapa]. Olkoon $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ mielivaltainen pinnan piste ja piirretään jana, joka alkaa pohjoisnavalta, kulkee \mathbf{r} :n kautta ja leikkaa xy -tason pisteessä $\phi_-(x, y, z)$. Tehdään täsmälleen sama juttu, mutta aloitetaan etelänavalta: saadaan xy -tason piste $\phi_+(x, y, z)$. Piirrä kuva! Osoita, että kuvaukset, ns. stereograafiset projektiot, ϕ_{\mp} ovat yhteensopivia \mathbb{S}^2 karttoja. Mitkä ovat niiden määrittelyalueet? Riittääkö nämä kaksi karttaa peittämään \mathbb{S}^2 :n? Etsi kartan ϕ_- ja pallokoordinaattien välinen koordinaattimuunnos.*

Usein pinnan yhtälö on annettu ‘implisiittisessä’ (eli piilotetussa) muodossa. Esimerkiksi kaksiulotteisen pinnan yhtälö muodossa $F(x, y, z) = 0$ on koordinaatteja (x, y, z) sitova (holonominen) side-ehto. Jos $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ on ‘riittävän säännöllinen’ sileä funktio, niin yhtälöstä $F(x, y, z) = 0$ voidaan ‘ratkaista’ joku koordinaatti, vaikka z , muuttujien (x, y) funktiona³⁹ eli

³⁸Esimerkiksi, jos

$$N^3(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

jossain pisteessä $(u_0, v_0) \in A$, niin käänteiskuvauslauseen nojalla on olemassa avoimet joukot $U \ni (u_0, v_0)$ ja $V' \ni (f(u_0, v_0), g(u_0, v_0))$ siten, että kuvaus $U \ni (u, v) \mapsto (f(u, v), g(u, v)) \in V'$ on bijektio ja sen käänteiskuvaus on sileä. Täten kuvaus $(u, v) \mapsto (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ U :sta avoimelle joukolle $V \subseteq \mathbb{R}^3$ on bijektio (sileänä) käänteiskuvausenaan $\phi_1 : V \rightarrow U$. Nyt siis ϕ_1 on kartta. Toinen mahdollinen kartta on projektio $\phi_2 : V \rightarrow W$, $\phi_2(x, y, z) = (x, y)$, joka on myös bijektio, sileä ja ϕ_1 :n kanssa yhteensopiva.

³⁹Implisiittifunktioalauseen nojalla tämä onnistuu sellaisissa pisteissä, missä $\partial F(x, y, z)/\partial z \neq 0$. Oikeastaan ko. lause antaa vain funktion $h(x, y)$ olemassaolon; sen muotoa voi olla vaikea nähdä (esim. yritä ratkaista z yhtälöstä $x - yz \sin z = 0$; nyt x ja y on helppo ratkaista).

esim. $z = h(x, y)$, jolle $F(x, y, h(x, y)) = 0$, kun $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Nyt siis $x = f(u, v) = u$ ja $y = g(u, v) = v$, joten kaikilla $(x, y) \in A$

$$\mathbf{N}(x, y) = \left(-\frac{\partial h(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial h(x, y)}{\partial y}, 1 \right) \neq \vec{0}.$$

Esimerkiksi \mathbb{S}^2 on pisteiden (x, y, z) joukko, joille $F_{\mathbb{S}^2}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Tästä voidaan ratkaista vaikka $z = h(x, y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, joille vastaava avoin joukko

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Ratkaisuja (h -funktioita) on siis kaksi vastaten pallon pohjoista ja eteläistä pallonpuoliskoaa. Ekvaattori pitää kartoittaa muilla kartoilla.

Huomaa, että gradientti $\nabla F(x, y, z)$ pinnan pisteessä (x, y, z) on myös pinnan normaali-vektori eli täten yhdensuuntainen vektorin $\mathbf{N}(x, y)$ kanssa: jos $F_0(x, y) := F(x, y, h(x, y)) \equiv 0$, niin

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_0}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

ja

$$\frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial z} \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right) = \left(-\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \nabla F.$$

Esimerkiksi pallon pinnan normaali on (vaikka) $\nabla F_{\mathbb{S}^2}(x, y, z) = 2(x, y, z)$, joka lasketaan pallon pinnan pisteessä (x, y, z) , jolle siis $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Jos side-ehtoja on kaksi $F_1(x, y, z) = 0 = F_2(x, y, z)$, niin systeemi liikkuu pintojen leikkauskäyrää (1-ulotteinen monisto) pitkin. Tietenkin saattaa käydä niin, että pintojen leikkaus on tyhjä \emptyset , yksiö $\{(x, y, z)\}$ tai pinta tai näiden unioni.

Harjoitustehtävä 13. Oletetaan, että hiukkanen liikkuu (vai liikkuuko?) \mathbb{R}^3 :ssa noudattaen side-ehtoja a)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z &= z^2, \\ z - 1 &= \sqrt{-2xy}, \end{aligned}$$

tai b)

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 &= 1 - z^2, \\ 4y^{-2} &= 1, \end{aligned}$$

Hahmottele hiukkasen rata kummassakin tapauksessa. Onko rata monisto?

Kaksiulotteinen parametrisoidun pinnan käsite voidaan helposti yleistää useampiulotteisiin avaruuksiin. Itseasissa Whitney osoitti, että jokainen n -ulotteinen sileä monisto M voidaan samaistaa \mathbb{R}^{2n} :n parametrisoituna joukkona. Tämä ‘upottaminen’ $M \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ on kuitenkin fyysikaalisesti problemaattinen, sillä a) voi olla, että M voitaisiin upottaa myös pienempiulotteiseen avaruuteen (upota taso \mathbb{R}^2 avaruuden \mathbb{R}^4 sijasta \mathbb{R}^3 :een), b) vaikka upotusavaruuden dimensio olisi mahdollisimman pieni, niin upotus ei ole yksikäsitteinen (upota \mathbb{R} tasoon \mathbb{R}^2 joko suorana $y = x$ tai käyränä $y = x^2$; näillä on selvästikin erilainen *ulkoinen kaarevuus*) tai c) jos neliulotteisen avaruuden upottaa isompidimensioiseen avaruuteen, niin mikä on uusien ulottuvuuksien fyysikaalinen merkitys (voiko niitä mitata, jne.).

Esimerkki 20. Jos M ja N ovat monistoja, niin voidaan määritellä ns. *tulomonisto* $M \times N$, jonka dimensio on M :n ja N :n dimensioiden summa.⁴⁰ Jos $\phi_M : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ja $\phi_N : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ ovat M :n ja N :n karttoja, niin $\phi_M \times \phi_N : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}$, $(m, n) \mapsto (\phi_M(m), \phi_N(n))$ on $M \times N$:n kartta. Tulomoniston käsite voidaan välittömästi laajentaa useampienkin monistojen tuloille.

Esimerkiksi kaksiulotteinen torus eli ‘donitsin pinta’ $\mathbb{T}^2 := \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ on tulomonisto. Se on kaksoistasoheilurin konfiguraatioavaruus. Jos alemman heilurin kulma on rajoitettu välille $(\epsilon, 2\pi - \epsilon)$, $0 \approx \epsilon > 0$, eli alempi heiluri ei pääse kiertymään ylemmän heilurin varren ohi, niin konfiguraatioavaruus on paremminkin sylinterin pinnan $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ avoin alimonisto. Jos kaksoheilurin kiinnityspiste sallitaan liikkua tasossa, niin konfiguraatioavaruus on $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ tai $(\epsilon, 2\pi - \epsilon) \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2$. Huomaa, että pallon pinta \mathbb{S}^2 ei ole tulomonisto. Kolmiulotteisessa avaruudessa vapaasti liikkuvan ohuen kepin konfiguraatioavaruus on $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$.

⁴⁰ $M \times N$ varustetaan *tulotopologialla* eli karkeimmalla topologialla, jolla projektiot $(m, n) \mapsto m$ ja $(m, n) \mapsto n$ ovat jatkuvia.

7 GEOM: Vektorit

Olkoon M ja N monistoja ja $f : M \rightarrow N$ jatkuva kuvaus. Jos kaikille M :n kartoille ϕ ja N :n kartoille ψ kuvauksella $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ on kaikkien kertalukujen osittaisderivaattafunktiot olemassa (ja ne ovat automaattisesti jatkuvia), niin sanotaan, että f on *sileä*.⁴¹ **Jatkossa oletetaan, että kaikki kuvaukset ovat sileitä.**

Jos merkitään $\phi = \mathbf{q}$ ja $\psi = \mathbf{y}$, niin kuvausta $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ saatetaan merkitä lyhyesti

$$y^k = f^k(\mathbf{q}) \quad \text{tai} \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{q}),$$

missä $f^k := y^k \circ f \circ \phi^{-1}$ ja \mathbf{q} tulkitaan nyt \mathbb{R}^n :n *pisteeksi*, joka kuuluu ϕ :n arvojoukkoon. Sileälle funktiolle ovat siis kaikki osittaisderivaatat

$$\frac{\partial^{i_1}}{\partial (q^1)^{i_1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial (q^2)^{i_2}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial (q^n)^{i_n}} f^k(\mathbf{q})$$

olemassa. Erityisesti, jos $N = M$ ja f on identiteettikuvaus, kartanvaihtoa $\psi \circ \phi^{-1}$ merkitään $y^k = y^k(\mathbf{q})$ tai $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{q})$.

Seuraavaksi annetaan vektorille kolme ekvivalenttia määritelmää:

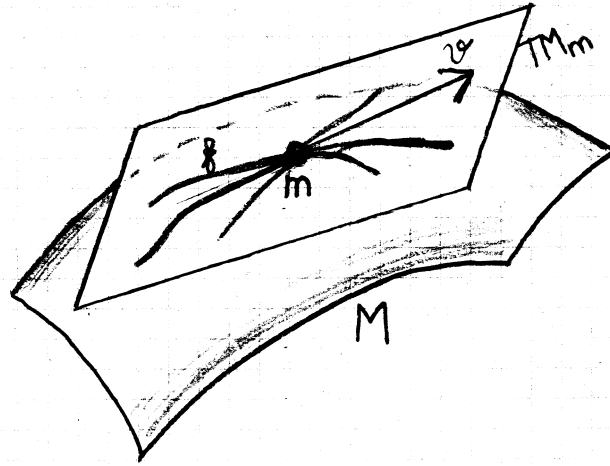
V1. (*Sileä*) käyrä n -ulotteisella monistolla M on (*sileä*) kuvaus avoimelta väliltä $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, monistoon M . Olkoon f_1 ja f_2 kaksi käyrää monistolla M määriteltynä jollain välillä (a, b) , $a < 0 < b$, joille $f_1(0) = f_2(0) = \mathbf{m}$. Sanotaan, että käyrät f_1 ja f_2 ovat *ekvivalentit* tai *siivuavat toisiaan* pisteessä \mathbf{m} , jos jollekin M :n kartalle $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{m} \in U$,

$$\left. \frac{d}{dt} q^i(f_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} q^i(f_2(t)) \right|_{t=0}$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$. Ketjusääntöä käyttäen nähdään, että kyseessä on kartan valinnasta riippumaton ekvivalenssirelaatio, joten voidaan määritellä *tangenttivektori pisteessä* \mathbf{m} ekvivalenssiluokkana $[f]$, missä f on käyrä $(a, b) \rightarrow M$, $a < 0 < b$, jolle $f(0) = \mathbf{m}$.⁴² Pisteessä \mathbf{m} tangenttivektorien joukko on vektoriavaruus, ns. *tangenttiavaruus* pisteessä \mathbf{m} . Käytetään sille merkintää $TM_{\mathbf{m}}$.

⁴¹*Diffeomorfismi* on sileä bijektio $f : M \rightarrow N$, jonka käänteiskuvaus on sileä; sanotaan, että monistot M ja N ovat *diffeomorfiset* sekä merkitään $M \cong N$. Jos monistojen välillä on diffeomorfismi, niin ne voidaan 'samaistaa' differentiaaligeometrisissa tarkasteluissa. Esim. $\mathbb{A}^n \cong \mathbb{R}^n$. Diffeomorfismit $f : M \rightarrow M$ muodostavat *ryhmän* $\text{Diff}(\mathbf{m})$, jonka ryhmätulo on funktioiden yhdistäminen.

⁴²Eli $[f]$ on joukko, joka sisältää kaikki käyrät, jotka ovat ekvivalentteja käyrän f kanssa. Yleisesti *ekvivalenssirelaatio* \sim joukossa X toteuttaa seuraavat ehdot: 1) $x \sim x$, 2) $x \sim x' \iff x' \sim x$ ja 3) $x \sim x', x' \sim x'' \implies x \sim x''$. Ekvivalenssiluokka $[x] := \{x' \in X \mid x' \sim x\}$.



Kuva 5: Tangenttiavaruus TM_m pisteen m yllä ja yksi sen vektori v esitettynä toisiaan sivuavien käyrien f ekvivalenssiluokkana $[f]$.

V2. Kuvaus

$$w_{\mathbf{q}}^m : TM_m \rightarrow \mathbb{R}^n, [f] \mapsto \left(\frac{d}{dt} q^1(f(t)) \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt} q^2(f(t)) \Big|_{t=0}, \dots, \frac{d}{dt} q^n(f(t)) \Big|_{t=0} \right)$$

on kartan \mathbf{q} valinnasta riippuva hyvin määritelty lineaarinen bijektio. Reaalilukuja $\frac{d}{dt} q^k(f(t)) \Big|_{t=0}$ sanotaan vektorin $[f]$ *komponenteiksi* koordinaatistossa \mathbf{q} . Jos valitaan jokin toinen pisteen m sisältävä kartta $\tilde{\mathbf{q}}$, niin vektorin $[f]$ komponentit tässä koordinaatistossa ovat

$$\frac{d}{dt} \tilde{q}^k(f(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^l} \Big|_{\mathbf{q}(m)} \frac{d}{dt} q^l(f(t)) \Big|_{t=0},$$

missä ajatellaan karttaa $\tilde{\mathbf{q}}$ koordinaattien \mathbf{q} funktiona.⁴³ Täten saadaan yhtäpitävä määritelmä tangenttivektorille: *tangenttivektori pisteessä m* on ekvivalenssiluokka $[(\mathbf{v}, \mathbf{q})]$, missä $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ja \mathbf{q} on kartta pisteessä m , ja missä pari (\mathbf{v}, \mathbf{q}) on ekvivalentti parin $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{q}})$ kanssa, jos ja vain jos $\tilde{v}^k = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^l} \Big|_{\mathbf{q}(m)} v^l$. Tangenttivektoria sanotaan myös *kontravariantiksi vektoriksi* johtuen edellämainitusta komponenttien muunnosominaisuudesta.⁴⁴

V3. Tangenttivektori on myös mahdollista määritellä *differentiaalioperaattorina* seuraavasti: olkoon $m \in M$ ja $C^\infty(m)$ (sileitten) funktioiden $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama joukko,⁴⁵ ns. *itu pisteessä m* , missä U on m :n avoin ympäristö. Jos $[f]$ on käyrän $f : (a, b) \rightarrow M$ määräämä tangenttivektori pisteessä m ja $\xi \in C^\infty(m)$, niin $\xi \circ f : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ on (sileä) funktio jollekin

⁴³Siis jos $\phi = \mathbf{q}$ ja $\tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{q}}$, niin merkitään $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) := (\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})(\mathbf{q})$, missä nyt tulkitaan $\mathbf{q} \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

⁴⁴Vektorin *komponentit* muuntuu *vastakkaisesti* TM_m :n kantavektoreihin nähden.

⁴⁵Jopa (*funktio*)*algebra*, sillä funktioille $\xi_{1,2} : U_{1,2} \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan määritellä pisteittäinen lineaarikombinaatio ja tulo $\xi_1 \xi_2$ (avoimessa) joukossa $U_1 \cap U_2 \ni m$.

$\epsilon > 0$. Tästä seuraa, että voidaan määrittellä lineaarikuvaus

$$v_{[f]}^{\mathbf{m}} : C^\infty(\mathbf{m}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \frac{d}{dt}\xi(f(t))\Big|_{t=0},$$

jolle pätee *Leibnitzin (tulo)sääntö* $v_{[f]}^{\mathbf{m}}(\xi_1\xi_2) = v_{[f]}^{\mathbf{m}}(\xi_1)\xi_2(\mathbf{m}) + \xi_1(\mathbf{m})v_{[f]}^{\mathbf{m}}(\xi_2)$.⁴⁶

Olkoon $\phi = \mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ kartta pisteessä $\mathbf{m} \in U$. Määritellään i :s *koordinaattikäyrä*

$$f_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad t \mapsto \phi^{-1}(q^1(\mathbf{m}), \dots, q^{i-1}(\mathbf{m}), t + q^i(\mathbf{m}), q^{i+1}(\mathbf{m}), \dots, q^n(\mathbf{m})),$$

joten kaikille $\xi \in C^\infty(\mathbf{m})$

$$v_{[f_i]}^{\mathbf{m}}(\xi) = \frac{d}{dt}\xi(f_i(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial q^i}\xi(\phi^{-1}(q^1, \dots, q^n))\Big|_{\mathbf{q}(\mathbf{m})}.$$

Täten merkitään

$$\partial_i|_{\mathbf{m}} \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\mathbf{m}} \equiv v_{[f_i]}^{\mathbf{m}}.$$

Erityisesti $\partial_i|_{\mathbf{m}}(q^j) = \delta_i^j$ (Kroneckerin delta). Voidaan osoittaa, että operaattorit $\partial_i|_{\mathbf{m}}$, $i = 1, \dots, n$, muodostavat tangenttiavaruuden $TM_{\mathbf{m}}$ kannan, eli kaikille tangenttivektoreille $v \in TM_{\mathbf{m}}$ pisteessä \mathbf{m} ,

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i|_{\mathbf{m}},$$

missä reaaliarvot v^i ovat vektorin v komponentit koordinaatiston \mathbf{q} suhteen, eli jos samaistetaan v jonkun $[f]$:n kanssa, niin $v^i = \frac{d}{dt}q^i(f(t))\Big|_{t=0}$ ja v voidaan samaistaa myös $[(\mathbf{v}, \mathbf{q})]$:n kanssa (missä $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$).

Jos (\tilde{q}^i) on toinen kartta pisteessä \mathbf{m} , niin $TM_{\mathbf{m}}$:n kantavektorit muuntuu seuraavasti:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k}\Big|_{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^k}\Big|_{\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{m})} \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\mathbf{m}}.$$

Koska v :n komponentit v^i muuttuu uusiksi komponenteiksi

$$\tilde{v}^k := \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^l}\Big|_{\mathbf{q}(\mathbf{m})} v^l,$$

niin [!]

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\mathbf{m}} = \sum_{k=1}^n \tilde{v}^k \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k}\Big|_{\mathbf{m}}.$$

Nyt voidaan määrittellä mekaniikan peruskäsitteet liike ja nopeus. Olkoon M konfiguraatioavaruus eli monisto.

⁴⁶Eli $v_{[f]}^{\mathbf{m}}$ on algebran $C^\infty(\mathbf{m})$ *derivointi*. Kääntäen, jos $v : C^\infty(\mathbf{m}) \rightarrow \mathbb{R}$ on derivointi, niin $v = v_{[f]}^{\mathbf{m}}$, jollekin tangenttivektorille $[f]$ pisteessä \mathbf{m} , ja täten tangenttivektorit (pisteessä \mathbf{m}) voidaan tulkita myös algebran $C^\infty(\mathbf{m})$ derivointeina.

Määritelmä 11. *Systemin liike on käyrä $\alpha : (t_0, t_1) \rightarrow M$, $t_0 < t_1$, ja rata on liikkeen kuva $\alpha((t_0, t_1))$. Liikkeen (yleistetty) nopeus radan pisteessä $\alpha(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, on $TM_{\alpha(t)}$:n vektori*

$$\dot{\alpha}(t) := \sum_{i=1}^n \frac{d}{ds} q^i(\alpha(s)) \Big|_{s=t} \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{ds'} q^i(\alpha(s' + t)) \Big|_{s'=0} \partial_i \Big|_{\alpha(t)},$$

missä \mathbf{q} on kartta pisteessä $\alpha(t)$, joten siis nopeus on kontravariantti vektori.

Kun liike α ja kartta \mathbf{q} on annettu, niin merkitään lyhyesti (mutta hieman epätäsmällisesti) $\underline{q}^i(t) := q^i(\alpha(t))$, $\underline{\mathbf{q}}(t) := \mathbf{q}(\alpha(t))$, $\underline{\dot{q}}^i(t) := \frac{d}{ds} q^i(\alpha(s)) \Big|_{s=t}$ ja $\underline{\dot{\mathbf{q}}}(t) := (\underline{\dot{q}}^1(t), \dots, \underline{\dot{q}}^n(t)) = \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{q}}(t)$, joten nopeutta voidaan joskus jopa merkitä symbolilla

$$\underline{\dot{\mathbf{q}}}(t) := \dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^n \underline{\dot{q}}^i(t) \partial_i \Big|_{\alpha(t)}.$$

Usein liikkeen $\alpha(t)$ parametri t on (*universaali*) aika (tai *ominaisaika* suhteellisuusteoriassa), joten tällöin sanotaan, että $\dot{\alpha}(t)$ on (yleistetty) nopeus *hetkellä* t .

Esimerkki 21. Palataan esimerkin 19 tapaukseen, missä tarkasteltiin parametrisoitua pintaa $\mathbf{r}(u, v) = (f(u, v); g(u, v); h(u, v))$. Tarkastellaan sitten tangettitasoa pisteessä $\mathbf{r}_0 := \mathbf{r}(u_0, v_0)$, missä $\mathbf{N}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$. Selvästikin tangenttitaso on affiini avaruus

$$\{\mathbf{r}_0 + a\mathbf{v}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{v}_v(u_0, v_0) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

missä $\mathbf{v}_u := \partial \mathbf{r} / \partial u$ ja $\mathbf{v}_v := \partial \mathbf{r} / \partial v$. Miten tangenttitaso liittyy tangenttiavaruuteen pinnan pisteessä \mathbf{r}_0 ?

Olkoon $t \mapsto \mathbf{r}(\underline{u}(t), \underline{v}(t))$, $(\underline{u}(0), \underline{v}(0)) = (u_0, v_0)$, käyrä pinnalla. Nyt käyrän komponentit kartassa $\mathbf{r}(u, v) \mapsto (u, v)$ ovat $a := d\underline{u}(t)/dt|_{t=0} = \underline{\dot{u}}(0)$ ja $b := \underline{\dot{v}}(0)$ eli käyrän ekvivalenssiluokka voidaan samaistaa tangenttivektorin (differentiaalioperaattorin)

$$V_{\mathbf{r}_0, a, b} := a \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\mathbf{r}_0} + b \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\mathbf{r}_0} = \underline{\dot{u}}(0) \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\mathbf{r}(u_0, v_0)} + \underline{\dot{v}}(0) \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\mathbf{r}(u_0, v_0)}$$

kanssa, joka operoi ‘pinnan funktioon’ $\tilde{\xi}(u, v) := \xi(\mathbf{r}(u, v)) \in \mathbb{R}$ seuraavasti

$$V_{\mathbf{r}_0, a, b} \tilde{\xi} = \underline{\dot{u}}(0) \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} + \underline{\dot{v}}(0) \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} = \frac{d\tilde{\xi}(\underline{u}(t), \underline{v}(t))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Toisaalta (lyhyesti merkittynä sijoitukset ‘unohtaan’)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\xi}(\underline{u}(t), \underline{v}(t))}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial u} \frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d\underline{v}}{dt} \right] + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} [\dots] + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial z} [\dots] \\ &= (\nabla \tilde{\xi})(\mathbf{r}_0) \cdot (a\mathbf{v}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{v}_v(u_0, v_0)) \end{aligned} \quad (7)$$

eli siis tangenttiavaruus voidaan samaistaa tangenttitason kanssa ja tangenttivektori voidaan tulkita kolmella tavalla: **V1** toisiaan sivuavien pinnalla olevien käyrien ekvivalenssiluokka pinnan pisteessä \mathbf{r}_0 tai ko. käyrien (ja siis myös pinnan) tangenttisuora

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{r}_0 + t[a\mathbf{v}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{v}_v(u_0, v_0)] \in \mathbb{R}^3,$$

V2 pisteeseen \mathbf{r}_0 liitetty vektorin komponentit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (tai niiden ekvivalenssiluokka mikäli pinnan parametrisoinnin (u, v) sallitaan muuttua) sekä **V3** (funktion ξ) suunnattu derivaatta (7) pisteessä \mathbf{r}_0 (tangenttitason) suuntaan $a\mathbf{v}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{v}_v(u_0, v_0)$.

Harjoitustehtävä 14. *Olkoon $(t_0, t_1) \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ (sileä) käyrä. Milloin kyseinen käyrä on yksiulotteinen monisto? Millasia ovat sen tangenttivektorit ja tangenttiavaruudet? (Vinkki: apinoid edellistä esimerkkiä.)*

Harjoitustehtävä 15. *Kaksiulotteinen torus eli ‘donitsin pinta’ $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ voidaan nähdä parametrisoituna pintana, kun valitaan esimerkissä 19*

$$f(u, v) = (a + b \sin v) \cos u, \quad g(u, v) = (a + b \sin v) \sin u, \quad h(u, v) = b \cos v,$$

missä a on isomman ympyrän säde xy -tasossa ja b on pienemmän ympyrän säde. Hahmottele kuva toruksesta, missä kyseiset ympyrät näkyvät. Laske \mathbb{T}^2 :n normaalivektori $\mathbf{N}(u, v)$. Häviääkö se missään pisteessä? Määritellään käyrät f_1 ja f_2 seuraavasti:

$$\begin{aligned} f_1(t) &:= \left(2^{-1/2}(a + b \sin t), 2^{-1/2}(a + b \sin t), b \cos t \right), \\ f_2(t) &:= \left(a \cos(t + \pi/4), a \sin(t + \pi/4), b \right). \end{aligned}$$

Ovatko käyrät toruksella? Kulkevatko käyrät saman pisteen kautta, kun $t = 0$? Sivuvatko käyrät toisiaan kyseisessä pisteessä?

Esimerkki 22. Tarkastellaan affinia avaruutta \mathbb{A}^n ja kiinnitetään sen joku piste O . Koska \mathbb{A}^n :n rakenteen määrää jo yksi kartta $A \mapsto \mathbf{x}(A) := \overrightarrow{OA}$, niin \mathbb{A}^n voidaan täysin samaistaa \mathbb{R}^n kanssa (eli edellinen kartta on siis diffeomorfismi) ja myös (minkä tahansa) tangenttiavaruutensa $T\mathbb{A}_O^n$ kanssa; jälkimmäinen affiini bijektio on esimerkiksi

$$\mathbb{A}^n \ni A = O + \overrightarrow{OA} = O + \mathbf{x}(A) \mapsto \sum_{i=1}^n x^i(A) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_O \in T\mathbb{A}_O^n,$$

jokaa kuvaa k :nnen koordinaattiakselin $O + \mathbb{R}\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_k := (\delta_k^i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, tangenttiavaruuden k :nneksi koordinaattiakseliksi $\mathbb{R}\partial/\partial x^k|_O$. Toisaalta mielivaltainen vektori $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ voidaan ‘sijoittaa’ mihin tahansa avaruuden pisteeseen $A \in \mathbb{A}^n$ tai tangenttiavaruuteen $T\mathbb{A}_A^n$: saadaan

piste $A + \mathbf{y} \in \mathbb{A}^n$ tai vektori $\sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_A \in T\mathbb{A}_A^n$. Vektoria \mathbf{y} voidaan siis yhdensuuntaissiirtää tangentialiavaruudesta tai pisteestä toiseen.

Esimerkiksi, jos $n = 2$, niin $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = (0, 1)$, $x^1 = x$ ja $x^2 = y$ sekä $O + \mathbf{i} \leftrightarrow \partial/\partial x|_O$ ja $O + \mathbf{j} \leftrightarrow \partial/\partial y|_O$ eli ‘tason \mathbb{A}^2 tangentialiavaruudet voidaan piirtää samaan kuvaan mihin tasokin.’ Kiinnitetään origo O ja karteesiset koordinaatit (x, y) . Nyt liike α tasossa voidaan ilmaista muodossa $t \mapsto \alpha(t) = O + (\underline{x}(t), \underline{y}(t))$, joten sen nopeus hetkellä t on $\underline{\dot{x}}(t)\partial/\partial x|_{\alpha(t)} + \underline{\dot{y}}(t)\partial/\partial y|_{\alpha(t)}$ vastaten \mathbb{R}^2 :n vektoria $\mathbf{v}(t) = (\underline{\dot{x}}(t), \underline{\dot{y}}(t))$, joka piirretään alkamaan pisteestä $\alpha(t)$. Ilmaistaan sitten nopeus napakoordinaateissa (r, φ) , joiden transitiofunktioit ovat $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\varphi(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$, $x \neq 0$, tai kääntäen $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$ ja $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$: Määritellään $\underline{r}(t) := r(\underline{x}(t), \underline{y}(t))$ ja $\underline{\varphi}(t) := \varphi(\underline{x}(t), \underline{y}(t))$ sekä kohtisuorat yksikkövektorit $\mathbf{e}_r(\varphi) := (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ja $\mathbf{e}_\varphi(\varphi) := (-\sin \varphi, \cos \varphi)$, joiden avulla ilmaistuna [!]

$$\alpha(t) = O + \underline{r}(t)\mathbf{e}_r(\underline{\varphi}(t)),$$

$$\underline{\dot{x}}(t)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\alpha(t)} + \underline{\dot{y}}(t)\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\alpha(t)} = \underline{\dot{r}}(t)\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\alpha(t)} + \underline{\dot{\varphi}}(t)\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_{\alpha(t)}.$$

Koska $\partial/\partial x|_{\alpha(t)} \leftrightarrow \alpha(t) + \mathbf{i}$ ja $\partial/\partial y|_{\alpha(t)} \leftrightarrow \alpha(t) + \mathbf{j}$, niin $\partial/\partial r|_{\alpha(t)} \leftrightarrow \alpha(t) + \mathbf{e}_r(\underline{\varphi}(t))$ ja $\partial/\partial \varphi|_{\alpha(t)} \leftrightarrow \alpha(t) + \underline{r}(t)\mathbf{e}_\varphi(\underline{\varphi}(t))$, joten nopeus (pisteessä $\alpha(t)$) on [!]

$$\mathbf{v}(t) = \underline{\dot{r}}(t)\mathbf{e}_r(\underline{\varphi}(t)) + \underline{\dot{\varphi}}(t)\underline{r}(t)\mathbf{e}_\varphi(\underline{\varphi}(t))$$

eli säteittäis- tai radiaalinopeuden $\underline{\dot{r}}(t)\mathbf{e}_r(\underline{\varphi}(t))$ ja poikittais- tai transversaalinopeuden $\underline{\dot{\varphi}}(t)\underline{r}(t)\mathbf{e}_\varphi(\underline{\varphi}(t))$ summa. Vastaavasti voidaan käsitellä \mathbb{A}^3 :n sylinteri- ja pallokoordinaatit. [!]

8 GEOM: Tensorit

Tarkastellaan aluksi hieman lineaarialgebraa. Olkoon V (äärellisulotteinen) vektoriavaruus (yli \mathbb{R} :n) ja määritellään V :n (algebrallinen) *duaali* V^* lineaarikuvausten $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ joukkona. Jos $f_1, f_2 \in V^*$ ja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ voidaan määritellä lineaarikombinaatio $c_1f_1 + c_2f_2 \in V^*$ *pisteittäin* eli

$$(c_1f_1 + c_2f_2)(v) := c_1f_1(v) + c_2f_2(v), \quad v \in V.$$

Täten myös V^* on vektoriavaruus. Jos $\{e_i\}_{i=1}^{\dim V}$ on V :n kanta, niin voidaan määritellä V^* :n *duaalikanta* $\{e^j\}_{j=1}^{\dim V}$, jolle $e^j(e_i) := \delta_i^j$. Selvästikin

$$f\left(\sum_i c^i e_i\right) = \sum_i c^i f(e_i) = \sum_j f(e_j) \sum_i \delta_i^j c^i = \sum_j f(e_j) e^j\left(\sum_i c^i e_i\right)$$

ja täten $f = \sum_j f(e_j) e^j$. Duaaliavaruuden V^* duaaliavaruus $(V^*)^*$ voidaan samaistaa V :n kanssa,⁴⁷ sillä jos $F \in (V^*)^*$ eli $F : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarinen, niin

$$F(f) = F\left(\sum_j f(e_j) e^j\right) = \sum_j f(e_j) F(e^j) = f(v(F)),$$

missä $v(F) := \sum_j F(e^j) e_j \in V$. Erityisesti kannan $\{e^j\}_{j=1}^{\dim V}$ duaalikannalle $\{F_i\}_{i=1}^{\dim V}$ saadaan $F_i(e^j) := \delta_i^j = e^j(e_i)$ eli $v(F_i) = e_i$. Jatkossa aina samaistetaan $(V^*)^*$ ja V (kuvauksella $F_i \mapsto e_i$) sekä merkitään lyhyesti $F_i = e_i$ eli $e_i(e^j) = \delta_i^j$.

Esimerkki 23. Olkoon TM_m moniston M tangenttiavaruus ja \mathbf{q} kartta pisteessä \mathbf{m} , ja olkoon $\{\partial_i|_m\}$ avaruuden TM_m kanta. Nyt TM_m :n duaali (eli lineaarikuvausten $TM_m \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus) on TM_m^* . Olkoon $\{dq^1|_m, dq^2|_m, \dots, dq^n|_m\} \subset TM_m^*$ kannan $\{\partial_i|_m\}$ duaalikanta⁴⁸ eli $dq^j|_m(\partial_i|_m) = \delta_i^j$. Vektoriavaruuden TM_m^* alkioita $\sum_{i=1}^n \omega_j dq^j|_m$ sanotaan *kovarianteiksi vektoreiksi* tai *kovektoreiksi* tai *duaalivektoreiksi*, sillä *komponentit* ω_j muuntuvat samoin kuin vektorit $\partial_i|_m$ koordinaattimuunnoksissa. Koska vektoriavaruuden TM_m duaalin duaali voidaan samaistaa TM_m :n kanssa, niin merkitään $\partial_i|_m(dq^j|_m) = \delta_i^j$.

Olkoon sitten V_1, \dots, V_s (reaalisia äärellisulotteisia) vektoriavaruuksia. Kuvaus

$$L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_s \rightarrow \mathbb{R}$$

on *s-lineaarinen* tai *multilineaarinen* mikäli sen on erikseen lineaarinen kunkin komponenttinsa suhteen eli kuvaukset $L_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$, $v_i \mapsto L(v_1, \dots, v_i, \dots, v_s)$ (missä $1 \leq i \leq s$) ovat lineaarisia

⁴⁷Myös V^* voidaan samaistaa V :n kanssa, mutta siihen vaaditaan kääntyvää matriisiä (g_{ij}) , jonka avulla samaistus on annettavissa muodossa $V \ni \sum_i c^i e_i \mapsto \sum_j \left(\sum_i c^i g_{ij}\right) e^j \in V^*$.

⁴⁸Vastaavasti kuin merkitään $\partial_i = \partial/\partial q^i$, kirjallisuudessa esiintyy joskus lyhennysmerkintä $d^i := dq^i$.

kaikilla v_1, \dots, v_{i-1} ja v_{i+1}, \dots, v_s . Erityisesti 2-lineaarista kuvausta kutsutaan *bilinearikuvaukseksi* ja se voidaan samaistaa matriisiin kanssa. Samoin kuin tapauksessa $s = 1$ (eli $L \in V^*$) nähdään välittömästi, että s -lineaariset kuvaukset $V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow \mathbb{R}$ muodostavat reaalisen vektoriavaruuden, jonka kantana on **[!]** s -lineaariset kuvaukset $e_{(1)}^{i_1} \otimes e_{(2)}^{i_2} \otimes \dots \otimes e_{(s)}^{i_s}$,

$$(e_{(1)}^{i_1} \otimes e_{(2)}^{i_2} \otimes \dots \otimes e_{(s)}^{i_s})(v_{(1)}, v_{(2)}, \dots, v_{(s)}) := v_{(1)}^{i_1} v_{(2)}^{i_2} \dots v_{(s)}^{i_s} \in \mathbb{R},$$

missä $\{e_{(k)}^{i_k}\}_{i_k=1}^{\dim V_k}$ on V_k :n kannan $\{e_{(k)i_k}\}_{i_k=1}^{\dim V_k}$ duaalikanta ja $v_{(k)} = \sum_{i_k} v_{(k)}^{i_k} e_{(k)i_k} \in V_k$.

Esimerkki 24. Esimerkiksi \mathbb{R}^2 :n kanta on $\mathbf{i} = (1, 0)$ ja $\mathbf{j} = (0, 1)$, jonka duaalikanta olkoon \mathbf{i}^* ja \mathbf{j}^* (eli esim. $\mathbf{j}^*(\mathbf{i}) = 0$ ja $\mathbf{j}^*(\mathbf{j}) = 1$). Nyt mielivaltainen bilineaarimuoto B operoi seuraavasti:

$$\begin{aligned} B(\underbrace{a\mathbf{i} + b\mathbf{j}}_{=\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^2}, \underbrace{c\mathbf{i} + d\mathbf{j}}_{=\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2}) &= ac \underbrace{B(\mathbf{i}, \mathbf{i})}_{=: B_{11}} + ad \underbrace{B(\mathbf{i}, \mathbf{j})}_{=: B_{12}} + bc \underbrace{B(\mathbf{j}, \mathbf{i})}_{=: B_{21}} + bd \underbrace{B(\mathbf{j}, \mathbf{j})}_{=: B_{22}} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= B_{11} \underbrace{(\mathbf{i}^* \otimes \mathbf{i}^*)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}_{=ac} + B_{12} \underbrace{(\mathbf{i}^* \otimes \mathbf{j}^*)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}_{=ad} + \\ &\quad + B_{21} \underbrace{(\mathbf{j}^* \otimes \mathbf{i}^*)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}_{=bc} + B_{22} \underbrace{(\mathbf{j}^* \otimes \mathbf{j}^*)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}_{=bd} \end{aligned}$$

eli $B = B_{11}\mathbf{i}^* \otimes \mathbf{i}^* + B_{12}\mathbf{i}^* \otimes \mathbf{j}^* + B_{21}\mathbf{j}^* \otimes \mathbf{i}^* + B_{22}\mathbf{j}^* \otimes \mathbf{j}^*$.

Esimerkki 25. Sanotaan, että $(k + l)$ -lineaarinen kuvaus

$$T : \underbrace{TM_m^* \times TM_m^* \times \dots \times TM_m^*}_{k \text{ kappaletta}} \times \underbrace{TM_m \times \dots \times TM_m}_{l \text{ kappaletta}} \rightarrow \mathbb{R}$$

on *tyypin (k, l) tensori* pisteessä \mathbf{m} ja k (vast. l) on T :n *kontravariantti* (vast. *kovariantti*) *aste*. Tyypin (k, l) tensorit pisteessä \mathbf{m} muodostavat vektoriavaruuden, ns. *tensoriavaruuden* $T_l^k M_m$ ja voidaan kirjoittaa

$$T = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1 \\ j_1, j_2, \dots, j_l=1}}^n T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \partial_{i_1}|_{\mathbf{m}} \otimes \partial_{i_2}|_{\mathbf{m}} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k}|_{\mathbf{m}} \otimes dq^{j_1}|_{\mathbf{m}} \otimes dq^{j_2}|_{\mathbf{m}} \otimes \dots \otimes dq^{j_l}|_{\mathbf{m}},$$

missä

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_2, \dots, i_k} := T(dq^{i_1}|_{\mathbf{m}}, \dots, dq^{i_k}|_{\mathbf{m}}, \partial_{j_1}|_{\mathbf{m}}, \dots, \partial_{j_l}|_{\mathbf{m}})$$

ovat *tensorin T komponentit* avaruuden $T_l^k M_m$ kannan

$$\{\partial_{i_1}|_{\mathbf{m}} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k}|_{\mathbf{m}} \otimes dq^{j_1}|_{\mathbf{m}} \otimes \dots \otimes dq^{j_l}|_{\mathbf{m}}\}$$

suhteen, ja esimerkiksi

$$\partial_3|_m \otimes dq^2|_m \left(\sum_i \omega_i dq^i|_m, \sum_j v^j \partial_j|_m \right) = \omega_3 v^2 \in \mathbb{R}.$$

Huomaa erityisesti, että $T_0^1 M_m = TM_m$, $T_1^0 M_m = TM_m^*$, ja $T_0^0 M_m := \mathbb{R}$. Lisäksi tensoriavaruuden $T_0^2 M_m$, $T_2^0 M_m$ ja $T_1^1 M_m$ alkioit ovat muotoa $\sum_{i,j} T^{ij} \partial_i|_m \otimes \partial_j|_m$, $\sum_{i,j} T_{ij} dq^i|_m \otimes dq^j|_m$ ja $\sum_{i,j} T_j^i \partial_i|_m \otimes dq^j|_m$ vastaavasti (missä tensoreitten komponentit ovat reaalilukuja ja muodostavat täten reaalimatriisit (T^{ij}) , (T_{ij}) ja (T_j^i)).

Olkoon $T_l^k M$ vektoriavaruuksien $T_l^k M_m$ erillinen unioni, kun m käy läpi kaikki moniston M pisteet, eli

$$T_l^k M = \{ (m, T) \mid m \in M, T \in T_l^k M_m \}.$$

Osoittautuu, että $T_l^k M$ on *monisto*, ns. *tensorikimppu*. Esimerkiksi moniston $TM := T_0^1 M$ karttana on $(m, v) \mapsto (q^1(m), \dots, q^n(m), v^1, \dots, v^n)$, missä reaaliluvut v^i ovat vektorin v komponentit M :n kartan \mathbf{q} (tai siis TM_m :n kannan $\{\partial_i|_m\}$) suhteen. Tensorikimppua TM sanotaan *tangenttikimpuksi* ja tensorikimppua $TM^* := TM_1^0$ *kotangenttikimpuksi*. Monistoa M sanotaan tensorikimppun *kantamonistoksi* ja tensoriavaruutta $T_l^k M_m$ tensorikimppun $T_l^k M$ *säikeeksi* (tai kuiduksi) pisteessä m .

Tensorikenttä on (sileä) kuvaus $T : M \rightarrow T_l^k M$, $m \mapsto (m, T|_m)$, jolle $T|_m \in T_l^k M_m$ (eli tensorikenttä on tensorikimppun sektio tai viipale). Tensorikenttien $T : M \rightarrow T_l^k M$ muodostamaa vektoriavaruutta merkitään symbolilla $\mathcal{T}_l^k M$. Tensorikimppun TM :n tapauksessa tensorikenttää sanotaan (kontravariantiksi) *vektorikentäksi* ja tapauksessa $T_0^0 M_m = \mathbb{R}$ *skalaarikentäksi*, eli siis skalaarikenttä on (sileä) kuvaus $M \rightarrow \mathbb{R}$.⁴⁹

Olkoon T tensorikenttä $M \rightarrow T_l^k M$ eli (lokaalisti)

$$T|_m = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}(m) \partial_{i_1}|_m \otimes \dots \otimes \partial_{i_k}|_m \otimes dq^{j_1}|_m \otimes \dots \otimes dq^{j_l}|_m,$$

missä $\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on kartta pisteessä $m \in U$ ja $U \ni m \mapsto T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}(m) \in \mathbb{R}$ on (sileä) kuvaus, ns. *komponenttifunktio*.⁵⁰

⁴⁹Usein merkitään (sileitten) kuvausten $M \rightarrow \mathbb{R}$ muodostamaa funktioalgebraa $\mathcal{T}_0^0 M$ symbolilla $\mathcal{F}(M)$. Osoittautuu, että vektoriavaruus $\mathcal{T}_l^k M$ on ns. $\mathcal{F}(M)$ -moduli: jos $f \in \mathcal{F}(M)$ ja $T \in \mathcal{T}_l^k M$, niin $fT \in \mathcal{T}_l^k M$ (pisteittäinen tulo $(fT)|_m = f(m)T|_m$).

⁵⁰ T :n sileyden on yhtäpitävää komponenttifunktioiden sileyden kanssa.

Kun määritellään *koordinaattivektorikentät* $\partial_i : U \rightarrow TM$, $\mathbf{m} \mapsto (\mathbf{m}, \partial_i|_{\mathbf{m}})$, niin mielivaltainen vektorikenttä v voidaan (lokaalisti) esittää muodossa

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i \text{ eli } v(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \sum_{i=1}^n v^i(\mathbf{m}) \partial_i|_{\mathbf{m}}).$$

Samoin voidaan *1-muoto* (kovariantti vektorikenttä) eli sektio $\omega : M \rightarrow TM^*$ esittää lokaalisti muodossa

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dq^i \text{ eli } \omega(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{m}) dq^i|_{\mathbf{m}}),$$

missä kuvaukset $dq^i : U \rightarrow TM^*$, $m \mapsto (m, dq^i|_m)$ ovat *kantamuotoja*. Huomaa, että $dq^i(\partial_j) = \partial_j q^i = \delta_j^i$. Mielivaltainen tensorikenttä voidaan esittää lokaalisti muodossa

$$T = \sum T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dq^{j_1} \otimes \dots \otimes dq^{j_l}.$$

Jos käytetään toista karttaa $\tilde{\mathbf{q}}$ (ja merkitään $\tilde{\partial}_a = \partial/\partial \tilde{q}^a$), niin

$$T = \sum \tilde{T}_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k} \tilde{\partial}_{a_1} \otimes \dots \otimes \tilde{\partial}_{a_k} \otimes d\tilde{q}^{b_1} \otimes \dots \otimes d\tilde{q}^{b_l},$$

missä

$$\tilde{T}_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial \tilde{q}^{a_1}}{\partial q^{i_1}} \dots \frac{\partial \tilde{q}^{a_k}}{\partial q^{i_k}} \cdot \frac{\partial q^{j_1}}{\partial \tilde{q}^{b_1}} \dots \frac{\partial q^{j_l}}{\partial \tilde{q}^{b_l}} \quad (8)$$

(tensorin muunnoskaava).

Esimerkki 26. *Identiteettitensori(kenttä)* I on tyypin (1,1) tensori, jonka (lokaali) esitys on kaikissa [!] kartoissa $\sum_{i=1}^n \partial_i \otimes dq^i$, eli komponentit ovat δ_j^i .

Pseudometrinen tensori(kenttä) tai *metriikka* g on tyypin (0,2) tensorikenttä, jonka (lokaali) esitys on $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dq^i \otimes dq^j$, missä matriisi $(g_{ij}(\mathbf{m}))_{i,j=1}^n$ on kääntyvä ja symmetrinen (eli $g_{ij}(\mathbf{m}) = g_{ji}(\mathbf{m})$) jokaisessa [!] kartassa \mathbf{q} ja jokaisessa \mathbf{q} :n määrittelyalueen pisteessä \mathbf{m} . Jos lisäksi $g|_{\mathbf{m}}(v, v) > 0$ kaikilla $m \in M$ ja $0 \neq v \in TM_{\mathbf{m}}$ (eli matriisi $(g_{ij}(\mathbf{m}))_{i,j=1}^n$ on positiividefiniitti), niin sanotaan, että g on metrinen tensori(kenttä). Jos g on M :n [pseudo]metrinen tensorikenttä, niin sanotaan, että pari (M, g) on [pseudo- tai semi-]Riemannin monisto.

Voidaan määritellä g :lle tyypin (2,0) *käänteistensori(kenttä)* g^{-1} , jonka lokaali esitys on $\sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$, missä $(g^{ij}(\mathbf{m}))_{i,j=1}^n$ on matriisin $(g_{ij}(\mathbf{m}))_{i,j=1}^n$ käänteismatriisi eli $\sum_j g^{ij}(\mathbf{m}) g_{jk}(\mathbf{m}) = \delta_k^i$.

Olkoon $\mathbf{m} \in M$ kiinnitetty piste. On olemassa kartta \mathbf{q} , ns. *Riemannin normaalikoordinaatisto* **pisteessä** \mathbf{m} , missä $g_{ij}(\mathbf{m}) = a_i \delta_{ij}$, $a_i \neq 0$, ja $\partial g_{ij} / \partial q^s|_{\mathbf{m}} = 0$ kaikilla i, j, s . Tämä nähdään seuraavasti:

Käytetään Einsteinin summaussääntöä. Olkoon $\tilde{\mathbf{q}}$ joku kartta pisteen \mathbf{m} ympäristössä ja $g = \tilde{g}_{ij}d\tilde{q}^i \otimes d\tilde{q}^j$. Voidaan olettaa, että $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{m}) = \vec{0}$, sillä jos tämä ei päde, niin määritellään uusi kartta $\tilde{\mathbf{q}}' := \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{m})$. Aloitetaan etsimään Riemannin normaalikoordinaatistoa \mathbf{q} etsimällä aluksi kartta \mathbf{q}' , jossa $g|_{\mathbf{m}}$:n matriisi on diagonaalinen.

Kirjoitetaan $\tilde{q}^k(\mathbf{q}') = C^k_i q'^i$, missä C^k_i ovat reaalilukuja. Nyt

$$g'_{ij}(\mathbf{m}) := \tilde{g}_{kl}(\mathbf{m}) \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q'^i} \Big|_{\mathbf{m}} \frac{\partial \tilde{q}^l}{\partial q'^j} \Big|_{\mathbf{m}} = C^k_i \tilde{g}_{kl}(\mathbf{m}) C^l_j,$$

joten löytyy ortogonaalimatriisi⁵¹ $\mathbf{C} = (C^l_j)$ siten, että $g'_{ij}(\mathbf{m}) = a_i \delta_{ij}$. Koska matriisi $(g'_{ij}(\mathbf{m}))$ on kääntövä, sen determinantti $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ eli jokainen $a_i \neq 0$. Lisäksi Jacobin matriisi $(\partial \tilde{q}^k / \partial q'^i |_{\mathbf{m}}) = \mathbf{C}$ on kääntövä, joten $\tilde{\mathbf{q}}$ on kartta pisteessä \mathbf{m} . Ollaan siis saatu $\mathbf{q}'(\mathbf{m}) = \vec{0}$ ja $g|_{\mathbf{m}} = \sum_i a_i q'^i |_{\mathbf{m}} \otimes dq'^i |_{\mathbf{m}}$.

Määritellään sitten kartta \mathbf{q} kaavalla $q^i(\mathbf{q}) = q'^i + \frac{1}{2} D^i_{kl} q'^k q'^l$, missä $D^i_{kl} = D^i_{lk} \in \mathbb{R}$. Selvästi $\mathbf{q}(\mathbf{m}) = \vec{0}$, Jacobin matriisi $(\partial q^i / \partial q'^k |_{\mathbf{m}}) = (\delta^i_k)$ on kääntövä ja

$$a_i \delta_{ij} = g'_{ij}(\mathbf{m}) = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \Big|_{\mathbf{m}} \frac{\partial q^l}{\partial q'^j} \Big|_{\mathbf{m}} g_{kl}(\mathbf{m}) = g_{ij}(\mathbf{m}).$$

Oletetaan, että $\partial g_{ij} / \partial q^s |_{\mathbf{m}} = 0$ kaikilla i, j, s . Tulon derivointisääntöä käyttäen saadaan

$$A_{ijs} := \frac{\partial g'_{ij}}{\partial q^s} \Big|_{\mathbf{m}} = \frac{\partial}{\partial q^s} \left[\frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^l}{\partial q'^j} g_{kl} \right] \Big|_{\mathbf{m}} = \frac{\partial}{\partial q^s} \left[\frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^k}{\partial q'^j} \right] \Big|_{\mathbf{m}} a_k = a_i D^i_{js} + a_j D^j_{is},$$

joten heti nähdään, että kaikilla i, j, s ,

$$D^j_{is} = \frac{1}{2a_j} (A_{ijs} + A_{jsi} - A_{sij}).$$

Huom! Jos \mathbf{q} on Riemannin normaalikoordinaatisto pisteessä \mathbf{m} eli $g_{ij}(\mathbf{m}) = a_i \delta_{ij}$ ja $\partial g_{ij} / \partial q^s |_{\mathbf{m}} = 0$, niin voidaan jopa olettaa, että on olemassa luku⁵² p siten, että $a_i = -1$, kun $i \leq p$ ja $a_i = 1$, kun $i > p$. Tämä nähdään määrittelemällä uusi Riemannin normaalikoordinaatisto $\tilde{\mathbf{q}}$ pisteessä \mathbf{m} kaavalla $\tilde{q}^i := \sqrt{|a_i|} q^i$ ja numeroimalla koordinaatit uudelleen mikäli tarvis.

Esimerkki 27. Olkoon (M, g) on (semi-)Riemannin monisto sekä $v = \sum_i v^i \partial_i$ ja $w = \sum_j w^j \partial_j$ kaksi vektorikenttää. 'Lasketaan indeksejä' tai alennetaan vektorikenttä v 1-muodoksi eli määritellään (lineaarinen) bijektio $\mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}M^*$, jonka avulla vektorikenttä v kuvautuu 1-muodoksi

⁵¹Lineaarialgebrasta tiedetään, että symmetrinen matriisi voidaan diagonalisoida ortogonaalimatriisilla \mathbf{C} .

⁵²Jos monisto on yhtenäinen eli ei voida esittää erillisten avointen joukkojen unionina, niin p ei riipu pisteestä \mathbf{m} ja on siis vakio. Yleisessä suhteellisuusteoriassa mallinnetaan avaruusaikaa yhtenäisillä neliulotteisilla monistoilla, joille $p = 1$ eli ns. Lorentzin monistoilla. Käyttämällä Riemannin normaalikoordinaatteja (x^0, x^1, x^2, x^3) pisteessä \mathbf{m} metriikan matriisi $(g_{\mu\nu}(\mathbf{m})) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, missä ominaisarvoa -1 vastaava koordinaatti x^0 tulkitaan aikakoodinaatiksi.

$v^\flat := \sum_j v_j dq^j$, missä $v_j := \sum_i v^i g_{ij}$. Nyt

$$g(v, w) = \sum_{i,j} v^i g_{ij} w^j = \sum_j v_j w^j = I(v^\flat, w) = \sum_{i,j} v_j g^{ji} w_i = g^{-1}(v^\flat, w^\flat).$$

Alennuksen käänteiskuvaus on ‘indeksien nosto’ tai *ylennys*, jonka avulla 1-muoto ω voidaan ylentää vektorikentäksi $\omega^\sharp = \sum_i \omega^i \partial_i$, missä $\omega^i := \sum_j g^{ij} \omega_j$. Alennusta ja ylennystä sanotaan *musikaalisiksi isomorfismeiksi*.

Harjoitustehtävä 16. a) Johda tensorin muunnoskaava (8).

b) Tarkastellaan kaksiulotteista semi-Riemannin monistoa (M, g) . Olkoon $\mathbf{q} = (q^1, q^2)$ sen kartta ja täten (lokaalisti)

$$g = g_{11} dq^1 \otimes dq^1 + g_{12} dq^1 \otimes dq^2 + g_{21} dq^2 \otimes dq^1 + g_{22} dq^2 \otimes dq^2.$$

Mitä ehtoja g :n matriisiin pitää toteuttaa? Milloin g on metrinen tensori?

c) Onko $g = (q^1)^2 dq^1 \otimes dq^1 + q^1 dq^1 \otimes dq^2 + q^1 dq^2 \otimes dq^1 + dq^2 \otimes dq^2$ (pseudo)metrinen tensori? Laske v^\flat vektorikentälle

$$v = e^{q^2} (\sin q^1) \frac{\partial}{\partial q^1} + (q^1 + 3q^2) \frac{\partial}{\partial q^2}.$$

9 FYS: Mekaniikkaa semi-Riemannin monistoilla

Newtonin mekaniikka ja erityinen suhteellisuusteoria voidaan yleistää käyttäen semi-Riemannin monistoja. Palautetaan mieleen, että n -ulotteinen monisto M on ‘joukko, joka voidaan kartoittaa n :llä koordinaatilla’. Karttaa merkitään esimerkiksi symboleilla $\mathbf{x} = (x^\mu)$ tai $\mathbf{q} = (q^i)$. Semi-Riemannin monistolla on määritelty metriikka g , joka on ‘moniston pisteestä \mathbf{m} riippuva (symmetrinen ja kääntyvä) matriisi $g_{ij}(\mathbf{m})$.’

Moniston M tangenttikimppu TM on $2n$ -ulotteinen monisto, joka ‘koostuu kontravariantista vektoreista v (ja niiden lähtöpisteistä \mathbf{m})’. Lokaalina karttana on

$$(\mathbf{m}, v) = \left(\mathbf{m}, \sum_{i=1}^n v^i \partial / \partial q^i \Big|_{\mathbf{m}} \right) \mapsto (\mathbf{q}(\mathbf{m}), \mathbf{v}) = (q^1(\mathbf{m}), \dots, q^n(\mathbf{m}), v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (9)$$

Vektorin $v = \sum_i v^i \partial / \partial q^i \Big|_{\mathbf{m}}$ komponentteja voidaan myös merkitä $\dot{q}^i(v) = v^i$ eli $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}(v)$ ja kotangenttikimppun kartta on $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Koordinaatteja q^i sanotaan *derivaatta-* tai *nopeuskoordinaateiksi*. Jos $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ on M :n toinen kartta, niin siihen liittyvät derivaattakoordinaatit muuntuvat kaavalla

$$\dot{\tilde{q}}^k = \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \dot{q}^i \quad \text{eli} \quad \dot{\tilde{q}}^k(v) = \sum_i \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}(\mathbf{m})} \dot{q}^i(v), \quad (10)$$

jotenka $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ja

$$\frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^j} \quad \text{sekä} \quad \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \tilde{q}^k}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^i.$$

Moniston M kotangenttikimppu TM^* on $2n$ -ulotteinen monisto, joka ‘koostuu kovariantista vektoreista’ $(\mathbf{m}, \omega) = (\mathbf{m}, \sum_i \omega_i dq^i \Big|_{\mathbf{m}}) \mapsto (\mathbf{q}(\mathbf{m}), \boldsymbol{\omega}) = (q^1(\mathbf{m}), \dots, q^n(\mathbf{m}), \omega_1, \dots, \omega_n)$. Kovektorin $\omega = \sum_i \omega_i dq^i \Big|_{\mathbf{m}}$ komponentteja merkitään joskus $\dot{q}_i(\omega) = \omega_i$. Huom! $\omega(v) = \sum_i \omega_i v^i = v(\omega) \in \mathbb{R}$ ja esim. $\dot{q}_k = (\partial q^i / \partial \tilde{q}^k) \dot{q}_i$.

Koska tangenttikimppu TM on $2n$ -ulotteinen monisto, silläkin on tangenttikimppu $T(TM)$, joka on nyt $2(2n) = 4n$ -ulotteinen. Olkoon $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ TM :n kartta. Nyt $T(TM)$:n karttana (vertaa kaavaan (9)) on

$$\left(\underbrace{(\mathbf{m}, v)}_{\in TM}; \underbrace{\sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{m}, v)} + w^{n+i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{(\mathbf{m}, v)}}_{= w \in T(TM)_{(\mathbf{m}, v)}} \right) \mapsto (\mathbf{q}(\mathbf{m}), \dot{\mathbf{q}}(v), \dot{\mathbf{q}}(w), \ddot{\mathbf{q}}(w)) \in \mathbb{R}^{4n},$$

missä⁵³ $\dot{q}^i(w) := w^i$ ja $\ddot{q}^i(w) := w^{n+i}$ on (*toisen kertaluvun*) *derivaatta-* tai *kiihtyvyyскоordinaatti* (*koordinaattikihtyvyyys*). Samoin voidaan määritellä vastaavia karttoja monistoihin $T(T(TM))$, $T(TM^*)$, $T^*(TM)$, $T^*(T_l^k M)$, jne. kun M :n kartta \mathbf{q} on annettu.

⁵³Merkintä on hieman epätasällinen. Itseasiassa pitäisi merkitä vaikka $\dot{\tilde{q}}^i(w) := w^i$ ja karttana olisi $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \ddot{\tilde{\mathbf{q}}})$.

Esimerkki 28. Tarkastellaan tasoa, jossa janan/suoran eräs⁵⁴ yhtälö(t) on $\ddot{x}(t) = 0$ ja $\ddot{y}(t) = 0$. (Tämä on tietenkin tasolla liikkuvan vapaan hiukkasen Newtonin yhtälö.) Siirrytään napakoordinaatteihin (r, φ) (joille $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\varphi(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ tai $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$ ja $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$), joissa ilmaistuna janan yhtälö(t) on [!]

$$\begin{aligned} 0 = \ddot{x}(t) &= \frac{\partial x}{\partial r} \Big|_{(r(t), \varphi(t))} \ddot{r}(t) + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Big|_{(r(t), \varphi(t))} \ddot{\varphi}(t) + \\ &+ \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \Big|_{(r(t), \varphi(t))} \dot{\varphi}(t) \dot{\varphi}(t) + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial \varphi} \Big|_{(r(t), \varphi(t))} \dot{r}(t) \dot{\varphi}(t) \\ &= [\cos \varphi(t)] \ddot{r}(t) - r(t) [\sin \varphi(t)] \ddot{\varphi}(t) - r(t) [\cos \varphi(t)] \dot{\varphi}(t)^2 - 2 [\sin \varphi(t)] \dot{r}(t) \dot{\varphi}(t), \\ 0 = \ddot{y}(t) &= [\sin \varphi(t)] \ddot{r}(t) + r(t) [\cos \varphi(t)] \ddot{\varphi}(t) - r(t) [\sin \varphi(t)] \dot{\varphi}(t)^2 + 2 [\cos \varphi(t)] \dot{r}(t) \dot{\varphi}(t), \end{aligned}$$

eli palalta näyttää näin aluksi (yhtälöt kyllä sievenee yksinkertaisiksi). Helposti näkee ratkaisun $\underline{r}(t) \equiv v_r t + r_0 > 0$ ja $\underline{\varphi}(t) \equiv \varphi_0 \in (0, 2\pi)$, missä v_r , r_0 ja φ_0 ovat integrointivakioita. Onneksi ratkaisut tunnetaan, sillä $\underline{x}(t) = v_x t + x_0$ ja $\underline{y}(t) = v_y t + y_0$ ja täten

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= r(\underline{x}(t), \underline{y}(t)) = \sqrt{\underline{x}(t)^2 + \underline{y}(t)^2} = \sqrt{(v_x t + x_0)^2 + (v_y t + y_0)^2}, \\ \underline{\varphi}(t) &= \tan^{-1} \left(\frac{v_y t + y_0}{v_x t + x_0} \right). \end{aligned}$$

Näitä olisi ollut hankalampaa keksiä janan napakoordinaattiyhtälöstä, joten *on tärkeää löytää kartta, missä differentiaaliyhtälöt ovat mahdollisimman yksinkertaisia!*

Harjoitustehtävä 17. a) Mikä on origokeskisen ympyrän $\underline{r}(t) \equiv r_0$ joku differentiaaliyhtälö napakoordinaateissa? Ilmaise se (x, y) -koordinaateissa.

b) Osoita käyttämällä kaavaa (10), että

$$\ddot{q}^k = \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial^2 \tilde{q}^k}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Olkoon $t \mapsto \underline{\mathbf{q}}(t)$ (vastaavasti $t \mapsto \tilde{\underline{\mathbf{q}}}(t)$) käyrä α ilmaistuna kartassa \mathbf{q} (vast. kartassa $\tilde{\mathbf{q}}$). Siis $\underline{\dot{\mathbf{q}}}(t) = \tilde{\underline{\dot{\mathbf{q}}}}(\underline{\mathbf{q}}(t))$. Osoita suoralla laskulla käyttämällä mm. ketjusääntöä, että

$$\begin{aligned} \underline{\dot{q}}^k(t) &= \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \Big|_{\underline{\mathbf{q}}(t)} \dot{q}^i(t), \\ \underline{\ddot{q}}^k(t) &= \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \Big|_{\underline{\mathbf{q}}(t)} \ddot{q}^i(t) + \frac{\partial^2 \tilde{q}^k}{\partial q^i \partial q^j} \Big|_{\underline{\mathbf{q}}(t)} \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t). \end{aligned}$$

Vektorista v voidaan tehdä kovectori $\sum_j v_j dq^j|_m$ metriikan g avulla, kun määritellään $v_j = \sum_i g_{ji}(\mathbf{m}) v^i$. Samoin kovectorista ω saadaan vektori $\sum_i \omega^i \partial_i|_m$ kaavalla $\omega^i = \sum_j g^{ij}(\mathbf{m}) \omega_j$. Nyt esimerkiksi $\sum_i \omega_i \omega^i = \sum_{i,j} \omega_i g^{ij}(\mathbf{m}) \omega_j$.

⁵⁴Myös esim. $\underline{x}(t) \equiv t^3$ ja $\underline{y}(t) \equiv t^3$ on suora, joka ei toteuta vapaan hiukkasen Newtonin yhtälöä.

Vektorikenttä on kuvaus $v : M \rightarrow TM$, joka ‘liittää joka pisteeseen \mathbf{m} kontravariantin vektorin’ $v|_{\mathbf{m}} = \sum_i v^i(\mathbf{m})\partial/\partial q^i|_{\mathbf{m}}$ eli kartassa $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ilmaistuna vektorikenttä ‘on’ $\mathbf{m} \mapsto (\mathbf{q}(\mathbf{m}), \mathbf{v}(\mathbf{m}))$ eli $\dot{\mathbf{q}}(v|_{\mathbf{m}}) = \mathbf{v}(\mathbf{m})$. Samoin 1-muoto eli kovektorikenttä on kuvaus $\omega : M \rightarrow TM^*$, joka ‘liittää joka pisteeseen \mathbf{m} kovariantin vektorin’ $\omega|_{\mathbf{m}} = \sum_i \omega_i(\mathbf{m})dq^i|_{\mathbf{m}}$. Vektorikentät ja 1-muodot voidaan samaistaa keskenään g :n avulla kuten vektorit ja kovektoritkin (katso Esimerkki 27).

Olkoon $\alpha : (t_0, t_1) \rightarrow M$ systeemin liike⁵⁵ monistolla M . Koska jokaisessa radan pisteessä on α :n tangenttivektori, määrää liike käyrän $\dot{\alpha} : (t_0, t_2) \rightarrow TM$, jolle (lokaalisti)

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t), \sum_{i=1}^n \dot{q}^i(t)\partial_i|_{\alpha(t)} \right) \mapsto (\underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(t)) = (\underline{q}^1(t), \dots, \underline{q}^n(t), \underline{\dot{q}}^1(t), \dots, \underline{\dot{q}}^n(t)) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Jos g on M :n metriikka, niin α määrää myös käyrän $\dot{\alpha}^b : (t_0, t_2) \rightarrow TM^*$, jolle

$$\dot{\alpha}^b(t) = \left(\alpha(t), \sum_{i=1}^n p_i(t)dq^i|_{\alpha(t)} \right) \mapsto (\underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t)) = (\underline{q}^1(t), \dots, \underline{q}^n(t), \underline{p}_1(t), \dots, \underline{p}_n(t)) \in \mathbb{R}^{2n},$$

missä $\underline{p}_i(t) := \sum_{j=1}^n g_{ij}(\alpha(t))\dot{q}^j(t) = \dot{q}_i(t)$ on *yleistetyn liikemäärän* tai *impulssin* $\underline{p}(t) = \sum_i \underline{p}_i(t)dq^i|_{\alpha(t)}$ komponentti (hetkellä t). Samoin $\dot{\alpha} : (t_0, t_2) \rightarrow TM$ voidaan laajentaa käyräksi $\ddot{\alpha} : (t_0, t_2) \rightarrow T(TM)$ jne.

Määritellään funktio $T : TM \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $T(\mathbf{m}, v) := \frac{1}{2}g|_{\mathbf{m}}(v, v)$ eli kartassa $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ilmaistuna

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

Jos α on systeemin liike, niin systeemin *yleistetty kineettinen* tai *liike-energia* hetkellä t on

$$\underline{T}(t) := \frac{1}{2}g|_{\alpha(t)}(\underline{\dot{\mathbf{q}}}(t), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\underline{\mathbf{q}}(t))\dot{q}^i(t)\dot{q}^j(t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(\underline{\mathbf{q}}(t))\dot{p}_i(t)\dot{p}_j(t),$$

missä $\underline{\dot{\mathbf{q}}}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}^i(t)\partial_i|_{\alpha(t)}$ on (yleistetty) nopeus.

Esimerkki 29. Tarkastellaan k :n hiukkasen (massat m_1, m_2, \dots, m_k) liikettä Newtonin mekaniikassa. Kiinnitetään Galilein avaruus-ajan origo O_{t_0} ja samaistetaan avaruus-ajan piste vektorin $(t, \mathbf{r}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ kanssa. Kun oletetaan, että kaksi hiukasta eivät voi olla samassa avaruuden pisteessä samaan aikaan eli $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j$, kun $i \neq j$, niin hiukkasjärjestelmän konfiguraatioavaruus on

$$\mathbf{X}_k = \{(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) \in (\mathbb{R}^3)^k \mid \mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j \forall i \neq j\},$$

⁵⁵Yleisemmin α on vain käyrä monistolla M ja t sen parametri; käytämme tässä luvussa symbolia t kaikkien käyrien parametreille vaikkei se liittyisikään aikaan.

missä $\mathbf{r}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$ on hiukkasen i paikkavektori (hiukkasen i massa on $m_i > 0$). Merkitään $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k)$. Määritellään ‘massametriikka’

$$g^{\text{mass}} := \sum_{i=1}^k m_i \sum_{j=1}^3 dx_i^j \otimes dx_i^j,$$

jonka matriisia $\text{diag}(m_1, m_1, m_1; m_2, m_2, m_2; \dots; m_k, m_k, m_k)$ sanotaan ‘massamatriisiksi.’ Pari $(\mathbf{X}_k, g^{\text{mass}})$ on siis Riemannin monisto. Jos $\alpha(t) = \mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_k(t))$ on systeemin liike, niin hiukkasen i liikemäärä hetkellä t on $\underline{\mathbf{p}}_i(t) = m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \in \mathbb{R}^3$. Toisaalta

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^3 \dot{x}_i^j(t) \frac{\partial}{\partial x_i^j} \Big|_{\alpha(t)} \quad \text{ja} \quad \dot{\alpha}(t) = (\alpha(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \mapsto (\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$$

sekä

$$\underline{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=1}^k m_i \sum_{j=1}^3 \dot{x}_i^j(t) dx_i^j \Big|_{\alpha(t)} \quad \text{ja} \quad \dot{\alpha}^b(t) = (\alpha(t), \underline{\mathbf{p}}(t)) \mapsto (\mathbf{x}(t), \underline{\mathbf{p}}(t)),$$

missä $\underline{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=1}^k \underline{\mathbf{p}}_i(t)$ on systeemin kokonaisliikemäärä hetkellä t . Systeemin kokonaisliike-energia

$$\underline{T}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k m_i \left\{ \dot{x}_i^1(t)^2 + \dot{x}_i^2(t)^2 + \dot{x}_i^3(t)^2 \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k m_i |\dot{\mathbf{r}}_i(t)|^2.$$

Ajatellaan, että hiukkaset kohdistavat toisiinsa vaikkapa gravitaatiovoiman eli hiukkasen i Newtonin liikeyhtälö on

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_j(t)), \quad (11)$$

missä

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) := G_N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}$$

on hiukkasen j kohdistama gravitaatiovoima hiukkaseen i ja G_N on (Newtonin) gravitaatiovakio. Yhtälöryhmä (11) voidaan kirjoittaa yhtenä yhtälönä

$$\underline{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = \left(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}(t)), \dots, \mathbf{F}_k(\mathbf{x}(t)) \right)$$

missä $\mathbf{F}_i(\mathbf{x}) := \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$.

Esimerkki 30. Tarkastellaan luvun 5 tilannetta, missä hiukkanen liikkuu Minkowskin avaruudessa \mathbb{M}^4 noudattaen relativistista liikeyhtälöä

$$\frac{d\mathbf{P}(\tau)}{d\tau} = m \frac{d\mathbf{u}(\tau)}{d\tau} = m \frac{d^2\mathbf{x}(\tau)}{d\tau^2} = \mathbf{K}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$$

tai komponenttimuodossa $\dot{P}^\mu = m \dot{u}^\mu = m \ddot{x}^\mu = K^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Hiukkasen liike on siis $\alpha(\tau) = O + \mathbf{x}(\tau)$, missä $O \in \mathbb{M}^4$ on käyttämämme inertiaalikoordinaatiston origo. Nyt $\dot{\mathbf{x}}(\tau) =$

$\sum_{\mu=0}^3 \dot{x}^\mu(\tau) \partial / \partial x^\mu |_{\alpha(\tau)} = \sum_{\mu=0}^3 \underline{u}^\mu(\tau) \partial / \partial x^\mu |_{\alpha(\tau)}$. Minkowskin avaruudessa on sen geometriaan liittyvä luonnollinen (pseudo)metriikka

$$\eta := -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3,$$

jonka matriisi on $\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (siis joka pisteessä vakio matriisi). Jokaisessa radan pisteessä $\alpha(\tau)$ voidaan siis määrittellä kovektorit⁵⁶

$$\sum_{\nu=0}^3 \underline{u}_\nu(\tau) dx^\nu |_{\alpha(\tau)}, \quad \sum_{\nu=0}^3 \underline{P}_\nu(\tau) dx^\nu |_{\alpha(\tau)}, \quad \sum_{\nu=0}^3 K_\nu(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau)) dx^\nu |_{\alpha(\tau)},$$

missä esimerkiksi $\underline{P}_\nu(\tau) := \sum_\mu \eta_{\nu\mu} \underline{P}^\mu(\tau) = \sum_\mu m \eta_{\nu\mu} \underline{u}^\mu(\tau) = m \underline{u}_\nu(\tau)$, joten relativistinen liikeyhtälö on nyt

$$\dot{\underline{P}}_\nu = K_\nu(\underline{x}^0, \underline{x}^1, \underline{x}^2, \underline{x}^3, \underline{u}^0, \underline{u}^1, \underline{u}^2, \underline{u}^3)$$

Toisaalta, jos määrittellään ‘massametriikka’

$$g^{\text{massa}} := m\eta = m(-dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3),$$

jonka matriisi on $m\eta = \text{diag}(-m, m, m, m)$, niin yleistetty impulssi

$$\underline{p}_\nu(\tau) := \sum_\mu g_{\nu\mu}^{\text{massa}}(\alpha(\tau)) \dot{x}^\mu(\tau) = \underline{P}_\nu(\tau).$$

9.1 Lagrangen liikeyhtälöt

Edellisissä esimerkeissä päädyttiin liikeyhtälöihin, jotka ovat muotoa

$$\dot{\underline{p}}(t) = \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}(t), \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t)) \quad \text{tai} \quad \dot{p}_i(t) = f_i(\dot{\alpha}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n = \dim M,$$

missä \mathbf{x} on M :n kartta, $t \mapsto \alpha(t)$ käyrä monistolla, $\underline{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{x} \circ \alpha)(t)$ ja $p_i(t) := \sum_j g_{ij}(\alpha(t)) \dot{x}^j(t)$. Miltä yhtälö(t) näyttää jossain toisessa kartassa $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$? Huom! Edellisissä esimerkeissä kartta \mathbf{x} oli sellainen, että (tässä kartassa) (g_{ij}) oli vakio ja diagonaalinen eli \mathbf{x} oli g :n Riemannin normaalikoordinaatisto joka pisteessä.

Olkoon (M, g) semi-Riemannin monisto ja määrittellään *totaaliderivaatta*⁵⁷

$$\frac{d}{dt} := \sum_{i=1}^n \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

⁵⁶**Varoitus!** Vaikka $K_\nu(\dots) dx^\nu |_{\alpha(\tau)}$ on kov vektori, niin “ $K^\mu(\dots) \partial / \partial x^\mu |_{\alpha(\tau)}$ ” ei ole kontravariantti vektori (vaan toisen kertaluvun vektori eli $\in T(TM)_{\alpha(\tau)}$). Tähän palataan hetken päästä...

⁵⁷Joka on kuvaus $\mathcal{F}(TM) \rightarrow \mathcal{F}(T(TM))$ eli d/dt kuvaa funktion $TM \rightarrow \mathbb{R}$ funktioksi $T(TM) \rightarrow \mathbb{R}$.

Harjoitustehtävä 18. a) Osoita käyttämällä kaavoja

$$\dot{q}^k = \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \dot{q}^i, \quad \ddot{q}^k = \frac{\partial \dot{\tilde{q}}^k}{\partial q^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \dot{q}^i,$$

että

$$\frac{d}{dt} = \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \ddot{\tilde{q}}^k \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{q}}^k} + \dot{\tilde{q}}^k \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k}.$$

Vinkki: sijoita $\partial/\partial q^i = (\partial \tilde{q}^k/\partial q^i) \partial/\partial \tilde{q}^k + (\partial \dot{\tilde{q}}^k/\partial q^i) \partial/\partial \dot{\tilde{q}}^k$ ja $\partial/\partial \dot{q}^i = (\partial \tilde{q}^k/\partial \dot{q}^i) \partial/\partial \tilde{q}^k$.

b) Osoita, että

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{q}}^k} - \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k} \right).$$

Vinkki: käytä a)-kohtaa ja huomaa, että d/dt noudattaa tulon derivointisääntöä.

Harjoitustehtävä 19. Osoita, että funktiolle $T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ pätee

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = g_{ij} \ddot{q}^j + [jk, i] \dot{q}^j \dot{q}^k,$$

missä

$$[jk, i] := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right)$$

on (ensimmäisen lajin) Christoffelin symboli.

Olkoon sitten $\alpha : (t_0, t_1) \rightarrow M$ käyrä, \mathbf{x} Riemannin normaalikoodinaatisto pisteessä $m = \alpha(t^*)$, $t^* \in (t_0, t_1)$, ja oletetaan, että kartassa \mathbf{x} (pisteessä \mathbf{m}) liikeyhtälö on muotoa

$$\underline{\dot{p}}_i(t^*) = f_i(\dot{\alpha}(t^*)).$$

Koska pisteessä $\alpha(t^*)$ on $(g_{ij}) = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $\partial g_{ij}/\partial x^c = 0$ ja täten $[jk, i] = 0$, niin

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} \right|_{\alpha(t^*)} = a_i \left. \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right|_{t^*} = \underline{\dot{p}}_i(t^*) = f_i(\dot{\alpha}(t^*)).$$

Olkoon \mathbf{q} toinen kartta pisteessä $\alpha(t^*)$ ja määritellään kovvektori

$$\sum_{i=1}^n f_i(\dot{\alpha}(t^*)) dx^i \Big|_{\alpha(t^*)} = \sum_{i,j=1}^n f_i(\dot{\alpha}(t^*)) \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \Big|_{\alpha(t^*)} dq^j \Big|_{\alpha(t^*)} = \sum_{j=1}^n Q_j(\dot{\alpha}(t^*)) dq^j \Big|_{\alpha(t^*)},$$

jolle

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} \right|_{\alpha(t^*)} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \Big|_{\alpha(t^*)} \left[\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} \right] \Big|_{\alpha(t^*)} = f_i(\dot{\alpha}(t^*)) \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \Big|_{\alpha(t^*)} = Q_j(\dot{\alpha}(t^*)).$$

Täten ollaan päädytty (Eulerin-)Lagrangen (liike)yhtälöihin

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,}$$

joita merkitään lyhyesti yhtenä yhtälönä

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}.$$

Huomautus 5. Voidaan määritellä *horisontaaliset 1-muodot*⁵⁸

$$\mathcal{E}_L := \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) dq^j, \quad Q = \sum_j Q_j dq^j,$$

missä \mathcal{E}_L on funktion $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Eulerin-Lagrangen operaattori ja Q on *yleistetty voima*. Lagrangen yhtälö on nyt muotoa $\mathcal{E}_T = Q$. Miksi (yleistetty) voima Q on 1-muoto eikä vektorikenttä? Tässä syitä:

1. Kuten yllä nähtiin, tulkitsemalla Q muodoksi, päädytään Lagrangen yhtälöön, joka yleistää mm. Newtonin yhtälön ja relativistisen likeyhtälön. Käyttämällä Lagrangen yhtälöä voidaan esim. Newtonin yhtälö kirjoittaa *mielivaltaisessa koodinaatistossa* \mathbf{q} .
2. Q muuntuu nyt oikein kartanvaihdossa $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ sillä $d\tilde{q}^k = (\partial\tilde{q}^k/\partial q^i) dq^i + (\partial\tilde{q}^k/\partial \dot{q}^i) d\dot{q}^i = (\partial\tilde{q}^k/\partial q^i) dq^i$. Jos Q olisi vektorikenttä $Q^i \partial/\partial q^i$, niin se muuntuisi ‘väärin,’ sillä $\partial/\partial \tilde{q}^k = (\partial q^i/\partial \tilde{q}^k) \partial/\partial q^i + (\partial \dot{q}^i/\partial \tilde{q}^k) \partial/\partial \dot{q}^i \neq (\partial q^i/\partial \tilde{q}^k) \partial/\partial q^i$.
3. Myöhemmin osoitetaan, että muotoja (muttei vektorikenttiä) voidaan integoida luonnollisella tavalla. Kun voima Q on muoto, niin voidaan määritellä⁵⁹ *voiman tekemä työ radalla* α käyrä- eli viivaintegraalina

$$W := \int_{\alpha} Q = \int_{\alpha} \sum_j Q_j dq^j := \sum_j \int_{t_0}^{t_1} Q_j(\dot{\alpha}(t)) \frac{dq^j(t)}{dt} dt.$$

4. Voima Q on *konservatiivinen*, mikäli on olemassa (potentiaali)funktio $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että

$$Q = -dV := - \sum_j \frac{\partial V}{\partial q^j} dq^j$$

eli $Q_j = -\partial V/\partial q^j = -\partial_j V$. Tällöin $W = V(\alpha(t_0)) - V(\alpha(t_1))$.

Kirjoitetaan voima Q on muotoon $Q = \tilde{Q} - dV$ eli $Q_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tilde{Q}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \partial V(\mathbf{q})/\partial q^j$, missä $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ on voiman *potentiaali(osa)* ja yleistetty voima \tilde{Q} ei ole ‘minkään potentiaalın generoima’ (esim. kitka tai ilmanvastus). Määritellään *Lagrangen funktio* $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $L := T - V$. Täten voidaan kirjoittaa (*Eulerin-*)Lagrangen likeyhtälöt seuraavissa muodoissa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j \quad \text{tai yhtäpitävästi} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = \tilde{Q}_j$$

⁵⁸Jotka ovat kuvauksia $TM \rightarrow T^*M$, $T(TM) \rightarrow T^*M$ jne. Huomaa, että $TM \subset T(TM)$.

⁵⁹Klassisesti merkitään $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, missä $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Eli tähän merkintään on ‘piilotettu’ se, että voima on 1-muoto: $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

eli lyhyesti $\mathcal{E}_L = \tilde{Q}$ tai

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \tilde{Q}.$$

Erityisesti, jos $\tilde{Q} = \vec{0}$, niin

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \vec{0}.$$

Lagrangen mekaniikka toimii erityisen hyvin (laskettaessa mekaanisten systeemien liikettä) tapauksessa $\tilde{Q} = \vec{0}$, sillä tällöin ei tarvitse lainkaan määrätä voimia; riittää, kun tuntee potentiaalin V . Tiivistetään (tässä tapauksessa) Lagrangen mekaniikka seuraaviin laskusääntöihin:

1. Määrää kineettinen energia $T(\dot{\mathbf{x}})$ ja potentiaalienergia $V(\mathbf{x})$.
2. Valitse sopivat koordinaatit $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ ja ilmaise $L = T - V$ kartassa \mathbf{q} .
3. Ratkaise Lagrangen yhtälöt. Tuloksena on liikkeet $\underline{\mathbf{q}}(t)$. Valitse liikkeitten joukosta annetut alkuarvot toteuttava liike.

Huomautus 6. Usein systeemin liikkeen parametri t on moniston M koordinaatti (esim. Galilein ja Minkowskin avaruusaikojen koordinaattiaika). Tällöin M :n kartan (q^0, \dots, q^{n-1}) (vaikkapa nollas) koordinaatti voi olla t eli $q^0 = t$. Voidaan siis merkitä $(t, q^1, \dots, q^{n-1}) = (t, \mathbf{q})$, missä $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^{n-1})$. Varsinkin Newtonin mekaniikassa voidaan tarkastella koordinaattimuunnoksia (esim. pyörivä koordinaatisto), jotka eivät muuta aikakoordinaattia eli muunnos on muotoa $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$ ja $\tilde{q}^0 = t = q^0$. Nyt saadaan *side-ehdot* $\dot{\tilde{q}}^0 = \dot{q}^0 = \dot{t} = 1$ ja $\ddot{\tilde{q}}^0 = \ddot{q}^0 = \ddot{t} = 0$, joten

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}^k &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \dot{q}^i = \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^0} \dot{q}^0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \dot{q}^i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial t}, \\ \ddot{\tilde{q}}^k &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \ddot{q}^i + \sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 \tilde{q}^k}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^i} \ddot{q}^i + \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \tilde{q}^k}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \tilde{q}^k}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 \tilde{q}^k}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Huomaa, että nyt totaaliderivaatta redusoituu muotoon

$$\frac{d}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Esimerkki 31. Olkoon $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ja (r, φ) tason napakoordinaatit, joille $x = r \cos \varphi$ ja $y = r \sin \varphi$. Hiukkanen (massa $m = 1$) liikkuu keskeiskentässä, jonka potentiaali on $V(x, y) = V_r(\sqrt{x^2 + y^2})$ (missä $V_r : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$). Miltä liike näyttää pyörivässä koordinaatistossa?

Pyörikkööt havaitsija kulmanopeudella $\omega(t) \in \mathbb{R}$ kiinteän (vaikka z -)akselin ympäri. Olkoon hetkellä $t = 0$ koordinaatit 'päällekin' ja olkoon (R, Φ) kulmanopeudella ω pyörivän koordinaatiston napakoordinaatit eli $r = R$ ja $\varphi = \Phi + \varphi_0(t)$, missä $\varphi_0(t) := \int_0^t \omega(t') dt'$, joten $x = R \cos(\Phi + \varphi_0(t))$ ja $y = R \sin(\Phi + \varphi_0(t))$. Lagrangen funktio on muotoa $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y)$ eli

$$L(t, R, \Phi, \dot{t}, \dot{R}, \dot{\Phi}) = \frac{1}{2}[\dot{R}^2 + R^2(\dot{\Phi} + \omega(t)\dot{t})^2] - V_r(R).$$

Täten Lagrangen yhtälöt ovat (side-ehtojen $\dot{t} = 1$ ja $\ddot{t} = 0$ vallitessa)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{d}{dt} [R^2(\dot{\Phi} + \omega t)\omega] - R^2(\dot{\Phi} + \omega t)\dot{\omega} = \omega \frac{d}{dt} [R^2(\dot{\Phi} + \omega)] = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} &= \ddot{R} - R\dot{\Phi}^2 - R\omega^2 - 2\omega R\dot{\Phi} + \frac{\partial V_r}{\partial R} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} - \frac{\partial L}{\partial \Phi} &= \frac{d}{dt} [R^2(\dot{\Phi} + \omega)] = R(2\dot{R}\dot{\Phi} + R\ddot{\Phi} + 2\omega\dot{R} + R\dot{\omega}) = 0. \end{aligned}$$

Toisaalta koordinaateissa (r, φ) liikeyhtälöt ovat $\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \partial V_r / \partial r$ ja $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$. Näitä sekä kaavoja (12) käyttämällä [!]

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\partial R}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial R}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial R}{\partial t} = \dot{r}, \\ \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \dot{\varphi} + \omega, \\ \ddot{R} &= \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \partial V_r / \partial r = R\dot{\Phi}^2 + R\omega^2 + 2\omega R\dot{\Phi} - \frac{\partial V_r}{\partial R}, \\ \ddot{\Phi} &= \ddot{\varphi} - \dot{\omega} = -2\dot{r}\dot{\varphi}/r - \dot{\omega} = -2(\dot{R}\dot{\Phi} + \omega\dot{R})/R - \dot{\omega} \end{aligned}$$

eli saatiin samat yhtälöt kuin Lagrangen mekaniikalla. [!] Edellisissä yhtälöissä radiaaliosan näennäisvoima $R\omega^2$ on keskipakovoima, kun taas Coriolis-voima aiheuttaa radiaaliosaan termin $2\omega R\dot{\Phi}$ ja kulmaosaan termin $-2\omega\dot{R}$. Poikittaisvoima on $-R\dot{\omega}$. Näennäisvoimat voidaan laskea suoraan mekaniikan pyörivän koordinaatiston kaavoilla, kun $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ja $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. [!]

Harjoitustehtävä 20. Väännetään rautalangasta käyrä (ns. sykloidi), jonka yhtälö on xy -tasossa

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 + \cos \theta), \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

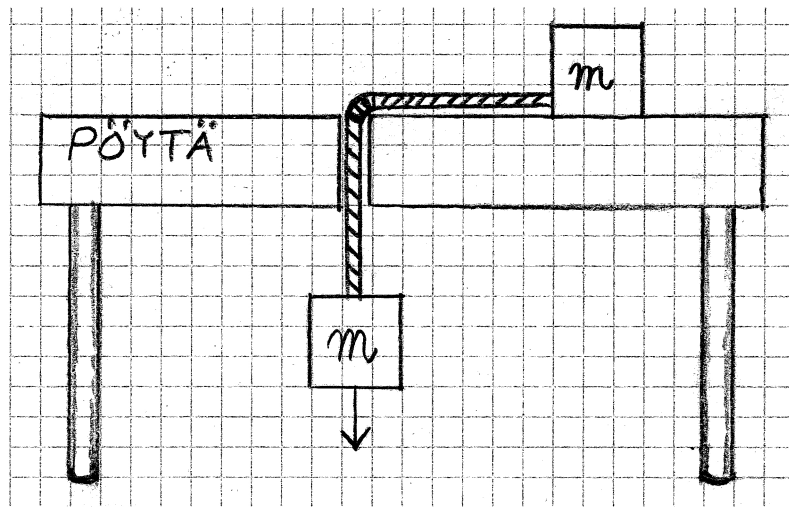
missä $a > 0$ on vakio. Pujotetaan lankaan helmi, jonka massa $m > 0$, ja joka liikkuu käyrää pitkin kitkattomasti. Olkoon xy -taso kohtisuorassa maan pintaa vasten ja oletetaan, että helmeen vaikuttaa (vakio) painovoima.

a) Piirrä kuva systeemistä. Mikä on systeemin konfiguraatioavaruus? Entä vapausasteiden lukumäärä? Määrä Lagrangen funktio ja yhtälö.

b) Määrittele uusi muuttuja $u = \cos(\theta/2)$ ja kirjoita likeyhtälö muuttujan u avulla. Osoita, että helmi oskilloi kulmataajuudella $\omega = \sqrt{g/(4a)}$.

Harjoitustehtävä 21. Porataan pöytään reikä ja laitetaan sen läpi massaton naru (pituus $\ell > 0$), jonka kumpaankin päähän on kiinnitetty m -massaiset (identtiset) kappaleet. Oletetaan, että kitkaa ei tarvitse huomioida. Mikä on systeemin konfiguraatioavaruus ja vapausasteiden lukumäärä? Määrää Lagrangen funktio ja yhtälöt. Ratkaise liike niin pitkälle kuin pystyt.

Vinkki: käytä pöydällä napakoordinaatteja.



Kuva 6: Edellisen harjoitustehtävän systeemi.

10 FYS: Yleistä suhteellisuusteoriaa

Kerrataan aluksi hieman fysikaalisia periaatteita ja matemaattisia faktoja:

- Newtonin mekaniikassa ja erityisessä suhteellisuusteoriassa avaruusaikaa mallinnetaan nelilotteisella monistolla \mathbb{A}^4 , joka on ‘äärettömän suuri.’
- On olemassa inertiaalikoordinaatisto \mathbf{x} , jonka avulla \mathbb{A}^4 voidaan samaistaa \mathbb{R}^4 :n kanssa. Inertiaalikartat ovat toisistaan Galilein (N) tai Poincarén (E) muunnosten päässä.
- Inertiaalikoordinaatistossa \mathbf{x} vapaa kappale kulkee vakionopeudella eli sen liikeyhtälö on muotoa $\ddot{\mathbf{x}} = \vec{0}$.
- Inertiaalikoordinaatistossa \mathbf{x} liiketilän (nopeuden) muutoksen syy on voima. Kappaleen liike saadaan liikeyhtälön (Newtonin yhtälö/relativistinen yhtälö) ratkaisuna.
- Kun ilmaistaan liikeyhtälö *mielivaltaisessa* kartassa \mathbf{q} , se on Lagrangen muotoa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (13)$$

eli Lagrangen yhtälö on liikeyhtälön *kovariantti muoto* eli ‘saman näköinen’ kaikissa karttoissa.

- Vapaaseen kappaleeseen ei vaikuta voimia eli $\mathbf{Q} \equiv \vec{0}$, joten vapaan kappaleen liikeyhtälö $\ddot{\mathbf{x}} = \vec{0}$ (eräs janan yhtälö) on

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \vec{0}$$

mielivaltaisessa kartassa \mathbf{q} .

- Jokaisessa semi-Riemannin monistossa (M, g) (ja sen kartassa \mathbf{q}) voidaan määritellä (kartariipumaton) $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} g_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j$ ja täten Lagrangen yhtälö (13).
- Jokaisessa M :n pisteessä \mathbf{m} on olemassa Riemannin normaalikoordinaatisto \mathbf{x} , jossa Lagrangen yhtälö on muotoa $a_i \ddot{x}^i = Q_i$ (voidaan jopa valita $a_i = \pm 1$). Jos $\mathbf{Q} = \vec{0}$, niin (pisteessä \mathbf{m}) yhtälö on $\ddot{\mathbf{x}} = \vec{0}$.
- Koska pisteen \mathbf{m} Riemannin normaalikoordinaatistossa \mathbf{x} (jossa $\mathbf{x}(\mathbf{m}) = \vec{0}$) myös $\partial_k g_{ij}(\vec{0}) = 0$, niin kehittämällä Taylorin sarjaksi

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = g_{ij}(\vec{0}) + \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{\vec{0}} x^k + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \right|_{\vec{0}} x^k x^l + \dots = a_i \delta_{ij} + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2) \approx a_i \delta_{ij},$$

kun $|\mathbf{x}| \approx 0$ (olla lähellä pistettä \mathbf{m}) eli M on aina paikallisesti ‘litteä’ (erityisesti Minkowskin avaruusaika \mathbb{M}^4 , mikäli M on neli-ulotteinen ja vain yksi a_i on negatiivinen; tällöin voidaan valita \mathbf{x} siten, että $g_{ij}(\mathbf{m}) = \eta_{ij}$).

Eräs fundamentaalinen (N:n ja) E:n ongelma on se, että havaitsija tekee havaintoja tai mittauksia vain paikallisesti eli lokaalisti. Ilmeisesti ei voida koskaan kokeellisesti osoittaa, että avaruusaika olisi neliulotteinen ääretön jatkumo \mathbb{A}^4 . Sen sijaan voidaan ajatella, että avaruusaika on vain paikallisesti (eli havaitsijan ‘lähiympäristössä’) Minkowskin avaruus. Täten päädytään seuraavaan yleistyksen:

Yleisessä suhteellisuusteoriassa avaruusaika on *Lorentzin monisto*⁶⁰ (M, g) eli neliulotteinen semi-Riemannin monisto, jonka jokaissa pisteessä \mathbf{m} on Riemannin normaalikoordinaatit $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, joissa metriikan matriisi $(g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3 = \boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Tällöin koordinaatti x^0 (tai paremminkin $t := x^0/c$) tulkitaan avaruusajan pisteessä \mathbf{m} olevan havaitsijan (tai kappaleen) aikakoordinaatiksi (tai ominaisajaksi) ja loput koordinaatit muodostavat ‘pistetapahtuman paikkavektorin’ $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$. Kunkin havaitsijan näkövinkkelistä katsottuna avaruusaika voidaan siis jakaa *lokaalisti* kolmiulotteiseen avaruuteen ja aikaan. Huomaa, että aika ja paikkakoordinaatit saattavat ‘sotkeutua keskenään’ (ja täten jako avaruuteen ja aikaan) eri havaitsijoiden karttojen välisessä Lorentzin muunnoksissa.

Huomautus 7. Vapaa hiukkanen ($\mathbf{Q} \equiv 0$) liikkuu semi-Riemannin monistolla (M, g) noudattaen yhtälöä $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \vec{0}$ eli yhtälöitä

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = g_{ij} \ddot{q}^j + [jk, i] \dot{q}^j \dot{q}^k = 0,$$

jotka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\ddot{q}^s + \Gamma_{jk}^s \dot{q}^j \dot{q}^k = 0 \tag{14}$$

missä

$$\Gamma_{jk}^s = \left\{ \begin{matrix} s \\ jk \end{matrix} \right\} := g^{si} [jk, i] = \frac{1}{2} g^{si} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right)$$

on (*toisen lajin*) *Christoffelin symboli* (joka häviää pisteessä \mathbf{m} pisteen \mathbf{m} normaalikoordinaateissa laskettuna). Yhtälöitä (14) sanotaan myös *geodeesiyhtälöiksi*, koska Riemannin monistoilla

⁶⁰Myöhemmin osoitetaan, että avaruusajan M metriikka g voidaan määrätä Einsteinin yhtälön ratkaisuna, kun tunnetaan avaruusajan energia/ainejakauma.

lyhin (ja pisin) reitti kahden pisteen välillä (eli geodeesi tai geodeettinen viiva) saadaan geodeesiyhtälön ratkaisusta. Vapaa hiukkanen kulkee siis geodeesia pitkin, joka on ‘jana’ litteässä avaruudessa (missä $\Gamma_{jk}^s \equiv 0$) ja ‘lokaalisti likimäärin jana’ yleisessä tapauksessa Riemannin normaalikoordinaateissa, jotka muodostavat ikäänkuin paikallisen likimääräisen ‘inertiaalikoordinaatiston.’

Huomautus 8. N:n ja E:n tapauksissa todettiin tarkasteltaessa yksittäisiä hiukkasia (tai vastaavasti monen hiukkasen systeemejä), että avaruusajan metriikka g pitäisi kertoa hiukkasen massalla m ja määritellä ‘massametriikka’ $g^{\text{mass}} = mg$, jotta saataisiin ‘oikea’ (kineettinen) liikemäärä (massa \times nopeus). Matemaattisesti tällä ei ole mitään merkitystä, sillä vapaan hiukkasen tapauksessa Christoffelin symbolit Γ_{jk}^s ja täten geodeesiyhtälö $\ddot{q}^s + \Gamma_{jk}^s \dot{q}^j \dot{q}^k = 0$ ovat samat g :lle ja mg :lle (huomaa, että mg :n käänteismatriisi on $m^{-1}g^{-1}$, joten m supistuu pois Γ_{jk}^s :n yhtälöstä). Yleisessä tapauksessa $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}$ massa voidaan jakaa yhtälön oikealle puolelle ja skaalata voima \mathbf{Q} ‘voimaksi’ \mathbf{Q}/m eli ‘imuroida’ massa voimaan.

Harjoitustehtävä 22. Olkoon (M, g) kaksiulotteinen semi-Riemannin monisto ja $\mathbf{q} = (q^1, q^2) = (u, v)$ sen joku kartta. Merkitään tässä kartassa $E := g_{11}$, $F := g_{12}$, $G := g_{22}$ ja $Q := EG - F^2$. Funktion $f(u, v)$ osittaisderivaattoja merkitään $f_u := \partial f / \partial u$ ja $f_v := \partial f / \partial v$. Osoita suoralla laskulla (laske ainakin muutama), että metriikan g Christoffelin symbolit kartassa (u, v) ovat

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= Q^{-1} \begin{vmatrix} E_u/2 & F \\ F_u - E_v/2 & G \end{vmatrix}, & \Gamma_{12}^1 &= Q^{-1} \begin{vmatrix} E_v/2 & F \\ G_u/2 & G \end{vmatrix}, & \Gamma_{22}^1 &= Q^{-1} \begin{vmatrix} F_v - G_u/2 & F \\ G_v/2 & G \end{vmatrix}, \\ \Gamma_{11}^2 &= Q^{-1} \begin{vmatrix} E & E_u/2 \\ F & F_u - E_v/2 \end{vmatrix}, & \Gamma_{12}^2 &= Q^{-1} \begin{vmatrix} E & E_v/2 \\ F & G_u/2 \end{vmatrix}, & \Gamma_{22}^2 &= Q^{-1} \begin{vmatrix} E & F_v - G_u/2 \\ F & G_v/2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Miten symbolit yksinkertaistuvat, jos metriikka on diagonaalinen eli $F \equiv 0$? Kirjoita vapaan hiukkasen likeyhtälö (eli geodeesiyhtälö) monistolla M .

10.1 Gravitaatio

Tarkastellaan yleistä tilannetta (M, g) , missä systeemin liike saadaan Lagrangen yhtälöstä

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = g_{ij} \ddot{q}^j + [jk, i] \dot{q}^j \dot{q}^k = Q_i, \quad (15)$$

missä $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ moniston M kartta. Toisaalta voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa

$$g_{ij} \ddot{q}^j = Q_i + Q'_i, \quad Q'_i := -[jk, i] \dot{q}^j \dot{q}^k,$$

ja tulkita \mathbf{Q}' näennäisvoimana (kertaa esimerkki 31). Välittömästi nousee esiin käänteinen kysymys: Voidaanko (15) esittää sellaisessa muodossa, että \mathbf{Q} on tulkittavissa näennäisvoimana? Avaruudessa (M, g) tämä ei ole yleensä mahdollista, mutta lisäämällä M :ään uusia ulottuvuuksia tämä saattaa onnistua. Esimerkiksi sähkömagnetismi on määritelty neliulotteisessa avaruusajassa, mutta lisäämällä ylimääräinen ‘varausulottuvuus,’ Maxwellin yhtälöt on nähtävissä viisiulotteisen moniston geodeesiyhtälönä (eli varattu hiukkanen liikkuu vapaasti viisiulotteisella monistolla). Ylimääräisen ulottuvuuden fysikaalinen merkitys on monesti epäselvä, joten tällainen ‘laajentaminen’ pitää nähdä lähinnä matemaattisena työvälineenä. On kuitenkin poikkeus: Nimittäin Newton määritteli painovoiman kolmiulotteisessa avaruudessa ja nythän meillä on luonnollinen neljäs ulottuvuus – aika! Eli seuraavaksi osoitetaan, että Newtonin gravitaatiolaki on nähtävissä neliulotteisen avaruusajan geodeesiyhtälönä: massallinen hiukkanen on vapaa neliulotteisessa avaruusajassa ja gravitaatio on näennäisvoima!

Tarkastellaan \mathcal{M} -massaisen pallosymmetrisen kappaleen (esim. tähti) painovoimakentässä liikkuvaa m -massaista pallosymmetristä kappaletta (esim. planeetta). Oletetaan, että $m \ll \mathcal{M}$, mallinnetaan avaruutta \mathbb{R}^3 :lla ja kiinnitetään \mathbb{R}^3 :n origo \mathcal{M} :n keskipisteeseen.⁶¹ Tilannetta voidaan kuvata seuraavasti:

- \mathcal{M} ‘luo’ ympärilleen painovoimakentän, jonka kentänvoimakkuus (eli ‘putoamiskiihtyvyyt’) pisteessä $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ on

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G_N \frac{\mathcal{M} \mathbf{r}}{r^2 r}.$$

Massa \mathcal{M} on nyt *aktiivinen painovoimamassa*.

- Pisteessä \mathbf{r} olevaan kappaleeseen m vaikuttaa Newtonin gravitaatiovoima $m\mathbf{g}(\mathbf{r})$. Massa m on tässä *passiivinen painovoimamassa*.
- Kappaleen m liike saadaan Newtonin yhtälön

$$\overline{m}\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}(\mathbf{r})$$

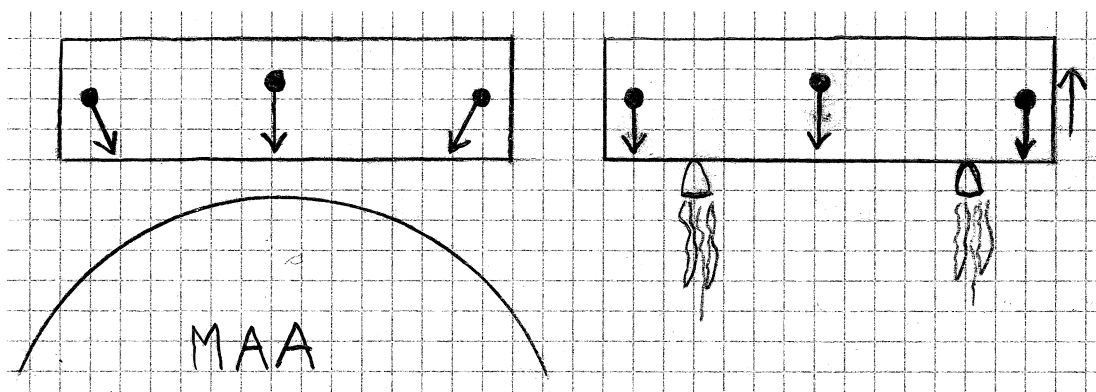
ratkaisuna, missä \overline{m} on *hitausmassa*.

Kappaleen aktiivinen ja passiivinen painovoimamassa ovat yhtä suuria johtuen Newtonin gravitaatiovoiman symmetrisestä muodosta, joten voidaan puhua vain kappaleen painovoimamassasta. Toisaalta *heikon ekvivalenssiperiaatteen* mukaan painovoimamassa ja hitausmassa

⁶¹Oikeastaan origo $\vec{0}$ pitää poistaa, koska $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ ei ole määritelty siinä. Avaruus on $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

ovat samat eli $m = \bar{m}$. Tämä on kokeellisesti todennettu suurella tarkkuudella. Heikosta ekvivalenssiperiaatteesta seuraa, että kappaleen kiihtyvyys on putoamiskiihtyvyys eli $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ eli kaikki (vapaasti putoavat) kappaleet noudattavat samaa liikeyhtälöä gravitaatiokentässä riippumatta niitten massasta m ; tämä tunnetaan myös *universaalisuusperiaatteena*.

Ajatellaan tilannetta, missä lentokone putoaa vapaasti (moottorit sammutettuna) maan gravitaatiokentässä. Tällöin lentokoneen sisällä oleva havaitsija putoaa samalla putoamiskiihtyvyydellä kuin lentokonekin ja leijuu ‘painottomana’ lentokoneen sisällä. Siis jos havaitsija ei näe koneen ulkopuolelle, hän ei havaitse lainkaan painovoimaa. Toisaalta, jos havaitsija on avaruusaluksessa, joka on tyhjässä avaruudessa (kaukana taivaankappaleista), missä ei ole lainkaan gravitaatiokenttiä, hän voi silti kokea keinotekoisen painovoiman: nimittäin kiihdyttämällä rakettia suurempaan nopeuteen, havaitsija painuu ‘takaseinää/penkkiä’ vasten. Samanlainen efekti saadaan hidastamalla tai pyörittämällä alusta. Eli heikosta ekvivalenssiperiaatteesta seuraa, että aluksen sisälle eristetty havaitsija ei voi tietää tekemällä gravitaatiokokeita (esim. pudottelemalla kappaleita) vaikuttaako aluksen sisällä todellinen vai keinotekoinen painovoima. Tätä efektiä voi testata esim. hississä, missä ylöspäin suuntautuva hissinkin kiihtyvä liike koetaan painovoiman kasvamisena. Jos hissinkin vaijeri katkeaa ylimmässä kerroksessa, niin sitten leijutaankin painottomana hetken aikaa. Huomaa, että jos raketti on valtavan suuri, niin sen sisällä oleva raketin kiihtyvyydestä johtuva keinotekoinen painovoima poikkeaa todellisesta painovoimakentästä eli oikeastaan vapaasti putoavien kappaleiden käyttäytyminen on samanlaista gravitaatiokentässä ja tasaisesti kiihtyvässä koordinaatistossa (raketissa) vain riittävän pienessä alueessa.



Kuva 7: Vasemmalla jättimäinen raketti maan lähellä paikallaan ja oikealla sama raketti tyhjässä avaruudessa kiihdyttäen vakiokiihtyvyydellä. Raketin keskellä oleva havaitsija kokee tilanteet samoina, mutta laidoilla (raketin sisällä olevat) kappaleet putoavat eri kiihtyvyyksillä.

Heikko ekvivalenssiperiaate voidaan yleistää (*Einsteinin/vahvaksi*) *ekvivalenssiperiaatteeksi*, jonka mukaan *kaikki* fysiikan lait redusoituvat erityisen suhteellisuusteorian⁶² mukaisiksi riittävän pienissä avaruusajan alueissa. On mahdotonta erottaa ‘aitoa’ gravitaatiokenttää ‘näennäisestä’ (siis kartan kiihtyvyydestä johtuvasta) tehtiinpä mitä kokeita tahansa. On ekvivalenssiperiaatteen mukaista kuvata gravitaatiota avaruusajan kaarevuutena tai käyristymänä ‘eli’ metriikkana g . Nimittäin erityisessä suhteellisuusteoriassa inertiaaliset kartat olivat erityisasemassa; niissä määriteltiin liikeyhtälöt, jotka sitten muissa kartoissa sisälsivät näennäisvoimia. Jos avaruusaikaa kuvataan Lorentzin monistolla⁶³ (M, g) , niin selvästikin voidaan määritellä lokaaleja inertiaalikarttoja käyttämällä Riemannin normaalikoordinaatteja. Jos gravitaatio on näennäisvoima (eli metriikan synnyttämä), se häviää lokaalissa inertiaalikoordinaatistossa ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti. Nyt vapaa kappale on tarkemmin ottaen *vapaasti putoava*, sillä gravitaation vaikutus häviää lokaalissa inertiaalikoordinaatistossa, joten ‘vapaaseen kappaleeseen ei voi vaikuttaa muita voimia kuin paino(näennäis)voima.’ Kääntäen voidaan sanoa, että lokaali inertiaalikoordinaatisto on kartta, missä (kartan määrittelyalueessa) vapaasti putoavat kappaleet liikkuvat *likimäärin* vakionopeuksilla (tai ovat paikallaan) jonkun aikaa. Erityisesti lokaalin inertiaalikoordinaatiston origo putoaa vapaasti (muistele lentokone-esimerkkiä). Lisäksi vapaasti putoavan kappaleen liikeyhtälö on (avaruusajan metriikan) geodeesiyhtälö.

Huomaa, että jos kappale ei ole vapaa ja sen liikeyhtälö on Lagrangen yhtälö, niin liikeyhtälö voidaan ilmaista *missä tahansa* kartassa! Tämä on (*yleisen*) *kovarianssiperiaatteen* tai (*yleisen*) *suhteellisuusteorian* matemaattinen muotoilu. Kovarianssiperiaate tarkoittaa, että fysiikan lait ovat samat kaikissa koordinaatistoissa eli samat kaikille havaitsijoille riippumatta heidän liiketilasta.⁶⁴ Yleisessä suhteellisuusteoriassa oikeastaan mikään kartta ei ole erityisasemassa; lokaalissa inertiaalikoordinaatistossa liikeyhtälö on vain yksinkertaista muotoa, sillä näennäisvoimat (Christoffelin symbolit) ovat likimäärin nolliä. Palataan sitten takaisin gravitaatioesimerkkiimme.

Newtonin gravitaatiolaki pätee mainiosti tarkasteltaessa planeettojen liikettä (Keplerin lait). Planeetat liikkuvat hitaasti eli planeetan vauhti $\underline{v}(t) = |\underline{v}(t)|$ joka hetkellä t (missä

⁶²Joka on määritelty Minkowskin avaruudessa \mathbb{M}^4 .

⁶³Joka ‘on’ lokaalisti Minkowskin avaruus \mathbb{M}^4 .

⁶⁴N:ssä ja E:ssä voidaan puhua myös erityisestä suhteellisuusteoriasta: Jos teoria sisältää (erityisessä asemassa olevia) inertiaalikarttoja, niin fysiikan lait ovat ‘saman muotoisia’ (tai yksinkertaisinta muotoa) inertiaalikartoissa. N on siis Galilei- ja E Poincaré suhteellinen teoria. (Matemaattisesti ajateltuna teorioiden monistojen inertiaalikartat muodostavat kartaston, joka ei ole maksimaalinen. Erityistä suhteellisuusteoriaa tarkastellaan vain inertiaalikartaston suhteen.)

$\underline{\mathbf{v}}(t) = \dot{\underline{\mathbf{r}}}(t)$ on paljon valon vauhtia pienempi:

$$\underline{\beta}(t) = \frac{v(t)}{c} \approx 0.$$

Planeetan ominaisaika

$$\underline{\tau}(t) = \int_0^t \sqrt{1 - \underline{\beta}(t')^2} dt' \approx \int_0^t dt' = t.$$

Kuvataan planeetan liikettä neliulotteisella Lorentzin monistolla (M, g) ja oletetaan, että Newtonin gravitaatio on näennäisvoima eli toteuttaa geodeesiyhtälön (14):

$$\frac{d^2 \underline{x}^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \frac{d\underline{x}^\rho(\tau)}{d\tau} \frac{d\underline{x}^\sigma(\tau)}{d\tau} \equiv 0,$$

missä $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ on avaruusajan kartta, joka on saatu ‘lisäämällä’ \mathbf{r} :ään aikakoordinaatti $x^0 = ct$. Huom! \mathbf{x} :n ei tarvitse olla Riemannin normaalikoordinaatisto.

Koska planeetta liikkuu hitaasti, geodeesiyhtälöstä voidaan jättää pois termejä:

$$\frac{d^2 \underline{x}^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \approx 0,$$

sillä kaikilla $i = 1, 2, 3$,

$$\left| \frac{d\underline{x}^i(\tau)}{d\tau} \right| = \left| \frac{d\underline{x}^i(t)}{cdt} \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \right| \leq |\underline{\beta}(t)| \left| \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \right| \ll \left| \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \right|.$$

Oletetaan, että planeetta liikkuu kaukana tähdessä ja gravitaatiokenttä on heikko kaukana tähdestä⁶⁵ eli kartassa \mathbf{x} ilmaistuna $g = \eta + h$ eli

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\mathbf{x}),$$

missä $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \approx 0$, kun $r \gg 0$. Tällöin käänteismatriisille

$$g^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(\mathbf{x}),$$

missä $h^{\mu\nu} := \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$, sillä $g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} \approx \delta_\mu^\nu - h_{\mu\rho} h^{\rho\nu} \approx \delta_\mu^\nu$. Oletetaan lisäksi, että metriikka ei riipu ajasta (gravitaatiokenttä on staattinen eli aikariippumaton). Tällöin $\partial g_{\mu\nu} / \partial x^0 = \partial h_{\mu\nu} / \partial x^0 = 0$ ja saadaan

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} \right) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} \approx -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\lambda}$$

sekä likimääräinen geodeesiyhtälö

$$\frac{d^2 \underline{x}^\mu(\tau)}{d\tau^2} \approx -\Gamma_{00}^\mu(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\lambda}(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau}.$$

⁶⁵Näinhän on Newtonin gravitaatiolle, kun $r \gg 0$.

Sijoittamalla $\mu = 0$ tulee tuttu tulos:

$$\frac{d^2 \underline{x}^0(\tau)}{d\tau^2} \approx \frac{1}{2} \eta^{0\lambda} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\lambda}(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0}(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} = 0,$$

joka seuraa jo kaavasta $\underline{x}^0(\tau) \approx c\tau$. Jos $\mu = i \in \{1, 2, 3\}$, niin

$$\frac{d^2 \underline{x}^i(\tau)}{d\tau^2} \approx \frac{1}{2} \delta^{i\lambda} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\lambda}(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \left[\frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \right]^2$$

eli vektoriytälönä

$$\frac{d^2 \underline{\mathbf{r}}(\tau)}{d\tau^2} \left[\frac{d\underline{x}^0(\tau)}{d\tau} \right]^{-2} \approx \frac{1}{2} (\nabla h_{00})(\underline{\mathbf{r}}(\tau)).$$

Määrittelemällä⁶⁶ $h_{00}(\mathbf{r}) := -2\Phi(\mathbf{r})/c^2$, missä Φ on Newtonin gravitaatiokentän potentiaali,

$$\Phi(\mathbf{r}) := -G_N \frac{\mathcal{M}}{r}, \quad -(\nabla\Phi)(\mathbf{r}) = -G_N \frac{\mathcal{M} \mathbf{r}}{r^2} = \mathbf{g}(\mathbf{r}),$$

ja siirtymällä koordinaattiaikaan t päädytään *likimääräiseen Newtonin gravitaatiolakiin*

$$\frac{d^2 \underline{\mathbf{r}}(t)}{dt^2} \approx \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)),$$

joka pätee kaukana tähdestä ($r \gg 0$). Metriikan g komponentti $g_{00} = -1 + h_{00} = -1 - 2\Phi/c^2$, joten

$$g = (-1 - 2\Phi/c^2) dx^0 \otimes dx^0 + \dots = (-c^2 - 2\Phi) dt \otimes dt + \dots$$

Seuraavassa luvussa tarkastellaan metriikan g muita komponentteja $g_{\mu\nu}$.

Huomautus 9. Vastaavasti kuin erityisessä suhteellisuusteoriassa (joka perustuu siis Minkowskin avaruuteen (\mathbb{M}^4, η)) yleisessä suhteellisuusteoriassa voidaan määritellä ajan-, valon- ja paikanluonteiset vektorit. Jos (M, g) on Lorentzin monisto, niin esim. vektori $v \in TM_m$ on ajanluonteinen, jos $g|_m(v, v) < 0$. Samoin käyrä $\alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow M$ on esim. valonluonteinen, jos $g|_{\alpha(\lambda)}(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda)) = 0$ kaikilla $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ (eli siis kaikki käyrän yleistetyt (neli)nopeudet $\dot{\alpha}(\lambda)$ ovat valonluonteisia). Koska valonnopeutta ei voi ylittää, massallinen hiukkanen liikkuu ajanluonteista käyrää α pitkin ja sille voidaan määritellä ominaisaika:

$$\underline{\tau}(\lambda) := \frac{1}{c} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{-g|_{\alpha(\tilde{\lambda})}(\dot{\alpha}(\tilde{\lambda}), \dot{\alpha}(\tilde{\lambda}))} d\tilde{\lambda}.$$

Huomaa, että pisteen $\alpha(\lambda)$ Riemannin normaalikoordinaatistossa \mathbf{x} , missä metriikan matriisi on (tässä pisteessä) $\boldsymbol{\eta}$ ja $(\mathbf{x} \circ \alpha)(\lambda) = (\underline{x}^0(\lambda), 0, 0, 0)$ (eli koordinaatiston avaruusosan origo on hiukkasessa), saadaan

$$\frac{d\underline{\tau}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{c} \sqrt{-g|_{\alpha(\lambda)}(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda))} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{x}^0(\lambda)}{d\lambda}$$

⁶⁶Selvästikin $\Phi(\mathbf{r}) \approx 0$, kun $r \gg 0$, eli approksimaatio pätee.

eli koordinaatti x^0/c kuvaa \mathbf{x} :n avaruusosan origossa olevan hiukkasen ominaisaikaa. Välittömästi nähdään myös ekvivalentti määritelmä ajanluonteisen käyrän α ominaisajalle: ominaisaika τ on sellainen radan α parametri ($\lambda = \tau$), että

$$g|_{\alpha(\tau)}(\dot{\alpha}(\tau), \dot{\alpha}(\tau)) \equiv -c^2.$$

Vertaa luvun 5 tuloksiin. [!]

11 FYS: Schwarzschildin metriikka ja mustat aukot

Mikä on avaruusaika (Lorentzin monisto (M, g)) *pallosymmetrisen* massan \mathcal{M} omaavan (staat-tisen) taivaankappaleen (esim. tähden) ulkopuolella? Edellisessä luvussa laskettiin jo metriikan komponentti $g_{00} = -1 - 2\Phi/c^2$, missä

$$\Phi(r) = -G_N \frac{\mathcal{M}}{r},$$

ja seuraavaksi esitellään koko metriikka. Ensin kuitenkin harjoitus:

Harjoitustehtävä 23. *Tarkastellaan Minkowskin avaruutta \mathbb{M}^4 . Metriikka on nyt (inertiaali-kartassa \mathbf{x}) muotoa $\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$. Siirrytään avaruuden pallokoordinaatteihin (r, θ, φ) , joille pätee*

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta.$$

Osoita, että lokaalisti

$$\eta = -c^2 dt \otimes dt + dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi].$$

Myöhemmin osoitetaan,⁶⁷ että \mathcal{M} :n ulkopuolella (tyhjiössä) metriikka g on lokaalisti muotoa

$$g = -[c^2 + 2\Phi(r)] dt \otimes dt + [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-1} dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi].$$

eli *Schwarzschildin metriikka*. Jos tähden säde on $\mathcal{R} > 0$, niin tähden sisällä ($r \leq \mathcal{R}$) metriikka voi olla realistisissa tähtimalleissa muotoa

$$g = -[c^2 + 2\tilde{\Phi}(r)] dt \otimes dt + [1 + 2\tilde{\Phi}(r)/c^2]^{-1} dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi],$$

missä

$$\tilde{\Phi}(r) = -G_N \frac{\mathcal{M}(r)}{r}$$

ja $r \mapsto \mathcal{M}(r)$ on (sileä) reaalifunktio, jolle esim. $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-1} \mathcal{M}(r) = 0$ ja $\mathcal{M}(r) = \mathcal{M}$, kun $r \geq \mathcal{R}$. Välittömästi huomataan seuraavat seikat:

- Jos $r \rightarrow \infty$, niin $\Phi(r) \rightarrow 0$ ja $g \rightarrow \eta$, joten kaukana tähdestä avaruusaika on likimäärin Minkowskin avaruusaika. Tätä sanotaan *asymptoottiseksi litteudeksi*.
- Jos $\mathcal{M} = 0$ eli tähteä ei ole (pelkkä tyhjiö), niin $g = \eta$ ja $M = \mathbb{M}^4$, mikä on odotettavissa. Pienimassainen tähti kaareuttaa avaruusaikaa vain vähän.

⁶⁷Jahka Einsteinin yhtälö on esitelty.

- Schwarzschildin metriikka näyttäisi ‘käyttävän huonosti’ pisteissä, joiden ‘koordinaatti $r = r_{\text{hor}}$ ’ on sellainen, että $1 + 2\Phi(r_{\text{hor}})/c^2 = 0$ eli

$$r_{\text{hor}} := 2G_N \mathcal{M}/c^2.$$

Ongelmaa ei esiinny mikäli $\mathcal{R} > r_{\text{hor}}$ eli ‘tähti on riittävän suuri.’ Toisaalta, jos $\mathcal{R} \leq r_{\text{hor}}$, niin kohta osoitetaan, että ‘ $r = r_{\text{hor}}$ ’ on ns. *koordinaattisingulariteetti* ja voidaan poistaa valitsemalla parempi kartta; pisteiden, joille ‘ $r = r_{\text{hor}}$ ’, muodostamaa (ali)monistoa sanotaan *tapahtumahorisontiksi*. Luku r_{hor} on ns. *Schwarzschildin säde*.

- Schwarzschildin metriikka käyttäytyy huonosti pisteessä, jonka koordinaatti $r = 0$. Jos $\mathcal{R} > 0$, niin ongelmaa ei esiinny, mutta pistemäisille kohteille ($\mathcal{R} = 0$) piste $r = 0$ on *aito singulariteetti* ja sitä vastaava piste pitää poistaa monistosta.⁶⁸
- Metriikan g matriisin determinantti kartassa $\mathbf{q} = (t, r, \theta, \varphi)$ on $-c^2 r^2 \sin^2 \theta$ samoin kuin Minkowskin metriikankin. Huomaa, että pisteissä $r = r_{\text{hor}}$ koko matriisia ei ole määriteltä! (Kyseiset pisteet eivät kuulu kartan \mathbf{q} määrittelyalueeseen vaikka ne kuuluvatkin monistoon M .)
- Koska $c^2 + 2\Phi(r) = c^2 - 2G_N \mathcal{M}/r = c^2(1 - r_{\text{hor}}/r) < 0$, joss $r < r_{\text{hor}}$, niin tapahtumahorisontin sisäpuolella koordinaatti t (vastaavasti r) vaihtuu paikanluonteiseksi (vast. ajanluonteiseksi). Täten alueessa $r < r_{\text{hor}}$ koordinaatin t fysikaalinen tulkinta on problemattinen ja kartta \mathbf{q} (erityisesti koordinaatti t) kannattaa korvata paremmalla kartalla⁶⁹ kuten seuraavassa harjoituksessa.

Harjoitustehtävä 24. Määritellään Eddingtonin-Finkelsteinin koordinaatit $\mathbf{q}_{\pm} = (t_{\pm}, r, \theta, \varphi)$, missä

$$t_{\pm}(t, r) := t \pm \left(\frac{r}{c} + \frac{2G_N \mathcal{M}}{c^3} \ln \left| \frac{c^2 r}{2G_N \mathcal{M}} - 1 \right| \right) = t \pm \frac{1}{c} \left(r + r_{\text{hor}} \ln \left| \frac{r}{r_{\text{hor}}} - 1 \right| \right)$$

Osoita, että kartoissa \mathbf{q}_{\pm} Schwarzschildin metriikka on muotoa

$$g = - [c^2 + 2\Phi(r)] dt_{\pm} \otimes dt_{\pm} \pm c(dt_{\pm} \otimes dr + dr \otimes dt_{\pm}) + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi].$$

Tarkastele metriikan matriisialkioita (kartoissa \mathbf{q}_{\pm}). Milloin ne ovat määriteltä? Milloin matriisi on kääntyvä?

⁶⁸Tietenkin aina voidaan olettaa, että $\mathcal{R} > 0$ ja $\mathcal{R} \approx 0$, joten ongelma on enemmänkin matemaattinen kuin fysikaalinen.

⁶⁹Eli kartalla, joka kattaa koko alueen $r \in (0, \infty)$.

Tarkastellaan sitten pientä kappaletta (esim. raketti) joka liikkuu Schwarzschildin metriikassa ja tähti on riittävän pieni eli $\mathcal{R} \leq r_{\text{hor}}$. Kappaleen (lepo)massalla ei ole väliä, kunhan se vain on riittävän pieni eli ei itse kaareuta avaruusaikaa juurikaan. Kappaleen massa voi olla myös 0 (esim. ftoni eli ‘valohiukkanen’). Jos kappale on vapaasti putoava, niin se noudattaa geodeesiyhtälöä. Koska valon nopeutta ei voi ylittää, kappaleen liike $\alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow M$ on ajan (< 0) tai valon ($= 0$) luonteista⁷⁰ eli kaikilla $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$

$$g|_{\alpha(\lambda)}(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda)) \leq 0$$

tai Eddingtonin-Finkelsteinin karttojen \mathbf{q}_{\pm} avulla ilmaistuna [!]

$$- [c^2 + 2\Phi(r(\lambda))] \left[\frac{dt_{\pm}(\lambda)}{d\lambda} \right]^2 \pm 2c \frac{dt_{\pm}(\lambda)}{d\lambda} \frac{dr(\lambda)}{d\lambda} + \underbrace{r(\lambda)^2 \left\{ \left[\frac{d\theta(\lambda)}{d\lambda} \right]^2 + \sin^2 \theta(\lambda) \left[\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \right]^2 \right\}}_{\geq 0} \leq 0,$$

mistä seuraa, että on oltava

$$\frac{dt_{\pm}(\lambda)}{d\lambda} \left\{ - [c^2 + 2\Phi(r(\lambda))] \frac{dt_{\pm}(\lambda)}{d\lambda} \pm 2c \frac{dr(\lambda)}{d\lambda} \right\} \leq 0. \quad (16)$$

Oletetaan, että $\lambda \mapsto r(\lambda)$ ei ole vakio eli kappale ei kierrä vakioetäisyydellä \mathcal{M} :n keskipistettä. Tällöin jollain λ :n arvolla (ja täten myös sen ympäristössä jatkuvuuden nojalla) $dr(\lambda)/d\lambda \neq 0$ ja edellinen kuvaus kääntyy (lokaalisti) kuvaukseksi $r \mapsto \lambda(r)$ (käänteiskuvauslause). Voidaan siis tällöin valita $\lambda = r$ epäyhtälössä (16), joka redusoituu muotoon

$$\frac{dt_{\pm}(r)}{dr} \left\{ - [c^2 + 2\Phi(r)] \frac{dt_{\pm}(r)}{dr} \pm 2c \right\} \leq 0. \quad (17)$$

Jaetaan tarkastelu kahteen osaan:

1) Epäyhtälön (17) yläraja 0 saavutetaan *valolle, joka liikkuu radiaalisti* eli kuvaukset $\underline{\theta}$ ja $\underline{\varphi}$ ovat vakioita. Tällöin on oltava (a) joko $r \mapsto t_{\pm}(r) := t_{\pm}^0$ on vakio tai (b)

$$\frac{dt_{\pm}(r)}{dr} = \frac{\pm 2c}{c^2 + 2\Phi(r)} = \pm \frac{2}{c} \frac{r}{r - r_{\text{hor}}},$$

joka voidaan integroida: [!]

$$t_{\pm}(r) = \pm \frac{2}{c} [r + r_{\text{hor}} \ln |r - r_{\text{hor}}|] + t_{\pm}^0.$$

⁷⁰Jos kappaleen massa ei ole nolla, niin λ :ksi valitaan yleensä kappaleen ominaisaika τ .

Harjoitustehtävä 25. Määrä karttojen \mathbf{q}_+ ja \mathbf{q}_- välinen koordinaattimuunnos $\mathbf{q}_- = \mathbf{q}_-(\mathbf{q}_+)$. Missä se on määritelty? Ilmaise sitten kartan \mathbf{q}_+ (a)-ratkaisu $r \mapsto \underline{t}_+(r) = t_+^0$ kartassa \mathbf{q}_- ja osoita, että se on kartan \mathbf{q}_- (b)-ratkaisu. Osoita samoin, että kartan \mathbf{q}_+ (b)-ratkaisu on kartan \mathbf{q}_- (a)-ratkaisu. Miltä ratkaisut näyttävät kartassa \mathbf{q} ?

Jos nyt valo lähestyy tapahtumahorisonttia eli $r \rightarrow r_{\text{hor}}$, niin (a) tapauksessa koordinaattiaika

$$\underline{t}(r) = \underbrace{\underline{t}_\pm(r)}_{=t_\pm^0} \mp \frac{1}{c} \left(r + r_{\text{hor}} \ln \left| \frac{r}{r_{\text{hor}}} - 1 \right| \right) \rightarrow \pm\infty,$$

$$\frac{d\underline{t}(r)}{dr} = \mp \frac{1}{c} \frac{r}{r - r_{\text{hor}}},$$

ja (b) tapauksessa [!]

$$\underline{t}(r) = \pm \frac{2}{c} [r + r_{\text{hor}} \ln |r - r_{\text{hor}}|] + t_\pm^0 \mp \frac{1}{c} \left(r + r_{\text{hor}} \ln \left| \frac{r}{r_{\text{hor}}} - 1 \right| \right) \rightarrow \mp\infty,$$

$$\frac{d\underline{t}(r)}{dr} = \pm \frac{1}{c} \frac{r}{r - r_{\text{hor}}}.$$

Koska tapahtumahorisontin sisällä t -koordinaatin merkitys on epäselvä (se on paikanluonteinen), tarkastellaan seuraavassa tilannetta tapauksessa $r > r_{\text{hor}}$, missä t on koordinaattiaika. Fysikaalisesti mielekkäässä liikkeessä aika t tietenkin kasvaa, joten tapaukset $t \rightarrow -\infty$ ovat epäfysikaalisia. Edellisen harjoitustehtävän nojalla riittää tarkastella vain karttaa \mathbf{q}_+ .

- Kartassa \mathbf{q}_+ tapaus (a) kuvaa valoa, joka lähestyy tapahtumahorisonttia (radiaalisesti): $\underline{t}(r) \rightarrow \infty$ ja $d\underline{r}(t)/dt < 0$ (horisontin ulkopuolella). Koordinaattiaikaa t käyttävän havaitsijan mielestä valolla kestää äärettömän kauan ylittää tapahtumahorisontti. Kuitenkin valo ylittää sen \mathbf{q}_+ -kartassa ja päättyy tähden pinnalle $r = \mathcal{R}$, sillä käyrä $(\mathcal{R}, \infty) \ni r \mapsto \underline{\mathbf{q}}_+(r) = (t_+^0, r, \theta^0, \varphi^0) \in \mathbb{R}^4$ on hyvin määritelty.
- Kartassa \mathbf{q}_+ tapaus (b):ssä valo etäänny tapahtumahorisontista (sillä jos se lähestyisi, aika kulkisi väärinpäin): $d\underline{r}(t)/dt > 0$ (horisontin ulkopuolella). Huomaa, että horisontin sisäpuolella ($r < r_{\text{hor}}$) koordinaatti t on arvelluttava, joten käytetään t_+ -koordinaattia: $d\underline{t}_+(r)/dr < 0$ eli $d\underline{r}(t_+)/dt_+ < 0$.

2) Tarkastellaan sitten yleistä tapausta kartassa \mathbf{q}_+ . Määritellään funktio

$$f(r) := \frac{2}{c} \frac{r}{r - r_{\text{hor}}} = \frac{2c}{c^2 + 2\Phi(r)},$$

jolle pätee $f(r) > 0$, joss $r > r_{\text{hor}}$. Kaavan (16) nojalla, jos $dt_+(r)/dr < 0$, niin on oltava [!]

$$- [c^2 + 2\Phi(r)] \frac{dt_+(r)}{dr} + 2c \geq 0 \quad \text{eli} \quad \frac{1}{f(r)} \frac{dt_+(r)}{dr} \leq 1$$

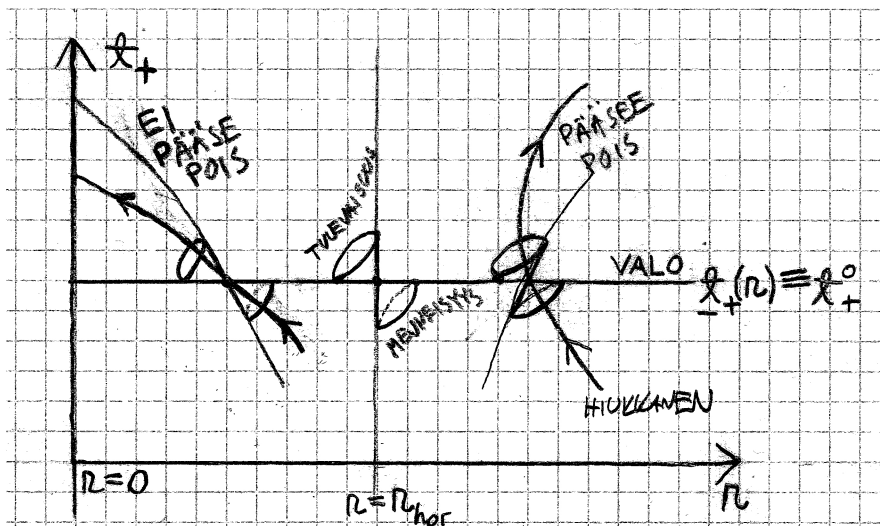
Samoin ehdosta $dt_+(r)/dr > 0$ seuraa, että

$$\frac{1}{f(r)} \frac{dt_+(r)}{dr} \geq 1.$$

Täten saadaan tärkeä tulos:

$$\frac{dt_+(r)}{dr} \in \begin{cases} (-\infty, 0] \cup [f(r), \infty), & r > r_{\text{hor}}, \\ [f(r), 0], & r < r_{\text{hor}}, \end{cases}$$

joten massallisille kappaleille $dr(t_+)/dt_+ < 0$ tapahtumahorisontin sisällä eli kaikki kappaleet (ja valo) ajautuvat tähden pinnalle mikäli ne joutuvat horisontin sisään! Tapahtumahorisontin ulkopuolelta toki päästään karkuun (esim. raketti).



Kuva 8: Liike mustan aukon ($\mathcal{R} \approx 0$) läheisyydessä ilmaistuna kartassa (r, t_+) .

Tapauksessa $\mathcal{R} < r_{\text{hor}}$ tutkimaamme taivaankappaletta sanotaan (*Schwarzschildin*) *mustaksi aukoksi*, sillä sen tapahtumahorisontin ulkopuolella oleva havaitsija ei voi saada mitään signaaleja tapahtumahorisontin sisäpuolelta. Nykytietämyksen valossa mustia aukkoja on olemassa. Ne eivät kuitenkaan ole ‘mustia’ siinä mielessä, että niihin syöksyvä aine säteilee kiihtyessään esim. Röntgen säteilyä (elektrodynamiikan mukaisesti; ks. luku 38). Toisaalta mustia aukkoja voidaan havaita niiden taivutessa valoa (gravitaatiolinssit) tai sitten havaitsemalla taivaankappaleita, jotka näyttävät kiertävän jonkun näkymättömän kohteen ympäri. Musta-aukon pitää olla riittävän pieni (\mathcal{R}) suhteessa sen massa \mathcal{M} . Esimerkiksi auringon massaisel-

le tähdelle $r_{\text{hor}} \approx 3$ km ja maan massaiselle $r_{\text{hor}} \approx 9$ mm. Eli jos maan saisi puristettua herneen kokoiseksi, siitä tulisi musta-aukko.

Kuten aiemmin todettiin, kappaleen pudotessa mustaan aukkoon ulkopuolisen havaitsijan koordinaattiaika t lähenee ääretöntä eli havaitsija ei ehdi koskaan näkemään sitä. Miltä putoava kappale sitten näyttää?

Olkoon havaitsija avaruusajan pisteessä $\mathbf{m} \in M$ tapahtumahorisontin ulkopuolella eli $r(\mathbf{m}) > r_{\text{hor}}$. Täten metriikka pisteessä \mathbf{m} on muotoa

$$g|_{\mathbf{m}} = - [c^2 + 2\Phi(r(\mathbf{m}))] dt|_{\mathbf{m}} \otimes dt|_{\mathbf{m}} + \dots = -c^2 d\tau|_{\mathbf{m}} \otimes d\tau|_{\mathbf{m}} + \dots,$$

missä $(c\tau, \dots)$ ovat pisteen \mathbf{m} Riemannin normaalikoordinaatit. Välittömästi nähdään, että havaitsijan ‘kellon käyntinopeus’ on

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \sqrt{\frac{c^2 + 2\Phi(r)}{c^2}} = \sqrt{\frac{r - r_{\text{hor}}}{r}}$$

Oletetaan, että havaitsija 1 (vastaavasti havaitsija 2) on kiinteällä etäisyydellä r_1 (vast. $r_2 > r_1$) tähden keskipisteestä (kumpikin tapahtumahorisontin ja tähden ulkopuolella). Havaitsija 1 lähettää kaksi signaalia (samaa reittiä pitkin) havaitsijalle 2. Havaitsijan 1 kello näyttää aikaeroa $\Delta\tau_1$ signaaleille. Tällöin aikaero koordinaattiajassa t on

$$\Delta t = \sqrt{\frac{r_1}{r_1 - r_{\text{hor}}}} \Delta\tau_1,$$

ja havaitsijan 2 mittaama aikaero

$$\Delta\tau_2 = \sqrt{\frac{r_2 - r_{\text{hor}}}{r_2}} \Delta t = \sqrt{\frac{r_2 - r_{\text{hor}}}{r_2}} \sqrt{\frac{r_1}{r_1 - r_{\text{hor}}}} \Delta\tau_1 = \sqrt{\frac{1 - r_{\text{hor}}/r_2}{1 - r_{\text{hor}}/r_1}} \Delta\tau_1 > \Delta\tau_1$$

eli *havaitsijan 2 oma kello käy nopeammin kuin havaitsijan 1 kello!* Jos havaitsija 1 lähettää valoa, jonka taajuus on $f_1 = 1/\Delta\tau_1$, havaitsijalle 2, niin havaitsijan 2 mittaaman valon taajuus on $f_2 = 1/\Delta\tau_2 < f_1$. Eli valon taajuus pienenee tai aallonpituus kasvaa eli valo punasiirtyy, kun siirrytään \mathcal{M} :stä pois päin. Tätä ilmiötä sanotaan *gravitaatiopunasiirtymäksi*, ja se on pystytty mittaamaan mm. maan pinnalla tehdyillä kokeilla. On mielenkiintoista, että pilvenpiirtäjän huipulla kello käy nopeammin kuin maan pinnalla! Ekvivalenssiperiaatteen nojalla myös kiihtyvän raketin etupäässä oleva kello käy nopeammin kuin peräpäässä oleva kello!⁷¹

Jos nyt havaitsija 1 putoaa mustaan aukkoon ja paikallaan pysyvä havaitsija 2 mittaa 1:n lähettämään vakiotaajuista valoa, niin mitä lähempänä 1 on tapahtumahorisonttia sitä ‘punaisempaa’ valo on 2:n mielestä. Havaitsija ikäänkuin ‘punastuu’ pudotessaan aukkoon.

⁷¹Myös valo punasiirtyy, kun se lähetetään perästä etuosaan, ja sinisiirtyy, jos se lähetetään nokasta peräpäähän.

Huomautus 10. Jos m -massainen kappale liikkuu Schwarzschildin metriikassa g , niin voidaan määritellä massametriikka mg ja kappaleen Lagrangen yhtälö

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

kartassa $\mathbf{q} = (t, r, \theta, \varphi)$. Erityisesti saadaan geodeesiyhtälö tapauksessa $\mathbf{Q} = (Q_t, Q_r, Q_\theta, Q_\varphi) \equiv \vec{0}$. Kirjoittamalla Lagrangen yhtälö auki saadaan (merkitsemällä $\Phi'(r) = d\Phi(r)/dr$ ja λ radan parametriksi) [!]

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left\{ -[c^2 + 2\Phi(r)] \dot{t}^2 + [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-1} \dot{r}^2 + r^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] \right\}, \\ m^{-1} Q_t &= -[c^2 + 2\Phi(r)] \ddot{t} - 2\Phi'(r) \dot{r} \dot{t}, \\ m^{-1} Q_r &= [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-1} \ddot{r} - \Phi'(r) [c^2 + 2\Phi(r)]^{-2} \dot{r}^2 + \Phi'(r) \dot{t}^2 - r [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2], \\ m^{-1} Q_\theta &= r^2 \ddot{\theta} + 2r \dot{r} \dot{\theta} - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \\ m^{-1} Q_\varphi &= \frac{d}{d\lambda} [r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}]. \end{aligned}$$

Näistä yhtälöistä pystytään kaivamaan esiin Newtonin gravitaatio ja sen suhteellisuusteoreettinen korjaustermi. Tämä tehdään kuitenkin myöhemmin. Huomaa, että tapauksessa $\mathbf{Q} \equiv 0$ ja $\mathcal{M} = 0$ (eli $\Phi \equiv 0$ ja $M = M^4$) yhtälöt redusoituvat janan yhtälöksi \mathbb{R}^3 :ssa pallokoordinaateissa esitettynä (janan parametrina $\lambda = t$):

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} - r [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2], \\ 0 &= r^2 \ddot{\theta} + 2r \dot{r} \dot{\theta} - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \\ 0 &= \frac{d}{dt} [r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}]. \end{aligned}$$

Esim. jos jana on xy -tasossa eli $\underline{\theta}(t) \equiv \pi/2$, niin

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, \\ 0 &= \frac{d}{dt} [r^2 \dot{\varphi}]. \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 26. Osoita, että yllä olevat yhtälöt ovat samat kuin esimerkeissä 28, ja että esimerkeissä annetut ratkaisut toteuttavat yhtälöt.

12 FYS: Hamiltonin periaate ja geodeesit

Tässä luvussa johdetaan Lagrangen yhtälö

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \vec{0}$$

Hamiltonin periaatteesta, joka on ns. *variaatioperiaate* (huomaa, että yllä $\tilde{\mathbf{Q}} \equiv \vec{0}$). Tarkastellaan aluksi yleisiä variaatioperiaatteita.

Luonto pyrkii monessa asiassa optimaalisuuteen ja tehokkuuteen. Esimerkiksi valo kulkee pisteestä A pisteeseen B reittiä, johon sillä kuluu mahdollisimman lyhyt aika (tämä on eräs variaatioperiaate). Jos näin oletetaan, niin on löydettävä reitti, millä valon kulkema aika minimoituu – myöhemmin osoitetaan (esimerkki 32), että kyseinen reitti tyhjiössä (affiinissa avaruudessa) on jana pisteestä A pisteeseen B . Variaatiolaskenta käsittelee tällaisia optimointitehtäviä.

Miten sitten valon kulkema reitti löydetään? Ajatellaan, että jokaiseen valon reittiin (käyrä) liitetään siihen kuuluva aika (reaaliluku). Tällaista kuvausta sanotaan *funktionaaliksi*. Tämän jälkeen oletetaan, että optimireitti on olemassa (vaikka sen muotoa ei vielä tässä vaiheessa tunneta) ja *varioidaan* eli muutetaan kyseistä reittiä hieman. Tästä on seurattava, että uuden reitin aika on suurempi kuin optimireitin. Tällä menetelmällä päädytään differentiaaliyhtälöryhmään, jonka ratkaisuna saadaan optimireitti. Lagrangen mekaniikassa varioitavana funktionaalina on vaikutusintegraali.

Tarkastellaan fysikaalista systeemiä, jonka konfiguraatioavaruus on n -ulotteinen monisto M . Oletetaan, että systeemin liikkeen generoi Lagrangen funktio $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ eli liike saadaan Lagrangen yhtälön

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \vec{0}$$

ratkaisuna, missä $\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on kartta ($U \subseteq M$). Nyt oletetaan, että L :n ei tarvitse olla muotoa $L = T - V$.⁷² Lisäksi liikkeiden parametrina on λ . Johdetaan seuraavaksi Lagrangen yhtälö variaatioperiaatteesta.

Olkoon \mathcal{F} (sileitten) käyrien $\alpha : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow M$ joukko, missä $\lambda_0 < \lambda_1$. Määritellään funktionaali, ns. *vaikutusintegraali* tai *vaikutusfunktionaali*

$$I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto I[\alpha] := \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} L(\dot{\alpha}(\lambda)) d\lambda.$$

⁷²Voidaan olettaa, että M :llä ei ole metriikkaa, ja että L on vain joku sileä funktio. Jos $L = T - V$, niin sanotaan, että *Lagrangen systeemi* (M, L) on *luonnollinen*.

Valitaan kaksi moniston M pistettä \mathbf{m}_0 ja \mathbf{m}_1 ($\neq \mathbf{m}_0$) ja rajoitetaan I joukkoon

$$\mathcal{F}_0 := \{\alpha \in \mathcal{F} \mid \alpha(\lambda_0) = \mathbf{m}_0, \alpha(\lambda_1) = \mathbf{m}_1\}$$

eli pidetään käyrien päätepisteet kiinteinä. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että on olemassa M :n kartta $\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ siten, että $\mathbf{m}_0 \in U$ ja $\mathbf{m}_1 \in U$, ja ilmaistaan kaikki funktiot kartassa \mathbf{q} eli esim. $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Oletetaan lisäksi, että on olemassa käyrä⁷³ $\alpha \in \mathcal{F}_0$, joka joko *minimoi* tai *maksimoi* I :n eli α on I :n *ekstremaali* (ääriarvokäyrä).⁷⁴ Merkitään $\underline{\mathbf{q}}(\lambda) := (\mathbf{q} \circ \alpha)(\lambda)$ ja varioidaan ekstremaalia $\underline{\mathbf{q}}$ seuraavasti:

Kiinnitetään seuraavan laskun ajaksi funktio $\underline{\mathbf{h}} : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolle $\underline{\mathbf{h}}(\lambda_0) = \vec{0} = \underline{\mathbf{h}}(\lambda_1)$. Määritellään käyräperhe $\{\alpha_\epsilon \mid \epsilon \in (-\delta, \delta)\}$ kaavalla $\mathbf{q} \circ \alpha_\epsilon := \underline{\mathbf{q}} + \epsilon \underline{\mathbf{h}}$, missä $\delta > 0$ on riittävän pieni.⁷⁵ Huomaa, että $\alpha_\epsilon(\lambda_0) = \mathbf{m}_0$, $\alpha_\epsilon(\lambda_1) = \mathbf{m}_1$ ja $\alpha_0 = \alpha$. Merkitään $I(\epsilon) := I[\alpha_\epsilon]$. Välttämätön ehto sille, että α on I :n ekstremaali on se, että 0 on funktion $\mathbb{R} \supseteq (-\delta, \delta) \ni \epsilon \mapsto I(\epsilon) \in \mathbb{R}$ minimi- tai maksimipiste. Tunnetusti tällöin

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = 0,$$

eli käyttämällä ketjusääntöä ja osittaisintegrointia

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left. \frac{\partial L(\dot{\alpha}_\epsilon(\lambda))}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sum_{i=1}^n \left[\left. \frac{\partial L}{\partial q^i} \right|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \dot{\underline{\mathbf{q}}}(\lambda))} \underline{h}^i(\lambda) + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \dot{\underline{\mathbf{q}}}(\lambda))} \dot{\underline{h}}^i(\lambda) \right] d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left[\left. \frac{\partial L}{\partial q^i} \right|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \dot{\underline{\mathbf{q}}}(\lambda))} - \frac{d}{d\lambda} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \dot{\underline{\mathbf{q}}}(\lambda))} \right] \underline{h}^i(\lambda) d\lambda + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \dot{\underline{\mathbf{q}}}(\lambda))} \dot{\underline{h}}^i(\lambda) d\lambda}_{(*)} = 0. \end{aligned}$$

Ehdoista $\underline{h}^i(\lambda_0) = 0 = \underline{h}^i(\lambda_1)$ seuraa, että sijoitusosa (*) on nolla. Koska funktio $\underline{\mathbf{h}}$ on muuten mielivaltainen, niin ekstremaalin $\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \circ \alpha$ on oltava Lagrangen yhtälöitten

$$\frac{d}{d\lambda} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \dot{\underline{\mathbf{q}}}(\lambda))} - \left. \frac{\partial L}{\partial q^i} \right|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \dot{\underline{\mathbf{q}}}(\lambda))} = 0$$

ratkaisu.⁷⁶ Edellä olevat laskut voidaan tapauksessa $L = T - V$ tiivistää seuraavaksi *Hamiltonin* ('pienimmän' vaikutuksen) periaatteeksi:

⁷³Lisäksi $\alpha(\lambda) \in U$ kaikilla $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$. Käytetään myös samaa merkintää I funktionaalien I rajoittumalle joukkoon \mathcal{F}_0 .

⁷⁴Siis joko $I[\alpha] \leq I[\alpha']$ kaikilla $\alpha' \in \mathcal{F}_0$ tai $I[\alpha] \geq I[\alpha']$ kaikilla $\alpha' \in \mathcal{F}_0$.

⁷⁵Eli jokaisella $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ pätee $\underline{\mathbf{q}}(\lambda) + \epsilon \underline{\mathbf{h}}(\lambda) \in \mathbf{q}(U)$ kaikilla $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

⁷⁶Jos jatkuvalle funktiolle $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on $\int_a^b f(t)h(t)dt = 0$ kaikilla jatkuvilla funktioilla $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, joille $h(a) = 0 = h(b)$, niin $f = 0$. [!]

Mekaanisen systeemin liike potentiaalikentässä V on vaikutusintegraalin $I = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$ ekstremaali.

Hamiltonin periaatetta sanotaan pienimmän vaikutuksen periaatteeksi, sillä usein Lagrangen yhtälöitten ratkaisu minimoi vaikutusintegraalin. Näin ei kuitenkaan aina ole.

Esimerkki 32. Tarkastellaan valon sädettä \mathbb{R}^3 :ssa. Oletetaan, että valon vauhti pisteessä $\mathbf{x} = (x, y, z)$ on $v(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x})^{-1}c \in (0, c]$, missä $n(\mathbf{x}) \geq 1$ on väliaineen *taitekerroin* pisteessä \mathbf{x} . Jos piste \mathbf{x} on tyhjiössä, niin tietenkin $n(\mathbf{x}) = 1$. Geometrisessa optiikassa tärkeä *Fermat'n (pienimmän ajan) periaate* sanoo, että kahden pisteen välillä valo valitsee sellaisen kulkureitin (mahdollisten joukosta), että pisteestä toiseen kuljettuun matkaan käytetty aika saa minimiarvon.⁷⁷ Yleisyyttä loukkamatta voidaan valita pisteiksi origo $\vec{0}$ ja $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^3$. Valon liike on kuvaus $\underline{\mathbf{x}} : [0, \mathfrak{t}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ päätepiste-ehdoilla $\underline{\mathbf{x}}(0) = \vec{0}$ ja $\underline{\mathbf{x}}(\mathfrak{t}) = \mathbf{x}_1$. Valon reittiin $\underline{\mathbf{x}}$ käyttämä aika on

$$\mathfrak{t} = \int_0^{\mathfrak{t}} dt = \int_0^{\mathfrak{t}} \frac{1}{v(\underline{\mathbf{x}}(t))} dt = \frac{1}{c} \int_0^{s(\mathfrak{t})} n(\underline{\mathbf{x}}(t(s))) ds, \quad (18)$$

missä $s(t)$ on valon kulkema matka hetkellä $t \in [0, \mathfrak{t}]$ ja $s \mapsto t(s)$ matkan käänteiskuvaus. Kun tunnetaan taitekertoimen arvot eri pisteissä, voidaan etsiä reitti $\underline{\mathbf{x}}$, joka minimoi kulkuajan. Erityisesti tyhjiössä $n \equiv 1$, joten *valo kulkee tyhjiössä lyhintä mahdollista reittiä*. Tarkastellaan ensiksi tätä erikoistapausta eli määrätään kahden pisteen välinen lyhin reitti \mathbb{R}^3 :ssa.

Olkoon $\underline{\mathbf{y}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ pisteitä $\vec{0}$ ja \mathbf{x}_1 yhdistävä käyrä, jolle siis $\underline{\mathbf{y}}(0) = \vec{0}$ ja $\underline{\mathbf{y}}(1) = \mathbf{x}_1$. Käyrän $\underline{\mathbf{y}}$ pituus on⁷⁸

$$\ell[\underline{\mathbf{y}}] := \int_0^1 |\dot{\underline{\mathbf{y}}}(\lambda)| d\lambda.$$

Pituusfunktioaalnin $\underline{\mathbf{y}} \mapsto \ell[\underline{\mathbf{y}}]$ ekstremaalin on totettava Lagrangen yhtälöt Lagrangen funktiolle $L(\dot{\underline{\mathbf{y}}}) = |\dot{\underline{\mathbf{y}}}| = \sqrt{(\dot{y}^1)^2 + (\dot{y}^2)^2 + (\dot{y}^3)^2}$ eli yhtälöt

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial |\dot{\underline{\mathbf{y}}}|}{\partial \dot{y}^i} - \frac{\partial |\dot{\underline{\mathbf{y}}}|}{\partial y^i} = 0.$$

Koska $\partial |\dot{\underline{\mathbf{y}}}| / \partial y^i = 0$ ja $\partial |\dot{\underline{\mathbf{y}}}| / \partial \dot{y}^i = \dot{y}^i / |\dot{\underline{\mathbf{y}}}|$, niin ekstremaalikäyrälle $\underline{\mathbf{y}}$ funktiot $\lambda \mapsto \dot{y}^i(\lambda) / |\dot{\underline{\mathbf{y}}}(\lambda)|$ ovat vakioita $C^i \in \mathbb{R}$ eli

$$\dot{y}^i(\lambda) = C^i |\dot{\underline{\mathbf{y}}}(\lambda)| \quad \implies \quad |\dot{\underline{\mathbf{y}}}(\lambda)| = \underbrace{\sqrt{(C^1)^2 + (C^2)^2 + (C^3)^2}}_{=1} |\dot{\underline{\mathbf{y}}}(\lambda)|.$$

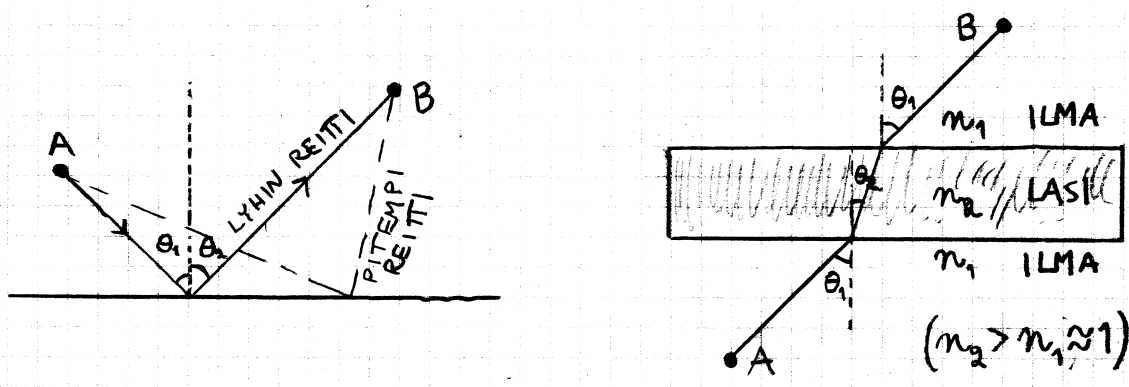
⁷⁷Tai maksimiarvon laajennetun Fermat'n periaatteen mukaan.

⁷⁸Mikäli käyrän parametrisointi on 'riittävän siisti' eli käyrä ei esim. kulje uudestaan itseään pitkin (ajattele esim. pisteitä $(1, 0)$ ja $(-1, 0)$ yhdistävää käyrää $[0, 1] \ni \lambda \rightarrow (\cos 3\pi\lambda, \sin 3\pi\lambda) \in \mathbb{R}^2$).

Olkoon $f'(\lambda) := |\dot{\mathbf{y}}(\lambda)| \geq 0$, joten $\dot{\mathbf{y}}(\lambda) = f'(\lambda)\mathbf{C}$, missä $\mathbf{C} = (C^1, C^2, C^3)$ on yksikkövektori. Integroimalla saadaan

$$\mathbf{y}(\lambda) = \int_0^\lambda \dot{\mathbf{y}}(\tilde{\lambda})d\tilde{\lambda} = f(\lambda)\mathbf{C}, \quad f(\lambda) := \int_0^\lambda f'(\tilde{\lambda})d\tilde{\lambda}.$$

Alkuehdoista nähdään, että $\mathbf{C} = \mathbf{x}_1/|\mathbf{x}_1|$ ja $f(0) = 0$, $f(1) = |\mathbf{x}_1|$. Eli käyrä on pisteitä $\vec{0}$ ja \mathbf{x}_1 yhdistävä jana ja täten valo kulkee tyhjiössä suoraviivaisesti (ja tasaisesti, koska taitekerroin on vakio). Fermat'n periaatteesta voidaan johtaa myös muita sädeoptiikan perustuloksia: [!]

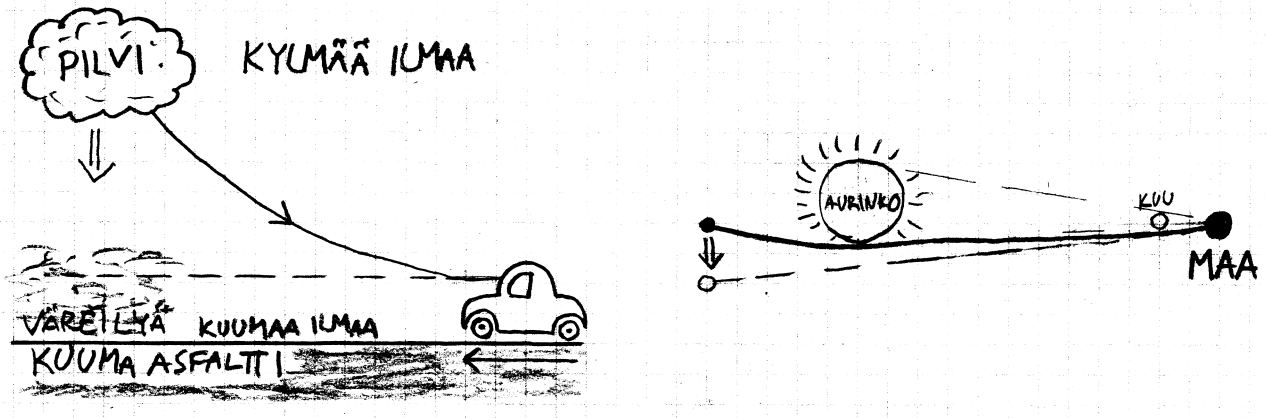


Kuva 9: Vasemmalla valo lähtee pisteestä A ja saapuu pisteeseen B heijastuen peilistä. Fermat'n periaatteesta seuraa, että tulokulma θ_1 on yhtä suuri kuin heijastuskulma θ_2 . Tämä on optiikan *heijastuslaki*. Oikealla valo kulkee lasilevyn läpi (jossa valo kulkee hitaammin kuin ilmassa). Fermat'n periaatteesta voidaan helposti johtaa *Snellin laki*: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, missä n_1 (vastaavasti n_2) on ilman (vast. lasin) taitekerroin ja θ_1 sekä θ_2 ovat kuvassa näkyvät kulmat.

Fermat'n periaatteesta seuraa myös tuttu luonnonilmiö: Ajettaessa autolla hellekelillä kuumalla asfaltilla näyttää väreilevän. Tässä on kyseessä optinen illuusio. Nimittäin ilman taitekerroin on eri kuumalle ja kylmälle ilmalle, joten valo ei etene suoraviivaisesti vaan taipuu. Havaitseja tulkitsee kuitenkin valon etenevän suoraviivaisesti, joten 'väreily' on taivaan kuva, joka on havaitsijan mielestä siirtynyt asfaltin pintaan.

Hieman analoginen ilmiö suhteellisuusteoriassa on myös valon taipuminen massiivisen kohteen läheisyydessä (metriikka ei ole η). Tämä voidaan havaita auringonpimennyksen⁷⁹ aikaan, jolloin auringon 'takaa' näkyy kohteita.

⁷⁹Valon taipuminen tietenkin tapahtuu myös muulloinkin, mutta auringon kirkkaus estää havitsemasta sen lähellä olevia kohteita.



Kuva 10: Valon taipuminen klassisessa sädeoptiikassa ja suhteellisuusteoriassa.

Kuten tunnettua (riittävän siististi parametrisoidun) käyrän $\underline{x} : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ pituus on

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} \right]^2} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g|_{\underline{x}(\lambda)}(\dot{\underline{x}}(\lambda), \dot{\underline{x}}(\lambda))} d\lambda,$$

missä $g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$ on euklidinen metriikka ja $\dot{\underline{x}}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(\lambda) \partial / \partial x^i|_{\underline{x}(\lambda)}$ käyrän ‘nopeus’. Edellistä esimerkkiä mukaillen nähdään heti, että kahden \mathbb{R}^n :n pisteen välinen lyhin reitti on jana. Välittömästi nähdään myös käyrän pituuden yleistys Riemannin monistolle (M, g) : Käyrän $\alpha : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ pituuden määritellään olevan

$$\ell[\alpha] := \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g|_{\alpha(\lambda)}(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda))} d\lambda \geq 0.$$

Huomaa, että $\ell[\alpha]$ ei riipu käyrän parametrisoinnista λ kunhan se vaan on riittävän siisti!

Esimerkki 33. Palataan vielä sädeoptiikkaan. Määritellään ‘optinen metriikka’

$$g^{\text{opt}} := n(x, y, z)^2 (dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz).$$

Nyt valonsäteen $\underline{x} : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ‘optinen pituus’ on

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g^{\text{opt}}|_{\underline{x}(\lambda)}(\dot{\underline{x}}(\lambda), \dot{\underline{x}}(\lambda))} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} n(\underline{x}(\lambda)) \sqrt{\dot{x}(\lambda)^2 + \dot{y}(\lambda)^2 + \dot{z}(\lambda)^2} d\lambda$$

eli valon reittiin \underline{x} käyttämä aika (kertaa c) kaavan (18) nojalla. Fermat’n (laajennetun) periaatteen mukaan siis valo kulkee reittiä, jonka optinen pituus on mahdollisimman pieni tai suuri.

Esimerkki 34. Tarkastellaan R -säteisen pallon pinnalla $S_R^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = R\}$ kulkevan \mathbb{R}^3 :n käyrän $\underline{x}(\lambda) = (\underline{x}(t), \underline{y}(t), \underline{z}(t))$ pituutta. Siirrytään pallonkoordinaatteihin (r, θ, φ) ja

ilmaistaan käyrä niiden avulla:

$$\underline{x}(\lambda) = R \sin \underline{\theta}(\lambda) \cos \underline{\varphi}(\lambda), \quad \underline{y}(\lambda) = R \sin \underline{\theta}(\lambda) \sin \underline{\varphi}(\lambda), \quad \underline{z}(\lambda) = R \cos \underline{\theta}(\lambda).$$

Täten [!]

$$\dot{\underline{x}}(\lambda)^2 + \dot{\underline{y}}(\lambda)^2 + \dot{\underline{z}}(\lambda)^2 = R^2 \left[\dot{\underline{\theta}}(\lambda)^2 + \sin^2 \underline{\theta}(\lambda) \dot{\underline{\varphi}}(\lambda)^2 \right] = g^{\mathbb{S}_R^2}|_{\alpha(\lambda)}(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda)),$$

missä

$$g^{\mathbb{S}_R^2} := R^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi]$$

on (luonnollinen euklidiselta avaruudelta \mathbb{R}^3 peritty) *pallo* pinnan metriikka ja α on käyrä $\underline{\mathbf{x}}$ ajateltuna käyränä monistolla \mathbb{S}_R^2 sekä $\dot{\alpha}(\lambda) = \dot{\underline{\theta}}(\lambda)\partial/\partial\theta|_{\alpha(\lambda)} + \dot{\underline{\varphi}}(\lambda)\partial/\partial\varphi|_{\alpha(\lambda)} \in T(\mathbb{S}_R^2)_{\alpha(\lambda)}$.

Yllä laskettu tulos voidaan heti yleistää yleiselle parametrisoidulle pinnalle $\mathbf{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ (palauta mieleen esimerkki 19). Pinnan (luonnollinen euklidiselta avaruudelta \mathbb{R}^3 peritty) metriikka on

$$\begin{aligned} df \otimes df + dg \otimes dg + dh \otimes dh &= \left[\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right] \otimes \left[\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right] + \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \right] \otimes \left[\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \right] + \left[\frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv \right] \otimes \left[\frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv \right] \\ &= (f_u^2 + g_u^2 + h_u^2) du \otimes du + (f_u f_v + g_u g_v + h_u h_v) (du \otimes dv + dv \otimes du) + \\ &+ (f_v^2 + g_v^2 + h_v^2) dv \otimes dv. \end{aligned}$$

Miltä näyttää esimerkiksi donitsin pinnan \mathbb{T}^2 metriikka ja \mathbb{T}^2 :llä kulkevan käyrän pituus? Entä muotoa $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, h(x, y))$ olevan pinnan metriikka? [!]

12.1 Geodeesiyhtälö

Olkoon taas (M, g) Riemannin monisto ja \mathbf{q} sen joku kartta sekä $T(\mathbf{m}, v) = \frac{1}{2}g|_{\mathbf{m}}(v, v)$ eli $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^i\dot{q}^j$. Täten (riittävän siististi parametrisoidun) käyrän $\alpha : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ pituus

$$\ell[\alpha] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g|_{\alpha(\lambda)}(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda))} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{2T(\dot{\alpha}(\lambda))} d\lambda.$$

Pidetään α samana seuraavien laskujen ajan ja siirrytään 'käyrän α pituusparametriin' ℓ , joka määritellään kaavalla

$$\ell(\lambda) := \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{2T(\dot{\alpha}(\tilde{\lambda}))} d\tilde{\lambda}.$$

Jos $T(\dot{\alpha}(\lambda)) > 0$ kaikilla $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ (kuten oletetaan, sillä $T(\dot{\alpha}(\lambda)) = 0 \implies \dot{\alpha}(\lambda) = 0$), niin $\lambda \mapsto \ell(\lambda)$ kääntyy ja voidaan parametrizoida käyrä parametrilla ℓ . Lisäksi saadaan $\ell[\alpha] = \int_0^{\ell(\lambda_1)} d\ell = \ell(\lambda_1)$ ja

$$2 \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} T(\dot{\alpha}(\lambda)) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{2T(\dot{\alpha}(\lambda))} \sqrt{2T(\dot{\alpha}(\lambda))} d\lambda = \int_0^{\ell[\alpha]} \sqrt{2T(\dot{\alpha}(\ell))} d\ell$$

joten ei ole yllättävää, että vapaa kappale (jolle $L = T$) kulkee geodeesia pitkin, jolle siis ℓ saa eksteemiarvon. Itseasiassa Lagrangen yhtälöt Lagrangen funktioille T ja $\sqrt{2T}$ ovat **[!]**

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = g_{ij} \ddot{q}^j + [jk, i] \dot{q}^j \dot{q}^k \iff \ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = 0, \\ 0 &= \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \sqrt{2T}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \sqrt{2T}}{\partial q^i} = \frac{1}{\sqrt{2T}} \left[\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} \right] + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{2T}} \end{aligned} \quad (19)$$

eli alempi yhtälö redusoituu muotoon

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \sqrt{2T} \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{2T}} = g_{ij} \dot{q}^j \frac{d \ln \sqrt{2T}}{d\lambda}. \quad (20)$$

Valitaan sitten α :n parametri $\lambda = \sigma$ siten, että $T(\dot{\alpha}(\sigma)) = T_\alpha \neq 0$ kaikilla $\sigma \in [\sigma(\lambda_0), \sigma(\lambda_1)]$ (tällainen parametri⁸⁰ selvästikin on $\sigma = \ell$). Tällöin yhtälöt (19) ja (20) ovat samat. Seuraavasta lemmasta seuraa, että jos (19) pätee, niin $dT/d\lambda = 0$, eli jos α toteuttaa yhtälön (19), niin se toteuttaa myös yhtälön (20). Vapaa hiukkanen liikkuu siis aina geodeesia pitkin.

Lemma 2. *Olkoon L funktio $TM \rightarrow \mathbb{R}$. Jos kaikilla $i = 1, 2, \dots, n$,*

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

niin $d\mathcal{H}/d\lambda = 0$, missä

$$\mathcal{H} := \sum_{i=1}^n \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L.$$

Erityisesti, jos $L = T - V$, niin $\mathcal{H} = T + V$ (missä V on kuvaus $M \rightarrow \mathbb{R}$).

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa lyhyellä laskulla:

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{d\dot{q}^i}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{dL}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_{i=1}^n \dot{q}^i \left[\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right]$$

on 0 oletuksen nojalla. Jos $L = T - V = \frac{1}{2} g_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k - V$, niin $\dot{q}^i \partial L / \partial \dot{q}^i = \dot{q}^i \partial T / \partial \dot{q}^i = \dot{q}^i g_{ij} \dot{q}^j = 2T$ ja täten saadaan $\mathcal{H} = 2T - (T - V) = T + V$. \square

⁸⁰Myös universaaliaika t klassisessa mekaniikassa käy parametriksi σ , sillä vapaan hiukkasen kineettinen energia T on tunnetusti (liike)vakio (tämä nähdään myös heti lemmasta, kun $\lambda = t$ ja $L = T$).

Olkoon sitten $\sigma = \sigma(\lambda)$ käyrän $\alpha(\lambda)$ uusi parametri.⁸¹ Nyt (lyhyesti merkittynä)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{q}^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\underline{q}^j}{d\lambda} \frac{d\underline{q}^k}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{d\underline{q}^i}{d\lambda} \frac{d\underline{q}^j}{d\sigma} \right] + \Gamma_{jk}^i \frac{d\underline{q}^j}{d\lambda} \frac{d\underline{q}^k}{d\sigma} \frac{d\underline{q}^l}{d\lambda} \frac{d\underline{q}^m}{d\sigma} \\ &= \frac{d^2 \underline{q}^i}{d\lambda^2} \frac{d\underline{q}^j}{d\sigma} + \frac{d\underline{q}^j}{d\lambda} \underbrace{\frac{d\underline{q}^k}{d\lambda} \frac{d\underline{q}^l}{d\sigma}}_{= d/d\lambda} \frac{d\underline{q}^m}{d\sigma} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\underline{q}^j}{d\sigma} \frac{d\underline{q}^k}{d\sigma} \left[\frac{d\underline{q}^l}{d\lambda} \right]^2 \\ &= \left[\frac{d^2 \underline{q}^i}{d\sigma^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\underline{q}^j}{d\sigma} \frac{d\underline{q}^k}{d\sigma} \right] \left[\frac{d\underline{q}^l}{d\lambda} \right]^2 + \frac{d^2 \underline{q}^i}{d\lambda^2} \frac{d\underline{q}^j}{d\sigma}, \end{aligned}$$

josta nähdään välittömästi kaksi seikkaa:

- Jos $\alpha(\lambda)$ toteuttaa yhtälön (20) eli

$$\frac{d^2 \underline{q}^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\underline{q}^j}{d\lambda} \frac{d\underline{q}^k}{d\lambda} = \frac{d\underline{q}^i}{d\lambda} \frac{d \ln \sqrt{2T}}{d\lambda}$$

niin valitsemalla $\sigma = \ell$ saadaan (19)

$$\frac{d^2 \underline{q}^i}{d\ell^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\underline{q}^j}{d\ell} \frac{d\underline{q}^k}{d\ell} = 0.$$

Tämä nähdään helposti, sillä $d\ell/d\lambda = \sqrt{2T}$ ja

$$\frac{d^2 \ell}{d\lambda^2} \frac{d\underline{q}^i}{d\ell} = \frac{d}{d\lambda} \frac{d\ell}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\ell} \frac{d\underline{q}^i}{d\lambda} = \frac{d\sqrt{2T}}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{d\underline{q}^i}{d\lambda} = \frac{d\underline{q}^i}{d\lambda} \frac{d \ln \sqrt{2T}}{d\lambda}.$$

- Oletetaan sitten, että sekä $\alpha(\lambda)$ että (uudelleenparametrisoitu) $\alpha(\sigma) := \alpha(\lambda(\sigma))$ toteuttavat kumpikin geodeesiyhtälön (19) eli

$$\frac{d^2 \underline{q}^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\underline{q}^j}{d\lambda} \frac{d\underline{q}^k}{d\lambda} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{d^2 \underline{q}^i}{d\sigma^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d\underline{q}^j}{d\sigma} \frac{d\underline{q}^k}{d\sigma} = 0,$$

joten⁸² on oltava $d^2\sigma/d\lambda^2 = 0$ eli $\sigma(\lambda) = a\lambda + b$ eli $\lambda(\sigma) = a^{-1}\sigma - a^{-1}b$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Nyt siis parametrin σ ja λ ovat toisistaan 1-ulotteisen affiinin bijektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ päässä. Täten geodeesiyhtälön (19) toteuttavan käyrän α parametria sanotaan geodeesin *affiniksi parametrikksi*.

Harjoitustehtävä 27. a) Laske pallon pinnan metriikan $g^{\mathbb{S}^2}_{\mathbb{R}}$ Christoffelin symbolit ja geodeesiyhtälö. Osoita, että kahden pallon pinnan pisteen välinen lyhin reitti (pallon pinnalla) kulkee jonkun isoympyrän kaarta pitkin. Isoympyrä on suurin mahdollinen ympyrä joka voidaan piirtää pallon pinnalle.

⁸¹On oltava $d\sigma(\lambda)/d\lambda \neq 0$ kaikilla λ :oilla, jotta kuvaus kääntyisi ja voitaisiin määrittellä $\alpha(\sigma) := \alpha(\lambda(\sigma))$.

⁸²Jos $d\underline{q}^i/d\sigma \neq 0$ eli geodeesi ei ole vakio.

Vinkki: yleisyyttä loukkaamatta (miksi?) koordinaatit voidaan valita siten, että tarkasteltavat pisteet ovat vaikka xy -tasossa.

b) *Pallon pinnan geometria⁸³ poikkeaa tasogeometriasta. Kun valitaan kolme pistettä pallon pinnalta ja yhdistetään ne geodeeseilla, saadaan ns. pallokolmio. Osoita piirtelemällä kuvia (ei tarvitse laskea), että pallokolmion kulmien summa on aina suurempi kuin 180° . Jos kolmio on hyvin pieni, kulmien summa lähenee 180 astetta (kuten tasogeometriassa). Osoita myös, että kaksi (jossain pisteessä) yhdensuuntaista (riittävän pitkää) geodeesia väistämättä leikkaavat.*

Tarkastellaan lopuksi vielä suhteellisuusteoriaa. Nyt avaruusaika on Lorentzin monisto (M, g) , missä metriikka g ei ole positiividefiniitti. Eli käyrän pituutta $\ell[\alpha]$ ei kannata yleisesti määritellä, koska $g|_{\alpha(\lambda)}(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda))$ voi olla negatiivinen, joten siitä ‘ei voi’ ottaa neliöjuurta. Toisaalta käyrän pituudella ei nyt ole juurikaan fysikaalista merkitystä, sillä neljäs ulottuvuus on aika.⁸⁴ Sen sijaan ajanluonteisen käyrän $\alpha : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow M$ ominaisaika

$$\tau[\alpha] = \frac{1}{c} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{-g|_{\alpha(\lambda)}(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda))} d\lambda = \frac{1}{c} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{-2T(\dot{\alpha}(\lambda))} d\lambda$$

on järkevä käsite ja voidaan kysyä mikä käyrä ekstremoi kahden M :n pisteen \mathbf{m}_0 ja \mathbf{m}_1 välisen ‘ominaisajan’. Tilanne on (lähes) sama kuin aiemmissakin tarkasteluissa paitsi:

- Pisteet \mathbf{m}_0 ja \mathbf{m}_1 pitää olla *ajanluonteisesti erotetut* eli ne pitää pystyä yhdistämään jollain *ajanluonteisella* käyrällä (muutoinhan koko hommassa ei ole mitään järkeä).
- Nyt ℓ :n tilalla on τ ja (niiden määritelmässä) $L = \sqrt{2T}$ on korvattu Lagrangen funktiolla $L = \sqrt{-2T}$ (ei aiheuttane päänvaivaa).
- Vaikutusintegraalin I määrittelyaluetta \mathcal{F}_0 pitää pienentää siten, että se sisältää vain ajanluonteisia käyriä, koska muutoin $-2T$ voi olla negatiivinen (tämä ei vaikuta laskuihin mitenkään).
- Ajanluonteiselle käyrälle $\sqrt{-2T(\dot{\alpha}(\tau))} \equiv c$, joten nyt τ on ‘geodeesin’ affiini parametri. Muut affiinit parametrit ovat muotoa $a\tau + b$, $a \neq 0$.
- Yleistetty liike-energia $T(\dot{\alpha}(\tau)) \equiv -c^2/2$ ei nyt kuvaa (relativistista) energiaa (joka on olennaisesti neli-impulssin nollas komponentti Riemannin normaalikoordinaatistossa).

⁸³Tämä geometria on erittäin tärkeä mm. *pallotähtitieteessä*, joka tutkii taivaankappaleitten asemia ja näennäistä liikettä taivaalla (eli taivaanpallolla). Pallogeometria voidaan yleistää myös useampiulotteisille ‘paloille’ $\mathbb{S}_R^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\mathbf{x}| = R\}$, joilla voidaan kuvata vaikka suljettua ja rajoitettua avaruusaikaa.

⁸⁴Ehkäpä paikanluonteisen käyrän pituus on järkevä käsite mikäli käyrän aikakoordinaatti $\underline{x}^0(\lambda)$ pysyy vakiona jonkun havaitsijan kartassa. Tällöin käyrän pituus redusoituu 3-ulotteisen avaruuden käyrän pituudeksi.

Vaikka metriikka g kerrottaisiin hiukkasen massalla m , niin massametriikassa mg saataisiin $T(\dot{\alpha}(\tau)) \equiv -\frac{1}{2}mc^2$ (eli olennaisesti lepoenergia).

Silmäilemällä aiemmat tulokset läpi nähdään heti, että vapaa massallinen hiukkanen kulkee ‘geodeesia’ pitkin eli ajanluonteista käyrää pitkin, joka ekstremoi ominaisajan. [!] Nyt itseasiassa käyrä on sellainen, että ominaisaika (vaikutusintegraali) saa sillä *maksimiarvonsa*. Valolle ei ole ominaisaikaa mitä varioida, koska $T(\dot{\alpha}(\lambda)) \equiv 0$, joten parasta käyttää vain yhtälöä (19).

13 FYS: Side-ehdot Lagrangen mekaniikassa

Aikaisemmin oletettiin, että hiukkaset voivat liikkua \mathbb{E}^3 :ssa mielivaltaisesti kunhan vaan kaksi hiukkasta eivät ole samalla hetkellä samassa avaruuden pisteessä. Kuitenkin saattaa olla, että hiukkaset on rajoitettu liikkumaan esimerkiksi pinnalla (esim. maapallon pinta) eli ‘todellisen’ konfiguraatioavaruuden dimensio on pienempi kuin $3k$, missä k on hiukkasten lukumäärä.

Esimerkiksi tasoheilurin konfiguraatioavaruus on 1-ulotteinen, sillä liikkeen kuvaamiseen tarvitaan vain heilurin varren ja pystysuoran suunnan välinen kulma. Nyt siis tasossa liikkuvan hiukkasen liikettä rajoittaa *side-ehto* (heilurin varren pituus on vakio). Toinen esimerkki 1-ulotteisesta liikkeestä on hiukkasen liike käyrällä (esimerkiksi helmi, jonka läpi on porattu reikä, ja joka liikkuu rautalangasta väännettyä käyrää pitkin).

Kaksiulotteisen liikkeen muodostaa esimerkiksi planeetta auringon keskeisvoimakentässä tai hiukkanen, joka liikkuu pinnalla (biljardipallo pöydällä). Vapaan hiukkasen liike avaruudessa on 3-ulotteista, mutta 3-ulotteista liikettä on myös säiliön sisälle liikkumaan rajoitetun hiukkasen liike. Neliulotteisen konfiguraatioavaruuden muodostaa esimerkiksi kaksi (pistemäistä) biljardipalloa pöydällä ja niin edelleen. Näissä yllämainituissa tapauksissa side-ehdot ovat luonteeltaan erityyppisiä.

13.1 Hiukkasjoukon sidottu liike

Tarkastellaan k :n hiukkasen liikettä $3k$ -ulotteisessa konfiguraatioavaruudessa

$$\mathbf{X}_k = \{ \mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k) \in (\mathbb{R}^3)^k \mid \mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j \forall i \neq j \}.$$

Ajatellaan, että hiukkaset on sidottu liikkumaan vaikka pallon \mathbb{S}^2 pinnalle. Täten systeemin konfiguraatioavaruus on joukko

$$\{ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k) \in \mathbf{X}_k \mid \mathbf{r}_i \in \mathbb{S}^2 \forall i \} \subset \mathbf{X}_k.$$

Toisaalta voidaan sanoa, että hiukkaset liikkuvat avaruudessa \mathbf{X}_k side-ehtojen $|\mathbf{r}_i| = 1$ alaisena.

Kun merkitään $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ voidaan side-ehdot kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} f^1(\mathbf{x}) &:= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 1 = 0, \\ f^2(\mathbf{x}) &:= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 1 = 0, \\ &\vdots \\ f^k(\mathbf{x}) &:= x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Toisena esimerkkinä voidaan ajatella ‘jäykkää’ hiukkasjoukkoa (hiukkasten etäisyydet toisiinsa nähden vakioita), jossa side-ehtoina ovat

$$f^{ij}(\mathbf{x}) := |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| - d^{ij} = 0$$

missä $i < j$ ja $d^{ij} > 0$ on hiukkasten i ja j välinen etäisyys. Mekaniikasta on tuttua, että tällaisen hiukkasjoukon liike redusoituu huomattavasti eli sen kuvaamiseen tarvitaan vain massakeskipisteen asema (esim. kolme karteesista koordinaattia) ja hiukkasjoukon asento avaruudessa (esim. kolme Eulerin kulmaa).

Esimerkki 35. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi yhden hiukkasen ($k = 1$) tapausta, jossa $\mathbf{X}_1 = \mathbb{R}^3$. Ajatellaan, että hiukkanen (massa m) liikkuu käyrällä (side-ehdot)

$$z - h(x) = 0, \quad y = 0,$$

z -akselin suuntaisessa gravitaatiokentässä. Kineettinen energia on $T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2$ ja potentiaalienergia $V(x, y, z) = mgz$. Mutta side-ehtojen vallitessa myös derivaattakoordinaatteja sitoo side-ehdot $\dot{y} = 0$ ja $\dot{z} = h'(x)\dot{x}$ tai differentiaalimuotojen avulla ilmaistuna $dy = 0$ ja $dz = dh(x) = h'(x)dx$, missä $h'(x) := dh(x)/dx$. Lagrangen funktio on nyt

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 [1 + h'(x)^2] - mgh(x).$$

Ainoastaan x on riippumaton koordinaatti ja saadaan vain yksi Lagrangen yhtälö:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))} - \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))} \\ &= m \left[1 + h'(\underline{x}(t))^2 \right] \ddot{\underline{x}}(t) + mh'(\underline{x}(t))h''(\underline{x}(t))\dot{\underline{x}}(t)^2 + mgh'(\underline{x}(t)). \end{aligned}$$

Aina ei voida ratkaista yhtä koordinaattia muiden avulla, joten täytyy kehitellä yleisempiä menetelmiä.

13.2 Lagrangen kertoimet ja pakkovoimat

Olkoon M n -ulotteinen konfiguraatioavaruus, $L : M \rightarrow \mathbb{R}$ Lagrangen funktio ja $f^i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, l$, funktioita.⁸⁵ Oletetaan, että Lagrangen systeemiä (M, L) sitoo *holonomiset side-ehdot* $f^i(\mathbf{m}) = 0$ kaikilla $\mathbf{m} \in M$ ja $i = 1, \dots, l < n$. Kun kerätään funktiot f^i yhteen, voidaan

⁸⁵Jotka ovat toisistaan riippumattomia eli jokaisessa pisteessä $\mathbf{m} \in M$ (ko)vektorit $df^i|_{\mathbf{m}} \in TM_{\mathbf{m}}^*$, $i = 1, \dots, l$, ovat lineaarisesti riippumattomia.

side-ehdot kirjoittaa yhtenä yhtälönä $\mathbf{f}(\mathbf{m}) := (f^1(\mathbf{m}), f^2(\mathbf{m}), \dots, f^l(\mathbf{m})) = \vec{0}$ tai käyttämällä karttaa \mathbf{q} , saadaan koordinaatteja sitovat yhtälöt $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \vec{0}$ eli

$$\begin{aligned} f^1(q^1, q^2, \dots, q^n) &= 0, \\ f^2(q^1, q^2, \dots, q^n) &= 0, \\ &\vdots \\ f^l(q^1, q^2, \dots, q^n) &= 0. \end{aligned}$$

Nyt systeemin liike α noudattaa aina yhtälöä $\mathbf{f} \circ \alpha = \vec{0}$ tai kartassa \mathbf{q} ilmaistuna

$$\mathbf{f}(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) \equiv \vec{0}.$$

Vastaavasti kuin luvun 12 alussa määritellään⁸⁶ vaikutusintegraali I ja päädytään yhtälöön [!]

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = \sum_{j=1}^n \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} \right] \underline{h}^j(\lambda) d\lambda \quad (21)$$

ekstemaaliradalle $\underline{\mathbf{q}}(\lambda) = (\mathbf{q} \circ \alpha)(\lambda)$, kun oletetaan, että varioitavien ratojen päätepisteet ovat kiinteitä eli $\underline{h}^j(\lambda_0) = 0 = \underline{h}^j(\lambda_1)$. Mutta nyt variaation $\underline{\mathbf{h}}$ komponentit \underline{h}^j eivät ole riippumattomia – nimittäin kaikkien mahdollisten ratojen on toteutettava side-ehdot! Erityisesti $\mathbf{f}(\underline{\mathbf{q}}(\lambda) + \epsilon \underline{\mathbf{h}}(\lambda)) = \vec{0}$ kaikilla $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ ja kaikilla $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ (missä $\delta > 0$ on riittävän pieni). Tästä saadaan (triviaalisti), että kaikilla $i = 1, 2, \dots, l$,

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} f^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda) + \epsilon \underline{\mathbf{h}}(\lambda)) \Big|_{\epsilon=0} = \sum_{j=1}^n a_j^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) \underline{h}^j(\lambda) \equiv 0, \quad (22)$$

missä⁸⁷ $a_j^i = \partial f^i / \partial q^j$. Huomaa, että yhtälö (22) voidaan myös kirjoittaa modernissa⁸⁸ muodossa

$$df^i|_{\alpha(\lambda)} \left(\sum_j \underline{h}^j(\lambda) \frac{\partial}{\partial q^j} \Big|_{\alpha(\lambda)} \right) = 0, \quad \lambda \in (\lambda_0, \lambda_1).$$

Ehdosta (22) seuraa (triviaalisti), että *kaikilla* (jatkuvilla) funktioilla $\Lambda_i : [\lambda_0, \lambda_1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n \Lambda_i(\lambda) a_j^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) \underline{h}^j(\lambda) d\lambda = 0.$$

⁸⁶Nyt pitää olettaa, että I :n määrittelyalue sisältää vain niitä \mathcal{F}_0 :n käyriä α , jotka toteuttavat side-ehdon $\mathbf{f} \circ \alpha \equiv \vec{0}$.

⁸⁷Seuraavissa laskuissa voidaan olettaa yleisemmin, että funktiot a_j^i eivät ole minkään funktioitten f^i osittaisderivaattoja: Tällaiset *epäholonomiset* side-ehdot voitaisiin esittää yleisemmin käyttämällä (toisistaan riippumattomina) differentiaalimuotoja $\omega^i = \sum_j a_j^i dq^j$, jotka eivät siis ole muotoa $\omega^i = df^i = \partial_j f^i dq^j$.

⁸⁸Muinaisessa kirjallisuudessa merkitään useimmiten $\delta q^j = h^j$ ja kaava (22) esitetään varsin epämääräisessä muodossa $\delta f^i = f^i(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}) - f^i(\mathbf{q}) = (\partial f^i / \partial q^j) \delta q^j = 0$.

Kun lisätään edellinen yhtälö kaavaan (21) saadaan

$$\sum_{j=1}^n \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} + \sum_{i=1}^l \Lambda_i(\lambda) a_j^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) \right] \underline{h}^j(\lambda) d\lambda = 0$$

Yhtälöt (22) (joita on l kpl) sitovat funktiot \underline{h}^i (n kpl) toisiinsa matriisiarvoisen funktion (a_j^i) avulla. Voidaan ajatella funktioita $\underline{h}^1, \underline{h}^2, \dots, \underline{h}^{n-l}$ ($n-l$ kpl) *toisistaan riippumattomina* ja ilmaista loput funktiot $\underline{h}^{n-l+1}, \dots, \underline{h}^n$ (l kpl) funktioiden $\underline{h}^1, \dots, \underline{h}^{n-l}$ lineaarikombinaationa kaavaa (22) käyttäen. Vastaavasti kuin kappaleessa 12 todetaan, että on oltava

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} + \sum_{i=1}^l \Lambda_i(\lambda) a_j^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) \equiv 0$$

kaikilla $j = 1, 2, \dots, n-l$. Koska funktiot Λ_i (l kpl) ovat mielivaltaisia, niin ne voidaan valita siten, että myös

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} + \sum_{i=1}^l \Lambda_i(\lambda) a_j^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) \equiv 0$$

kaikilla $j = n-l+1, \dots, n$. Täten

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\dot{\mathbf{q}}}(\lambda))} = \tilde{Q}_j(\lambda),$$

missä funktiot $\tilde{Q}_j(\lambda) := \sum_{i=1}^l \Lambda_i(\lambda) a_j^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda))$ muodostavat *pakkovoiman* tai *sidevoiman* tai *tukivoiman*

$$\tilde{Q}(\lambda) = \sum_{j=1}^n \tilde{Q}_j(\lambda) dq^j|_{\alpha(\lambda)} = \sum_{i=1}^l \Lambda_i(\lambda) \sum_{j=1}^n a_j^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) dq^j|_{\alpha(\lambda)} = \sum_{i=1}^l \Lambda_i(\lambda) df^i|_{\alpha(\lambda)},$$

sillä $\tilde{Q}(\lambda)$ pakottaa tai sitoo systeemin liikkumaan side-ehdon määrällä tavalla. Funktiot Λ_i ovat ns. *Lagrangen kertojia*. Pakkovoima ei tee työtä radalla α , sillä työ

$$\int_{\alpha} \tilde{Q} = \sum_{i=1}^l \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \Lambda_i(\lambda) \underbrace{\frac{df^i(\alpha(\lambda))}{d\lambda}}_{=0} d\lambda = 0.$$

Täten, jos $L = T - V$, niin mekaaninen energia $T + V$ säilyy myös sidotussa liikkeessä.

Esimerkki 36. Tarkastellaan esimerkin 35 tapausta Lagrangen kertoimia käyttäen. Konfiguraatioavaruus on 3-ulotteinen, joten $n = 3$ ($q^1 = x$, $q^2 = y$, $q^3 = z$) ja side-ehtoja on kaksi ($l = 2$):

$$f^1(x, y, z) := z - h(x) = 0,$$

$$f^2(x, y, z) := y = 0,$$

joten $a_1^1(x, y, z) = -h'(x)$, $a_3^1(x, y, z) = 1$ ja $a_2^2(x, y, z) = 1$. Muut matriisialkiot ovat nollia. Lagrangen kertoimia on kaksi. Toisaalta nähdään suoralla laskulla, että

$$\tilde{Q} = \Lambda_1 df^1 + \Lambda_2 df^2 = \Lambda_1 (dz - h'(x)dx) + \Lambda_2 dy = -\Lambda_1 h'(x)dx + \Lambda_2 dy + \Lambda_1 dz$$

Täten ratkaistavana on yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= m\ddot{x} = -\Lambda_1 h'(x), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= m\ddot{y} = \Lambda_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= m\ddot{z} + mg = \Lambda_1 \end{aligned}$$

side-ehdolla $y = 0$ ja $z = h(x)$. Koska $y = 0$, niin liike tapahtuu xz -tasossa ja $\ddot{y} = 0 = \Lambda_2$. Ensimmäisestä side-ehdosta $z - h(x) = 0$ saadaan derivoimalla kahdesti

$$\ddot{z} = h''(x)\dot{x}^2 + h'(x)\ddot{x},$$

joka voidaan sijoittaa viimeiseen yhtälöön:

$$m^{-1}\Lambda_1 = \ddot{z} + g = h''(x)\dot{x}^2 + h'(x)\ddot{x} + g.$$

Toisaalta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa $m^{-1}\Lambda_1 = -\ddot{x}/h'(x)$. Yhdistämällä nämä yhtälöt seuraa sama yhtälö

$$\left[1 + h'(\underline{x}(t))^2\right] \ddot{\underline{x}}(t) + h'(\underline{x}(t))h''(\underline{x}(t))\dot{\underline{x}}(t)^2 + gh'(\underline{x}(t)) = 0.$$

kuin esimerkissä 35. [!] Lisäksi (kun liike tunnetaan) voidaan laskea Newtonin mekaniikan mukainen tukivoima

$$\mathbf{F}(t) = (-\Lambda_1(t)h'(\underline{x}(t)), \Lambda_2(t), \Lambda_1(t)) = m\ddot{\underline{x}}(t) \left(1, 0, -h'(\underline{x}(t))^{-1}\right), \quad (23)$$

joka pitää hiukkasen käyrällä.

Harjoitustehtävä 28. Oletetaan, että yllä olevan yhtälön (23) tukivoima häviää joka hetkellä eli $\mathbf{F}(t) \equiv \vec{0}$. Mitä voit nyt sanoa liikkeestä ja käyrän $z = h(x)$ muodosta? (Tsekkaa myös tapaus $g = 0$.)

Harjoitustehtävä 29. Hiukkanen (massa m) liikkuu pyörähdysparaboloidin

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$$

pinnalla (eli 'kupissa') z -akselin suuntaisessa (vakio)gravitaatiokentässä. Kirjoita Lagrangen yhtälöt käyttämällä Lagrangen kertojia. Osoita, että nyt hiukkanen voi liikkua ympyrää $x^2 + y^2 = R^2$ pitkin vaakatasossa (liike on helppo todeta myös kokeellisesti).

Vinkki: sylinterikoordinaatisto.

14 GEOM: Differentiaalimuodot

Monistolla M voidaan määritellä erityisiä tensorikenttiä, ns. differentiaalimuotoja, joiden avulla voidaan kuvata monia tärkeitä fysikaalisia ja geometrisia objekteja (esim. sähkömagneettinen kenttä tai kappaleen tilavuus). Asteen l differentiaalimuoto tai l -muoto ω on tyypin $(0, l)$ tensorikenttä, joka on täysin antisymmetrinen eli kaikilla vektorikentillä v_1, v_2, \dots, v_l ,

$$\omega(v_1, \dots, v_a, \dots, v_b, \dots, v_l) = -\omega(v_1, \dots, v_b, \dots, v_a, \dots, v_l)$$

olipa a ja $b \in \{1, 2, \dots, l\}$ mitä indeksejä tahansa. Koska ω on multilineaarinen nähdään heti, että yllä oleva ehto voidaan kirjoittaa (ekvivalentisti mielivaltaisessa) kartassa \mathbf{q} muodossa [!]

$$\omega_{j_1, \dots, j_a, \dots, j_b, \dots, j_l} = \omega(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_a}, \dots, \partial_{j_b}, \dots, \partial_{j_l}) = -\omega_{j_1, \dots, j_b, \dots, j_a, \dots, j_l}.$$

Jos nyt $j_a = j_b = j$, niin

$$\omega_{j_1, \dots, j, \dots, j, \dots, j_l} = -\omega_{j_1, \dots, j, \dots, j, \dots, j_l} \iff 2\omega_{j_1, \dots, j, \dots, j, \dots, j_l} = 0$$

eli n ulotteisella monistolla kaikki l -muodot ovat nollia, kun $l > n$.

Esimerkki 37. Tarkastellaan seuraavassa alimpien asteiden differentiaalimuotoja:

- 0-muoto on funktio $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.
- 1-muoto on $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dq^j$.
- 2-muoto on

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \omega_{j_1, j_2} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} = \sum_{j_1 < j_2} \omega_{j_1, j_2} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} + \sum_{j_2 < j_1} \omega_{j_1, j_2} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \\ &= \sum_{j_1 < j_2} \omega_{j_1, j_2} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} - \sum_{j_2 < j_1} \omega_{j_2, j_1} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \\ &= \sum_{j_1 < j_2} \omega_{j_1, j_2} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} - \sum_{j'_1 < j'_2} \omega_{j'_1, j'_2} dq^{j'_2} \otimes dq^{j'_1} \\ &= \sum_{j_1 < j_2} \omega_{j_1, j_2} \underbrace{(dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} - dq^{j_2} \otimes dq^{j_1})}_{=: dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} = -dq^{j_2} \wedge dq^{j_1}} = \sum_{j_1 < j_2} \omega_{j_1, j_2} dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \omega_{j_1, j_2} dq^{j_1} \wedge dq^{j_2}. \end{aligned}$$

- 3-muoto on

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_3=1}^n \omega_{j_1, j_2, j_3} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \otimes dq^{j_3} = \sum_{j_1 < j_2 < j_3} \omega_{j_1, j_2, j_3} dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge dq^{j_3} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_3=1}^n \omega_{j_1, j_2, j_3} dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge dq^{j_3}, \end{aligned}$$

missä $dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge dq^{j_3} := dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \otimes dq^{j_3} - dq^{j_1} \otimes dq^{j_3} \otimes dq^{j_2} + dq^{j_2} \otimes dq^{j_3} \otimes dq^{j_1} - dq^{j_2} \otimes dq^{j_1} \otimes dq^{j_3} + dq^{j_3} \otimes dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} - dq^{j_3} \otimes dq^{j_2} \otimes dq^{j_1}$.

Edellisen esimerkin nojalla nähdään, että yleinen l -muoto voidaan kirjoittaa kolmella eri tavalla:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_l=1}^n \omega_{j_1, j_2, \dots, j_l} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \otimes \dots \otimes dq^{j_l} = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_l} \omega_{j_1, j_2, \dots, j_l} dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \dots \wedge dq^{j_l} \\ &= \frac{1}{l!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_l=1}^n \omega_{j_1, j_2, \dots, j_l} dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \dots \wedge dq^{j_l},\end{aligned}$$

missä ns. kiilatulo $dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \dots \wedge dq^{j_l}$ on määritelty vastaavalla tavalla summana $dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \otimes \dots \otimes dq^{j_l} - dq^{j_2} \otimes dq^{j_1} \otimes \dots \otimes dq^{j_l} + \dots$ jne. Summassa on nyt $l!$ kappaletta termejä.

Olkoon $\omega = \frac{1}{l!} \omega_{j_1, j_2, \dots, j_l} dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_l}$ ja $\omega' = \frac{1}{l'!} \omega'_{s_1, s_2, \dots, s_{l'}} dq^{s_1} \wedge \dots \wedge dq^{s_{l'}}$ differentiaalimuotoja. Määritellään niiden *kiilatulo* asteen $l + l'$ differentiaalimuotona

$$\omega \wedge \omega' := \frac{1}{l!l'!} \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^n \sum_{s_1, \dots, s_{l'}=1}^n \omega_{j_1, j_2, \dots, j_l} \omega'_{s_1, s_2, \dots, s_{l'}} dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_l} \wedge dq^{s_1} \wedge \dots \wedge dq^{s_{l'}}.$$

On helppo osoittaa, että [!]

- kiilatulon määritelmä ei riipu kartan valinnasta,
- $\omega \wedge \omega' = (-1)^{ll'} \omega' \wedge \omega$,
- $(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'' = \omega \wedge (\omega' \wedge \omega'')$.

Määritellään vielä l -muodon ω *ulkoinen derivaatta (differentiaali)* $(l + 1)$ -muotona

$$d\omega := \frac{1}{l!} \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^n d\omega_{j_1, j_2, \dots, j_l} \wedge dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_l} = \frac{1}{l!} \sum_{j, j_1, \dots, j_l=1}^n \frac{\partial \omega_{j_1, j_2, \dots, j_l}}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_l}.$$

Helposti nähdään, että [!]

- määritelmä ei riipu kartan valinnasta,
- $d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^l \omega \wedge d\omega'$.

Harjoitustehtävä 30. Osoita, että $d(d\omega) = 0$ eli lyhyesti $d^2 = 0$.

Seuraava *Poincarén (käänteis)lemma* osoittaa, että myös käänteinen tulos pätee:

Lemma 3. Olkoon $U \subseteq M$ kutistuva⁸⁹ avoin joukko. Jos U :n l -muodolle pätee $d\omega = 0$ on olemassa U :n $(l - 1)$ -muoto ω' siten, että $d\omega' = \omega$.

⁸⁹Eli U voidaan jatkuvalla kuvauksella $f : [0, 1] \times U \rightarrow U$ kutistaa pisteeksi: $f(0, \mathbf{m}) = \mathbf{m}_0$ (vakio) ja $f(1, \mathbf{m}) = \mathbf{m}$ kaikilla $\mathbf{m} \in U$.

Tarkastellaan lopuksi differentiaalimuotoja \mathbb{R}^3 :ssa (joka on affiinina avaruutena selvästikin kutistuva). Tehdään samaistukset

$$\begin{aligned} dx &\mapsto \mathbf{i}, & dy &\mapsto \mathbf{j}, & dz &\mapsto \mathbf{k}, \\ dx \wedge dy &\mapsto \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & dy \wedge dz &\mapsto \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, & dz \wedge dx &\mapsto \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \\ dx \wedge dy \wedge dz &\mapsto (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 1. \end{aligned}$$

Nyt 0-muodon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ulkoinen derivaatta on

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla f.$$

Tarkastellaan sitten 1-muodon $F = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \mapsto \mathbf{F} := (F_1, F_2, F_3)$ ulkoista derivaattaa

$$\begin{aligned} dF &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &\mapsto \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Vastaavasti 2-muodolle $B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy \mapsto \mathbf{B} := (B_1, B_2, B_3)$,

$$dB = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \mapsto \nabla \cdot \mathbf{B}.$$

Korkeammat muodot ovatkin sitten nolliä eli \mathbb{R}^3 :ssa on ‘vain’ kolme vektorioperaattoria: gradientti, roottori ja divergenssi. Harjoitustehtävän nojalla $d^2 = 0$ eli saadaan heti vektoriopin kaavat:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Poincaren lemmasta saadaan mekaniikasta tuttu tulos: Jos $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, niin on olemassa funktio $f = -V$ siten, että $\nabla f = -\nabla V = \mathbf{F}$. Toisaalta saadaan myös, että jos $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, niin on olemassa \mathbf{A} siten, että $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Tätä kaavaa käytetään sähkö- ja magnetismissä: magneettivuon tiheydellä \mathbf{B} on vektoripotentiali \mathbf{A} .

ESSEETEHTÄVÄ:

Miten avaruutta, aikaa ja kappaleitten liikettä kuvataan eri fysiikan teorioissa? Mitkä oletukset johtavat kyseisiin malleihin? Tarkastele myös mallien kokeellista todennettavuutta.

15 FYS: Legendren muunnos ja Hamiltonin mekaniikkaa

Olkoon M n -ulotteinen monisto ja $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Lagrangen funktio (esim. muotoa $L = T - V$).
 Olkoon \mathbf{q} M :n kartta. Palautetaan mieleen, että tangenttikimppu TM koostuu pareista (\mathbf{m}, v) ,
 missä $\mathbf{m} \in M$ ja $v \in TM_{\mathbf{m}}$, ja sen karttana on $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\mathbf{m}, v) = (q^1(\mathbf{m}), \dots, q^n(\mathbf{m}), v^1, \dots, v^n)$ eli
 $\dot{q}^i(v) = v^i$. Vastaavasti kotangenttikimppun karttana on $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Yleensä Hamil-
 tonin mekaniikassa merkitään $p_i := \dot{q}_i$ eli tarkemmin $p_i(\omega) = \dot{q}_i(\omega) = \omega_i$ kaikille $\omega \in TM_{\mathbf{m}}^*$.
 Täten (\mathbf{q}, \mathbf{p}) on TM^* :n *kanoninen kartta* (missä $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_n)$). Huom! Joskus merkitään
 $T^*M = TM^*$.

Koska L on määritelty TM :llä, sen ulkoinen derivaatta on (lokaalisti)

$$dL = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i$$

eli 1-muoto TM :llä ja täten kuvaus $dL : TM \rightarrow T^*(TM)$. Määritellään sitten kääntyvä kuvaus
 (diffeomorfismi) $A : T^*(TM) \rightarrow T(T^*M)$, joka kuvaa $T^*(TM)$:n (mielivaltaisen) alkion

$$\left((\mathbf{m}, v); \sum_i \nu_i dq^i \Big|_{(\mathbf{m}, v)} + \omega_i d\dot{q}^i \Big|_{(\mathbf{m}, v)} \right)$$

$T(T^*M)$:n alkioksi

$$\left((\mathbf{m}, \omega); \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{m}, \omega)} + \nu_i \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{(\mathbf{m}, \omega)} \right),$$

missä $v = \sum_i v^i \partial / \partial q^i \Big|_{\mathbf{m}}$ ja $\omega = \sum_i \omega_i dq^i \Big|_{\mathbf{m}}$. On helppo osoittaa, [!] että A :n määritelmä ei riipu
 kartan \mathbf{q} valinnasta. Nyt $A \circ dL : TM \rightarrow T(T^*M)$ on lokaalisti muotoa

$$A \circ dL \Big|_{(\mathbf{m}, v)} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{m}, \omega)} + \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{m}, v)} \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{(\mathbf{m}, \omega)},$$

missä

$$\omega = \sum_i \omega_i dq^i \Big|_{\mathbf{m}} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{(\mathbf{m}, v)} dq^i \Big|_{\mathbf{m}}.$$

Lopuksi määritellään projektio $B : T(T^*M) \rightarrow T^*M$, joka kuvaa (jokaisen) tangenttiavaruuden
 $T(T^*M)_{(\mathbf{m}, \omega)}$ kaikki alkiot samaksi pisteeksi (\mathbf{m}, ω) , ja *Legendren kuvaus* $\hat{L} := B \circ A \circ dL : TM \rightarrow$
 T^*M , jolle siis

$$\hat{L}(\mathbf{m}, v) = (\mathbf{m}, \omega) = \left(\mathbf{m}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{(\mathbf{m}, v)} dq^i \Big|_{\mathbf{m}} \right)$$

eli

$$p_i(\omega) = \omega_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{(\mathbf{m}, v)}$$

tai karttojen $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ja (\mathbf{q}, \mathbf{p}) avulla ilmaistuna \hat{L} voidaan esittää muodossa

$$p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}^i}.$$

Nyt sanotaan, että p_i on koordinaatin q^i *kanonisesti konjugoitu momentti* tai \mathbf{p} on *yleistetty impussi (liikemäärä)*.⁹⁰ Jos L on *säännöllinen*⁹¹ (kuten jatkossa aina oletetaan ilman eri mainintaa), niin kanonisesti konjugoidut momentit määräävät kimppejen TM ja TM^* karttojen välisen ‘koordinaattimuunnoksen’ (tai isomorfismin)

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \quad \text{tai kääntäen} \quad (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$$

ja kimput voidaan samaistaa. Usein sanotaan, että TM^* on systeemin *faasiavaruus* (ja TM on systeemin *nopeusfaasiavaruus*).

Lagrangen yhtälöt voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}.$$

Jos $\partial L / \partial q^i \equiv 0$, niin $\dot{p}_i = 0$ eli $\underline{p}_i(\lambda)$ on *(liike)vakio* liikkeen $(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\mathbf{p}}(\lambda))$ suhteen, joka saadaan Lagrangen yhtälöitten ratkaisuna. Tällöin sanotaan, että q^i on *syklinen koordinaatti*.

15.1 Hamiltonin yhtälöt

Lemman 2 nojalla määritellään kartasta \mathbf{q} riippumaton [!] funktio $\mathcal{H} : TM \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \sum_{j=1}^n \dot{q}^j \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}^j} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Tämä on fiksua, sillä \mathcal{H} on liikevakio L :n generoimissa liikkeissä (jotka siis toteuttavat Lagrangen yhtälöt). Lisäksi mikäli $L = T - V$, niin $\mathcal{H} = T + V$ on kokonais(mekaaninen)energia.

Ilmaistaan sitten \mathcal{H} koordinaateissa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) eli määritellään L :n *Legendren muunnos* tai (L :ään liittyvä) *Hamiltonin funktio* $H := \mathcal{H} \circ \hat{L}^{-1} : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$, jolle pätee

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = \sum_{j=1}^n \dot{q}^j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) p_j - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})).$$

⁹⁰Esim. k :n hiukkasen tapauksessa, jossa $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x}) = \sum_i m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 / 2 - V(\mathbf{x})$, saadaan $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k)$, missä $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ on hiukkasen i kineettistä impulssia (liikemäärää) vastaavat koordinaatit.

⁹¹Eli kaikissa pisteissä ja kartoissa $\det(\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j)_{i,j} \neq 0$ (käänteiskuvauslause). Esim. $L = T - V$ on aina säännöllinen, jos $T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$. Lisäksi $p_i = g_{ij} \dot{q}^j$ kuten aiemmin eli siis Legendren muunnos on musikaalisen isomorfismin (indeksien lasku) ‘yleistys.’

Koska

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i} &= \dot{q}^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))} \right)}_{=0} \frac{\partial \dot{q}^j(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q^i} &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))} \right)}_{=0} \frac{\partial \dot{q}^j(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))},\end{aligned}$$

niin jos liike $\lambda \mapsto (\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\mathbf{p}}(\lambda))$ toteuttaa Lagrangen yhtälöt, niin se toteuttaa myös *Hamiltonin (liike)yhtälöt*

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{q}^i(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\mathbf{p}}(\lambda))}, \\ \frac{d\underline{p}_i(\lambda)}{d\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\mathbf{p}}(\lambda))}\end{aligned}$$

tai lyhyesti merkittäen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.\end{aligned}$$

Esimerkki 38. Tarkastellaan tasoheiluria eli $M = \mathbb{T}$ ja $L = T - V$, missä $T = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$ ja $V = -\cos \theta$ (kaikki vakiot on laitettu ykkösiksi). Nyt $p = \partial L / \partial \dot{\theta} = \dot{\theta}$ ja

$$H = T + V = \frac{1}{2}p^2 - \cos \theta,$$

joten Hamiltonin yhtälöt ovat

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\sin \theta.$$

Harjoitustehtävä 31. Olkoon M 1-ulotteinen monisto ja q sen kartta. Olkoon

$$a) L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}q\dot{q}^2 - e^q,$$

$$b) L(q, \dot{q}) = q\dot{q}^3 + q^2.$$

Määrä kummassakin tapauksessa kanonisesti konjugoitu momentti p ja $H(q, p)$ suoraan H :n määritelmästä. Kirjoita Hamiltonin yhtälöt. (Milloin L :t ovat säännöllisiä?)

Harjoitustehtävä 32. Vapaa m -massainen kappale liikkuu Schwarzschildin metriikassa g (kerta huomautus 10). Nyt siis Lagrangen funktio

$$L = T = \frac{m}{2} \left\{ -[c^2 + 2\Phi(r)] \dot{t}^2 + [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-1} \dot{r}^2 + r^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] \right\}$$

kartassa $\mathbf{q} = (q^0, q^1, q^2, q^3) = (t, r, \theta, \varphi)$. Määrä kanonisesti konjugoidut momentit p_i . (Voit käyttää niille merkintöjä $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (p_t, p_r, p_\theta, p_\varphi)$.) Laske $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

Seuraavassa harjoituksessa osoitetaan (Legendren muunnoksen käänteismuunnoksella), että jos liike toteuttaa Hamiltonin yhtälöt, se toteuttaa myös Lagrangen yhtälöt. Eli Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikat ovat riittävän säännöllisissä tapauksissa ekvivalentit. Lisäksi voidaan osoittaa, että Hamiltonin yhtälöt saadaan johdettua myös suoraan variaatioperiaatteesta. [!]

Harjoitustehtävä 33. Olkoon $H : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ (Hamiltonin) funktio eli (\mathbf{q} :n generoimassa kanonisessa) kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) muotoa $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Määritellään⁹² 'koordinaattimuunnos' $\dot{q}^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) / \partial p_i$ ja funktio $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})).$$

Osoita, että jos liike toteuttaa Hamiltonin yhtälöt, se toteuttaa myös Lagrangen yhtälöt. (Lasku on lähes sama kuin aiemmin.)

15.2 Ajasta riippuvat systeemit

Epärelativistisessä mekaniikassa käytetään universaaliaikaa, joka on 1-ulotteinen monisto \mathcal{T} (esimerkiksi \mathbb{R} tai \mathbb{T}) varustettuna (usein affinilla) aikakoordinaatilla t . Liikkeen parametriksi λ valitaan t , joten t :n nopeuskoordinaattia sitoo side-ehto $\dot{t} = 1$. Varsinainen monisto, jossa liike tapahtuu, on n -ulotteinen monisto M , johon aika voidaan liittää määrittelemällä $M_{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \times M$.⁹³

Monistolla M on määritelty ajasta riippuva Lagrangen funktio $L : \mathcal{T} \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ eli lokaalisti $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Kiinnittämällä $t \in \mathcal{T}$ saadaan Lagrangen funktio $L_t : TM \rightarrow \mathbb{R}$ (jonka oletetaan olevan säännöllinen; L ei ole säännöllinen funktiona $TM_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$). Eli L voidaan nähdä ajalla indeksoituna perheenä $\{L_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ 'tavanomaisia' Lagrangen funktioita L_t . Tällainen tilanne saattaa tulla vastaa esim. tarkasteltaessa avoimia (muuttuvamassaisia) systeemeitä. Nyt massa(metriikka, joka määrää liike-energian T) riippuu ajasta (raketti, lumipallo).

Kirjoittamalla $q^0 = t$ (eli $M_{\mathcal{T}}$:n karttana on (q^0, \mathbf{q})) saadaan

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 0,$$

joten todellakaan L ei ole säännöllinen. Mutta eipä hätää: Ajatellaan Legendren kuvausta \hat{L} kuvauksena monistolta $\mathcal{T} \times TM$ monistolle $\mathcal{T} \times TM^*$, jonka kartassa ei tarvita p_0 -koordinaattia. Nyt $\mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \partial L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) / \partial \dot{\mathbf{q}}$, joten $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, ja koordinaatteja t sekä \mathbf{q} ei muuteta.

⁹²Mikäli H on säännöllinen eli $\det(\partial^2 H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) / \partial p_i \partial p_j)_{i,j} \neq 0$

⁹³Hienommin homman voi tehdä niin, että määrittelee (kuten Galilein avaruus-ajan tapauksessa) $M_{\mathcal{T}}$:n olevan $(n+1)$ -ulotteinen monisto varustettuna surjektiolla $M_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ eli $M_{\mathcal{T}}$ on ns. säikeinen monisto yli kantamoniston \mathcal{T} . Esim. tensorikimput $T_l^k M$ ovat säikeisiä monistoja yli kannan M . Säikeinä ovat tensoriavaruudet $T_l^k M_m$.

Määritellään (ajasta riippuva) Hamiltonin funktio $H : \mathcal{T} \times TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ ja ‘laajennettu’ Hamiltonin funktio $H' : T^*M_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ kaavoilla [!]

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})),$$

$$H'(t, \mathbf{q}, p_0, \mathbf{p}) := p_0 \dot{t} + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})) = p_0 + H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Nyt H' on Legendren muunnoksella saatu Hamilton, joten aikaisemmat laskut pätevät sille (M :n tilalla on $M_{\mathcal{T}}$ ja kanoniseen karttaan (\mathbf{q}, \mathbf{p}) on lisätty koordinaatit $q_0 = t$ ja p_0).

Oletetaan, että liike $t \mapsto (t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{p}_0(t), \underline{\mathbf{p}}(t))$ toteuttaa Lagrangen yhtälöt $\dot{p}_0 = \partial L / \partial t$ sekä $\dot{\mathbf{p}} = \partial L / \partial \mathbf{q}$. Edellä nähdyn nojalla liike toteuttaa myös Hamiltonin yhtälöt H' :lle:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{\partial H'}{\partial p_0} = 1, & \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H'}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{p}_0 &= -\frac{\partial H'}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}, & \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned}$$

eli saatiin samat Hamiltonin yhtälöt H :lle kuin ajasta riippumattomassakin tapauksessa. Kyytipoikana tuli yhtälö $\partial H / \partial t = -\partial L / \partial t$. Ainoa olennainen ero ajastariippumattomaan tapaukseen on se, että H ei ole enää liikevakio vaan H' on: Sijoitetaan liike $t \mapsto (t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{p}_0(t), \underline{\mathbf{p}}(t))$ funktioihin $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ sekä $H'(t, \mathbf{q}, p_0, \mathbf{p})$ ja kirjoitetaan $\underline{H}(t) := H'(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))$ sekä $\underline{H}'(t) := H'(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{p}_0(t), \underline{\mathbf{p}}(t)) = \underline{p}_0(t) + \underline{H}(t)$. Täten

$$0 = \frac{dH'(t)}{dt} = \frac{dp_0(t)}{dt} + \frac{dH(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} + \frac{dH(t)}{dt}$$

implikoiden

$$\boxed{\frac{d\underline{H}(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))}}.$$

Jos $\partial H / \partial t \equiv 0$ (eli $\partial L / \partial t \equiv 0$), Hamiltonin funktio H on *liikevakio* kaikkien Hamiltonin yhtälöitten generoimien liikkeitten suhteen eli $H(\underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t)) = E_{(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}})} \in \mathbb{R}$ kaikilla t :n arvoilla. Luku $E_{(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}})} \in \mathbb{R}$ voidaan usein tulkita liikkeen $(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}})$ *kokonaisenergiaksi*.

Huomautus 11. Olkoon $(t_a, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a)$ mielivaltainen piste (kunhan se kuuluu kartan kuvaan) ja H :n generoima liike sellainen, että se toteuttaa alkuarvottehtävän

$$(t_a, \underline{\mathbf{q}}(t_a), \underline{\mathbf{p}}(t_a)) = (t_a, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a).$$

Koska p_0 on riippumaton ‘apukoordinaatti,’ voidaan *valita* sen alkuarvoksi $\underline{p}_0(t_a) = -H(t_a, \underline{\mathbf{q}}(t_a), \underline{\mathbf{p}}(t_a))$, joten $H'(t_a, \underline{\mathbf{q}}(t_a), \underline{p}_0(t_a), \underline{\mathbf{p}}(t_a)) = 0$. Mutta H' on liikevakio eli yleisyyttä loukkamatta voidaan aina olettaa, että $\underline{H}'(t) \equiv 0$ Hamiltonin funktion H generoimalle liikkeelle. Laajennettu Hamilton H' nähdään siis ‘epäfysikaalisena’ apusuureena, jota tarvittiin vain ajasta riippuvan epärelativistisen Hamiltonin mekaniikan matemaattisessa konstruktiossa.

Harjoitustehtävä 34. Osoita suoralla laskulla käyttäen H :n määritelmää

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})),$$

että

$$\frac{\partial H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial t} = - \frac{\partial L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial t} \Big|_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}.$$

Osoita lisäksi (käyttäen H :n määritelmää), että

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))}$$

(missä $t \mapsto (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ on Hamiltonin yhtälöitten ratkaisu).

Esimerkki 39. Tarkastellaan systeemiä, jonka konfiguraatioavaruus on (avoin joukko) $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, kineettinen energia $T(\dot{\mathbf{x}}) = |\dot{\mathbf{x}}|^2/2$, potentiaalienergia $V(\mathbf{x})$ ja Lagrangen funktio $L = T - V$. Nyt Hamiltonin funktio on tuttuun tapaan $H = H_{\mathbf{x}} := T + V$.

Ajasta riippuvissa (esim. pyörivissä) koordinaateissa $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{x})$ eli $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{q})$

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial x^i}{\partial t}$$

ja

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right)$$

eli muotoa $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 2^{-1} \sum_{j,k} a_{jk}(\mathbf{q}, t) \dot{q}^j \dot{q}^k + \sum_j b_j(\mathbf{q}, t) \dot{q}^j + c(\mathbf{q}, t)$. Täten $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i = \partial T / \partial \dot{q}^i = \sum_k a_{ik} \dot{q}^k + b_i$ ja saadaan Hamiltonin funktio

$$H = H_{\mathbf{q}} := \sum_i p_i \dot{q}^i - L = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} \dot{q}^k + b_i \right) \dot{q}^i - T + V = T + V - \sum_i b_i \dot{q}^i - 2c.$$

Jouduttiin kiusalliseen tilanteeseen: yleisesti $H_{\mathbf{x}} = T + V \neq H_{\mathbf{q}}$ eli Hamiltonin funktio riippuu kartasta, missä se on ‘alunperin’ määritelty! Tämä kuvaa ajasta riippuvan Hamiltonin mekaniikan ongelmallisuutta. Kartasta riippumaton Hamilton on $H' = p_0 + H$, mutta se sisältää ylimääräisen energian luonteisen parametrin p_0 . Relativistisessa Hamiltonin mekaniikassa tämä ongelmaa ei ole, sillä p_0 on ajan $x^0 = ct$ kanonisesti konjugoitu momentti eli luonnollinen energiasuure. Huom! Jos koordinaatit \mathbf{q} eivät riipu ajasta, niin $\partial x^i / \partial t = 0$, $b_i = 0$ ja $c = 0$ eli $H_{\mathbf{q}} = T + V$. Tällöin siis Hamiltonin funktio on kokonaisenergia kuten on luonnollista ajasta riippumattomassa Hamiltonin mekaniikassa.

16 GEOM: Vektorikentän integraalikäyrät

Määritellään aluksi vektorikentän integraalikäyrä. Olkoon M mielivaltainen n -ulotteinen monisto ja $X : M \rightarrow TM$ sen (sileä) vektorikenttä. Kartassa \mathbf{q} esitettynä siis

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} \quad \text{tai siis} \quad X(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}, X|_{\mathbf{m}}), \quad \text{missä} \quad X|_{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{m}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{m}}.$$

Usein ilmaistaan komponenttifunktiot X^i kartassa \mathbf{q} eli saadaan (sileät) kuvaukset $X^i(\mathbf{q})$ jotenka $X^i(\mathbf{m}) = X^i(\mathbf{q}(\mathbf{m}))$, kun \mathbf{m} kuuluu \mathbf{q} :n määrittelyalueeseen.

Olkoon $\alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow M$ (sileä) käyrä ja $\dot{\alpha} : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow TM$ sen ‘nosto’ tangenttikimppuun eli siis

$$\dot{\alpha}(\lambda) = (\alpha(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda)), \quad \dot{\alpha}(\lambda) = \underline{\dot{q}}^i(\lambda) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\alpha(\lambda)},$$

missä $\underline{\mathbf{q}}(\lambda) = (\underline{q}^i(\lambda)) = (\mathbf{q} \circ \alpha)(\lambda)$. Nyt voidaan määritellä yhdistetty kuvaus (ns. *vektorikenttä käyrällä*⁹⁴ tai *käyrää pitkin*) $X \circ \alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow TM$ eli $(X \circ \alpha)(\lambda) = X(\alpha(\lambda)) = (\alpha(\lambda), X|_{\alpha(\lambda)})$, missä

$$X|_{\alpha(\lambda)} = X^i(\alpha(\lambda)) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\alpha(\lambda)} = X^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\alpha(\lambda)}.$$

Käyrän α sanotaan olevan vektorikentän X *integraalikäyrä* tai *vektorikentän X generoima* mikäli

$$\dot{\alpha} = X \circ \alpha$$

eli kaikilla $i = 1, \dots, n$

$$\boxed{\underline{\dot{q}}^i(\lambda) = X^i(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)), \quad \lambda \in (\lambda_0, \lambda_1).}$$

Voidaan osoittaa,⁹⁵ että kaikille $\lambda' \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{m} \in M$ on olemassa X :n integraalikäyrä $\alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow M$, $\lambda' \in (\lambda_0, \lambda_1)$, siten, että $\alpha(\lambda') = \mathbf{m}$. Pisteitä (λ', \mathbf{m}) sanotaan *alkuarvoiksi* tai *-ehdoiksi* ja niiden määräämä integraalikäyrä α on *yksikäsitteinen*, kun α :n määrittelyalue (λ_0, λ_1) ajatellaan maksimaalisen suureksi. Huomaa, että usein (λ_0, λ_1) ei ole koko \mathbb{R} eli käyrä α päättyy (terminoi).

Esimerkki 40. Esimerkiksi \mathbb{R} :n vektorikentän $X = e^{-x} \partial / \partial x$ integraalikäyrät toteuttavat differentiaaliyhtälön $\dot{x} = e^{-x}$ eli ovat muotoa $\underline{x}(t) = \ln(t + t_0)$, missä $t_0 \in \mathbb{R}$ on integrointivakio. Selvästikin käyrän \underline{x} määrittelyalue on $(-t_0, \infty)$.

⁹⁴Esim. kitka on vektorikenttä käyrällä (kappaleen/hiukkasen liike pinnalla).

⁹⁵Tämä tulos, ns. Picard-Lindelöfin (olemassaolo)lause, on Banachin kiintopistelauseen seuraus. [!]

Esimerkki 41. Tavanomaisten *differentiaaliyhtälöiden* ratkaisut voidaan nähdä vektorikenttien integraalikäyriä. Ajatellaan vaikkapa, että meillä on yksi ‘riippumaton’ muuttuja $t \in \mathbb{R}$ ja esim. kaksi ‘riippuvaa’ (reaali)muuttujaa x ja y . Tarkastellaan differentiaaliyhtälö(ryhmää)

$$\begin{aligned}\ddot{x}y &= \dot{y}\ddot{x} + \sin(t+y), \\ \ddot{y} + x &= xt + y\dot{y}.\end{aligned}$$

Määritellään uudet ‘apumuuttujat’ $z = \ddot{x}$, $v = \dot{x}$ ja $u = \dot{y}$, joten saadaan

$$\begin{aligned}\dot{z}y &= uz + \sin(t+y), \\ \dot{u} + x &= xt + yu\end{aligned}$$

tai hieman muokkaamalla

$$\begin{aligned}\dot{t} &= 1, & \dot{x} &= v, \\ \dot{y} &= u, & \dot{v} &= z, \\ \dot{z} &= y^{-1}uz + y^{-1}\sin(t+y), & \dot{u} &= x(t-1) + yu,\end{aligned}$$

eli yhtälöitten ratkaisu on (lokaalin) vektorikentän

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial v} + [y^{-1}uz + y^{-1}\sin(t+y)]\frac{\partial}{\partial z} + [x(t-1) + yu]\frac{\partial}{\partial u}$$

integraalikäyrä. Monisto on nyt 6-ulotteinen ja ratkaisuja on vaikea löytää analyttisesti vaikka ne ovatkin olemassa. Numeerisesti toki ratkaisut voidaan etsiä, kun alkuarvot ovat annettu.

Helppo esimerkki on harmoninen oskillaattori, joka toteuttaa yhtälön $\ddot{x} = -x$. Määrittelemällä $y = \dot{x}$ nähdään, että vektorikenttä

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

ja integraalikäyrät ovat $(\underline{x}(t), \underline{y}(t)) = a(\sin(t+b), \cos(t+b))$, missä a ja b ovat integrointivakioita (jotka valitaan siten, että ne toteuttavat annetut alkuarvot).

Harjoitustehtävä 35. *Esitä edellisen esimerkin tapaan differentiaaliyhtälöryhmä*

$$\frac{\dot{x}}{x} = z\dot{t}, \quad \ddot{z} - \dot{z} - z = x + t,$$

jonkun vektorikentän X avulla.

Esimerkki 42. Tarkastellaan monistoa (kotangenttikimppua) TM^* , jonka kartta on (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Sen mielivaltainen vektorikenttä X on lokaalisti muotoa

$$X = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Integraalikäyrät toteuttavat yhtälöt

$$\dot{q}^i = V^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \dot{p}_i = F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Välittömästi nähdään kaksi fysikaalisesti mielenkiintoista erikoistapausta:

a) M on semi-Riemannin monisto ja $p_i = g_{ij}\dot{q}^j$ (missä g on esim. massametriikka). Valitaan $V^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \dot{q}^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = g^{ij}(\mathbf{q})p_j$. Täten saadaan Newtonin yhtälön yleistys $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$, missä ‘voima’ \mathbf{F} riippuu paikasta \mathbf{q} ja impulssista \mathbf{p} (ja siis nopeudesta $\dot{\mathbf{q}}$).

b) Olkoon $H : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ Hamiltonin funktio. Määritellään $V^i := \partial H / \partial p_i$ ja $F_i := -\partial H / \partial q^i$. Saadaan Hamiltonin likeyhtälöt $\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$ ja $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q}$.

Ajasta riippuvassa tapauksessa monistona on $\mathcal{T} \times TM^*$, missä \mathcal{T} on 1-ulotteinen ‘aikamonoisto,’ jonka koordinaatti olkoon t . Nyt voidaan määritellä ‘laajennettu’ vektorikenttä

$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F_i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

jonka integraalikäyrät toteuttavat yhtälöt

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{q}^i = V^i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \dot{p}_i = F_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Nyt a) ja b) tapaukset voidaan käsitellä analogisesti kuin aiemmin. Esim. ‘voima’ $\mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ voi riippua myös ajasta t ja systeemin massa $m(t)$ voi muuttua (eli $g_{ij}(t, \mathbf{q})$ on $m(t)$ kertaa avaruuden metriikka).

16.1 Bilineaarikuvaus lineaarikuvauksena

Olkoon V (reaalinen) vektoriavaruus, V^* sen duaali (eli lineaarikuvausten $V \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus) ja $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineaarikuvaus (eli kummankin muuttujan suhteen erikseen lineaarinen). Nyt B voidaan tulkita lineaarikuvaukseksi $V \rightarrow V^*$ kahdella eri tavalla:

1. Kaikilla $v \in V$ määritellään lineaarikuvaus

$$B_v^1 : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad w \mapsto B_v^1(w) := B(v, w)$$

eli $B_v^1 \in V^*$. Selvästikin $V \ni v \mapsto B_v^1 \in V^*$ on lineaarinen. Usein merkitään lyhyesti $B(v, \cdot) := B_v^1$.

2. Kaikilla $v \in V$ määritellään lineaarikuvaus

$$B_v^2 : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad w \mapsto B_v^2(w) := B(w, v)$$

eli $B_v^2 \in V^*$. Selvästikin $V \ni v \mapsto B_v^2 \in V^*$ on lineaarinen. Usein merkitään lyhyesti $B(\cdot, v) := B_v^2$.

Esimerkiksi kun $V = \mathbb{R}^2$, niin V :n (vastaavasti V^* :n) alkiot voidaan ajatella olevan joko pystyvektoreita tai vaakavektoreita eli

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \in V, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \in V^*, \quad f(v) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = f_1 v^1 + f_2 v^2 \in \mathbb{R}.$$

tai

$$v = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \in V, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in V^*, \quad f(v) = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f_1 v^1 + f_2 v^2 \in \mathbb{R}.$$

Nyt bilineaarikuvaukset ovat matriiseja

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

joista saadaan kuvaukset $V \rightarrow V^*$ seuraavasti:

$$B_v^1 = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 a + v^2 c & v^1 b + v^2 d \end{pmatrix} \in V^*,$$

$$B_v^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a v^1 + b v^2 \\ c v^1 + d v^2 \end{pmatrix} \in V^*,$$

joille $B_v^1(w) = B_v^1(w_1, w_2) \in \mathbb{R}$ ja $B_v^2(w) = (w^1 \ w^2) B_v^2 \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan sitten seuraavassa luvussa tarvittavaa esimerkkiä.

Olkoon M monisto ja $G \in \mathcal{T}_2^0 M$ eli kartassa \mathbf{q} ilmaistuna $G = G_{ij} dq^i \otimes dq^j$. Jokaisessa pisteessä $\mathbf{m} \in M$ tensori $G|_{\mathbf{m}} : TM_{\mathbf{m}} \times TM_{\mathbf{m}} \rightarrow \mathbb{R}$ on bilineaarinen ja voidaan tulkita kohdan 1 mukaisesti⁹⁶ kuvauksena $TM_{\mathbf{m}} \rightarrow TM_{\mathbf{m}}^*$: kaikille vektoreille $v = v^i \partial_i|_{\mathbf{m}} \in TM_{\mathbf{m}}$ saadaan kovektori

$$G|_{\mathbf{m}}(v) := G|_{\mathbf{m}}(v, \cdot) = v^i G_{ij}(\mathbf{m}) dq^j|_{\mathbf{m}} \in TM_{\mathbf{m}}^*.$$

Koska vektorikenttä $v \in \mathcal{T}M$ on kokoelma vektoreita, nähdään että jokaista vektorikenttää $v = v^i \partial_i$ vastaa 1-muoto

$$G(v, \cdot) = v^i G_{ij} dq^j.$$

⁹⁶Vastaavasti voitaisiin käyttää kohtaa 2, mutta valinta on tehtävä. Täten *valitsemme aina tulkinnan 1!!!*

Jatkossa käytämme G :lle yllä olevaa tulkintaa kuvauksena $\mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}M^*$ ja merkitsemme kuvasta samalla symbolilla G eli $G(v) := G(v, \cdot)$ on 1-muoto. Huom! Metrisen tensorin tapauksessa kyseessä on siis tuttu indeksien alennus.

Jos G :n matriisi kääntyy joka pisteessä, saadaan käänteiskuvaus $G^{-1} : \mathcal{T}M^* \rightarrow \mathcal{T}M$, jolle

$$G^{-1}(\omega) = \omega_k G^{ki} \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

17 FYS: Faasiavaruus symplektisena monistona

Faasiavaruudessa TM^* voidaan määritellä kaksi tärkeää tensorikenttää (ns. *kanoniset* tai *fundamentaaliset muodot*): Poincarén 1-muoto $\Lambda \in \mathcal{T}_1^0(TM^*)$, jonka lokaali esitys kanonisessa kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) on⁹⁷

$$\Lambda := \sum_{i=1}^n p_i dq^i \quad \text{eli} \quad \Lambda|_{(\mathbf{m}, \omega)} = \sum_{i=1}^n p_i(\omega) dq^i|_{(\mathbf{m}, \omega)} = \sum_{i=1}^n \omega_i dq^i|_{(\mathbf{m}, \omega)}$$

ja Poincarén 2-muoto tai symplektinen muoto $\Omega \in \mathcal{T}_2^0(TM^*)$,

$$\Omega := d\Lambda = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i = \sum_{i=1}^n (dp_i \otimes dq^i - dq^i \otimes dp_i).$$

Luvun 16.1 nojalla Ω voidaan tulkita **[!]** kuvauksena $\mathcal{T}(TM^*) \rightarrow \mathcal{T}(TM^*)^*$,

$$\Omega \left(\sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^n F_i dq^i - V^i dp_i,$$

jolla on käänteiskuvaus $\mathcal{T}(TM^*)^* \rightarrow \mathcal{T}(TM^*)$

$$\Omega^{-1} \left(\sum_{i=1}^n f_i dq^i + g^i dp_i \right) = \sum_{i=1}^n -g^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Vektorikentän $X = \sum_{i=1}^n V^i \partial / \partial q^i + F_i \partial / \partial p_i$ integraalikäyrä⁹⁸ $\alpha : (u_0, u_1) \rightarrow TM^*$ toteuttaa yhtälön $\dot{\alpha} = X \circ \alpha$ tai yhtäpitävästi yhtälön

$$\dot{\alpha} = \Omega^{-1}(\omega) \circ \alpha,$$

missä $\omega = \sum_{i=1}^n F_i dq^i - V^i dp_i$ on 1-muoto.⁹⁹ Lokaalisti yhtälöt ovat muotoa

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{q}^i(u)}{du} &= V^i(\underline{q}^1(u), \dots, \underline{q}^n(u), \underline{p}_1(u), \dots, \underline{p}_n(u)), \\ \frac{d\underline{p}_i(u)}{du} &= F_i(\underline{q}^1(u), \dots, \underline{q}^n(u), \underline{p}_1(u), \dots, \underline{p}_n(u)); \end{aligned}$$

edellisissä yhtälöissä on käytetty käyrälle parametria u , sillä jatkossa tarkastellaan tapauksia, missä radan parametri ei ole universaaliaika t . Tarkastellaan seuraavaksi erikoistapausta, missä vektorikenttä syntyy funktiosta.

⁹⁷Yleinen 1-muoto olisi muotoa $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})dq^i + g^i(\mathbf{q}, \mathbf{p})dp_i$. Nyt $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p_i$ ja $g^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$. 1-muotoja, joille $g^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$, sanotaan *horisontaalisiksi*. Esim. $\Lambda|_{(\mathbf{m}, \omega)} = \omega_i dq^i|_{(\mathbf{m}, \omega)}$ saadaan ‘vetämällä’ (pull-back) $\omega = \omega_i dq^i|_{\mathbf{m}}$ kantamoniston pisteeltä $\mathbf{m} \in M$ kimpun TM^* säikeen $TM^*_\mathbf{m}$ pisteelle (\mathbf{m}, ω) kovektoriksi $\omega_i dq^i|_{(\mathbf{m}, \omega)}$.

⁹⁸Lokaalisti α on \mathbb{R}^{2n} :n käyrä $u \mapsto (\underline{q}^1(u), \dots, \underline{q}^n(u), \underline{p}_1(u), \dots, \underline{p}_n(u))$.

⁹⁹Sillä $\Omega^{-1}(\sum_{i=1}^n F_i dq^i - V^i dp_i) = \sum_{i=1}^n (-V^i) \partial / \partial q^i + F_i \partial / \partial p_i = X$.

Olkoon $f : TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ (sileä) funktio. Määritellään 1-muoto (lokaalisti)

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i$$

ja funktion f generoima vektorikenttä

$$X_f := -\Omega^{-1}(df) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

jonka integraalikäyrä toteuttaa yhtälöt $\dot{\mathbf{q}} = -\partial f / \partial \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = \partial f / \partial \mathbf{q}$ eli

$$\begin{aligned} \frac{dq^i(u)}{du} &= \frac{\partial f}{\partial p_i}(q^1(u), \dots, q^n(u), p_1(u), \dots, p_n(u)), \\ \frac{dp_i(u)}{du} &= -\frac{\partial f}{\partial q^i}(q^1(u), \dots, q^n(u), p_1(u), \dots, p_n(u)); \end{aligned}$$

nyt sanotaan, että (integraali)käyrä on funktion f generoima. Erityisesti jos valitaan $u = t$ (aika) ja $f = H$ (Hamiltonin funktio), niin saadaan Hamiltonin vektorikenttä

$$X_H = -\Omega^{-1}(dH) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

jonka generoimat liikkeet toteuttaa Hamiltonin yhtälöt (katso esimerkki 42). Täten liike faasiavaruudessa (aikamuunnos tai evoluutio) on Hamiltonin funktion generoima.

Yhteenveto:

1. Fysikaalisen systeemin faasiavaruus on konfiguraatioavaruuden M kotangenttikimppu TM^* .
2. Faasiavaruus sisältää (kanonisen) symplektisen muodon Ω .
3. Faasiavaruuden joka pisteen ympäristössä on (kanoninen) kartta (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , jonka avulla esitettyinä $\Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$.
4. Symplektisen muodon avulla voidaan jokaiseen funktioon¹⁰⁰ f liittää vektorikenttä $-\Omega^{-1}(df)$, jonka integraalikäyrät toteuttavat yhtälöt $\dot{\mathbf{q}} = \partial f / \partial \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial f / \partial \mathbf{q}$.
5. Erityisesti liikkeen generoi Hamiltonin funktio ($u = t$, $f = H$).

¹⁰⁰Faasiavaruuden funktiot $TM^* \rightarrow \mathbb{R}$ ovat fysikaalisia suureita.

17.1 Yleistetty faasiavaruus

Edellä oleva rakenne voidaan yleistää: Olkoon S $2n$ -ulotteinen monisto ja $\Omega \in \mathcal{T}_2^0 S$. Jos joka pisteen $s \in S$ jossain ympäristössä U on kartta $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, jossa

$$\Omega = \sum_{i=1}^n d\xi^{i+n} \wedge d\xi^i,$$

niin sanotaan, että Ω on *symplektinen muoto* ja ξ on *kanoninen (Hamiltonin tai Darbouxin) kartta*.¹⁰¹ Jos merkitään $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ eli $q^i := \xi^i$ ja $p^i := \xi^{i+n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, niin

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i.$$

Välittömästi nähdään, että kaikki edellä todetut kotangenttikimppun TM^* tulokset pätevät myös S :lle ja voidaan määritellä:

Määritelmä 12. $2n$ -ulotteinen (sileä) monisto S varustettuna symplektisellä muodolla Ω on symplektinen monisto tai Hamiltonin monisto. Fysikaalisen systeemin (yleistetty) faasiavaruus on symplektinen monisto (S, Ω) .

Huomautus 12. Kotangenttikimppu varustettuna Poincarén 2-muodolla on symplektinen monisto, mutta symplektinen monisto S ei välttämättä ole¹⁰² minkään moniston M kotangenttikimppu TM^* .

Symplektinen monisto (S, Ω) muistuttaa semi-Riemannin monistoa (M, g) . Symplektisen muodon avulla voidaan laskea ja nostaa indeksejä (musikaaliset isomorfismit) aivan kuten metriikan g avulla, mutta toisaalta Ω :n matriisi on antisymmetrinen ($\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$), kun taas g :n matriisi on symmetrinen ($g_{ij} = g_{ji}$). Fysikaalisesti tilanne on selkeä: Semi-Riemannin monisto (M, g) kuvaa systeemin konfiguraatiota. Esimerkiksi hiukkanen liikkuu 4-ulotteisella Lorentzin monistolla M , joka kuvaa vaikka mustaa aukkoa. Konfiguraatioavaruuden päälle rakennetaan symplektinen monisto $S = TM^*$, jonka avulla kuvataan systeemin dynamiikkaa (voimat tai Hamiltonin yhtälöt). Voitaisiin sanoa, että semi-Riemannin monisto on systeemin *kinematiikkaan* (liikkeeseen) liittyvä monisto ja symplektinen monisto systeemin *dynamiikkaan* (esim. ‘voimiin’) liittyvä monisto.

¹⁰¹Hienompi (yhtäpitävä) määritelmä: (1) Ω on antisymmetrinen eli $\Omega(v, w) = -\Omega(w, v)$ ja (2) $\Omega : TS \rightarrow TS^*$ on bijektio.

¹⁰²Esimerkiksi pallon pinta \mathbb{S}^2 voidaan varustaa symplektisellä muodolla (pinta-alamuoto $\Omega = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$ pallokoordinaateissa), mutta \mathbb{S}^2 on kompakti (‘suljettu ja rajoitettu’). Moniston kotangenttikimppu ei koskaan ole kompakti, sillä säikeet ($\cong \mathbb{R}^n$) eivät ole ‘rajoitettuja’.

Huomautus 13. Kanonisessa kartassa Ω :n $(2n \times 2n)$ -matriisi on muotoa

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

missä $\mathbf{0}$ ja $\mathbf{1}$ ovat $n \times n$ -nollamatriisi ja $-$ identiteettimatriisi $\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ vastaavasti. Matriisin Γ käänteismatriisi¹⁰³ on

$$\Gamma^{-1} = -\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Merkitään Γ :n matriisialkioita alaindeksillä Γ_{ij} ja käänteismatriisin Γ^{-1} matriisialkioita yläindeksillä Γ^{ij} . Erityisesti $\sum_{k=1}^{2n} \Gamma^{ik} \Gamma_{kj} = \delta_j^i$ ja siis

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{2n} \Gamma_{ij} d\xi^i \otimes d\xi^j = \sum_{i=1}^n d\xi^{i+n} \wedge d\xi^i$$

sekä

$$\Omega^{-1} = \sum_{i,j=1}^{2n} \Gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi^i} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^{i+n}} - \frac{\partial}{\partial \xi^{i+n}} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^i}.$$

Olkoon (S, Ω) symplektinen monisto, $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sen kanoninen kartta ja f sekä g (sileät) funktiot $S \rightarrow \mathbb{R}$. Määritellään f :n ja g :n *Poissonin sulku* (joka on sileä funktio $S \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} [f, g] &:= \Omega^{-1}(df, dg) = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \Gamma^{ij} \frac{\partial g}{\partial \xi^j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{\partial g}{\partial \xi^{i+n}} - \frac{\partial f}{\partial \xi^{i+n}} \frac{\partial g}{\partial \xi^i} \right) \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{2n} \Gamma^{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right) g = \Omega^{-1} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) g = \Omega^{-1}(df)g. \end{aligned}$$

Tai käyttämällä \mathbf{q} :ta ja \mathbf{p} :tä

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right).$$

Harjoitustehtävä 36. Olkoon $S = \mathbb{R}^2$ (eli $n = 1$) ja $\Omega = dp \wedge dq$, missä $(q, p) \in \mathbb{R}$ (ja on myös kanoninen kartta). Tarkastellaan hiukkasen (massa = 1) liikettä q -akselilla potentiaalissa $V(q)$ eli $H(q, p) = p^2/2 + V(q)$. Kirjoita Hamiltonin yhtälöt ja ratkaise ne niin pitkälle kun pystyt (vinkki: 1-ulotteinen liike mekaniikassa). Olkoon $f(q)$ ja $g(q, p) := p + q$ funktioita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Laske $[f, H]$, $[g, H]$ ja $[f, g]$. Oletetaan, että $[H, p] = 0$. Millainen on potentiaali $V(q)$ tällöin?

¹⁰³Sillä $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$

Harjoitustehtävä 37. Osoita, että kanonisten muuttujien (koordinaattien) \mathbf{q} ja \mathbf{p} ns. perus-sulut ovat

$$\begin{aligned} [q^i, p^j] &= -[p^i, q^j] = \delta^{ij}, \\ [q^i, q^j] &= 0, \quad [p^i, p^j] = 0 \end{aligned}$$

kaikille $i, j = 1, \dots, n$.¹⁰⁴ Osoita, että kaikilla (sileillä) funktioilla f, g, h ja reaalityyppisillä a, b ,

$$\begin{aligned} [af + bg, h] &= a[f, h] + b[g, h] \quad \text{ja} \\ [h, af + bg] &= a[h, f] + b[h, g] \quad (\text{bilineaarisuus}) \\ [f, f] = 0 &\iff [f, g] = -[g, f] \quad (\text{antisymmetrisyys}) \\ [f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] &= 0 \quad (\text{Jacobin identiteetti}) \\ [f, gh] &= [f, g]h + g[f, h] \quad (\text{derivaattaehto}). \end{aligned}$$

Matemaattisesti Poissonin sulut voidaan tulkita S :n funktioalgebran *derivaattana*. Eli jos merkitään $D_f := [\cdot, f]$, niin D_f toteuttaa tulon derivoimissäännön: $D_f(gh) = D_f(g)h + gD_f(h)$. Toisaalta, koska Poissonin sulku on bilineaarinen kuvaus sekä toteuttaa Jacobin identiteetin, niin funktioiden $S \rightarrow \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus varustettuna Poissonin sululla muodostaa (ääretönulotteisen) *Lien algebran*. Kun yhdistetään nämä rakenteet, niin funktioiden $S \rightarrow \mathbb{R}$ joukko on ns. *Poissonin algebra*. Symplektinen monisto voidaan vielä yleistää *Poissonin monistoksi*, joka on monisto, jonka funktioiden joukko on varustettu tulolla, joka tekee siitä Poissonin algebran.

Tämän rakenteen merkitys tulee esiin lähinnä siirryttäessä faasiavaruuskvanttimekaniikkaan. Hieman vihiä tästä saadaan huomaamalla, että funktioiden $S \rightarrow \mathbb{R}$ joukko voidaan varustaa kahdella eri tulolla: $fg = gf$ (symmetrinen) ja $[f, g] = -[g, f]$ (antisymmetrinen). Kvanttimekaniikassa esiintyy myös vastaavan tyyppiset tulot: operaattorialgebran (esim. matriisien A ja B) antikommutaattori $[A, B]_+ := AB + BA$ (symmetrinen) ja kommutaattori $[A, B]_- := AB - BA$ (antisymmetrinen). Jos tunnetaan klassinen rakenne, niin kvanttimekaniikasta rakennetta voidaan yrittää etsiä ‘korvaamalla’ klassiset tulot kvanttikommutaattoreilla (tosin tämä on hieman ‘vanhanaikainen’ tapa). Seuraavassa kappaleessa tutkitaan tarkemmin Poissonin sulkujen fysikaalista merkitystä.

¹⁰⁴Jos $V \subseteq S$ on avoin alimonisto, niin Poissonin sulku voidaan vastaavasti määritellä mille tahansa (sileille) funktioille $V \rightarrow \mathbb{R}$. Nyt V on symplektinen monisto, kun se varustetaan Ω :n rajoittumalla V :lle.

Harjoitustehtävä 38. Mielivaltaisen moniston M vektorikentille X ja Y voidaan määritellä kommutaattori $[X, Y]_- := XY - YX$ (joka tekee vektorikenttien muodostamasta vektoriavaruudesta Lien algebran).

a) Osoita, että $[X, Y]_-$ on myös vektorikenttä. (Vinkki: ilmaise X ja Y kartassa \mathbf{q} eli esim. $Y = Y^j \partial / \partial q^j$ ja osoita, että toisen kertaluvun osittaisderivaattaoperaattorit kumoutuvat.)

Tarkastellaan sitten symplektistä monistoa (S, Ω) ja määritellään funktioille $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ vektorikentät $X_f := \Omega^{-1}(df) = -X_f$.

b) Osoita, että $X_{[f, g]} = [X_f, X_g]_-$ (eli lineaarikuvaus $f \mapsto X_f$ on ns. Lien algebrahomomorfismi eli säilyttää Lien algebran rakenteen).

18 FYS: Tilat, suureet ja liikevakiot

Olkoon (S, Ω) fysikaalisen systeemin faasiavaruus (eli symplektinen monisto). Relativistisessa mekaniikassa S sisältää ajanluonteisen koordinaatin (esim. x^0 tai q^0), mutta ajasta riippuvassa klassisessa mekaniikassa aika pitää lisätä monistoon S . Esim. tällöin voidaan määritellä *tila-avaruus* $\mathcal{S} = \mathcal{T} \times S$, missä \mathcal{T} on ‘aika-akseli’ (ja merkitään $t \in \mathcal{T}$). Relativistisessa tapauksessa tila-avaruus on vain $\mathcal{S} = S$, joten tarkastellaan jatkossa ajasta riippuvaa klassista mekaniikkaa. Itseasiassa relativistinen tapaus nähdään heti tämän erikoistapauksena eli unohdetaan vain funktioiden t -riippuvuus, ajatellaan aikaa \mathbf{q} :n nollantena komponenttina q^0 ja käsitellään käyrien (liikkeen) parametria t mielivaltaisena parametrina – esim. ominaisaikana tai koordinaattiaikana q^0 . Alla olevissa kaavoissa voi merkitä tällöin esim. $t = \lambda$ tai $t = \tau$.

Tila-avaruuden pisteitä sanotaan (*puhtaiksi*) *tiloiksi*¹⁰⁵ ja (sileitä) funktioita $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ (*dynaamisiksi*) *muuttujiksi* tai (*klassisiksi/relativistisiksi*) *suureiksi*. Merkitään suurejoukkoa¹⁰⁶ symbolilla $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. Suureen f arvo tilassa $(t, s) \in \mathcal{S} = \mathcal{T} \times S$ (eli faasiavaruuden pisteessä s hetkellä t) on $f(t, s)$.¹⁰⁷ Triviaalisti suureen arvon tunteminen jokaisessa tilassa määrää suureen täysin. Jos suure on vektoriarvoinen (paikka, nopeus, voima, kiertoimpulssi, jne.), niin sen komponentit jonkun kannan suhteen ovat reaaliarvoisia funktioita eli suureita yllä olevassa mielessä.

Olkoon $H \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ Hamiltonin funktio, (\mathbf{q}, \mathbf{p}) kanoninen kartta ja (\mathbf{q}, \mathbf{p}) liike *Hamiltonin systeemissä* (\mathcal{S}, H) eli (\mathbf{q}, \mathbf{p}) toteuttaa *Hamiltonin (kanoniset) (liike)yhtälöt*

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)), \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)).$$

Jos mielivaltainen ‘alkutila’ $(t_a, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a)$ on annettu, löytyy aina liike joka toteuttaa kyseisen alkuehdon. Relativistisessa mekaniikassa tilanne on helpompi, sillä nyt ‘alkutila’ $(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a)$ sisältää jo ‘alkuajan’ q_a^0 . Liikkeen (yleisen) parametrin λ (‘=’ t) alkuarvolla ei ole merkitystä.

Kaikille $f \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ voidaan määritellä *dynaamisen muuttujan f arvo* (H :n generoimalla) *radalla* (\mathbf{q}, \mathbf{p}) *hetkellä t :*

$$\underline{f}(t) := f(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t)).$$

¹⁰⁵‘Epäpuhtaat’ tilat olisivat todennäköisyysjakaumia (mittoja) tila-avaruudessa \mathcal{S} . Puhtaat tilat ovat yksittäisiin pisteisiin keskittyneitä todennäköisyysjakaumia, ns. Diracin mittoja tai Diracin δ :oja.

¹⁰⁶Siis $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ on vektorivaruus $((af + bg)(s) = af(s) + bg(s))$, funktioalgebra (algebratulo $(fg)(s) := f(s)g(s)$), Lien algebra (Lien tulona Poissonin sulku) ja vielä Poissonin algebra.

¹⁰⁷Kvanttimekaniikassa tilanne on monimutkaisempi: tilat ovat ns. ‘tiheysoperaattoreita’ (jäljen 1 positiivisia operaattoreita) ja suureet normitettuja positiiviopeaattorimittoja kvanttisysteemin Hilbertin avaruudessa.

Ketjusääntöä ja Hamiltonin yhtälöitä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q^i} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} \frac{dq^i(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p^i} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} \frac{dp^i(t)}{dt} \right] + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q^i} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} \frac{\partial H}{\partial p^i} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} \right] + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))} \\ &= \left([f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t)) = (X_{H'} f) (t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t)), \end{aligned}$$

missä

$$X_{H'} = X_H + \frac{\partial}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right) + \frac{\partial}{\partial t}$$

on tila-avaruuteen laajennettu Hamiltonin vektorikenttä, joka saadaan (tarvittaessa) funktiosta $H' = p^0 + H$ ja laajennetuista Poissonin suluista ($q^0 = t$)

$$\begin{aligned} [f, g]' &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial p^0} - \frac{\partial f}{\partial p^0} \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], \quad \text{jos } f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}) \text{ ja } g = H' = p^0 + H, \end{aligned}$$

jotka taasen määrää laajennettu symplektinen muoto

$$\Omega' = \sum_{i=0}^n dp^i \wedge dq^i = dp^0 \wedge dt + \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i = dp^0 \wedge dt + \Omega$$

(esim.) avaruudessa $T\mathcal{T}^* \times S$, joka ‘sisältää’ siis q^0 :n kanonisesti konjugoidun momentin p^0 . Huom! Jos $\mathcal{S} = S$ (esim. relativistinen tapaus), X_H :ta ei tarvitse laajentaa mihinkään ja voidaan olettaa alla olevissa laskuissa, että $H' = H$, $X_{H'} = X_H$ ja funktiot $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ eivät sisällä ‘parametria’ t eli korvaa $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ funktiolla $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f(q^0, q^1, \dots, p^0, p^1, \dots)$ (joten voit olettaa alla, että $\partial f / \partial t = 0$).

Merkitään lyhyesti¹⁰⁸ $\dot{f} = [f, H] + \partial f / \partial t$. Erityisesti saadaan $\dot{H} = \partial H / \partial t$ ja Hamiltonin yhtälöt $\dot{q}^i = [q^i, H] = \partial H / \partial p^i$ ja $\dot{p}^i = [p^i, H] = -\partial H / \partial q^i$.

Olkoon \mathcal{S} tila-avaruus, $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ kanoninen kartta ja $X : \mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S}$ vektorikenttä. Jos \mathcal{S} on muotoa $\mathcal{T} \times S$, niin oletetaan, että

$$X|_{(t,s)} := \sum_{i=1}^{2n} X^i(t, s) \frac{\partial}{\partial \xi^i} \Big|_{(t,s)} + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,s)}$$

¹⁰⁸Voitaisiin määritellä eräänlainen H :n generoima ‘totaaliderivaatta’ $d/dt := [\cdot, H] + \partial/\partial t = D_H + \partial/\partial t$, missä $D_H = [\cdot, H] = X_H$ on aiemmin määritelty algebraderivaatta. Nyt $\dot{f} = df/dt$, $d\underline{f}(t)/dt = (df/dt)(t, \underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))$ ja d/dt on myös algebraderivaatta $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Laajennetussa avaruudessa $d/dt = [\cdot, H']' = D_{H'} = X_{H'}$.

eli $X^0 \equiv 1$. Seuraava lause, ns. *Poissonin sulkuteoreema*, karakterisoi Hamiltonin vektorikentät (tai siis funktioiden $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ generoimat vektorikentät X_f):¹⁰⁹

Lause 4. *Olkoon \mathcal{S} kutistuva. Vektorikenttä $X = X_{H'}$ jollekin $H \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, jos ja vain jos kaikille $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$*

$$X[f, g] = [Xf, g] + [f, Xg]$$

Todistus. Olkoon $X = X_{H'}$. Täten

$$\begin{aligned} X[f, g] &= [[f, g], H] + \frac{\partial[f, g]}{\partial t} = [f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [\partial_t f, g] + [f, \partial_t g] \\ &= [[f, H], g] + [\partial_t f, g] + [f, [g, H]] + [f, \partial_t g] = [Xf, g] + [f, Xg], \end{aligned}$$

missä on käytetty Jacobin identiteettiä, Poissonin sulun bilineaarisuutta ja antisymmetrisyyttä.

Käänteinen todistus perustuu Poincarén lemmaan (Lemma 3):

Oletetaan, että $X[f, g] = [Xf, g] + [f, Xg]$ ja määritellään 1-muoto $\Omega(X) = \Gamma_{ij} X^i d\xi^j$, jolle

$$d\Omega(X) = \frac{1}{2} \Gamma_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k} d\xi^k \wedge d\xi^j = \frac{1}{4} \Gamma_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k} d\xi^k \wedge d\xi^j + \frac{1}{4} \Gamma_{ik} \frac{\partial X^i}{\partial \xi^j} \underbrace{d\xi^j \wedge d\xi^k}_{= -d\xi^k \wedge d\xi^j} = 0,$$

sillä $0 = X\Gamma^{ij} = X[\xi^i, \xi^j] = [X\xi^i, \xi^j] + [\xi^i, X\xi^j] = [X^i, \xi^j] + [\xi^i, X^j] = \Gamma^{kj} \partial X^i / \partial \xi^k + \Gamma^{ik} \partial X^j / \partial \xi^k$ ja täten $\Gamma_{ij} \partial X^i / \partial \xi^k = \Gamma_{ik} \partial X^i / \partial \xi^j$. **!** Poincarén lemmän nojalla on siis olemassa funktio $H : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että $\Omega(X) = -dH$ eli $X = -\Omega^{-1}(dH) + \partial/\partial t = X_H + \partial/\partial t = X_{H'}$. \square

Huomautus 14. Lauseen ‘vain jos’-puoli pätee vaikkei \mathcal{S} olisi kutistuva, mutta ‘jos’-suunta toimii vain lokaalisti. Nimittäin jos \mathcal{S} ei ole kutistuva (esim. $\mathcal{S} = \mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n}$ tai $\mathcal{S} = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$), niin jokaisella pisteellä $(t, s) \in \mathcal{S}$ on kutistuva (avoin) ympäristö¹¹⁰ $U_{(t,s)} \subseteq \mathcal{S}$. Nyt lauseessa voidaan korvata \mathcal{S} avoimella kutistuvalla alimonistolla $U = U_{(t,s)}$, joten löytyy *lokaali Hamiltonin funktio* $H_U : U \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $X = X_{H_U} + \partial/\partial t$ joukossa U . Eli nyt Hamiltonin funktioita voi olla monta vastaten eri joukkoja U ! Rajoittumalla tarvittaessa \mathcal{S} :n kutistuvaan avoimeen joukkoon voidaan jatkossa aina olettaa ilman eri mainintaa, että \mathcal{S} on kutistuva.

¹⁰⁹Poissonin sulkuteoreema tarkoittaa olennaisesti sitä, että vektorikenttä X on yhteensopiva Poissonin sulkujen kanssa (eli $X[f, g] = [Xf, g] + [f, Xg]$ eli X on toteuttaa tulon derivointisäännön algebratulon $[f, g]$ suhteen ja on täten ko. Lien algebran derivaatta), joss se kuuluu Lien algebrahomomorfismin $\mathbb{X} : f \mapsto X_f = -X_f$ kuvajoukkoon (ks. harjoitus 37 b). Lisäksi $[f, g] = \Omega(X_g, X_f)$. Kaikki vektorikentät eivät ole muotoa X_f !

¹¹⁰Ota joku kartta (jonka määrittelyalue sisältää ko. pisteen) ja määrittele kartan kuva-avaruudessa pieni avoin pallo (sisältäen pisteen kuvan), joka selvästikin on kutistuva. Kuvaa pallo takaisin \mathcal{S} :lle kartan käänteiskuvauksella. Tässä on kutistuva $U_{(t,s)}$.

Usein Poissonin suluteoreema ilmaistaan hiukan epätäsmällisesti sanomalla, että (vektorikentän X generoimat) liikkeet generoi joku Hamiltonin funktio H , jos ja vain jos kaikille dynaamisille muuttujille f ja g

$$\frac{d}{dt}[f, g] = [\dot{f}, g] + [f, \dot{g}].$$

Harjoitustehtävä 39. Olkoon M monisto, \mathbf{q} sen kartta ja (\mathbf{q}, \mathbf{p}) faasiavaruuden TM^* kanoninen kartta. Mielivaltainen vektorikenttä X monistolla M on lokaalisti muotoa

$$X = X^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Määritellään X :n kanoninen nosto faasiavaruuteen TM^* vektorikenttänä

$$\tilde{X} := X^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} - p_j \frac{\partial X^j(\mathbf{q})}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Osoita, että \tilde{X} on Hamiltonin vektorikenttä eli $\tilde{X} = X_H$. Etsi H . Vinkki: suora lasku toimii parhaiten.

Esimerkki 43. Olkoon faasiavaruus $S = \mathbb{R}^2$, S :n piste (ja kanoninen kartta) (q, p) ja $\Omega = dp \wedge dq$. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} \dot{q} &= qp, \\ \dot{p} &= -qp, \end{aligned}$$

eli nyt $X = qp\partial/\partial q - qp\partial/\partial p + \partial/\partial t$. Liike ei synny Hamiltonin funktiosta $H(q, p, t)$, sillä Poissonin sulut $X[q, p] = X1 = 0$ ja $[Xq, p] + [q, Xp] = [qp, p] + [q, -qp] = p - q \neq 0$ (tämän näkee suoraakin). Jos määritellään uusi kartta $Q(q, p) = \ln(qp)$ ja $P(q, p) = p - q$ (jonka määrittelyalue on $U := \{(q, p) \mid qp > 0\}$), niin saadaan [!]

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P}, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q}, \end{aligned}$$

missä $H(Q, P, t) := P^2/2 + 2e^Q$. Mutta nyt kartta (Q, P) ei ole kanoninen,¹¹¹ sillä

$$\tilde{\Omega} := dP \wedge dQ = (q^{-1} + p^{-1}) dp \wedge dq \neq \Omega.$$

Tämän esimerkin nojalla ollaan päädytty kahteen peruskysymykseen:

¹¹¹Muoto $\tilde{\Omega}$ on kyllä symplektinen muoto (S :n avoimessa alimonistossa U), mutta koska $\tilde{\Omega} \neq \Omega$, niin se määrää monistoon U toisen (symplektisen) rakenteen ja Poissonin sulut kuin Ω ; avaruudet (U, Ω) ja $(U, \tilde{\Omega})$ ovat siis erilaisia (symplektisiä) avaruuksia. Myöhemmin tarkastellaan kanonisia karttoja lisää...

1. Onko annettu differentiaaliyhtälö(ryhmä) jonkun Hamiltonin funktion Hamiltonin yhtälöt? Eli toisin sanoen onko kyseisen yhtälön vektorikenttä X Hamiltonin vektorikenttä X_H . Jos vastaus on negatiivinen päädytään jatkokysymykseen:
2. Onko kenties löydettävissä (uusi) symplektinen muoto siten, että $X = X_H$ tämän (uuden) muodon suhteen?

Lopuksi tarkastellaan vielä liikevakioita.

Olkoon $\Xi : (t_0, t_1) \rightarrow \mathcal{S}$ liike (sileä käyrä). Dynaaminen muuttuja f on (liike)vakio liikkeen Ξ suhteen, jos $df(\Xi(t))/dt = 0$ kaikilla $t \in (t_0, t_1)$. Dynaaminen muuttuja on (liike)vakio X :n suhteen (X on \mathcal{S} :n vektorikenttä), jos se on liikevakio kaikkien X :n generoimien liikkeiden suhteen. Dynaaminen muuttuja on (Hamiltonin systeemin (\mathcal{S}, H)) liikevakio, jos se on liikevakio X_H :n suhteen. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että [!]

$$X_H f = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Erityisesti, jos $\partial f/\partial t = 0$, niin f on liikevakio, joss $[f, H] = 0$. Tästä seuraa, että jos $\partial H/\partial t = 0$, niin Hamiltonin funktio (usein kokonaisenergia) H on liikevakio. Poissonin sulkuteoreemasta seuraa välittömästi [!] *Poissonin lause*:

Lause 5. Jos dynaamiset muuttujat f ja g ovat Hamiltonin systeemin liikevakioita, niin on myös $[f, g]$.

Hamiltonin systeemin liikevakioita voidaan etsiä ensin tutkimalla dynaamisten muuttujien Poissonin sulkua Hamiltonin funktion kanssa ja sitten tutkia saatujen liikevakioiden keskinäisiä Poissonin sulkua. Seuraavaksi tarkastellaan tapauksia, missä Hamiltonin funktion symmetriat määrävät liikevakioita.

Harjoitustehtävä 40. Kappale (massa m) liikkuu xy -tasossa potentiaalissa $V(x, y)$. Olkoon p_x (vastaavasti p_y) koordinaatin x (vast. y) kanonisesti konjugoitu momentti. Mikä on systeemin Hamiltonin funktio H ? Onko se liikevakio? Milloin $L := xp_y \pm yp_x$ liikevakio (eli mitä muotoa V :n pitää tällöin olla)? Entä t , x , p_x tai $K := p_x t - xm$? Laske joitain sulkua $[x, L]$, $[p_x, L]$ jne. löytääksesi uusia liikevakioita. Vinkki: käytä napakoordinaatteja L :n tapauksessa.

19 FYS: Faasiavaruuden muunnokset

Olkoon M monisto ja X sen vektorikenttä. Käytetään yleistä parametria $u \in \mathbb{R}$ kaikille X :n integraalikäyrille α . Picardin-Lindelöfin lauseesta tiedetään, että mv. alkuarvolle $(u = 0, \mathbf{m})$, $\mathbf{m} \in M$, löytyy yksikäsitteinen (maksimaalinen) integraalikäyrä $\alpha_{\mathbf{m}} : (u_0, u_1) \rightarrow M$ siten, että $0 \in (u_0, u_1)$ ja $\alpha_{\mathbf{m}}(0) = \mathbf{m}$ (sekä tietenkin käyrän tangenttivektori eli ‘nopeus’, kun $u = 0$, on $\dot{\alpha}_{\mathbf{m}}(0) = X|_{\mathbf{m}} \in TM_{\mathbf{m}}$). Merkitään $\Phi_u(\mathbf{m}) := \alpha_{\mathbf{m}}(u)$. Mutta lause sanoo vielä enemmänkin:

Kaikilla $\mathbf{m} \in M$ on olemassa (avoin) ympäristö $M' \subseteq M$ (siis $\mathbf{m} \in M'$) ja väli (u_0, u_1) , $u_0 < 0 < u_1$, siten, että kaikilla $\mathbf{m}' \in M'$, on olemassa X :n integraalikäyrä $\alpha_{\mathbf{m}'} : (u_0, u_1) \rightarrow M$ (jolle siis $\alpha_{\mathbf{m}'}(0) = \mathbf{m}'$). Kaikilla käyrillä $\alpha_{\mathbf{m}'}$ on siis sama pisteestä $\mathbf{m}' \in M'$ riippumaton määrittelyarvo (u_0, u_1) .

Näin ollaan saatu jokaisella $u \in (u_0, u_1)$ X :n generoima lokaali M :n muunnos

$$\Phi_u : M' \rightarrow M, \quad \mathbf{m}' \mapsto \Phi_u(\mathbf{m}') = \alpha_{\mathbf{m}'}(u)$$

ja täten kuvaus, ns. X :n generoima lokaali virtaus¹¹²

$$\Phi : (u_0, u_1) \times M' \rightarrow M, \quad (u, \mathbf{m}') \mapsto \Phi_u(\mathbf{m}')$$

Muunnos Φ_u siirtää siis (mielivaltaisen) pisteen \mathbf{m} ympäristön M' jokaisen pisteen \mathbf{m}' vektorikentän X :n ‘integraalikäyriä pitkin’ pisteeksi $\alpha_{\mathbf{m}'}(u)$. Erityisesti kun $u = 0$, niin $\Phi_0(\mathbf{m}') = \mathbf{m}'$ eli Φ_0 on M' :n identiteettimuunnos ja laajenee triviaalisti koko M :n identiteettimuunnokseksi.

Huom! Monissa sovelluksissa X on sellainen, että joukoksi M' voidaan valita koko M ja väliksi (u_0, u_1) koko \mathbb{R} . Tällöin sanotaan, että Φ on X :n generoima virtaus. Koska tiedetään, että jokaisen pisteen \mathbf{m} ympäristössä on määritelty vähintäänkin lokaali virtaus, niin jatkossa ei kiinnitetä huomiota M' :n ja välin (u_0, u_1) valintaan (ne selviävät kyllä sitten jalka integraalikäyrät on ratkaisu).

Olkoon $\mathbf{m} \in M$. Koska (maksimaaliset) integraalikäyrät ovat yksikäsitteisiä, niin

$$(\Phi_{u'} \circ \Phi_u)(\mathbf{m}) = \Phi_{u'}(\alpha_{\mathbf{m}}(u)) = \alpha_{\mathbf{m}}(u + u') = \Phi_{u+u'}(\mathbf{m}),$$

¹¹²Koska piste \mathbf{m} on mielivaltainen, jokaisen faasiavaruuden pisteen jossain ympäristössä M' on määritelty lokaali virtaus $u \mapsto \Phi_u$. Jos ympäristöä M' suurennetaan, niin väliä (u_0, u_1) saatetaan joutua pienentämään ja kääntäen. Kaikille X :n generoimille lokaaleille muunnoksille käytetään samaa merkintää Φ_u olivatpa $M' \subseteq M$ ja $(u_0, u_1) \subseteq \mathbb{R}$ mitä tahansa sopivia joukkoja.

missä u ja u' ovat riittävän lähellä nollaa.¹¹³ Erityisesti yhtälöstä $\Phi_{u'}(\alpha_m(u)) = \alpha_m(u + u')$ nähdään, että $\Phi_{u'}$ on tulkittavissa lokaalina (X :ään liittyvän) parametrin u siirtana (tai translaationa) $u \mapsto u + u'$.

Huomautus 15. Jos α on vektorikentän X integraalikäyrä eli $\dot{\alpha} = X \circ \alpha$ tai kartassa \mathbf{q} ilmaistuna

$$\frac{d\mathbf{q}^i(u)}{du} = X^i(\mathbf{q}(u)),$$

niin saadaan vektorikentän aX , $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, integraalikäyrä α_a pienellä muokkauksella: Määritellään uusi parametri $u_a := u/a$ ja $\mathbf{q}_a(u_a) := \mathbf{q}(u) = \mathbf{q}(au_a)$, joten

$$aX^i(\mathbf{q}_a(u_a)) = aX^i(\mathbf{q}(u)) = a \frac{d\mathbf{q}^i(u)}{du} = a \frac{d\mathbf{q}_a^i(u_a)}{du_a} \frac{du_a}{du} = \frac{d\mathbf{q}_a^i(u_a)}{du_a}$$

ja täten käyrä $u_a \mapsto \alpha_a(u_a) := \alpha(u) = \alpha(au_a)$ on aX :n integraalikäyrä (eli vain käyrän parametria skaalataan a :lla). Tietenkin voidaan tämän jälkeen palata takaisin yleiseen käyrän parametrin symboliin u eli sijoittaa u_a :n tilalle u eli $u \mapsto \alpha(au)$ on aX :n integraalikäyrä mikäli α on X :n generoima. Erityisesti $-X$:n integraalikäyrä on $u \mapsto \alpha(-u)$ eli $-X$:n virtaus on muuten sama kuin X :llä, paitsi siirretään pisteitä vastakkaiseen suuntaan (X :n integraalikäyriä pitkin).

Harjoitustehtävä 41. Tarkastellaan tasoa \mathbb{R}^2 . Olkoon Φ vektorikentän $X = X^1(x, y)\partial/\partial x + X^2(x, y)\partial/\partial y$ virtaus. Ratkaise (lokaali) \mathbb{R}^2 :n muunnos Φ_u , kun

- a) $X^1(x, y) = x^2$ ja $X^2(x, y) = y$,
- b) $X^1(x, y) = xy$ ja $X^2(x, y) = 1$.

Tarkastellaan sitten Hamiltonin mekaniikkaa faasiavaruudessa. Huomaa, että harjoitustehtävän 39 nojalla M :n vektorikenttä X voidaan aina nostaa faasiavaruuteen TM^* jonkun funktion H generoimaksi vektorikentäksi X_H , joten X :n generoima (lokaali) M :n muunnos Φ_u voidaan laajentaa X_H :n generoimaksi (lokaaliksi) TM^* :n muunnokseksi.

Olkoon (S, Ω) faasiavaruus, (\mathbf{q}, \mathbf{p}) sen kanoninen kartta ja \mathcal{S} tila-avaruus. Osoitetaan aluksi, että Hamiltonin funktio $H \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ generoi aikasiirrot: Nyt $u = t$ ja (laajennetun) Hamiltonin vektorikentän X_H integraalikäyrä eli liike $\alpha_{(0,s)}$ alkuehdolla ($t = 0, s$) toteuttaa Hamiltonin liikeyhtälöt (eli hetkellä $t = 0$ systeemi on pisteessä $s \in S$). Koska muunnos $\Phi_t(s) = \alpha_{(0,s)}(t)$ toteuttaa yhtälön

$$\Phi_{t'}(\alpha_{(0,s)}(t)) = \alpha_{(0,s)}(t + t')$$

¹¹³Eli Φ on lokaalin ryhmän (u_0, u_1) esitys ja X on sen infinitesimaalinen generaattori.

nähdään, että $\Phi_{t'}$ 'siirtää aikaa' t' :n verran.

Olkoon sitten $f \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ suure, jota ei tulkita nyt Hamiltonin funktiona. Kiinnitetään hetki $t \in \mathbb{R}$ ja ajatellaan tila-avaruuden funktiota f faasiavaruuden funktiona $f_t(s) := f(t, s)$. Jos f ei riipu ajasta eli $\partial f / \partial t = 0$, niin merkitään lyhyesti $f_t = f$. Funktioon f_t liitetyn vektorikentän

$$X_{f_t} := -\Omega^{-1}(df_t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_t}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f_t}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i},$$

integraalikäyrät toteuttavat yhtälöt $\dot{\mathbf{q}} = \partial f_t / \partial \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial f_t / \partial \mathbf{q}$ eli

$$\begin{aligned} \frac{dq^i(u)}{du} &= \frac{\partial f}{\partial p^i}(t, q^1(u), \dots, q^n(u), p^1(u), \dots, p^n(u)), \\ \frac{dp^i(u)}{du} &= -\frac{\partial f}{\partial q^i}(t, q^1(u), \dots, q^n(u), p^1(u), \dots, p^n(u)). \end{aligned} \quad (24)$$

Kiinnitetään piste $s \in S$, jota siis vastaa kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) vektori $(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)) \in \mathbb{R}^{2n}$. Olkoon $u \mapsto (\underline{\mathbf{q}}_{s,t}(u), \underline{\mathbf{p}}_{s,t}(u))$ vektorikentän X_{f_t} integraalikäyrä¹¹⁴ esitettyinä kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , jonka alkuehtoina ovat $\underline{\mathbf{q}}_{s,t}(0) = \mathbf{q}(s)$ ja $\underline{\mathbf{p}}_{s,t}(0) = \mathbf{p}(s)$. Jos f ei riipu ajasta, merkitään lyhyesti $(\underline{\mathbf{q}}_s(u), \underline{\mathbf{p}}_s(u)) = (\underline{\mathbf{q}}_{s,t}(u), \underline{\mathbf{p}}_{s,t}(u))$. Vastaavasti kuin yleisessä tapauksessa voidaan määritellä f :n generoima (lokaali) faasiavaruuden S muunnos (hetkellä t): kiinnitetään parametrin arvo u ja 'siirretään piste' s pisteeseen, jonka koordinaatit ovat $(\underline{\mathbf{q}}_{s,t}(u), \underline{\mathbf{p}}_{s,t}(u))$. Virtausta sanotaan nyt *faasivirraksi*.

Esimerkki 44. Jos $f = -q^j$, niin yhtälöt (24) redusoituvat muotoon

$$\begin{aligned} \frac{dq^i(u)}{du} &= 0, \\ \frac{dp^i(u)}{du} &= \delta_j^i. \end{aligned}$$

Yhtälöt on helppo ratkaista. Saadaan alkuehdoilla $\mathbf{q} = \mathbf{q}(s)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$, $u = 0$,

$$\begin{aligned} \underline{q}_s^i(u) &= q^i(s), \\ \underline{p}_s^i(u) &= p^i(s), \quad i \neq j, \\ \underline{p}_s^j(u) &= u + p^j(s). \end{aligned}$$

Pisteet siirtyy siis p^j -koordinaattikäyriä pitkin (muitten koordinaattien pysyessä vakioina), mikä ei ole yllätys, sillä $\Omega^{-1}(dq^j) = \partial / \partial p^j$ on koordinaattivektorikenttä. Samalla tavalla nähdään,

¹¹⁴Huomaa jälleen, että integraalikäyrien $(\underline{\mathbf{q}}_{s,t}, \underline{\mathbf{p}}_{s,t})$ ei tarvitse olla määritelty kaikilla parametrin u arvoilla; usein ne on määritelty vain jollain välillä (u_0, u_1) , missä $u_0 < 0 < u_1$.

että valinta $f = p^j$, jolle $-\Omega^{-1}(dp^j) = \partial/\partial q^j$, johtaa yhtälöihin

$$\begin{aligned}\frac{dq^i(u)}{du} &= \delta_j^i, \\ \frac{dp^i(u)}{du} &= 0,\end{aligned}$$

ja muunnokseen $\underline{q}_s^j(u) = u + q^j(s)$ muiden koordinaattien pysyessä vakioina.

Esimerkki 45. Olkoon nyt $j \neq k$ ja $f = q^j p^k - q^k p^j$. Yhtälöt (24) ovat muotoa

$$\begin{aligned}\frac{dq^i(u)}{du} &= 0 = \frac{dp^i(u)}{du}, \quad i \neq j, i \neq k, \\ \frac{dq^j(u)}{du} &= -\underline{q}^k(u), \\ \frac{dq^k(u)}{du} &= \underline{q}^j(u), \\ \frac{dp^j(u)}{du} &= -\underline{p}^k(u), \\ \frac{dp^k(u)}{du} &= \underline{p}^j(u).\end{aligned}$$

Alkuehdoilla $\mathbf{q} = \mathbf{q}(s)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$, $u = 0$, ratkaisu on

$$\begin{aligned}\underline{q}_s^i(u) &= q^i(s), \quad i \neq j, i \neq k, \\ \underline{p}_s^i(u) &= p^i(s), \quad i \neq j, i \neq k, \\ \underline{q}_s^j(u) &= q^j(s) \cos u - q^k(s) \sin u, \\ \underline{q}_s^k(u) &= q^j(s) \sin u + q^k(s) \cos u, \\ \underline{p}_s^j(u) &= p^j(s) \cos u - p^k(s) \sin u, \\ \underline{p}_s^k(u) &= p^j(s) \sin u + p^k(s) \cos u,\end{aligned}$$

eli ‘kierto’ kulman u verran (q^j, q^k) -tasossa ja (p^j, p^k) -tasossa. Muunnoksen generoi vektorikenttä

$$-\Omega^{-1}(d(q^j p^k - q^k p^j)) = q^j \frac{\partial}{\partial q^k} - q^k \frac{\partial}{\partial q^j} + p^j \frac{\partial}{\partial p^k} - p^k \frac{\partial}{\partial p^j}.$$

Erityisesti (q^j, q^k) -tason kierrot generoi vektorikenttä

$$L = q^j \frac{\partial}{\partial q^k} - q^k \frac{\partial}{\partial q^j},$$

jolla on merkitystä *kvanttimekaniikassa*, nimittäin siellä $-i\hbar L$ (i on imaginääriyksikkö ja \hbar Diracin vakio) on itseadjungoitu *kiertoimpulssioperaattori* (tai tarkemmin sen komponentti). Vastaavasti siirrot generoiva vektorikenttä $\partial/\partial q^j$ antaa kvanttimekaniikassa *impulssioperaattorin* $-i\hbar\partial/\partial q^j$.

Harjoitustehtävä 42. Tarkastellaan edellisen esimerkin muunnosta. Määrittele uudet koordinaatit $r = r(q^j, q^k)$, $\varphi = \varphi(q^j, q^k)$, $p^r = p^r(p^j, p^k)$ ja $p^\varphi = p^\varphi(p^j, p^k)$ siten, että niissä ilmaistuna faasiavaruuden muunnos on muotoa $\underline{r}_s(u) = \text{vakio}$, $\underline{\varphi}_s(u) = u + \text{vakio}$, $\underline{p}_s^r(u) = \text{vakio}$ ja $\underline{p}_s^\varphi(u) = u + \text{vakio}$. Ilmaise muunnoksen generoiva vektorikenttä

$$q^j \frac{\partial}{\partial q^k} - q^k \frac{\partial}{\partial q^j} + p^j \frac{\partial}{\partial p^k} - p^k \frac{\partial}{\partial p^j}$$

näissä uusissa koordinaateissa. Laske uusien muuttujien väliset Poissonin sulut $[r, p^r]$, $[r, \varphi]$, $[p^r, p^\varphi]$, jne.

Harjoitustehtävä 43. Olkoon $j \neq k$. Sijoita $f = -q^j p^k - q^k p^j$ yhtälöihin (24) ja ratkaise faasivirta. Näyttääkö Lorentzin muunnokselta? Mikä on parametri u nyt? Minkä muunnoksen generoi $-f$? Vinkki: edellinen esimerkki, eräs huomautus, \sinh ja \cosh .

Huomautus 16. Moniston M ($\dim M = n$) vektorikentän X generoima (lokaali) muunnos Φ_u nähdään (lokaalisti) kääntyväksi: kun u on pieni, niin $\Phi_{-u} \circ \Phi_u = \Phi_{u-u} = \Phi_0 = \text{id}$ eli Φ_{-u} on (lokaali) käänteismuunnos. Jos käytetään M :n karttaa $\phi = \mathbf{q}$, niin saadaan (lokaali) \mathbb{R}^n :n (kääntyvä) muunnos:

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \phi^{-1}(\mathbf{x}) \mapsto \Phi_u(\phi^{-1}(\mathbf{x})) \mapsto \phi(\Phi_u(\phi^{-1}(\mathbf{x}))) \in \mathbb{R}^n.$$

(Vastaavasti kartan vaihto $\mathbf{q} \mapsto \tilde{\mathbf{q}}$ voidaan nähdä lokaalina kääntyvänä \mathbb{R}^n :n muunnoksena.) Toisaalta jokainen (lokaali kääntyvä) muunnos $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ voidaan tulkita jonakin M :n (lokaalina kääntyvänä) muunnoksena Ψ : sopivilla $\mathbf{m} \in M$ määritellään

$$(\mathbf{q} \circ \Psi)(\mathbf{m}) := (\psi \circ \mathbf{q})(\mathbf{m}).$$

Tätä sanotaan muunnoksen ψ *aktiiviseksi tulkinnaksi* eli M :n ‘pisteet siirtyy.’ Muunnos ψ voidaan tulkita myös *passiivisena muunnoksena* eli karttojen välisenä muunnoksena: määritellään uusi kartta $\tilde{\mathbf{q}} := \psi^{-1} \circ \mathbf{q}$. Nyt M :n pisteet pysyvät paikallaan, mutta niiden kartoittamiseen käytetään kahta eri karttaa \mathbf{q} ja $\tilde{\mathbf{q}}$ (esim. kaksi eri havaitsijaa ovat toisistaan muunnoksen ψ^{-1} päässä). Kaavasta

$$\tilde{\mathbf{q}} \circ \Psi = \psi^{-1} \circ \mathbf{q} \circ \Psi = \psi^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{q} = \mathbf{q}$$

nähdään, että aktiivinen ja passiivinen muunnos ovat yhteensopivia. Esimerkiksi $M = \mathbb{R}^n$ ja määritellään siirto $\Psi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{y}$ vektorin $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ verran. Aktiivisesti tulkittuna tämä tarkoittaa sitä, että piste \mathbf{x} siirtyy pisteeksi $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Olkoon $\mathbf{q} = \text{id}$ identiteettikartta, $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, eli \mathbf{q} -havaintsija näkee, että $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Nyt $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{y}$ on vastakkaisen siirron päässä \mathbf{q} :sta ja havaitsee, että siirretty piste $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ on

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{y} = \mathbf{x} = \mathbf{q}(\mathbf{x}).$$

Tilanne on helposti ymmärrettävissä: alkutilanteessa havaintsija näkee pisteen \mathbf{x} ja sitten piste siirtyy pisteeksi $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Lopuksi havaintsija siirtyy itsekin \mathbf{y} :n verran, joten tilanne on sama lopussa kuin alussa eli havaintsija näkee taas pisteen \mathbf{x} . Huomaa, että $\tilde{\mathbf{q}}$:n origo on pisteessä \mathbf{y} (sillä $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{y}) = \mathbf{q}(\mathbf{y}) - \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y} = \vec{0}$), kun taas \mathbf{q} :n origo on pisteessä $\vec{0}$ eli havaintsija on todella siirtynyt $+\mathbf{y}$:n verran.

19.1 Galilein muunnosten generaattoreita

Tarkastellaan sitten m -massaisen vapaan hiukkasen liikettä kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa \mathbb{E}^3 ja etsitään Galilein ryhmän generaattorit. Hiukkasen faasiavaruus on $S = T(\mathbb{E}^3)^*$. Käytetään pisteen A kuvaamiseen karteesta karttaa $A \mapsto O + \mathbf{r}(A)$. Kantamoniston \mathbb{E}^3 koordinaatit ovat siis $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$. Merkitään tangenttikimppun (nopeusfaasiavaruus) koordinaatteja $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = (x^1, x^2, x^3, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$. Samaistetaan kotangenttikimppu (faasiavaruus) tangenttikimppun kanssa massametriikan avulla, joten kotangenttikimppun koordinaatit ovat $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3)$, missä $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Vapaan hiukkasen Hamiltonin funktio on $H(\mathbf{p}) := (2m)^{-1}|\mathbf{p}|^2$.

Hamiltonin funktio H generoi aikatranslaation $t \mapsto t + t_0$. Liikemäärän \mathbf{p} j :s komponentti p_j generoi paikan j :nnen komponentin siirron $x^j \mapsto u + x^j$ (pitäen muut komponentit paikallaan); parametri u on siis paikkasiirto, joka on tulkittavissa origon siirroksi. Käytetään parametrille merkintää $u = o^j$, joten liikemäärä \mathbf{p} generoi paikan tai origon siirron $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{o}$, missä kolme parametria o^j on kerätty yhteen vektoriksi $\mathbf{o} = (o^1, o^2, o^3)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $K^k(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) := tp_k - x^k m$ generoi nopeussysäykset x^k -akselin suuntaan hetkellä t . Kiinnitetään $t \in \mathbb{R}$. Yhtälöt (24) ovat muotoa

$$\begin{aligned} \frac{dx^k(u)}{du} &= t, \\ \frac{dp_k(u)}{du} &= m \end{aligned}$$

(sekä muut $i \neq k$ derivaatat nolli). Välittömästi nähdään, että ratkaisu alkuehdoilla $(\underline{\mathbf{r}}(0), \underline{\mathbf{p}}(0)) = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$ on

$$\underline{x}^k(u) = tu + x^k,$$

$$\underline{p}_k(u) = mu + p_k$$

(sekä muut $i \neq k$ komponentit vakioita). Merkitään parametria u symbolilla v^k ja tulkitaan se nopeusparametriksi akselin x^k suuntaan. Kerätään parametrit v^k yhteen vektoriksi $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ ja määritellään $\mathbf{K} := (K^1, K^2, K^3)$. Täten $\mathbf{K}_t := \mathbf{K}(t, \cdot, \cdot)$ generoi nopeussysäykset $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{v}t$, $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} + m\mathbf{v}$ hetkellä t . Eli ollaan saatu kaikki muut Galilein ryhmän muunnosten generaattorit $(H, \mathbf{p}, \mathbf{K})$ paitsi kiertogeneraattorit (jatkossa rajoitaudutaan ryhmään $\text{SO}(3)$ isomman ryhmän $\text{O}(3)$ sijasta). Nämä etsitään seuraavassa luvussa.

20 FYS: SO(3) sekä Galilein ja Poincarén ryhmät

Tarkastellaan edellisen luvun tapaan euklidista avaruutta \mathbb{E}^3 ja sen karttaa \mathbf{r} , jonka origo sijaitsee pisteessä $O \in \mathbb{E}^3$. Määritellään kiertoimpulssi(funktio)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &:= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (x^2 p_3 - x^3 p_2, x^3 p_1 - x^1 p_3, x^1 p_2 - x^2 p_1) = \\ &= (L^1(\mathbf{r}, \mathbf{p}), L^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}), L^3(\mathbf{r}, \mathbf{p})). \end{aligned}$$

Välittömästi nähdään, että kaikilla $i = 1, 2, 3$,

$$L^i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x^j p_k,$$

missä ϵ_{ijk} on *Levin-Civitan symboli* tai *permutaatio-symboli* ($\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$, $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$ ja loput nolliä). Esimerkistä 45 seuraa, että L^1 generoi paikan \mathbf{r} ja impulssin \mathbf{p} kierrot kulman u verran (pisteen O kautta kulkevan) x^1 -akselin ympäri:

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{Rr},$$

$$\mathbf{p} \mapsto \mathbf{Rp},$$

missä

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti L^2 ja L^3 generoivat kierrot x^2 - ja x^3 -akselien ympäri. [!]

Olkoon sitten $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$, mielivaltaisen (pisteen O kautta kulkevan) kiertoakselin suuntavektori.

Valitaan suureeksi $f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$ ja sijoitetaan yhtälöihin (24), jotka redusoituvat muotoon [!]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} &= \mathbf{n} \times \mathbf{r}(u), \\ \frac{d\mathbf{p}(u)}{du} &= \mathbf{n} \times \mathbf{p}(u). \end{aligned}$$

Valitaan \mathbb{R}^3 :lle uusi oikeakäteinen ortonormaali kanta $\{\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-, \mathbf{n}\}$, kirjoitetaan vektorit $\mathbf{r}(u)$ ja $\mathbf{p}(u)$ kyseisen kannan avulla (esim. $\mathbf{r}(u) = \underline{x}_+(u)\mathbf{e}_+ + \underline{x}_-(u)\mathbf{e}_- + \underline{x}_0(u)\mathbf{n}$) ja sijoitetaan yllä oleviin yhtälöihin. Nyt yhtälöiden ratkaisu palautuu aikaisempiin tapauksiin [!] ja nähdään, että $\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$ generoi (oikeakätiset) kierrot akselin $O + \mathbb{R}\mathbf{n} = O + \{r\mathbf{n} \mid r \in \mathbb{R}\}$ ympäri; parametrina u on kiertokulma, jota merkitään jatkossa symbolilla φ . Täten *kiertoimpulssi \mathbf{L} generoi kaikki kierrot.*

Olkoon $\underline{\mathbf{a}}$ joko $\underline{\mathbf{r}}$ tai $\underline{\mathbf{p}}$. Helposti nähdään, että yhtälön

$$\frac{d\underline{\mathbf{a}}(\varphi)}{d\varphi} = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{a}}(\varphi)$$

ratkaisu alkuehdolla $\underline{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ on [!]

$$\underline{\mathbf{a}}(\varphi) = (\cos \varphi)\mathbf{a} + (\sin \varphi)\mathbf{n} \times \mathbf{a} + (1 - \cos \varphi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}$$

ja kuvaa siis vektorin \mathbf{a} kiertoa kulman φ verran (oikeakätisesti) akselin $\mathbb{R}\mathbf{n}$ ympäri (tämä on ns. *Rodriguesin rotaatiokaava*). Lineaarikuvauksen $\mathbf{a} \mapsto \underline{\mathbf{a}}(\varphi)$ matriisi $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ on [!]

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)(n_1)^2 & (1 - \cos \varphi)n_1n_2 - (\sin \varphi)n_3 & (1 - \cos \varphi)n_3n_1 + (\sin \varphi)n_2 \\ (1 - \cos \varphi)n_1n_2 + (\sin \varphi)n_3 & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)(n_2)^2 & (1 - \cos \varphi)n_2n_3 - (\sin \varphi)n_1 \\ (1 - \cos \varphi)n_3n_1 - (\sin \varphi)n_2 & (1 - \cos \varphi)n_2n_3 + (\sin \varphi)n_1 & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)(n_3)^2 \end{pmatrix},$$

missä $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, eli $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{a} = \underline{\mathbf{a}}(\varphi)$. Koska $\mathbf{R}(-\mathbf{n}, -\varphi) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi + 2\pi)$, niin mielivaltainen kierto on esitettävissä matriisina $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, missä $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ ja $\varphi \in [0, \pi]$. Huomaa, että jos $\varphi = 0$, niin $\mathbf{R}(\mathbf{n}, 0) = \mathbf{1}$ (identiteettimatriisi $\mathbf{1}$ vastaa triviaalia kiertoa eli ‘ei kierretä lainkaan’) ja nyt \mathbf{n} voi olla mikä tahansa yksikkövektori. Jos $\varphi = \pi$, niin $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \pi) = \mathbf{R}(-\mathbf{n}, \pi)$; siis kulman φ arvoilla 0 ja π vektori \mathbf{n} *ei ole yksikäsitteinen*.

Olkoon $\text{SO}(3) \subset \text{O}(3)$ on (reaalisten) 3×3 -ortogonaalimatriisien \mathbf{M} , joiden determinantti $\det \mathbf{M} = 1$, muodostama ryhmä.¹¹⁵ Suoralla laskulla nähdään, että kiertoja vastaavat matriisit $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ ovat $\text{SO}(3)$:n alkioita. [!] Voidaan osoittaa myös käänteinen tulos: Olkoon $\mathbf{M} \in \text{SO}(3)$, $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$. Matriisilla \mathbf{M} on ominaisarvo 1, jonka (yksikkö)ominaisvektori olkoon \mathbf{n} . [!] Olkoon kaksi muuta ominaisarvoa c_+ ja $c_- \in \mathbb{C}$ sekä niiden (yksikkö)ominaisvektorit vastaavasti \mathbf{f}_+ ja $\mathbf{f}_- \in \mathbb{C}^3$. Koska $\det \mathbf{M} = 1 \cdot c_+ \cdot c_- = 1$ ja $|c_{\pm}| = |c_{\pm}\mathbf{f}_{\pm}| = |\mathbf{M}\mathbf{f}_{\pm}| = |\mathbf{f}_{\pm}| = 1$ on oltava $c_{\pm} = e^{\pm i\varphi}$, missä $\varphi \in (0, 2\pi)$. Koska kompleksikonjugoimalla yhtälö $\mathbf{M}\mathbf{f}_+ = c_+\mathbf{f}_+$ päädytään yhtälöön $\mathbf{M}\bar{\mathbf{f}}_+ = c_-\bar{\mathbf{f}}_+$, voidaan valita $\mathbf{f}_- = \bar{\mathbf{f}}_+$. Määritellään uudet reaaliset (yksikkövektorit) $\mathbf{e}_+ := 2^{-1/2}(\mathbf{f}_+ + \mathbf{f}_-) \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{e}_- := (\sqrt{2}i)^{-1}(\mathbf{f}_+ - \mathbf{f}_-) \in \mathbb{R}^3$. Suoralla laskulla nähdään, [!] että $\{\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-, \mathbf{n}\}$ on \mathbb{R}^3 :n ortonormaali kanta ja \mathbf{M} :n matriisi *tässä kannassa* on kiertomatriisi

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

joka kuvaa kiertoa akselin $\mathbb{R}\mathbf{n}$ ympäri. Eli $\mathbf{M} = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$. Täten *kiertoimpulssi* \mathbf{L} generoi kaikki ryhmän $\text{SO}(3)$ alkioita vastaavat muunnokset, jotka voidaan tulkita kierroiksi.

¹¹⁵Vastaavasti voidaan määritellä ryhmät $\text{SO}(n)$ ja $\text{SO}(k, l)$.

Kuten nähtiin ryhmä $SO(3)$ voidaan parametrisoida yksikköpallon \mathbb{S}^2 pisteillä \mathbf{n} (kiertoakseli) ja kiertokulman $\varphi \in [0, \pi]$ avulla. Kirjallisuudessa esiintyy myös lukuisia muita parametrisointeja. Seuraavaksi esitetellään eräs $SO(3)$:n parametrisointi, joka on osoittautunut hyödylliseksi monissa sovelluksissa.

Ajatellaan kiertoa (passiivisesti) ortonormaalin kannan vaihtona (ks. seuraava kuva). Lähdetään liikkeelle \mathbb{R}^3 :n standardikannasta $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, missä esim. $\mathbf{k} := (0, 0, 1)$. Kierretään kantavektoreita akselin $\mathbb{R}\mathbf{k}$ ympäri kulman $\phi \in [0, 2\pi)$ verran. Saadaan uusi ortonormaali kanta $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1\}$, missä $\mathbf{i}_1 := \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{i}$, $\mathbf{j}_1 := \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}_1 := \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{k} = \mathbf{k}$. Kierretään sitten uusia kantavektoreita akselin $\mathbb{R}\mathbf{i}_1 = \mathbb{R} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{i}$ ympäri kulman $\theta \in [0, \pi]$ verran ja saadaan ortonormaali kanta $\{\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2\}$, missä $\mathbf{i}_2 := \mathbf{R}(\mathbf{i}_1, \theta)\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_2 := \mathbf{R}(\mathbf{i}_1, \theta)\mathbf{j}_1$ ja $\mathbf{k}_2 := \mathbf{R}(\mathbf{i}_1, \theta)\mathbf{k}_1$. Tehdään lopuksi vielä kierto akselin \mathbf{k}_2 ympäri kulman $\psi \in [0, 2\pi)$ verran: määritellään $\mathbf{i}' := \mathbf{R}(\mathbf{k}_2, \psi)\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}' := \mathbf{R}(\mathbf{k}_2, \psi)\mathbf{j}_2$ ja $\mathbf{k}' := \mathbf{R}(\mathbf{k}_2, \psi)\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2$, joten $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ on ortonormaali kanta. Rodriguesin rotaatiokaavaa käyttämällä nähdään helposti, [!] että

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{R}(\mathbf{n}', \varphi') = \mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{n}', \varphi') \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$$

kaikilla $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{S}^2$ ja $\varphi, \varphi' \in [0, \pi]$. Täten kannanvaihdon $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \mapsto \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ matriisi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) &:= \mathbf{R}(\mathbf{k}_2, \psi)\mathbf{R}(\mathbf{i}_1, \theta)\mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathbf{i}_1, \theta)\mathbf{k}_1, \psi) \mathbf{R}(\mathbf{i}_1, \theta) \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{i}_1, \theta)\mathbf{R}(\mathbf{k}_1, \psi) \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{i}, \theta) \mathbf{R}(\mathbf{k}, \psi)\mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{i}, \theta) \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi) \mathbf{R}(\mathbf{k}, \psi) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{R}(\mathbf{i}, \theta)\mathbf{R}(\mathbf{k}, \psi). \end{aligned}$$

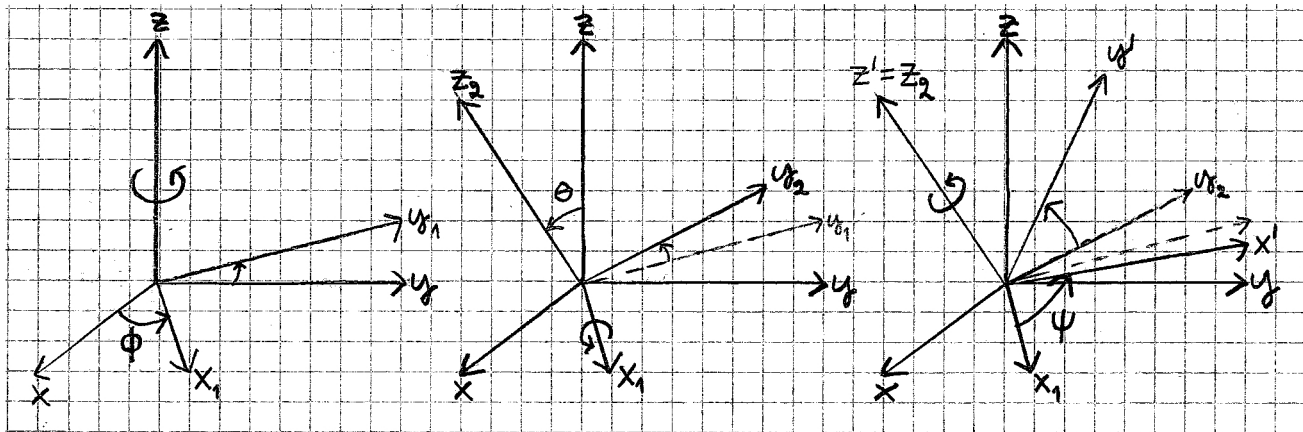
Lineaarialgebrasta on tuttua, että vektorin $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ komponentit $\{a'_1, a'_2, a'_3\}$ kannassa $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ saadaan kaavasta

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{R}(\mathbf{k}, -\psi)\mathbf{R}(\mathbf{i}, -\theta)\mathbf{R}(\mathbf{k}, -\phi)\mathbf{a},$$

missä $\mathbf{a}' := (a'_1, a'_2, a'_3)$.¹¹⁶

Kiertoryhmä $SO(3)$ voidaan siis parametrisoida kolmen kulmaparametrin $(\phi, \theta, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ avulla. Kulmaparametreja (ϕ, θ, ψ) sanotaan *Eulerin kulmiksi*. Niitä voidaan käyttää esim. tarkasteltaessa hyrrän liikettä.

¹¹⁶Sillä $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = a'_1\mathbf{i}' + a'_2\mathbf{j}' + a'_3\mathbf{k}' = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)(a'_1\mathbf{i} + a'_2\mathbf{j} + a'_3\mathbf{k}) = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)\mathbf{a}'$.



Kuva 11: Eulerin kulmat.

Esimerkki 46. Yleistys k :n hiukkasen systeemille on suoraviivainen. Konfiguraatioavaruus on tuttuun tapaan \mathbf{X}_k ja hiukkasen i paikkavektori on $\mathbf{r}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$. Hiukkasen i impulssi on $\mathbf{p}_i = (p_1^i, p_2^i, p_3^i)$ ja kiertoimpulssi on $\mathbf{L}_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = (L_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{p}), L_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{p}), L_i^3(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$, missä $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k)$ ja $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k)$. Voidaan määritellä kokonaiskiertoimpulssi

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i.$$

Vastaavalla tavalla kuin aiemmin nähdään esimerkiksi, että kokonaiskiertoimpulssin komponentti $L^1 = \sum_i L_i^1$ generoi jokaisen hiukkasen paikan ja liikemäärän kierrot x^1 -akselin ympäri.

Harjoitustehtävä 44. a) Osoita, että $O(3)$:n matriisilla \mathbf{M} on ominaisarvo 1. Vinkki: osoita, että $\det(\mathbf{M} - \mathbf{1}) = 0$.

b) Osoita, että $\underline{\mathbf{a}}(\varphi) = (\cos \varphi)\mathbf{a} + (\sin \varphi)\mathbf{n} \times \mathbf{a} + (1 - \cos \varphi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}$ toteuttaa yhtälön

$$\frac{d\underline{\mathbf{a}}(\varphi)}{d\varphi} = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{a}}(\varphi).$$

Vinkki: 'back cab'-kaava: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

c) Laske $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ (yllä olevasta) Rodriguesin rotaatiokaavasta. Vinkki: lineaarikuvausten $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ matriisialkiot saadaan kaavoilla $T_{13} = \mathbf{i} \cdot T\mathbf{k}$ jne.

d) Osoita, että diagonaalimatriisi $\text{diag}(-1, 1, -1) \in \text{SO}(3)$. Etsi matriisille kaksi tulkintaa joko peilauksena tai rotaationa. Vinkki: matriisi $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$.

Harjoitustehtävä 45. a) Määritellään matriisin \mathbf{M} eksponenttimatriisi $e^{\mathbf{M}} = \exp \mathbf{M}$ sarjakehitelmänä (joka selkeästi suppenee matriisiksi johtuen tekijästä $1/n!$):

$$e^{\mathbf{M}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{M}^n,$$

missä $\mathbf{M}^0 := \mathbf{1}$, $\mathbf{M}^1 := \mathbf{M}$, $\mathbf{M}^2 := \mathbf{MM}$, $\mathbf{M}^3 := \mathbf{MMM}$ jne. (matriisitulo). Kehitä $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$:n matriisialkioissa esiintyvät $\sin \varphi$ ja $\cos \varphi$ Taylorin sarjoiksi ja tsekkaa (laskemalla vaikka kaksi ensimmäistä termi hajotelmassa), että

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) = e^{\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}} = \exp \left(\varphi \sum_{i=1}^3 n^i \boldsymbol{\ell}^i \right),$$

missä $\boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{\ell}^1, \boldsymbol{\ell}^2, \boldsymbol{\ell}^3)$ ja

$$\boldsymbol{\ell}^1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell}^2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell}^3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jos tehtävä vaikuttaa työläältä voit sijoittaa $\mathbf{a}(\varphi) = e^{\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}} \mathbf{a}$ Rodriguesin rotaatiokaavaan ja osoittaa, että $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ kaikille vektoreille \mathbf{b} . Huomaa, että $de^{\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}}/d\varphi = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) e^{\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}}$.

b) Osoita, että $[\boldsymbol{\ell}^i, \boldsymbol{\ell}^j]_- := \boldsymbol{\ell}^i \boldsymbol{\ell}^j - \boldsymbol{\ell}^j \boldsymbol{\ell}^i = \sum_k \epsilon_{ijk} \boldsymbol{\ell}^k$.

20.1 Galilein ryhmä

Yleinen Galilein muunnos on muotoa $(t, \mathbf{r}) \mapsto (t + t_0, \mathbf{M}\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{o})$, missä $\mathbf{M} \in O(3)$. Usein kuitenkin rajoitaudutaan Galilein ryhmän \mathcal{G} aliryhmään \mathcal{G}_+ , missä matriisit \mathbf{M} ovat $SO(3)$:n alkioita. Tällöin \mathcal{G}_+ :n alkio voidaan esittää kymmenen parametrin avulla.¹¹⁷ Parametreiksi u voidaan valita neljä translaatioparametria (t_0, \mathbf{o}) , kolme nopeussysäysparametria \mathbf{v} ja kolme $SO(3)$:n kiertoparametria, esim. Eulerin kulmat (ϕ, θ, ψ) . Galilein muunnoksilla on täten 10 generaattoria:

- energia H generoi ajan siirrot,
- liikemäärä \mathbf{p} generoi paikan siirrot,
- \mathbf{K} generoi nopeussysäykset,
- kiertoimpulssi \mathbf{L} generoi kierrot.

¹¹⁷Huomaa, että jos $\mathbf{M} \in O(3)$ ja $\det \mathbf{M} = -1$, niin $\mathbf{M}' := -\mathbf{M} \in SO(3)$ eli $\mathbf{M} = -\mathbf{1} \mathbf{M}'$ on esitettävissä aina rotaation \mathbf{M}' ja (origon) suhteen peilauksen $-\mathbf{1} \in O(3)$ yhdisteenä. Peilaukset ovat diskreettejä muunnoksia, joten niihin ei liity jatkuvaa parametria u . Helposti nähdään, että $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ muodostaa $O(3)$:n diskreetin aliryhmän ja $O(3) = SO(3) \cup -SO(3)$.

Harjoitustehtävä 46. Laske Galilein ryhmän generaattoreiden väliset Poissonin sulut:

$$\begin{aligned} [L^i, L^j] &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L^k, \\ [p_i, L^j] &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} p_k, \\ [K^i, L^j] &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} K^k, \\ [p_i, K^j] &= m\delta_i^j, \\ [H, K^j] &= p_j \end{aligned}$$

(muut sulut ovat nollia). Osoita, että $H = (2m)^{-1}|\mathbf{p}|^2$ ja $\mathbf{p} \times \mathbf{K} = m\mathbf{L}$ eli generaattorit eivät ole toisistaan täysin riippumattomia.

Galilein ryhmän generaattorit virittävät Galilein ryhmän (10 ulotteisen) Lien algebran, joka on siis (ääretönulotteisen) $\mathcal{F}(\mathcal{S})$:n Lien alialgebra. Erityisesti joukko $\{L^1, L^2, L^3\}$ on kiertoryhmän SO(3) Lien algebran (3-ulotteisen vektoriavaruuden) $\mathfrak{so}(3)$ kanta. Toinen esitys Lien algebralle on matriisien ℓ^i , $i = 1, 2, 3$, virittämä vektoriavaruus varustettuna matriisien kommutaattorilla. Huomaa, että $[L^i, L^j] = \epsilon_{ijk} L^k$ ja $[\ell^i, \ell^j]_- = \epsilon_{ijk} \ell^k$. Kolmas esitys $\mathfrak{so}(3)$:lle saadaan käyttämällä Lien algebrahomomorfismia $f \mapsto \mathbf{X}_f = -X_f$ eli funktioon liitetään vektorikenttä. Jos vektorikentät projisoidaan vielä \mathbb{E}^3 :n tangenttikimppuun saadaan esimerkin 45 nojalla generaattorit

$$\hat{L}^1 = -y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{L}^2 = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{L}^3 = -x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x},$$

missä $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Nyt tiedetään, että $[\hat{L}^i, \hat{L}^j]_- = \epsilon_{ijk} \hat{L}^k$. [!]

Galilein ryhmä, SO(3), jne. ovat esimerkkejä ns. *Lien ryhmistä* G , jotka ovat sekä ryhmiä että monistoja eli Lien ryhmät ovat ryhmiä, jotka ‘voidaan kartoittaa/parametrisoida.’ Lisäksi oletetaan, että ryhmätulo $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$ ja käänteisalkion otto $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ ovat sileitä kuvauksia. Lien algebrat liittyvät Lien ryhmiin (vähintäänkin lokaalisti) eksponenttikuvauksen avulla kuten SO(3):n tapauksessa: Jos $\mathbf{M} \in \text{SO}(3)$, niin on olemassa $\varphi \in [0, 2\pi)$ ja $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ siten, että

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) = e^{\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}},$$

missä $\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell} \in \mathfrak{so}(3)$. Toisaalta, jos $\mathbf{b} \in \mathfrak{so}(3)$, niin se on (yksikäsitteistä) muotoa

$$\mathbf{b} = b^1 \ell^1 + b^2 \ell^2 + b^3 \ell^3,$$

missä $b^1, b^2, b^3 \in \mathbb{R}$. Jos vektori $(b^1, b^2, b^3) \neq \vec{0}$, niin jaetaan se normillaan $\tilde{\varphi} := \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} \neq 0$, ja saadaan vektori $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ eli nyt $\mathbf{b} = \tilde{\varphi} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}$. Koska $\tilde{\varphi} > 0$ voidaan kirjoittaa muodossa $\tilde{\varphi} = \varphi + 2\pi k$, missä $\varphi \in [0, 2\pi)$ ja k on kokonaisluku,

$$e^{\mathbf{b}} = e^{\tilde{\varphi} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}} = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \tilde{\varphi}) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi + 2\pi k) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) \in \text{SO}(3).$$

Välittömästi nähdään, että eksponenttikuvaus $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{SO}(3)$, $\mathbf{b} \mapsto \exp \mathbf{b} = e^{\mathbf{b}}$ on surjektio muttei injektio. Huom! $\exp \mathbf{0} = \mathbf{1}$.

20.2 Poincarén ryhmä

Poincarén ryhmä käsitellään samoin kuin Galilein ryhmäkin. Avaruutena on nyt \mathbb{E}^3 :n sijasta Minkowskin avaruus \mathbb{M}^4 varustettuna affinilla kartalla $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Vastaavasti saadaan neli-impulssi (p_0, p_1, p_2, p_3) (eli esim. massalliselle hiukkaselle $p_\mu = m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$). Poincarén ryhmä \mathcal{P} koostuu siirroista \mathfrak{o} ja Lorentzin ryhmän $\text{O}(3,1)$ matriiseista $\boldsymbol{\Lambda}$.

Neli-impulssi generoi neli-siirrot eli p_μ :ta vastaava vektorikenttä on $\partial/\partial x^\mu$, jonka generoima muunnos on translaatio $\underline{x}^\mu(u) = u + x^\mu$ (ja muut ‘koordinaatit pysyvät paikoillaan’). Valitaan nyt parametrille u uusi symboli o^μ ja homma on selvä. (Huomaa, että nyt p_0 generoi aikasiirrot $x^0 \mapsto o^0 + x^0$, mikä alleviivaa p_0 :n energialuonnetta.) Täten riittää tarkastella Lorentzin ryhmää $\text{O}(3,1)$, joka on ‘melkein sama mutta vähän isompi’ kuin $\text{O}(3)$.

Ensinnäkin ‘upotetaan’ \mathbb{E}^3 Minkowskin avaruuteen \mathbb{M}^4 (koska $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ ja $(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$). Myös η -metriikka rajoittautuu euklidiseksi metriikaksi \mathbb{R}^3 :lla. Nähdään siis, että $\text{O}(3)$ on $\text{O}(3,1)$:n aliryhmä: Jos $\mathbf{M} \in \text{O}(3)$, niin triviaalisti

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & \mathbf{M} \end{pmatrix} \in \text{O}(3,1).$$

On helppo osoittaa,¹¹⁸ että kaikilla $\boldsymbol{\Lambda} \in \text{O}(3,1)$ pätee $\det \boldsymbol{\Lambda} = \pm 1$ ja $\Lambda^0_0 \geq 1$ tai $\Lambda^0_0 \leq -1$. Jaetaan aluksi Lorentzin ryhmä kahteen (erilliseen) osaan

$$\text{O}(3,1) = \text{O}^+(3,1) \cup \text{O}^-(3,1), \quad \text{O}^\pm(3,1) := \{\boldsymbol{\Lambda} \in \text{O}(3,1) \mid \pm \Lambda^0_0 \geq 1\},$$

missä ensimmäinen osa $\text{O}^+(3,1)$ on *aikajärjestyksen säilyttävä Lorentzin (ali)ryhmä*.¹¹⁹ Kumpikin komponentti voidaan vielä jakaa kahteen erilliseen osaan riippuen siitä onko $\det \boldsymbol{\Lambda} = +1$ vai

¹¹⁸Esim. vektorille $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)$ saadaan $-1 = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta} \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{x} = (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\eta} (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{x}) = -(\Lambda^0_0)^2 + (\Lambda^1_0)^2 + (\Lambda^2_0)^2 + (\Lambda^3_0)^2 \geq -(\Lambda^0_0)^2$ eli $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$ eli $|\Lambda^0_0| \geq 1$ eli $\Lambda^0_0 \geq 1$ tai $\Lambda^0_0 \leq -1$.

¹¹⁹Toinen komponentti kääntää ajan suunnan ja aikajärjestyksen, joten sillä ei ole paljoa merkitystä fysiikassa. Tarkastellaan siis vain ryhmää $\text{O}^+(3,1)$.

–1. Erityisesti fysiikassa käytetään aikajärjestyksen säilyttävää oleellista Lorentzin (ali)ryhmää

$$\text{SO}^+(3, 1) := \{\Lambda \in \text{O}^+(3, 1) \mid \det \Lambda = 1\} \subset \text{O}^+(3, 1) \subset \text{O}(3, 1).$$

Tästä (jatkuvaparametrisesta Lien) ryhmästä on karsittu pois sekä ajan käännöt että avaruuden peilaukset (jotka ovat diskreettejä muunnoksia). Huomaa, että kiertoryhmä $\text{SO}(3)$ on $\text{SO}^+(3, 1)$:n aliryhmä.

Nyt $\text{SO}^+(3, 1)$:n kierrot generoi tuttuun tapaan kiertoimpulssi $\mathbf{L} = (L^1, L^2, L^3)$, missä esim. $L^1 = x^2 p_3 - x^3 p_2$ ja tämän generoima vektorikenttä

$$X_{L^1} = x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} - p_3 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Muut muunnokset ovat nopeussysäyksiä eri suuntiin. Riittää tarkastella vain x^j -akseleitten ($j = 1, 2, 3$) suuntaisia nopeussysäyksiä (muut ovat niiden kombinaatioita). Generaattorit ovatkin jo laskettu aiemmin. Ne muodostavat taas vektorin $\mathbf{K} = (K^1, K^2, K^3)$, missä

$$K^j(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := x^0 p_j + x^j p_0$$

ja

$$X_{K^j} = x^j \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^j} - p_j \frac{\partial}{\partial p_0} - p_0 \frac{\partial}{\partial p_j}$$

eli saadaan nopeussysäys x^j -akselia pitkin. Generaattoreita \mathbf{L} ja \mathbf{K} vastaavat matriisit saadaan helposti. Nyt L^j :n matriisi on laajennettu ℓ^j matriisi, jolle käytetään samaa merkintää ℓ^j .

Esimerkiksi

$$\ell^1 = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & 0 & \sin u & \cos u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti saadaan K^j :tten matriisit:

$$\mathbf{k}^1 = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ja suoralla laskulla nähdään, että jokainen $\mathbf{M} \in \text{SO}^+(3, 1)$ on muotoa

$$\mathbf{M} = e^{\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell} + \phi \mathbf{m} \cdot \mathbf{k}},$$

missä $\mathbf{k} = (\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{k}^3)$, $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{S}^2$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ ja $\phi \geq 0$. Kuten aiemmin, voidaan määrittellä skaalattu vauhti $\beta := \tanh \phi = v/c \in [0, 1)$, joten saadaan $\text{SO}^+(3, 1)$:n alkioille fysikaalinen tulkinta kiertojen ja nopeussysäysten yhdisteenä: yleinen muunnos on

$$\Lambda(\mathbf{n}, \varphi; \mathbf{m}, \beta) := e^{\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell} + (\tanh^{-1} \beta) \mathbf{m} \cdot \mathbf{k}},$$

missä $\phi \in [0, 2\pi)$ on kiertoikulma, $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ on kiertoakseli, β on nopeussysäyksen (c :llä skaalattu) vauhti ja $\mathbf{m} \in \mathbb{S}^2$ kertoo nopeussysäyksen suunnan (tai $-\mathbf{m}$, jos tulkitaan sysäys passiivisesti koordinaattimuunnoksena kuten esimerkissä 8).

Täten ollaan nähty, että (oleellinen) Poincarén ryhmä (missä rajoitaudutaan ryhmään $\text{SO}^+(3, 1)$) on 10 ulotteinen Lien ryhmä. Neli-impulssi \mathbf{p} generoi translaatiot, kiertoimpulssi \mathbf{L} kierrot ja \mathbf{K} nopeussysäykset. Suoralla laskulla saadaan [!] generaattoreiden (virittämän Lien algebran) sulut ($i, j \in \{1, 2, 3\}$)

$$\begin{aligned} [L^i, L^j] &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L^k, \\ [K^i, K^j] &= -\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L^k, \\ [K^i, L^j] &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} K^k, \\ [p_i, L^j] &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} p_k, \\ [p_i, K^j] &= -\delta_i^j p_0, \quad [p_0, K^j] = -p_j \end{aligned}$$

ja muut sulut ovat nollia. Vastaavat tulokset saadaan kiertojen ja nopeussysäysten matriiseille sekä kaikille generaattoreiden f vektorikentille $-X_f$. Esim.

$$[\mathbf{k}^i, \boldsymbol{\ell}^j]_- = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{k}^k.$$

Huomautus 17. Hitaasti liikkuvalla hiukkasella $cp_0 \approx -mc^2 - H$, joten käyttämällä kaavaa $x^0 = ct$ Galilein ryhmän generaattorit \mathbf{K} ovat nyt olennaisesti Lorentzin ryhmän nopeussysäysgeneraattorit.

21 FYS: Symmetriat, kanoniset parit ja Noetherin lause

Tässä luvussa tarkastellaan tilannetta, missä kahden suureen välinen Poissonin sulkku on vakio. Tarvittaessa skaalaamalla suureita (ja täten niiden generoimia vektorikenttiä) vakioilla voidaan olettaa, että vakio on joko 0 tai ± 1 (ks. huomautus 15). Aluksi käsitellään 0-tapaus:

Olkoon f ja g ($\in \mathcal{F}(S)$) kaksi ajasta riippumatonta suuretta ja

$$X_f = -\Omega^{-1}(df) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i},$$

$$X_g = -\Omega^{-1}(dg) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i}$$

niihin liitetyt vektorikentät. Olkoon u (vastaavasti v) vektorikentän X_f (vast. X_g :n) integraalikäyrien yleinen parametri. Nyt funktiot f ja g (tai siis vektorikentät X_f ja X_g) generoivat (lokaalit) faasiavaruuden S muunnokset Φ_u^f ja Φ_v^g . Olkoon $s \in S$. Kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ilmaistuna $((\mathbf{q}, \mathbf{p}) \circ \Phi_u^f)(s) = (\mathbf{q}(\Phi_u^f(s)), \mathbf{p}(\Phi_u^f(s))) = (\underline{\mathbf{q}}_s(u), \underline{\mathbf{p}}_s(u))$ ja $((\mathbf{q}, \mathbf{p}) \circ \Phi_v^g)(s) = (\underline{\mathbf{q}}_s(v), \underline{\mathbf{p}}_s(v))$, missä siis $d\underline{\mathbf{q}}_s(u)/du = \partial f / \partial \mathbf{p}|_{(\underline{\mathbf{q}}_s(u), \underline{\mathbf{p}}_s(u))}$, $d\underline{\mathbf{p}}_s(u)/du = -\partial f / \partial \mathbf{q}|_{(\underline{\mathbf{q}}_s(u), \underline{\mathbf{p}}_s(u))}$ (parametri u) sekä $d\underline{\mathbf{q}}_s(v)/dv = \partial g / \partial \mathbf{p}|_{(\underline{\mathbf{q}}_s(v), \underline{\mathbf{p}}_s(v))}$, $d\underline{\mathbf{p}}_s(v)/dv = -\partial g / \partial \mathbf{q}|_{(\underline{\mathbf{q}}_s(v), \underline{\mathbf{p}}_s(v))}$ (parametri v).

Poissonin sulkujen määritelmästä nähdään, että $\Omega^{-1}(df)g = [f, g] = -\Omega^{-1}(dg)f$. Sijoitetaan f :ään X_g :n integraalikäyrä (ja kääntäen) eli määritellään $\underline{f}_s(v) := f(\underline{\mathbf{q}}_s(v), \underline{\mathbf{p}}_s(v))$ ja $\underline{g}_s(u) := g(\underline{\mathbf{q}}_s(u), \underline{\mathbf{p}}_s(u))$, joten saadaan $d\underline{f}_s(v)/dv = [f, g]|_{(\underline{\mathbf{q}}_s(v), \underline{\mathbf{p}}_s(v))}$ ja $d\underline{g}_s(u)/du = [g, f]|_{(\underline{\mathbf{q}}_s(u), \underline{\mathbf{p}}_s(u))}$. Välittömästi nähdään seuraava *Noetherin lause* (tai sen Hamiltonin mekaniikan variantti):

Lause 6. *Seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:*

1. f on vakio g :n generoimassa muunnoksessa eli $d\underline{f}_s(v)/dv = 0$ kaikilla $s \in S$, $v \approx 0$,
2. g on vakio f :n generoimassa muunnoksessa eli $d\underline{g}_s(u)/du = 0$ kaikilla $s \in S$, $u \approx 0$,
3. $[f, g] = 0$.

Määritelmä 13. f on invariantti, säilyy tai on symmetrinen g :n generoimassa muunnoksessa, jos $[f, g] = 0$.

Harjoitustehtävä 47. a) Olkoon f ajasta riippumaton suure ja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Määritellään $g := F \circ f$. Totea edellistä lausetta käyttämällä, että $[f, g] = 0$.

b) Tarkastellaan qp -tasoa \mathbb{R}^2 ja suuretta $f(q, p) = 8(pq)^{-7} + \ln q + \ln p$. Etsi epätriviaali suure $g \neq f$, jonka generoimassa muunnoksessa f säilyy. Ratkaise kyseinen muunnos.

Seuraus 1. Olkoon H Hamiltonin funktio ja f ajasta riippumaton suure. Seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:

1. f on liikevakio,
2. H on invariantti f :n generoimassa muunnoksessa,
3. $[f, H] = 0$.

Esimerkki 47. Tarkastellaan esimerkin 46 tilannetta, missä hiukkaset vuorovaikuttavat keskenään keskeisvoiman välityksellä. Tällöin Hamiltonin funktio on muotoa

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} + \sum_{i \neq j=1}^k V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|),$$

missä $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ on keskeisvoiman potentiaalifunktio. Helposti nähdään, [!] että H on kierto invariantti (kun kierretään jokaisen hiukkasen paikka- ja impulssivektoria saman kulman verran jonkun akselin ympäri). Tästä seuraa, että kokonaiskiertoimpulssin \mathbf{L} komponentit L^1 , L^2 ja L^3 sekä täten \mathbf{L} ovat liikevakioita. Toisaalta suoralla laskulla voi osoittaa, että $[L^1, H] = 0 = [L^2, H] = 0$ (eli kyseiset komponentit ovat liikevakioita). Tästä seuraa, että $L^3 = [L^1, L^2]$ on myös liikevakio (Poissonin lause edellä). Täten $\text{SO}(3)$ on keskeiskentän liikkeen *symmetriaryhmä* (itseasiassa keskeisliike on Galilei-invariantti kuten on aiemmin nähty).

Harjoitustehtävä 48. Hiukkanen (massa m) liikkuu \mathbb{E}^3 :ssa (karttana $\mathbf{r} = (x, y, z)$) potentiaalitentässä $V(\mathbf{r}) = -k/|\mathbf{r}|$, missä $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (esim. Keplerin liike). Mikä on Hamiltonin funktio H ? Osoita, että

a) $[H, (\mathbf{p} \times \mathbf{L})^i] = (\mathbf{r} \times \mathbf{L})^i k/|\mathbf{r}|^3$, missä $i = 1, 2, 3$, ja että

b) Laplacen-Rungen-Lenzin vektori $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - km\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ on liikevakio. Vinkki: Poissonin sulut ja ‘back cab’-kaava.

Nyt nähdään, että H on invariantti sekä \mathbf{L} :n että \mathbf{A} :n generoimissa muunnoksissa. Nämä suureet generoivat rajoitetun liikkeen (ympyrä, ellipsi) tapauksessa ryhmän $\text{SO}(4)$ ja rajoittamattoman liikkeen (paraabeli, hyperbeli) tapauksessa ryhmän $\text{SO}^+(3, 1)$ eli $\text{SO}(4)$ on¹²⁰ rajoitetun Keplerin liikkeen symmetriaryhmä. Jos viitsit, niin voit laskeskella sulut $[A^i, A^j]$ ja $[A^i, L^j]$ (näistä saa skaalaamalla ryhmien Lien algebroiden rakennevakiot $\pm\epsilon_{ijk}$).

Huomautus 18. Olkoon M monisto, $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ (säännöllinen) Lagrangen funktio ja $X = X^i(\mathbf{q})\partial/\partial q^i$ vektorikenttä, jonka generoima lokaali virtaus (tai symmetriamuunnos) saadaan

¹²⁰Tai laajemmin $\text{O}(4)$ mikäli peilaukset otetaan mukaan.

siis ratkaisemalla integraalikäyrät α_m , $\alpha_m(0) = \mathbf{m} \in M$, yhtälöstä $\dot{\alpha}_m = X \circ \alpha_m$ eli yhtälöistä $d\underline{q}_m^i(u)/du = X^i(\mathbf{q}_m(u))$. Nyt $\dot{\alpha}_m(u) = (\alpha_m(u), \dot{\alpha}_m(u))$, missä $\dot{\alpha}_m(u) = \underline{\dot{q}}_m^i(u)\partial/\partial q^i|_{\alpha_m(u)}$, ja [!]

$$\begin{aligned} \frac{dL(\dot{\alpha}_m(u))}{du} &= \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\alpha}_m(u)} \underline{\dot{q}}_m^i(u) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{\dot{\alpha}_m(u)} \underline{\ddot{q}}_m^i(u) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\alpha}_m(u)} X^i(\mathbf{q}_m(u)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{\dot{\alpha}_m(u)} \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \Big|_{\alpha_m(u)} \underline{\dot{q}}_m^j(u). \end{aligned}$$

Harjoitustehtävän 39 nojalla virtaus voidaan nostaa faasiavaruuteen TM^* nostamalla X kanonisesti vektorikentäksi $\tilde{X} = X_\chi$. Tämän innoittamana tarkastellaan suuretta $\chi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := p_i X^i(\mathbf{q})$, jonka Poissonin sulku Hamiltonin funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ kanssa on

$$[\chi, H] = p_i \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - X^i \frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} X^i + p_i \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \dot{q}^j,$$

koska $\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})/\partial p_j = \dot{q}^j(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ja $\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})/\partial q^j = -\partial L/\partial q^j|_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))}$. Toisaalta $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$, jotenka

$$\frac{dL(\dot{\alpha}_m(u))}{du} = [\chi, H](\hat{L} \circ \dot{\alpha}_m(u)),$$

missä $\hat{L} : TM \rightarrow TM^*$ on Legendren kuvaus (kimppuisomorfismi). Täten L on *invariantti* X :n generoimassa muunnoksessa eli $dL(\dot{\alpha}_m)/du|_{u=0} = 0$ kaikilla $\mathbf{m} \in M$, joss $[\chi, H] = 0$. Ollaan päädytty *Noetherin lauseen* Lagrangen mekaniikan muotoiluun:

Lause 7. *Lagrangen funktio* $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ on invariantti vektorikentän X generoimassa muunnoksessa, jos ja vain jos $\chi : TM \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\chi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}^i} X^i(\mathbf{q}) = p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) X^i(\mathbf{q}),$$

on liikevakio (L :n generoimissa liikkeissä, jotka toteuttavat siis Lagrangen yhtälöt).

Esimerkki 48. Olkoon X vektorikenttä. Jokaisen pisteen ympäristässä on olemassa kartta \mathbf{q} siten, että (lokaalisti) $X = \partial/\partial q^k$.¹²¹ Nyt $X^i(\mathbf{q}) = \delta_k^i$ ja vastaava χ on $\chi = \partial L/\partial \dot{q}^k = p_k$, joka on liikevakio, joss $\partial L/\partial q^k = 0$ eli L on selvästikin invariantti X :n generoimissa muunnoksissa, jotka ovat tunnetusti (lokaaleja) siirtoja $q^k \mapsto q^k + u$. Huomaa, että jos p_k on liikevakio, niin myös $\partial H/\partial q^k = 0$, missä H on L :ää vastaava Hamiltonin funktio.

¹²¹Todistus perustuu Picardin-Lindelöfin lauseeseen, joka antaa integraalikäyrien olemassaolon. Jos α on X :n integraalikäyrä, niin kartta \mathbf{q} voidaan konstruoida siten, että valitaan mikä tahansa k ja määritellään q^k -koordinaattikäyrä integraalikäyräksi α .

21.1 Kovariantit suureet

Olkoon sitten f ja g kaksi ajasta riippumatonta suuretta, joille $[f, g] = 1$. Tällöin $d\underline{f}_s(v)/dv = [f, g]|_{(\underline{\mathbf{q}}_s(v), \underline{\mathbf{p}}_s(v))} = 1$ ja $d\underline{g}_s(u)/du = [g, f]|_{(\underline{\mathbf{q}}_s(u), \underline{\mathbf{p}}_s(u))} = -1$, joten

$$\begin{aligned}\underline{f}_s(v) &= v + f(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)), \\ \underline{g}_s(u) &= -u + g(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)).\end{aligned}$$

Huomaa, että f :n yksikkö on sama kuin g :hen liittyvän muunnoksen parametrin v yksikkö. Eli jos esim. g generoi nopeussysäykset, niin sekä f :n että v :n yksikkö on m/s. Tällöin f on selvästikin jonkinlainen ‘nopeussuure.’

Määritelmä 14. f on kovariantti tai muuntuu kovariantisti g :n generoimassa muunnoksessa, jos $[f, g] = \pm 1$. Tällöin sanotaan, että f ja g muodostavat kanonisen parin.¹²²

Esimerkki 49 (Paikka ja liikemäärä). Koska $[q^i, p^i] = 1$, niin q^i ja p^i muodostavat kanonisen parin. Erityisesti hiukkassysteemeissä hiukkasen i j :s paikkakoordinaatti x_i^j ja impulssikoordinaatti p_i^j muodostavat kanonisen parin.

Esimerkki 50 (Kulma ja kiertoimpussi). Tarkastellaan esimerkin 45 muunnosta, missä $f = L := q^j p^k - q^k p^j$. Määritellään kulmasuureet $\theta_q := \arctan(q^k/q^j)$ ja $\theta_p := \arctan(p^k/p^j)$. Voidaan osoittaa, [!] että

$$\begin{aligned}[\theta_q, L] &= 1, \\ [\theta_p, L] &= 1.\end{aligned}$$

Esimerkiksi yhden hiukkasen systeemeissä kierrot x^1 -akselin ympäri generoi kiertoimpulssin komponentti L^1 . Tällöin L^1 ja $\arctan(x^3/x^2)$ muodostavat kanonisen parin. Vastaavat tulokset saadaan muille komponenteille. Huomaa, että komponenttia L^i vastaa (ainakin) kaksi kanonisesti konjugoitua suuretta eli suuretta, jonka kanssa L^i muodostaa kanonisen parin.

Esimerkki 51 (Aika ja energia). Olkoon H Hamiltonin funktio. Usein H on systeemin (kokonais)energia. Kellosuure on $T \in \mathcal{F}$, $\partial T/\partial t = 0$, jolle $[H, T] = \pm 1$. Sitä voidaan käyttää ajan mittaamisen kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

¹²²Vastaavasti kvanttimekaniikassa tarkastellaan ns. kovarianssisysteemeitä (eli yleistettyjä imprimitiivisysteemeitä): pyritään löytämään kvanttisuure (normitettu positiivioperaattorimitta), joka muuntuu kovariantisti (esim.) jonkun toisen suureen generoimassa symmetriamuunnoksessa.

Tarkastellaan vapaan hiukkasen liikettä kolmiulotteisessa avaruudessa. Koska liike on tasais-
ta ja suoraviivaista, niin valitaan koordinaatisto siten, että hiukkanen liikkuu x -akselia pitkin.
Olkoon v hiukkasen vauhti, $p = mv$ liikemäärä ja $H(x, p) = p^2/(2m)$ Hamiltonin funktio. Mää-
ritellään suure $T(x, p) := mx/p = x/v$. Nyt $[T, H] = 1$, joten T on kellosuure. Toisaalta, koska
liike faasiavaruudessa on muotoa $t \mapsto (\underline{x}(t), \underline{p}(t)) = (vt + x_0, mv)$, missä x_0 on hiukkasen paikka
hetkellä $t = 0$, niin $t \mapsto T(\underline{x}(t), \underline{p}(t)) = t + x_0/v$. Eli todellakin kellon T arvo hetkellä t (hiuk-
kasen radalla) on (olennaisesti) aika t . Itse asiassa vapaan hiukkasen liikettä voidaan käyttää
ajan määrittelyssä.

Harjoitustehtävä 49. a) Olkoon $L = q^j p^k - q^k p^j$ ja $\theta = a \arctan(q^k/q^j) + (1-a) \arctan(p^k/p^j)$,
missä $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että $[\theta, L] = 1$.

b) Tarkastellaan lopuksi harmonista oskillaattoria, jonka Hamiltonin funktio on $H(q, p) :=$
 $p^2/2 + q^2/2$. Määritellään $T(q, p) = \arctan(p/q)$ (kulma faasiavaruudessa). Osoita, että T on
kellosuure. Mikä on sen arvo hetkellä t H :n generoimassa liikkeessä?

21.2 Symmetriset metriikat ja Killingin vektorikentät

Olkoon (M, g) semi-Riemannin monisto ja

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2} g_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

eli

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T_g(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \frac{1}{2} g^{kl}(\mathbf{q}) p_k p_l,$$

missä $p_k = \partial L / \partial \dot{q}^k = g_{ki} \dot{q}^i$. Sanotaan, että $X = X^i \partial / \partial q^i$ on g :n Killingin vektori(kenttä) mikäli
 T_g on invariantti X :n generoimassa muunnoksessa. Noetherin lauseen mukaan X on Killingin
vektori, joss $\chi = p_k X^k = X_i \dot{q}^i$ on liikevakio (T_g :n generoimissa liikkeissä eli geodeesien suhteen).
Toisaalta tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\begin{aligned} 0 &= [\chi, T_g] = p_k \frac{\partial X^k}{\partial q^j} g^{jl} p_l - X^i \frac{1}{2} \frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i} p_k p_l = \left(\frac{\partial X^k}{\partial q^j} g^{jl} - X^i \frac{1}{2} \frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i} \right) p_k p_l \\ &= \sum_{k < l} \left(\frac{\partial X^k}{\partial q^j} g^{jl} + \frac{\partial X^l}{\partial q^j} g^{jk} - X^i \frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i} \right) p_k p_l + \sum_k \left(\frac{\partial X^k}{\partial q^j} g^{jk} - X^i \frac{1}{2} \frac{\partial g^{kk}}{\partial q^i} \right) p_k^2 \end{aligned}$$

eli (koska koodinaatit p_k ovat riippumattomia)

$$\frac{\partial X^k}{\partial q^j} g^{jl} + \frac{\partial X^l}{\partial q^j} g^{jk} - X^i \frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i} = 0. \quad (25)$$

Harjoitustehtävä 50. a) Osoita, että yhtälöstä $g_{hj}g^{jl} = \delta_h^l$ seuraa $-\partial_i g^{kl} = g^{kh}(\partial_i g_{hj})g^{jl}$.

Vinkki: derivoi yhtälö ja käytä tulon derivointisääntöä.

b) Osoita käyttäen yhtälöä (25) ja a)–kohtaa, että X on g :n Killingin vektori, joss

$$X^i \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^i} + \frac{\partial X^l}{\partial q^a} g_{lb} + \frac{\partial X^k}{\partial q^b} g_{ak} = 0.$$

c) Osoita, että $\partial g_{ab}/\partial q^i = 0$ kaikilla a, b , jos ja vain jos $X = \partial/\partial q^i$ on Killingin vektori.

Tällöin g on invariantti tai symmetrinen (lokaalissa) siirroissa $q^i \mapsto q^i + u$.

Esimerkki 52. Tarkastellaan Schwarzschildin metriikkaa

$$- [c^2 + 2\Phi(r)] dt \otimes dt + [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-1} dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi].$$

Välittömästi löydetään kaksi Killingin vektoria $\partial/\partial t$ ja $\partial/\partial \varphi$, joita vastaavat (vapaan hiukkasen) liikevakiot ovat p_t ja p_φ . Koska neli-impulssin nollas komponentti p_t generoi ajan siirrot, se vastaa hiukkasen relativistista energiaa. Käyttämällä karteesisien ja pallokoordinaattien välistä kartanvaihtoa

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

nähdään suoralla laskulla, että kiertoimpulssi $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ on [!]

$$L_x = yp_z - zp_y = -(\sin \varphi)p_\theta - (\cot \theta)(\cos \varphi)p_\varphi,$$

$$L_y = zp_x - xp_z = (\cos \varphi)p_\theta - (\cot \theta)(\sin \varphi)p_\varphi,$$

$$L_z = xp_y - yp_x = p_\varphi.$$

Selvästikin Schwarzschildin metriikka on muotoa¹²³

$$g = -f_t(t, r)dt \otimes dt + f_r(t, r)dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi],$$

jolle aina $L_z = p_\varphi$ on triviaalisti vakio ja

$$H = T_g = -f_t(t, r)^{-1}p_t^2/2 + f_r(t, r)^{-1}p_r^2/2 + r^{-2}p_\theta^2/2 + (r \sin \theta)^{-2}p_\varphi^2/2,$$

jotenka

$$\begin{aligned} [L_x, H] &= (\partial_\theta L_x)(\partial_{p_\theta} H) - (\partial_{p_\theta} L_x)(\partial_\theta H) + (\partial_\varphi L_x)(\partial_{p_\varphi} H) - (\partial_{p_\varphi} L_x)(\partial_\varphi H) \\ &= (\sin \theta)^{-2}(\cos \varphi)p_\varphi r^{-2}p_\theta - 2(\sin \varphi)r^{-2}(\sin \theta)^{-3}(\cos \theta)p_\varphi^2/2 + \\ &\quad + [-(\cos \varphi)p_\theta + (\cot \theta)(\sin \varphi)p_\varphi](r \sin \theta)^{-2}p_\varphi = 0. \end{aligned}$$

¹²³Itseasiassa voidaan osoittaa, että neliulotteisen pallosymmetrisen Lorentzin moniston metriikka on aina tätä muotoa *jossain* kartassa. Kertomalla g vaikka jollain positiivisella funktiolla $h(t)$, metriikka säilyy edelleen pallosymmetrisenä (esim. Robertsonin-Walkerin metriikka kosmologiassa).

Koska $L_y = [L_z, L_x]$ nähdään, että *kiertoimpulssi* \mathbf{L} on *liikevakio*. Täten voidaan määrittellä *pallosymmetrinen* tai *isotrooppinen metriikka*: g on pallosymmetrinen mikäli sillä on kolme (paikanluonteista) Killingin vektoria X_1, X_2, X_3 , jotka toteuttavat ($\mathfrak{so}(3)$:n relaatiot) $[X_i, X_j]_- = \epsilon_{ijk} X_k$. Kuten nähtiin, Schwarzschildin metriikka on pallosymmetrinen.

Yleisemmin vektoreihin X_i (joille $[X_i, X_j]_- = \epsilon_{ijk} X_k$) liittyviä suureita $\chi_i := p_k X_i^k$, $i = 1, 2, 3$, (ja niiden lineaarikombinaatioita) sanotaan *kiertoimpulsseiksi* ja niiden generoimia muunnoksia *kierroiksi*.¹²⁴ Kiertojen suhteen kovariantteja suureita sanotaan *kulmasuureiksi*. Esimerkiksi $p_\theta = -(\sin \varphi)L_x + (\cos \varphi)L_y$ generoi kierrot $\theta \mapsto \theta + u$ xy -tasossa olevan akselin $\mathbb{R}(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ ympäri; kulma θ voidaan nähdä nyt kierron parametrina tai kulmasuureena.

¹²⁴Nyt voidaan myös sanoa, että kiertoryhmä $\mathrm{SO}(3)$ operoi (sileästi) monistolla M eli M on $\mathrm{SO}(3)$ -avaruus. Tämä voidaan välittömästi yleistää. Ryhmä G operoi (vasemmalta) joukossa Y eli Y on G -avaruus, jos on olemassa kuvaus $G \times Y \ni (g, y) \mapsto gy \in Y$, joka toteuttaa seuraavat ehdot: $g(g'y) = (gg')y$ ja $ey = y$ kaikilla $g, g' \in G$ ja $y \in Y$, missä e on G :n identiteettialkio.

22 FYS: Newtonin gravitaation relativistinen korjaustermi

Olkoon α vapaan hiukkasen liike (geodeesi) Schwarzschildin metriikassa

$$g = - [c^2 + 2\Phi(r)] dt \otimes dt + [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-1} dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi]$$

tapahtumahorisontin ulkopuolella. Liikkeen parametri λ valitaan affiiniksi parametriksi eli esim. ominaisajaksi massallisen hiukkasen tapauksessa. Ilmaistaan liike kanonisessa kartassa $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (t, r, \theta, \varphi, p_t, p_r, p_\theta, p_\varphi)$ käyränä $(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}})$. Edellisen luvun nojalla tiedetään, että energia¹²⁵ $\underline{p}_t(\lambda) \equiv -E$ on vakio ja myös kiertoimpulssi \mathbf{L} radalla on vakio. Koska $(x^1, x^2, x^3) \cdot \mathbf{L} = \epsilon_{ijk} x^i x^j p_k = 0$, niin liike tapahtuu \mathbf{L} :ää vastaan kohtisuorassa avaruuden tasossa. Kierretään avaruuden koordinaatistoa tarvittaessa siten, että liike tapahtuu xy -tasossa. Täten voidaan yleisyyttä loukkaamatta olettaa, että $\underline{\theta}(\lambda) \equiv \pi/2$ ja $\underline{p}_\varphi(\lambda) \equiv L \in \mathbb{R}$. Kiertoimpulssi L voidaan ymmärtää seuraavasti: Ajatellaan, että hiukkanen on hyvin kaukana massasta \mathcal{M} (eli hiukkanen on likimäärin vapaa) ja lähestyy \mathcal{M} :ää. Yleisyyttä loukkaamatta voidaan olettaa, että alussa hiukkanen on tason pisteessä (x_0, y_0) ja sen liikemäärä on $(p, 0)$, missä $x_0 \ll 0$ ja $p > 0$. Nyt $L = x_0 p - y_0 p = -y_0 p$ eli $L = 0$, jos $y_0 = 0$ eli hiukkanen liikkuu x -akselia pitkin suoraan \mathcal{M} :ään. Jos $L > 0$, niin $y_0 < 0$ (olla x -akselin alapuolella), hiukkanen kaartaa ylöspäin eli kiertää \mathcal{M} :n ympäri oikeakätisesti (φ kasvaa, $\dot{\varphi} > 0$). Jos $L < 0$, niin $y_0 > 0$ ja hiukkanen kiertää vasenkätisesti (kaartaa alaspäin). Nyt $|L|$ on suuri mikäli p ja/tai $|y_0|$ on suuri: mitä isompi lähestymisnopeus, sitä suurempi kiertoimpulssi tai mitä suurempi kohtisuora etäisyys \mathcal{M} :stä, sitä suurempi kiertoimpulssi. Seuraavaksi tarkastellaan tarkemmin radan *muotoa*.

Huomautuksen 10 nojalla

$$T = \frac{m}{2} \left\{ - [c^2 + 2\Phi(r)] \dot{t}^2 + [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-1} \dot{r}^2 + r^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] \right\}$$

mikäli hiukkasen massa $m > 0$ (massametriikka mg). Jos hiukkasen massa on 0, niin geodeesiyhtälö saadaan yllä olevasta T :stä sijoittamalla formaalisti $m = 1$ (metriikka g); vastaavasti E sekä L voidaan tulkita massattoman hiukkasen relativistiseksi energiaksi ja kiertoimpulssiksi. Lisäksi tiedetään, että

$$-2\underline{T}(\lambda) = -mg_{\mu\nu}(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) \frac{d\underline{q}^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\underline{q}^\nu(\lambda)}{d\lambda} = -m^{-1} g^{\mu\nu}(\underline{\mathbf{q}}(\lambda)) p_\mu(\lambda) p_\nu(\lambda) \equiv mc^2 \epsilon, \quad (26)$$

missä $\epsilon = 1$ ajanluonteisille (massallisille) hiukkasille ja $\epsilon = 0$ valonluonteisille (massattomille) hiukkasille. Sijoitetaan $\underline{p}_\theta(\lambda) = 0$ ja

$$E = -\underline{p}_t(\lambda) = [mc^2 + 2m\Phi(\underline{r}(\lambda))] \frac{d\underline{t}(\lambda)}{d\lambda}$$

¹²⁵Huomaa, että $p_t/c = p_0 = -P^0$ erityisessä suhteellisuusteoriassa.

sekä

$$L = \underline{p}_\varphi(\lambda) = m\underline{r}(\lambda)^2 \sin^2 \underline{\theta}(\lambda) \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = m\underline{r}(\lambda)^2 \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}$$

yhtälöön (26): Saadaan [!]

$$\begin{aligned} -m^2 c^2 \epsilon &= g^{tt}(\mathbf{q}) \underline{p}_t^2 + g^{rr}(\mathbf{q}) \underline{p}_r^2 + g^{\theta\theta}(\mathbf{q}) \underline{p}_\theta^2 + g^{\varphi\varphi}(\mathbf{q}) \underline{p}_\varphi^2 \\ &= -[c^2 + 2\Phi(r)]^{-1} E^2 + [1 + 2\Phi(r)/c^2] m^2 [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-2} \dot{r}^2 + r^{-2} L^2 \end{aligned}$$

eli järjestelemällä termejä

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \epsilon [c^2 + 2\Phi(r)] + \frac{1}{2} m^{-1} r^{-2} L^2 [1 + 2\Phi(r)/c^2] = \frac{E^2}{2mc^2}.$$

Määritellään *efektiivinen potentiaalienergia*

$$V(r) := \frac{\epsilon m c^2}{2} + \epsilon m \Phi(r) + \frac{L^2}{2mr^2} + \delta \frac{L^2 \Phi(r)}{mc^2 r^2} = \frac{\epsilon m c^2}{2} - \epsilon G_N \frac{m \mathcal{M}}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \delta \frac{L^2 r_{\text{hor}}}{2mr^3}$$

missä

$$\Phi(r) = -G_N \frac{\mathcal{M}}{r} = -\frac{c^2}{2} \cdot \frac{r_{\text{hor}}}{r}$$

on Newtonin gravitaatiopotentiaali, $r_{\text{hor}} = 2G_N \mathcal{M}/c^2$ tapahtumahorisontti ja $\delta = 1$. Täten on johdettu radiaalikoordinaatin liikeyhtälö

$$\boxed{\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) = \frac{E^2}{2mc^2}} \quad (27)$$

Massallisen hiukkasen ($m > 0$) tapauksessa $\epsilon = 1$. Massaton hiukkanen (esim. valo) noudattaa samaa yhtälöä, kun siihen sijoitetaan formaalisti $m = 1$ ja laitetaan $\epsilon = 0$.

Harjoitustehtävä 51. *Osoita, että yhtälö (27) redusoituu Newtonin gravitaation mukaiseksi, kun liikutaan kaukana \mathcal{M} :stä tai laitetaan parametri $\delta = 0$. Voit käyttää hyväksesi aiemmin johdettua tulosta, jonka mukaan hitaasti kaukana liikkuvalla hiukkasella ominaisaika $\tau \approx t$ ja $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$, missä v on hiukkasen vauhti etäällä \mathcal{M} :stä (eli se on likimäärin vapaa). Tarkastele sitten valon tapausta Newtonin gravitaatioteoriassa eli laita $\epsilon = \delta = 0$. Osoita, että saat suoran yhtälön. Mikä on tämän tuloksen fysikaalinen tulkinta?*

Johtopäätöksenä voimme sanoa, että massallisen hiukkasen (tai pienen kappaleen massakeskipisteen) liike pallosymmetrisen massan \mathcal{M} tapahtumahorisontin ulkopuolella noudattaa liikeyhtälöä, jossa Newtonin potentiaaliin $\Phi(r)$ pitää lisätä *relativistinen korjaustermi*

$$\Phi_{\text{rel}}(r) := -\frac{L^2 r_{\text{hor}}}{m^2 2r^3} = -\frac{G_N \mathcal{M}}{c^2} \frac{L^2}{m^2 r^3}.$$

Tällöin hiukkasen potentiaalienergia etäisyydellä r on $m\Phi(r) + m\Phi_{\text{rel}}(r)$.

Tässä joitain lisähuomioita:

1. Potentiaalin Φ_{rel} lauseke on tarkka eikä mikään ‘sarjakehitelmä.’
2. Sekä Φ ja Φ_{rel} riippuvat aktiivisesta painovoimamassasta \mathcal{M} . Ne häviävät, kun $\mathcal{M} = 0$.
3. Potentiaali Φ_{rel} (muttei Φ) riippuu kiertoimpulssista massayksikköä kohden eli suureesta L/m . Jos lähestytään avaruuden suoraa pitkin kohti origoa (eli $L = 0$) relativistinen potentiaali on 0. Samoin käy etääntyvälle liikkeelle, jos liikutaan origosta lähtevää suoraa pitkin.
4. Potentiaalit Φ ja Φ_{rel} ovat suoraan verrannollisia funktioihin r^{-1} ja r^{-3} eli korjaustermien vaikutus havaitaan käytännössä vain, kun r on ‘pieni.’ Korjaustermi on kuitenkin riittävän suuri aiheuttamaan havaittavan *Merkuriuksen perihelisiirtymän*.¹²⁶
5. Putoamiskiihtyvyyksien suuruuksien suhde

$$\frac{|\nabla\Phi_{\text{rel}}(\mathbf{r})|}{|\nabla\Phi(\mathbf{r})|} = \frac{L^2}{m^2} \frac{3r_{\text{hor}}}{2r^4} : \frac{c^2 r_{\text{hor}}}{2r^2} = \frac{3}{c^2} \left(\frac{L}{mr} \right)^2$$

on tosi pieni planeetoille. Esimerkiksi nopeimmin liikkuvan planeetan, Merkuriuksen, ratanopeus $v \approx L/mr \approx 50\,000$ m/s, joten sille suhdeluku on luokkaa 10^{-7} .

6. Potentiaali Φ_{rel} ei häviä massattomille hiukkasille, joten *valo taipuu* (havaittavasti) \mathcal{M} :n läheisyydessä (koska ilman korjaustermiä valo etenisi suoraviivaisesti; korjaustermi Φ_{rel} aiheuttaa (keskeis)kiihtyvyyden $-\nabla\Phi_{\text{rel}}$).

Tarkastellaan seuraavaksi efektiivistä potentiaalienergiaa V tarkemmin. Tunnetusti sen vakio-termi $\epsilon mc^2/2$ voidaan jättää pois (koska potentiaali on vakiota vaille yksikäsitteinen). Jaetaan vielä V massalla m ja määritellään siis efektiivinen potentiaali $U := m^{-1}(V - \epsilon mc^2/2)$ eli

$$2U(r) = -\epsilon \frac{c^2 r_{\text{hor}}}{r} + \frac{\ell^2}{r^2} - \delta \frac{\ell^2 r_{\text{hor}}}{r^3}$$

missä $\ell := L/m$. Nyt (27) redusoituu muotoon $\dot{r}^2/2 + U(\underline{r}) = C$, missä C on vakio. Tämä on näppärä muotoilu, sillä m on hävinnyt kaikkialta; se on imuroitu ℓ :ään. Yhtälö pätee sellaisenaan myös massattomille hiukkasille. Massalliselle hiukkaselle ℓ on siis kiertoimpulssi massayksikköä kohden ja massattomille hiukkasille $\ell = L$ on kiertoimpulssi suoraan.

Pisteissä $r = \underline{r}(\lambda')$, missä $U(r) = C$ on oltava $\dot{\underline{r}}(\lambda') = 0$ eli liikkeen r -suunta mahdollisesti kääntyy. Näin ollen liikettä voidaan tutkia tuttuun tapaan piirtämällä U :n kuvaaja ja leikkaamalla sitä vaakasuorilla suorilla (joiden ‘korkeus’ on C). Jaetaan tarkastelu osiin:

¹²⁶Joka tosin lasketaan myöhemmin käyttämällä ns. harmonisia koordinaatteja.

22.1 Ympyräradat

Ympyräradat $r(\lambda) \equiv a$ (eli $\dot{r}(\lambda) \equiv 0$) esiintyvät etäisyyksillä $r = a$, missä $2U$ saa minimi- tai maksimiarvonsa. Tällöin $2U$:n derivaatta on nolla eli etsitään yhtälön

$$0 = 2 \frac{dU(r)}{dr} = \epsilon \frac{c^2 r_{\text{hor}}}{r^2} - 2 \frac{\ell^2}{r^3} + 3\delta \frac{\ell^2 r_{\text{hor}}}{r^4}$$

eli yhtälön

$$\epsilon c^2 r_{\text{hor}} r^2 - 2\ell^2 r + 3\delta \ell^2 r_{\text{hor}} = 0$$

ratkaisut. [!]

Massallinen hiukkanen

Jos $\epsilon = 1$ (massallinen hiukkanen) ratkaisut ovat

$$r = a_{\pm} := \frac{\ell^2 \pm \sqrt{\ell^4 - \delta 3c^2 \ell^2 r_{\text{hor}}^2}}{c^2 r_{\text{hor}}},$$

joten jos ($\delta = 1$ ja) ℓ^2 on riittävän iso, ympyräratioja on kaksi, joista toinen (+) on stabiili ja toinen (-) epästabiili. Rajalla $\ell^2 \rightarrow \infty$ saadaan (kehittämällä sarjaksi)

$$a_{\pm} = \ell^2 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3c^2 \ell^{-2} r_{\text{hor}}^2}}{c^2 r_{\text{hor}}} \rightarrow \ell^2 \frac{1 \pm (1 - 3c^2 \ell^{-2} r_{\text{hor}}^2 / 2)}{c^2 r_{\text{hor}}} \rightarrow \begin{cases} \ell^2 / (G_N \mathcal{M}) \rightarrow \infty, \\ 3r_{\text{hor}} / 2 = 3G_N \mathcal{M} / c^2. \end{cases}$$

Kun parametria ℓ^2 pienennetään, diskriminantti $\ell^4 - 3c^2 \ell^2 r_{\text{hor}}^2$ menee nolaksi arvolla

$$\ell^2 = 3c^2 r_{\text{hor}}^2 = 12(G_N \mathcal{M} / c)^2,$$

jolla $a_+ = a_- = 6G_N \mathcal{M} / c^2$ eli tämä on pienin mahdollinen *stabiilin* ympyräradan säde (pienemmällä ℓ^2 :n arvoilla ei ole ympyräratioja lainkaan). Kun $3G_N \mathcal{M} / c^2 < r < 6G_N \mathcal{M} / c^2$, niin *epästabiilit* ympyräradat ovat mahdollisia vapaalle hiukkaselle ($\ell^2 \rightarrow \infty$). Jos kappale ei ole vapaa (esim. raketissa on moottorit päällä), niin se voi kiertyä pienemmilläkin ympyräradoilla (eli välillä $r_{\text{hor}} = 2G_N \mathcal{M} / c^2 < r \leq 3G_N \mathcal{M} / c^2$). Kuten ollaan nähty, tapahtumahorisontin sisäpuolella $r < r_{\text{hor}}$ kaikki kappaleet aina ajautuvat singulariteettiin ($r \rightarrow 0$).

Huomautus 19. Jos lisäksi $\delta = 0$ (Newtonin gravitaatio), niin tunnetusti

$$a_{\pm} = \frac{\ell^2 \pm \ell^2}{c^2 r_{\text{hor}}} = \begin{cases} \ell^2 / (G_N \mathcal{M}) & \text{(fysikaalinen ratkaisu),} \\ 0 & \text{(epäfysikaalinen ratkaisu)} \end{cases}$$

eli stabiileja ympyräratioja on yksi. Muut radat ovat joko ellipsejä, paraabelejä tai hyperbelejä.

Massaton hiukkanen

Jos $\epsilon = 0$ (massaton hiukkanen), niin ainoan ympyräradan säde on

$$r = a = \delta 3r_{\text{hor}}/2 = \delta 3G_N \mathcal{M}/c^2.$$

Täten Newtonin mekaniikassa ($\delta = 0$) fotonit ei voi liikkua ympyrärataa (liike aina suoraa), mutta relativistisessa tapauksessa ($\delta = 1$) fotonit voi teoriassa kiertää \mathcal{M} :n ympärillä etäisyydellä $3G_N \mathcal{M}/c^2$, mutta pienikin häiriö suistaa sen tähteen ($r \rightarrow r_{\text{hor}}$) tai äärettömyyteen ($r \rightarrow \infty$) (sillä ympyrärata on epästabiili).

22.2 Muut radat

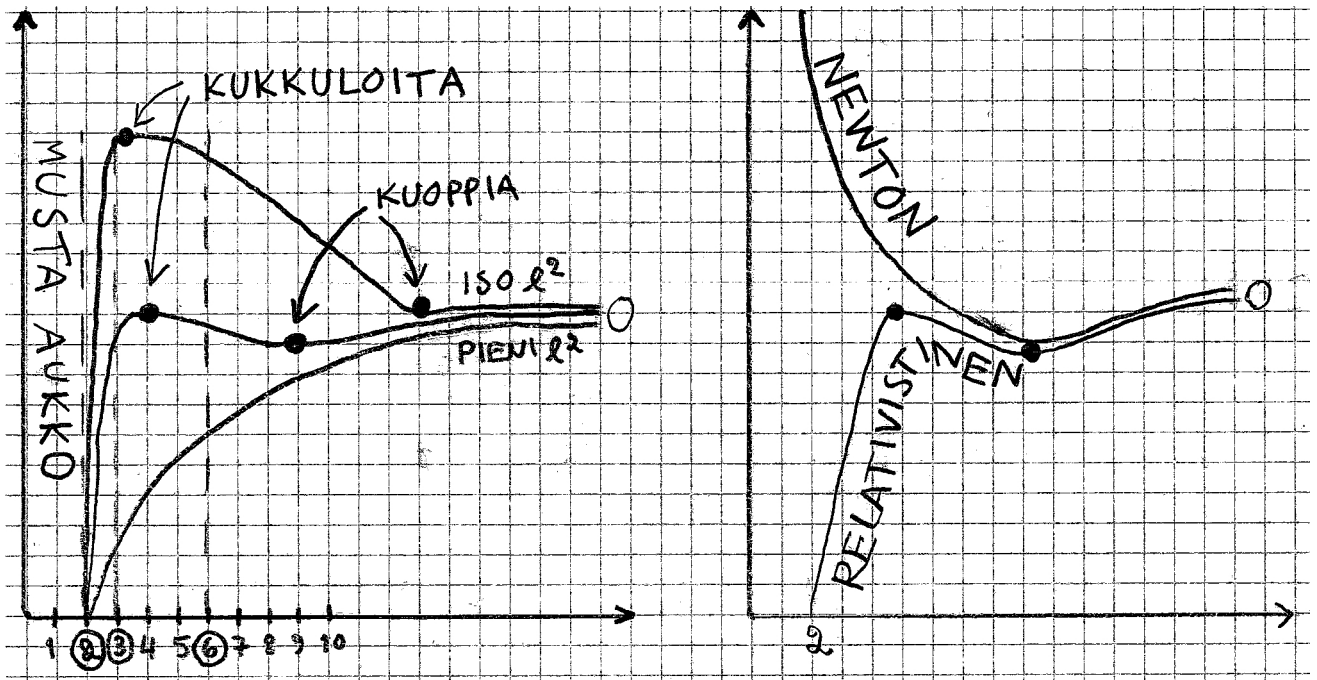
Helppointa on piirtää potentiaalin $U(r)$ kuva tarkasteltaessa muita vapaan kappaleen ratoja ja katsoa siitä. Piirtele vaakasuoria C -viivoja ja tsekkaa milloin suorat leikkaavat $U(r)$:n. Näissä pisteissä liikkeen suunta kääntyy. Huomaa, että radan pisteessä $\underline{r}(\lambda)$ on oltava

$$C = \frac{1}{2}\dot{\underline{r}}(\lambda)^2 + U(\underline{r}(\lambda)) \geq U(\underline{r}(\lambda))$$

eli, kun $U(r)$ ja C -viiva on piirretty, niin mahdollinen tai ‘sallittu’ liike tapahtuu r -akselin pisteissä, missä $U(r) \leq C$ (siis $U(r)$ on C -viivan alapuolella).

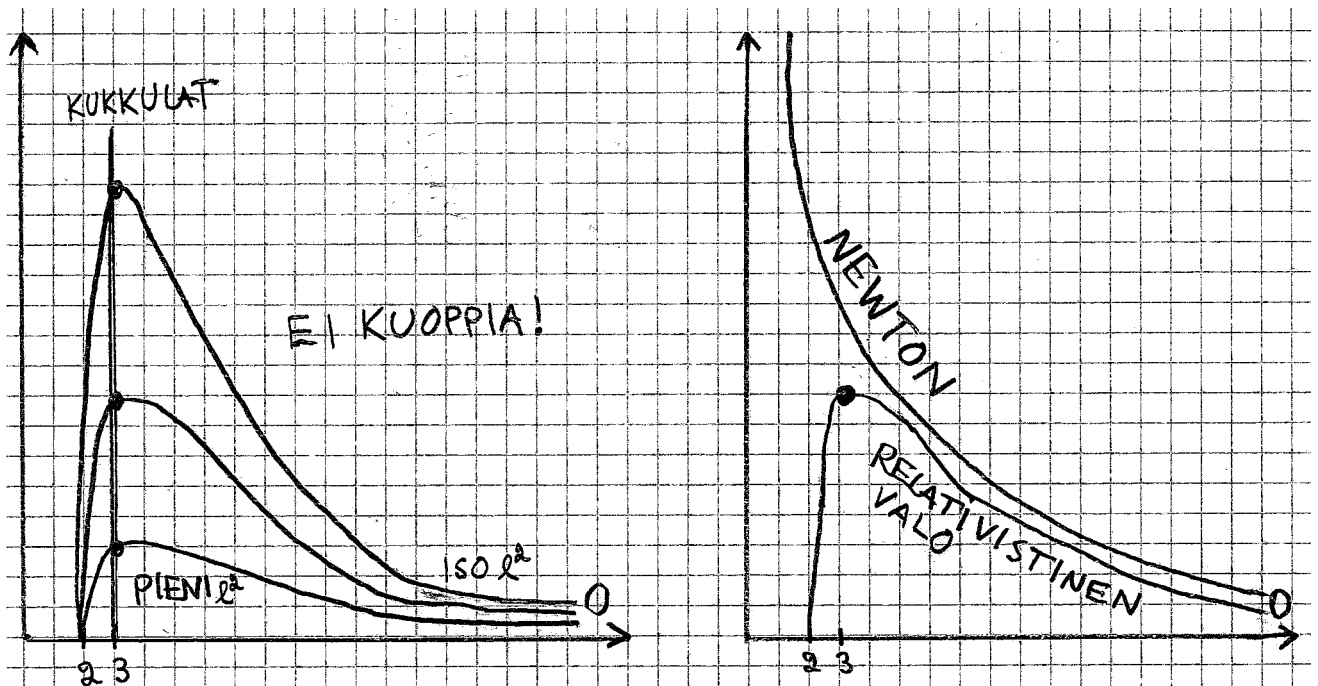
Potentiaalikuopan pienessä ympäristössä r värähtelee, joten liike on rajoitettua (sidottua) ja stabiilia (esim. ellipsirata). Hiukkanen jää kiertämään \mathcal{M} :ää. Kuoppien pohjalla ovat stabiilit ympyräradat. Sironnassa kappale saapuu kaukaa ja karkaa pois. Tällöin vaakaviiva leikkaa $U(r)$:n kerran (sallitun liikkeen alueessa). On myös mahdollista, että hiukkanen liikkuu pois päin \mathcal{M} :stä, vaihtaa suuntaa ja ylittää tapahtumahorisontin. Hiukkanen saattaa jumittua kukkulan kohdalle epästabiilille ympyräradalle, mutta pienikin ‘tönäisy’ ajaa hiukkasen joko tapahtumahorisonttiin tai äärettömyyteen. Jos kiertoimpulssi ℓ pidetään kiinteänä ja muutetaan vain energiaa C nähdään, että riittävän pienillä C :n arvoilla on joko sidottuja tai sirontaliikkeitä tai kumpiakin (ks. seuraavan kuvan ylin käyrä). Mutta kun C on riittävän iso ja ylittää kukkulan, hiukkanen painelee suoraan mustaan aukkoon (tai karkaa äärettömyyteen). Seuraavilla sivuilla on kuvat sekä massallisen että massattoman hiukkasen käyttäytymisestä tähden tai mustan aukon läheisyydessä.

Massallinen hiukkanen



Kuva 12: Vasemmassa kuvassa on piirretty **massallisen hiukkasen** potentiaali $U(r)$ eri parametrin ℓ^2 arvoilla. Pienillä ℓ^2 :n arvoilla maksimeita ja minimeitä ei ole, mutta isommilla arvoilla ilmestyy maksimi- ja minimipisteet. Kun ℓ^2 :sta kasvatetaan maksimi siirtyy kolmosta kohden ja minimi siirtyy äärettömyyteen. Huomaa, että vaaka-akselin yksikkö on $G_N M/c^2$ eli tapahtumahorisontti on kohdassa 2. Oikeassa kuvassa on piirretty yksi relativistinen potentiaali ja Newtonin gravitaatiopotentiaali (siis ilman relativistista korjaustermiä).

Massaton hiukkanen



Kuva 13: Vasemmassa kuvassa on piirretty **massattoman hiukkasen** relativistinen potentiaali $U(r) = \ell^2/(2r^2) - \ell^2 r_{\text{hor}}/(2r^3)$ eri parametrin ℓ^2 arvoilla. Millään ℓ^2 :n arvoilla ei ole minimeitä, mutta kaikilla arvoilla on maksimipisteet, jotka ovat selvästi epästabiileita. Maksimit ovat aina kolmosessa. Huomaa, että vaaka-akselin yksikkö on $G_N M/c^2$ eli tapahtumahorisontti on kohdassa 2. Oikeassa kuvassa on piirretty yksi relativistinen potentiaali ja 'Newtonin' efektiivinen potentiaali $\ell^2/(2r^2)$, jossa ei ole lainkaan maksimeita tai minimeitä.

23 FYS: Kanoniset muunnokset

Olkoon (S, Ω) $2n$ -ulotteinen symplektinen monisto ja $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sekä $\tilde{\xi} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ sen *kanoniset* kartat.¹²⁷ Täten (kanonisen kartan määritelmän perusteella) lokaalisti

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i = \sum_{i=1}^n dP^i \wedge dQ^i$$

ja Hamiltonin funktion H generoima liike $\alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow S$ toteuttaa Hamiltonin yhtälöt $\dot{\alpha} = -\Omega^{-1}(dH) \circ \alpha$, jotka näyttävät kanonisissa kartoissa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ja (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) saman muotoisilta:

$$\dot{\underline{\mathbf{q}}}(\lambda) = \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathbf{p}}}(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\mathbf{p}}(\lambda)), \quad \dot{\underline{\mathbf{p}}}(\lambda) = -\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathbf{q}}}(\underline{\mathbf{q}}(\lambda), \underline{\mathbf{p}}(\lambda))$$

tai

$$\dot{\underline{\mathbf{Q}}}(\lambda) = \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathbf{P}}}(\underline{\mathbf{Q}}(\lambda), \underline{\mathbf{P}}(\lambda)), \quad \dot{\underline{\mathbf{P}}}(\lambda) = -\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathbf{Q}}}(\underline{\mathbf{Q}}(\lambda), \underline{\mathbf{P}}(\lambda)).$$

Olkoon sitten \mathbf{A}_s tai lyhyesti $\mathbf{A} = (A^i_j)_{i,j=1}^{2n}$, $A^i_j := \partial \tilde{\xi}^i / \partial \xi^j|_s$, kartan vaihdon Jacobin matriisi (pisteessä $s \in S$, joka kuuluu kummankin kartan määrittelyalueeseen). Välittömästi nähdään, [!] että \mathbf{A} toteuttaa yhtälön

$$\mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} = \mathbf{\Gamma},$$

missä \mathbf{A}^T on \mathbf{A} :n transpoosi, eli \mathbf{A} on *reaalisen symplektisen ryhmän* $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ alkio; ryhmä $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ koostuu $2n \times 2n$ -reaalimatriiseista \mathbf{A} , jotka toteuttavat ehdon $\mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}$.¹²⁸ (Vertaa ortogonaalimatriisien ryhmään ja Lorentzin ryhmään, joissa $\mathbf{\Gamma}$:n tilalla on $\mathbf{1}$ tai $\boldsymbol{\eta}$ vastaavasti).

Kanonisten karttojen välistä koordinaattimuunnosta $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ sanotaan *kanoniseksi muunnokseksi* (tai karttoja kanonisesti yhteensopiviksi), sillä tässä muunnoksessa *Hamiltonin kanoniset yhtälöt pysyvät saman muotoisina* (eli Hamiltonin yhtälöt ovat muotoinvariantteja kanonisten muunnosten suhteen). Koordinaattimuunnos on siis kanoninen, jos sen Jacobin matriisi \mathbf{A}_s on symplektinen karttojen alueiden leikkauksen kaikissa pisteissä s . Helposti nähdään myös, että symplektinen monisto voidaan varustaa kartastolla, jossa kaikki kartat ovat parittain keskenään kanonisesti yhteensopivia. Seuraava lause karakterisoi kanoniset muunnokset eri tavoin:

Lause 8. *Olkoon $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ kanoninen kartta ja $\tilde{\xi} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ joku kartta. Seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:*

¹²⁷Joiden määrittelyalueitten leikkaus on epätyhjä.

¹²⁸Ryhmätulo on matriisien kertolasku, ykkösalkio on identiteettimatriisi ja käänteisalkio on käänteismatriisi, joka on olemassa, sillä $\det(\mathbf{A}) = 1$.

1. (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) on kanoninen kartta (eli yhtäpitävästi $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ on kanoninen muunnos).
2. $\sum_{i=1}^n dP^i \wedge dQ^i = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i = \Omega$.
3. Muunnoksen $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ Jacobin matriisit \mathbf{A}_s ovat symplektisiä (eli $\mathbf{A}_s^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}_s = \mathbf{\Gamma}$).
4. Kaikilla $H \in \mathcal{F}(S)$, jos liike $\alpha : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow S$ toteuttaa Hamiltonin yhtälöt $\dot{\alpha} = -\Omega^{-1}(dH) \circ \alpha$, niin kartassa (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) yhtälöt ovat kanonista muotoa

$$\underline{\dot{\mathbf{Q}}}(\lambda) = \partial H / \partial \mathbf{P} \Big|_{(\underline{\mathbf{Q}}(\lambda), \underline{\mathbf{P}}(\lambda))}, \quad \underline{\dot{\mathbf{P}}}(\lambda) = -\partial H / \partial \mathbf{Q} \Big|_{(\underline{\mathbf{Q}}(\lambda), \underline{\mathbf{P}}(\lambda))}.$$
5. Kaikilla $f, g \in \mathcal{F}(S)$ Poissonin sulku

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial Q^i} \frac{\partial g}{\partial P^i} - \frac{\partial f}{\partial P^i} \frac{\partial g}{\partial Q^i} \right).$$

6. Kaikilla $i, j = 1, 2, \dots, n$ perussulut ovat $\boxed{[Q^i, P^j] = \delta^{ij}}$ ja $\boxed{[Q^i, Q^j] = 0 = [P^i, P^j]}$.

Todistus. Tapaukset (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) ja (2) \Rightarrow (4) todettiin aiemmin. Todistus (5) \Rightarrow (6) on triviaali. Koska $[\tilde{\xi}^k, \tilde{\xi}^l] = A^k{}_i \Gamma^{ij} A^l{}_j$, niin $[\tilde{\xi}^k, \tilde{\xi}^l] = \Gamma^{kl} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{\Gamma}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}$. Täten (6) \Leftrightarrow (3). Oletetaan (2). Koska $[f, g] = \Omega^{-1}(df)g$ ja Ω sekä df ovat samanmuotoisia kaikissa kanonisissa kartoissa,

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial Q^i} \frac{\partial g}{\partial P^i} - \frac{\partial f}{\partial P^i} \frac{\partial g}{\partial Q^i} \right)$$

eli myös Poissonin sulku on saman muotoinen. Täten (2) \Rightarrow (5). Lopuksi oletetaan, että (4) pätee. Koska nyt $\dot{f} = [f, H]$, niin valitsemalla f :ksi ja H :ksi sopivia muuttujia Q^i tai P^j nähdään, että (6) seuraa. \square

Kun pitää osoittaa, että muunnos on kanoninen, niin kohta (6) on kätevin.¹²⁹ Eli riittää laskea koordinaattifunktioitten $Q^1, \dots, Q^n, P^1, \dots, P^n$ keskinäiset Poissonin sulut. Myöhemmin pyritään löytämään sellainen kanoninen muunnos, että mahdollisimman moni uusista koordinaateista on liikevakioita. Tällöin liikeyhtälöitten ratkaiseminen on helpompaa (uusissa koordinaateissa).

¹²⁹Joskus kanonista muunnosta sanotaan *rajoitetusti* kanoniseksi. Rajoittamattomasti kanonisessa muunnoksessa sallitaan, että perussulut säilyvät (samaa) vakiota $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vaille eli $[Q^i, P^j] = C\delta^{ij}$ ja muut sulut ovat nollia. Mutta tämä on tarpeeton yleistys, sillä jos $C > 0$ voidaan määritellä kartta $\mathbf{Q}' := C^{-1/2} \mathbf{Q}$ ja $\mathbf{P}' := C^{-1/2} \mathbf{P}$, ja jos $C < 0$, määritellään $\mathbf{Q}' := (-C)^{-1/2} \mathbf{P}$ ja $\mathbf{P}' := (-C)^{-1/2} \mathbf{Q}$. Nyt $[Q'^i, P'^j] = \delta^{ij}$ jne. eli kartta $(\mathbf{Q}', \mathbf{P}')$ on (rajoitetusti) kanoninen.

Esimerkki 53. Tapaus $n = 1$ on yksinkertainen, sillä riittää tsekata ehto $[Q, P] = 1$. Huomaa myös, että $[Q, P](s) = \det \mathbf{A}_s$, joten nyt ehto (3) on yhtäpitävä ehdon $\det \mathbf{A}_s = 1$ kanssa. Esimerkiksi muunnos $Q(q, p) = p^a \cos q$, $P(q, p) = bp^a \sin q$, $a, b \in \mathbb{R}$ on kanoninen, joss $[Q, P] = -abp^{2a-1} = 1$ eli $a = 1/2$ ja $b = -2$.

Esimerkki 54. Olkoon faasiavaruus S moniston M kotangenttikimppu TM^* ja \mathbf{q} sekä \mathbf{Q} M :n karttoja. Faasiavaruuden kartaksi voidaan valita $(\mathbf{m}, \sum_i p_i dq^i|_{\mathbf{m}}) \mapsto (\mathbf{q}(\mathbf{m}), \mathbf{p})$ tai $(\mathbf{m}, \sum_i P_i dQ^i|_{\mathbf{m}}) \mapsto (\mathbf{Q}(\mathbf{m}), \mathbf{P})$. Koska $P_i = \sum_j (\partial q^j / \partial Q^i) p_j$, niin

$$\sum_{i=1}^n dP_i \wedge dQ^i = \sum_{j,k=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial q^j}{\partial Q^i} \frac{\partial Q^i}{\partial q^k}}_{=\delta_k^j} dp_j \wedge dq^k + \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^n p_j \frac{\partial^2 q^j}{\partial Q^i \partial Q^k} dQ^k \wedge dQ^i}_{=0} = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq^j$$

eli muunnos $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ on kanoninen (tämä tiedettiin kyllä muutenkin Poincarén 2-muodon määritelmästä). Muunnosta sanotaan *pistemuunnokseksi*, koska säikeen koordinaatit \mathbf{p} ovat kytkeytyneet kantamoniston pisteen koordinaatteihin \mathbf{q} . Toki voidaan käyttää yleisempiäkin karttoja, missä näin ei ole.

Harjoitustehtävä 52. Tarkastellaan neliulotteista faasiavaruutta eli $n = 2$. Ovatko seuraavat muunnokset kanonisia?

- $Q^1 = p^1/7$, $Q^2 = p^2/7$, $P^1 = p^2 - 7q^1$ ja $P^2 = p^1 - 7q^2$.
- $Q^1 = p^1 p^2 - q^1$, $Q^2 = p^1 q^2$, $P^1 = p^1$ ja $P^2 = q^2 p^2$.
- $Q^1 = q^1 - q^2$, $Q^2 = q^1 + q^2$, $P^1 = p^1 - p^2$ ja $P^2 = p^1 + p^2$.

Jos muunnos ei ole kanoninen, saatko sen skaalattua kanoniseksi? Mikä on c)-kohdan muunnoksen geometrinen tulkinta? Mitkä ovat yllä olevien kanonisten muunnosten käänteismuunnokset?

23.1 Generoivat funktiot

Olkoon (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ja (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) kanonisia karttoja (kumpikin määritelty jonkun pisteen $s \in S$ ympäristössä) ja $\Lambda_1 := \sum_{i=1}^n p^i dq^i$ sekä $\Lambda_2 := \sum_{i=1}^n P^i dQ^i$ 1-muotoja. 1-muodoista saadaan 2-muotoja ulkoisen derivaatan d avulla: nyt $d\Lambda_1 = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i = \Omega$ ja $d\Lambda_2 = \sum_{i=1}^n dP^i \wedge dQ^i = \Omega$. Poincarén lemma 3 sanoo, että jos 1-muodon ulkoinen derivaatta on 0, niin se on (lokaalisti pisteen s kutistuvassa ympäristössä) muotoa dF , missä F on (kyseisessä ympäristössä määritelty) reaaliarvoinen funktio eli nollamuoto. Koska $d(\Lambda_1 - \Lambda_2) = \Omega - \Omega = 0$, saadaan siis

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 = dF \tag{28}$$

eli esimerkiksi kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p})

$$\sum_{j=1}^n p^j dq^j - \sum_{i=1}^n P^i \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p^j} dp^j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial F}{\partial p^j} dp^j \right).$$

Kaava vaikuttaa monimutkaiselta, mutta sitä voi yksinkertaistaa valitsemalla vapaat muuttujat (edellä siis (\mathbf{q}, \mathbf{p})) toisin. Tarkastellaan tätä seuraavassa.

Oletetaan, että pisteen s ympäristössä

$$\det \left(\frac{\partial Q^i(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p^j} \right)_{i,j=1}^n \neq 0.$$

Tästä seuraa (käänteiskuvauslause), että riippumattomiksi muuttujiksi voidaan valita \mathbf{q} ja \mathbf{Q} eli \mathbf{p} voidaan esittää niiden funktiona $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$. Määritellään kanonisen muunnoksen $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ generoiva funktio¹³⁰

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) := F(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})).$$

Yhtälö (28) on nyt muotoa

$$\sum_{i=1}^n p^i dq^i - \sum_{i=1}^n P^i dQ^i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} dQ^i \right).$$

Vertailemalla kertoimia saadaan

$$\begin{aligned} p^i &= \frac{\partial F_1}{\partial q^i}, \\ P^i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i}. \end{aligned}$$

Toisaalta, jos

$$\det \left(\frac{\partial P^i(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p^j} \right)_{i,j=1}^n \neq 0,$$

niin \mathbf{p} voidaan esittää riippumattomien muuttujien (\mathbf{q}, \mathbf{P}) avulla ja voidaan määritellä (Legendren muunnoksen avulla) generoiva funktio

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) := \sum_{i=1}^n P^i Q^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P})) + F(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P})).$$

Yhtälö (28) on muotoa

$$\sum_{i=1}^n p^i dq^i - \sum_{i=1}^n P^i dQ^i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_2}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F_2}{\partial P^i} dP^i \right) - \sum_{i=1}^n (P^i dQ^i + Q^i dP^i).$$

¹³⁰ F_1 :n määrittelyalue on joukon $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avoin (osa)joukko (ei siis S :n joukko).

Vertailemalla kertoimia saadaan

$$\begin{aligned} p^i &= \frac{\partial F_2}{\partial q^i}, \\ Q^i &= \frac{\partial F_2}{\partial P^i}. \end{aligned}$$

Edelleen, jos

$$\det \left(\frac{\partial Q^i(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q^j} \right)_{i,j=1}^n \neq 0,$$

niin \mathbf{q} voidaan esittää riippumattomien muuttujien (\mathbf{p}, \mathbf{Q}) avulla, ja määrittelemällä (Legendren muunnoksen avulla) generoiva funktio

$$F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) := - \sum_{i=1}^n p^i q^i(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + F(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}), \mathbf{p}),$$

yhtälö (28) saadaan muotoon

$$\sum_{i=1}^n p^i dq^i - \sum_{i=1}^n P^i dQ^i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_3}{\partial p^i} dp^i + \frac{\partial F_3}{\partial Q^i} dQ^i \right) + \sum_{i=1}^n (p^i dq^i + q^i dp^i).$$

Vertailemalla kertoimia nähdään, että

$$\begin{aligned} q^i &= - \frac{\partial F_3}{\partial p^i}, \\ P^i &= - \frac{\partial F_3}{\partial Q^i}. \end{aligned}$$

Lopuksi, jos

$$\det \left(\frac{\partial P^i(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q^j} \right)_{i,j=1}^n \neq 0,$$

niin \mathbf{q} voidaan esittää riippumattomien muuttujien (\mathbf{p}, \mathbf{P}) avulla. Tehdään kaksi Legendren muunnosta peräkkäin funktiolle F :

$$F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}) := - \sum_{i=1}^n p^i q^i(\mathbf{p}, \mathbf{P}) + \sum_{i=1}^n P^i Q^i(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}), \mathbf{p}) + F(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}), \mathbf{p}).$$

Tällöin yhtälö (28) on muotoa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p^i dq^i - \sum_{i=1}^n P^i dQ^i &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_4}{\partial p^i} dp^i + \frac{\partial F_4}{\partial P^i} dP^i \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n (p^i dq^i + q^i dp^i) - \sum_{i=1}^n (P^i dQ^i + Q^i dP^i) \end{aligned}$$

ja täten

$$\begin{aligned} q^i &= - \frac{\partial F_4}{\partial p^i}, \\ Q^i &= \frac{\partial F_4}{\partial P^i}. \end{aligned}$$

Kerätään yllä olevat tulokset taulukoksi:

No	Pieni	Iso
1	$p+$	$P-$
2	$p+$	$Q+$
3	$q-$	$P-$
4	$q-$	$Q+$

Taulukkoa luetaan siten, että **No** kertoo generoivan funktion numeron (k) ja **Pieni** ($a\pm$) tai **Iso** ($A\pm$) pienen tai ison muuttujan nimen (a tai A) ja merkin ($m_a, m_A = \pm$). Yhtälöt ovat muotoa

$$a^i = m_a \frac{\partial F_k}{\partial b^i},$$

$$A^i = m_A \frac{\partial F_k}{\partial B^i},$$

missä b^i (tai B^i) on konjugoitu pieni (tai iso) muuttuja. Täten muuttujat b^i ja B^i ovat riippumattomia muuttujia (generoiva funktio $F_k(b^i, B^i)$).¹³¹

Edellä on osoitettu, että kanoniselle muunnokselle löytyy aina (lokaali) funktio F , jonka avulla voidaan (mahdollisesti) määrittellä generoiva funktio F_k . Myös käänteinen tulos pätee riittävien säännöllisyysehtojen vallitessa; tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi vain tapausta $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$: Olkoon $W_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{q}(s)$ ja $W_{\mathbf{Q}} \ni \mathbf{Q}(s)$ \mathbb{R}^n :n avoimia (osa)joukkoja¹³² ja $F_1 : W_{\mathbf{q}} \times W_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbb{R}$ (sileä) funktio, jolle

$$\det \left(\frac{\partial^2 F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial q^i \partial Q^j} \right)_{i,j=1}^n \neq 0 \quad \forall (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \in W_{\mathbf{q}} \times W_{\mathbf{Q}}.$$

Tällöin F_1 on jonkun kanonisen muunnoksen generoiva funktio.¹³³ Tapauksille F_2, F_3 ja F_4 saadaan vastaavat ehdot.

¹³¹Huomaa, että voidaan valita myös muita riippumattomia muuttujia. Esim. jos $n = 2$, niin muuttujiksi voidaan valita mitkä tahansa 4 muuttujaa (Q^1, q^2, p^1, p^2) , (q^1, Q^2, p^2, P^2) , (q^1, Q^1, p^1, P^1) , jne. mikäli vaan ne ovat toisistaan ‘riippumattomia.’

¹³²Jotka sisältyvät karttojen \mathbf{q} ja \mathbf{Q} arvojoukkoihin.

¹³³Todistus perustuu implisiittifunktiolauseeseen, jota käyttämällä voidaan ratkaista yhtälö $\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q})/\partial q^i = p^i$ muuttujien \mathbf{Q} suhteen eli funktio $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Voidaan määrittellä $P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := -\partial F_1/\partial Q^i|_{(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))}$ ja saadaan $\sum_{i=1}^n p^i dq^i - \sum_{i=1}^n P^i dQ^i = \sum_i (\partial F_1/\partial q^i) dq^i + (\partial F_1/\partial Q^i) dQ^i = dF_1$ sekä $\det(\partial Q^i(\mathbf{q}, \mathbf{p})/\partial p^j) = \det(\partial^2 F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q})/\partial q^i \partial Q^j)^{-1} \neq 0$.

Esimerkki 55. Tarkastellaan faasiavaruutta \mathbb{R}^2 . Määritellään funktio $F_1(q, Q) := qQ$. Koska

$$\frac{\partial^2 F_1(q, Q)}{\partial q \partial Q} = 1 \neq 0,$$

niin F_1 generoi kanonisen muunnoksen, jolle

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q, \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -q \end{aligned}$$

eli $Q(q, p) = p$ ja $P(q, p) = -q$. Erityisesti $dP \wedge dQ = -dq \wedge dp = dp \wedge dq$ tai $[Q, P] = 1$ (tarkistuslasku).

Esimerkki 56. Tarkastellaan faasiavaruutta \mathbb{R}^2 . Määritellään funktio $F_1(q, Q) := q + Q$. Nyt

$$\frac{\partial^2 F_1(q, Q)}{\partial q \partial Q} = 0.$$

Funktio F_1 ei generoi kanonista muunnosta, sillä

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 1,$$

mutta $p \in \mathbb{R}$ on vapaa muuttuja (ristiriita).

23.2 Ajasta riippuva tapaus

Tarkastellaan tila-avaruutta $\mathcal{S} = \mathcal{T} \times S$ ja sen karttoja $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ sekä $(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$, missä (\mathbf{q}, \mathbf{p}) on S :n kanoninen kartta ja $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$. Kartanvaihdossa ei siis muuteta aikaa $t = q^0 = Q^0$. Lisätään kanonisesti konjugoidut kotangenttikimppun $T\mathcal{T}^*$ ‘energiakoordinaatit’ p^0 ja P^0 karttoihin. Jokaiselle $H \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ määritellään $H' : T\mathcal{T}^* \times S \rightarrow \mathbb{R}$ joka on kanonisessa kartassa muotoa $H'(t, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) := p^0 + H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$. Muunnoksen $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ sanotaan olevan (ajasta riippuva) kanoninen muunnos mikäli sen laajennus faasiavaruuteen $(T\mathcal{T}^* \times S, \Omega')$ on kanoninen muunnos.¹³⁴ Kuten nähtiin, muunnos $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ on kanoninen, joss sillä on (joka pisteen ympäristössä) generoiva funktio $F'(t, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p})$. Legendren muunnoksilla päästään eri tyyppisiin generoiviin funktioihin F'_k kuten aiemmin. [!] Tarkastellaan vaikka tapausta $k = 2$ (muut hoituu analogisesti). [!] Nyt

$$F'_2(t, \mathbf{q}, P^0, \mathbf{P}) = P^0 t + \sum_{i=1}^n P^i Q^i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})) + F'(t, \mathbf{q}, p^0(t, \mathbf{q}, P^0, \mathbf{P}), \mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})).$$

¹³⁴Tuttuun tapaan määritellään $\Omega' := dp^0 \wedge dq^0 + \Omega = \sum_{i=0}^n dp^i \wedge dq^i$.

ja

$$\begin{aligned} Q^0 &= t = \frac{\partial F'_2}{\partial P^0} \implies F'_2(t, \mathbf{q}, P^0, \mathbf{P}) = P^0 t + F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}), \\ p^0 &= \frac{\partial F'_2}{\partial q^0} = \frac{\partial F'_2}{\partial t} = P^0 + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned}$$

sekä kaikilla $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} p^i &= \frac{\partial F_2}{\partial q^i}, \\ Q^i &= \frac{\partial F_2}{\partial P^i} \end{aligned}$$

eli saatiin samat yhtälöt kuin aiemmin (nyt vaan F_2 riippuu myös ajasta). Koska $H' = p^0 + H = P^0 + \partial F_2/\partial t + H = P^0 + K$, niin uusi (karttariippuva) Hamilton on $K := H + \partial F_2/\partial t$ ja Hamiltonin yhtälöt voidaan kirjoittaa kanonisissa kartoissa muodoissa $\dot{\mathbf{q}} = -\partial H/\partial \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = \partial H/\partial \mathbf{q}$ tai $\dot{\mathbf{Q}} = -\partial K/\partial \mathbf{P}$, $\dot{\mathbf{P}} = \partial K/\partial \mathbf{Q}$. Vastaavasti käsitellään muut generoivat funktiot F_k eli saadaan täsmälleen samat kaavat kuin ajasta riippumattomassa tapauksessakin paitsi aina uusi Hamilton $K = H + \partial F_k/\partial t$. Huom! Ajasta riippumattomassa tapauksessa $\partial F_k/\partial t = 0$ eli $K = H$ eli kaikki Hamiltonit ovat karttariippumattomia.

Jos f ja g eivät riipu koordinaatista p^0 , niin laajennettu sulku

$$[f, g]' = \frac{\partial f}{\partial q^0} \frac{\partial g}{\partial p^0} - \frac{\partial f}{\partial p^0} \frac{\partial g}{\partial q^0} + [f, g] = [f, g].$$

ja $[f, t]' = 0$. Täten, jos muunnoksen $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, $Q^0(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = q^0 = t$ perussulut ovat $[Q^i, P^j] = \delta^{ij}$ ja $[Q^i, Q^j] = 0 = [P^i, P^j]$, niin muunnos on kanoninen.¹³⁵

Esimerkki 57. Ajasta riippuva muunnos ('faasiavaruuden kierto') $Q = q \cos t + p \sin t$ ja $P = -q \sin t + p \cos t$ on kanoninen, sillä $[Q, P] = 1$. [!] (Lokaalina) generoivana funktiona esim.

$$F_2(q, P, t) = \frac{1}{2}(q^2 + P^2) \tan t + qP/\cos t,$$

sillä

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial q} &= (q \sin t + P)/\cos t = p, \\ \frac{\partial F_2}{\partial P} &= (P \sin t + q)/\cos t = [q(1 - \sin^2 t) + p \sin t \cos t]/\cos t = Q. \end{aligned}$$

¹³⁵Sillä vastaavat perussulut laajennetun Poissonin sulun $[f, g]'$ suhteen ovat samat eli esim. $[Q^i, P^j]' = \delta^{ij}$ ja $[Q^0, P^j]' = 0$ ($i, j > 0$). 'Koordinaatti' P^0 määräytyy nyt automaattisesti kirjoittamalla $P^0(q^0, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = p^0 + V(q^0, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ (jotenka $[Q^0, P^0] = 1$) ja valitsemalla V siten, että $[Q^i, P^0]' = 0 = [P^i, P^0]'$. Tämä on mahdollista Poincarén lemman perusteella, sillä suoralla laskulla nähdään, että $d\nu = 0$, missä $\nu := (\partial_i Q^j \partial_0 P^j - \partial_i P^j \partial_0 Q^j) d\xi^i$ eli on olemassa V siten, että $\nu = dV$. Nyt $\sum_{j=0}^n dP^j \wedge dQ^j = \sum_{i=0}^n dp^i \wedge dq^i = \Omega'$ eli uusi kartta on kanoninen.

Hamiltonia H vastaava uusi Hamiltonin funktio on

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \frac{1}{2}(q^2 + p^2).$$

Erityisesti Hamiltonia $H = 0$ vastaava $K = K_0 := (q^2 + p^2)/2 = (Q^2 + P^2)/2$ ja nyt

$$\begin{aligned} dP \wedge dQ - dK_0 \wedge dt &= \\ (-\sin tdq + \cos tdp - q \cos tdt - p \sin tdt) \wedge (\cos tdq + \sin tdp - q \sin tdt + p \cos tdt) \\ -(qdq + pdp) \wedge dt &= dp \wedge dq. \end{aligned}$$

Huomaa, että laajennetussa avaruudessa aina $p^0 = P^0 + K_0$, missä K_0 on Hamiltonia $H = 0$ vastaava funktio. Mikä on tämän esimerkin fysikaalinen tulkinta? Huomaa, että (Q, P) havaitsija värähtelee harmonisesti (q, p) :n suhteen eli q -akselilla.

23.3 Faasivirrat ja kanoniset muunnokset

Olkoon $f \in \mathcal{F}(S)$ suure. Tarkastellaan sen generoimaa (lokaalia) faasiavaruuden muunnosta (kanonisessa kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) hetkellä t): parametrin arvolla u pisteen $s \in S$ koordinaatitvektori $(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)) = (\underline{\mathbf{q}}_{s,t}(0), \underline{\mathbf{p}}_{s,t}(0))$ muuntuu vektoriksi $(\underline{\mathbf{q}}_{s,t}(u), \underline{\mathbf{p}}_{s,t}(u))$ eli piste siirtyy f :n integraalikäyrää pitkin. Merkitään tätä *aktiivista* muunnosta lyhyesti symbolilla $\Phi_{u,t}$ eli $((\mathbf{q}, \mathbf{p}) \circ \Phi_{u,t})(s) = (\underline{\mathbf{q}}_{s,t}(u), \underline{\mathbf{p}}_{s,t}(u))$. Huomautuksen 16 nojalla voidaan määritellä (lokaali) \mathbb{R}^{2n} :n kääntyvä muunnos $\phi_{u,t}$ kaavalla

$$\phi_{u,t} \circ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) := (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \circ \Phi_{u,t}.$$

Toisaalta muunnos voidaan nähdä myös *passiivisena* eli kartan vaihtona: Määritellään uusi kartta kaavalla

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = (\mathbf{Q}_{u,t}, \mathbf{P}_{u,t}) := \phi_{u,t}^{-1} \circ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \phi_{-u,t} \circ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \circ \Phi_{-u,t}$$

eli pisteen (t, s) koordinaatit ovat

$$(\mathbf{Q}_{u,t}(t, s), \mathbf{P}_{u,t}(t, s)) = (\underline{\mathbf{q}}_{s,t}(-u), \underline{\mathbf{p}}_{s,t}(-u)).$$

Jos f ei riipu ajasta t , niin jätetään symboli t pois.

Voidaan helposti osoittaa,¹³⁶ että uusien koordinaattien perussulut säilyvät eli esimerkiksi

$$[Q^i, P^j] = [Q_{u,t}^i, P_{u,t}^j] = \delta^{ij}.$$

¹³⁶Poissonin sulkuteoreemasta seuraa, että esimerkiksi $\partial[Q_{u,t}^i, P_{u,t}^j]/\partial u = [\partial_u Q_{u,t}^i, P_{u,t}^j] + [Q_{u,t}^i, \partial_u P_{u,t}^j] = -[\partial f/\partial p^j|_{\mathbf{q}=\mathbf{Q}, \mathbf{p}=\mathbf{P}}, P_{u,t}^j] + [Q_{u,t}^i, \partial f/\partial q^j|_{\mathbf{q}=\mathbf{Q}, \mathbf{p}=\mathbf{P}}] = 0$ eli sulku on parametrin u suhteen vakio, joka taasen on $[Q_{0,t}^i, P_{0,t}^j] = [q^i, p^j] = \delta^{ij}$.

Täten muunnos $(\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))$ on kanoninen kaikilla mahdollisilla parametrin u arvoilla. Erityisesti sillä on generoiva funktio $F \equiv F^u$. Esimerkiksi liike (jonka generoi H) voidaan tulkita kanonisena muunnoksena.¹³⁷ Täten ollaan nähty, että *faasiavaruuden (symmetria)muunnokset syntyvät aina generoivista funktioista!*

Esimerkki 58. Tarkastellaan esimerkin 45 kanonista muunnosta

$$\begin{aligned} Q_u^j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= q^j \cos u + q^k \sin u, \\ Q_u^k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= -q^j \sin u + q^k \cos u, \\ P_u^j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= p^j \cos u + p^k \sin u, \\ P_u^k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= -p^j \sin u + p^k \cos u, \end{aligned}$$

missä u ajatellaan (kiinteäksi) vakioksi. Muunnoksen generoi esimerkiksi tyypin 2 generoiva funktio [!]

$$F_2^u(\mathbf{q}, \mathbf{P}_u) = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i \neq k}}^n q^i P_u^i + [q^j \cos u + q^k \sin u] P_u^j + [-q^j \sin u + q^k \cos u] P_u^k.$$

Vastaavasti saadaan Lorentzin muunnosten generoivat funktiot. [!]

Harjoitustehtävä 53. Määrää seuraavien generoivien funktioiden generoimat kanoniset muunnokset (voit tsekata aluksi määrävätkö ne ylipäätään mitään kanonista muunnosta):

- $F_1(q, Q) = q^2 Q^3$,
- $F_2(t, q, P) = \sin(qt)P + q$,
- $F_3(p^1, p^2, Q^1, Q^2) = p^1 p^2 Q^1 Q^2$,
- $F_4(t, p^1, p^2, P^1, P^2) = e^{t(P^1+P^2)} + \frac{1}{2}(p^1)^2 + \frac{1}{2}(p^2)^2$.

Mikä on b)–kohdan uusi Hamilton K , jos alkuperäinen Hamilton on H ?

Harjoitustehtävä 54. Etsi seuraavien kanonisten muunnosten generoivat funktiot:

- Muunnoksen $Q = q \cos \theta - p \sin \theta$, $P = q \sin \theta + p \cos \theta$ tyypin F_1 ja F_2 generoivat funktiot.
- Muunnoksen $Q = \sin q$, $P = (p - 1)/\cos q$ generoiva funktio F_2 .
- Millä parametrien a ja b arvoilla muunnos $Q = q^a \cos(bp)$, $P = q^a \sin(bp)$ on kanoninen?

Etsi tällöin F_3 .

d) Muunnoksen $Q = p$, $P = pt/m - q$ (ajasta riippuva) generoiva funktio F_4 . Mikä on Hamiltonia $H(q, p) = p^2/(2m) + V(q)$ vastaava uusi Hamilton $K(t, Q, P)$?

¹³⁷Koska liike on kanoninen muunnos, se säilyttää symplektisen muodon Ω ja ns. faasiavaruuden tilavuusmuodon $\Omega \wedge \Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ (n kappaletta), joka on astetta $2n$. Tämä on ns. Liouwillen teoreema.

24 FYS: Täydellisesti integroituvat systeemit

Hamiltonin yhtälöiden ratkaiseminen on joskus (tai paremminkin usein) vaikeaa. Eräs tapa ratkaista Hamiltonin yhtälöt on etsiä sellainen kanoninen muunnos, että uusissa koordinaateissa Hamiltonin yhtälöt osataan ratkaista. Tämän jälkeen voidaan palata alkuperäisiin koordinaatteihin käänteismuunnoksella. Tällöin yhtälöitten ratkaisemisen vaikeus siirtyy sopivan muunnoksen löytämiseen. Yleisesti ottaen *mitä enemmän tunnetaan liikevakioita, sitä helpompaa Hamiltonin yhtälöitten ratkaiseminen on*, sillä uusiksi koodinaateiksi voidaan valita tunnettuja liikevakioita. Liikevakioita taasen löydetään mm. Hamiltonin funktion symmetrioista sekä tarkastelemalla suureiden ja Hamiltonin välisiä Poissonin sulkuja.

Harjoitustehtävä 55. a) Hiukkanen liikkuu (q^1, q^2) -tasossa ja sen Hamiltonin funktio on $H = (p^1)^2/2 + (p^2)^2/2 + q^1 q^2$. Tehdään muunnos $Q^1 = 2^{-1/2}(q^1 - q^2)$, $Q^2 = 2^{-1/2}(q^1 + q^2)$, $P^1 = 2^{-1/2}(p^1 - p^2)$ ja $P^2 = 2^{-1/2}(p^1 + p^2)$. Miltä Hamiltonin yhtälöt näyttävät uudessa (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) -kartassa? Ratkaise ne ja ilmoita tulos kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) .

b) Tarkastellaan harmonista oskillaattoria q -akselilla eli $H = p^2/2 + q^2/2$. Tee kanoninen muunnos, jonka generoiva funktio on $F_1(q, Q) = aq^2 \cot Q$. Kirjoita H uudessa kartassa (Q, P) ja etsi sellainen parametri a , että H ei riipu Q :stä lainkaan.

Esimerkki 59. Tarkastellaan Hamiltonin yhtälöitä $\dot{\mathbf{q}} = \partial H/\partial \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{q}$ (kanonisessa) kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Jos löytyy kanoninen muunnos $(\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))$ siten, että uusi Hamilton K riippuu vain osasta uusia koordinaatteja, niin Hamiltonin yhtälöt (uusissa koordinaateissa) saattaa olla helpompi ratkaista. Esimerkiksi, jos K riippuu vain koordinaateista \mathbf{P} , niin Hamiltonin yhtälöitten $\dot{\mathbf{Q}} = \partial K(\mathbf{P})/\partial \mathbf{P}$, $\dot{\mathbf{P}} = -\partial K(\mathbf{P})/\partial \mathbf{Q} = \vec{0}$ ratkaisu on helppo:

$$\underline{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q}_0 + t \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}} \Big|_{\mathbf{P}_0}, \quad \underline{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}_0,$$

missä \mathbf{Q}_0 ja \mathbf{P}_0 ovat vakiovektoreita (alkuehdot kartassa (\mathbf{Q}, \mathbf{P})). Erityisesti ollaan saatu n (toisistaan riippumatonta) liikevakioita eli suureet P^i . Näiden väliset Poissonin sulut ovat 0. Jos kanoninen muunnos on sellainen, että joksikin muuttujaksi (vaikkapa) P^n voidaan valita K eli $K(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) = P^n$, niin kaikki uudet muuttujat ovat liikevakioita paitsi Q^n , jolle

$$\underline{Q}^n(t) = Q_0^n + t, \quad Q_0^n \in \mathbb{R},$$

eli Q^n on kellosuure. Tarkastellaan sitten vielä kaikista yksinkertaisinta tapausta.

Oletaan, että löytyy kanoninen muunnos $(\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))$ siten, että H :ta vastaava K ei riipu mistään uusista koodinaateista (eli K on vakio). Tällöin liikkeen ratkaisu uusissa

koordinaateissa on triviaali: Nimittäin Hamiltonin yhtälöt ovat $\dot{\mathbf{Q}} = \vec{0} = \dot{\mathbf{P}}$ eli ratkaisu on $\underline{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q}_0$ ja $\underline{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}_0$. Nyt ollaan saatu $2n$ kappaletta liikevakioita eli kaikki Q^i :t ja P^i :t.

Edellisen esimerkin innoittamana voidaan määritellä täydellisesti integroituva systeemi (eli täydellisesti ‘ratkeava’), joka sisältää n (toisistaan riippumatonta) liikevakioita P^i .

Olkoon S $2n$ -ulotteinen faasiavaruus ja H ajasta riippumaton Hamiltonin funktio. Merkitään seuraavassa määritelmässä $P^n := H$, sillä H on jo triviaalisti liikevakio (ajasta riippumaton suure f on liikevakio, joss $[f, H] = 0$).

Määritelmä 15. *Hamiltonin systeemi (S, H) on (täydellisesti) integroituva, jos on olemassa $n - 1$ kappaletta suureita $P^i : S \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, joille $[P^i, P^j] = 0$ kaikilla $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Lisäksi oletetaan, että 1-muodot dP^i ovat (pisteittäin) lineaarisesti riippumattomia.¹³⁸*

Oletetaan seuraavassa, että (S, H) on täydellisesti integroituva. Olkoon $\mathbf{c} = (c^1, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^n$ sellainen, että *lehti*

$$S_{\mathbf{c}} := \{s \in S \mid P^i(s) = c^i \text{ kaikilla } i = 1, \dots, n\} \neq \emptyset.$$

Koska $[P^i, H] = [P^i, P^n] = 0$, $i = 1, \dots, n$, niin *suuret P^i ovat liikevakioita ja invariantteja (siis vakioita) toistensa generoimissa muunnoksissa*. Välittömästi nähdään että, jos $\alpha_i : (\lambda_0, \lambda_1) \rightarrow S$ on P^i :n vektorikentän X_{P^i} integraalikäyrä, jolle $\alpha_i(\tilde{\lambda}) \in S_{\mathbf{c}}$ jollain $\tilde{\lambda} \in (\lambda_0, \lambda_1)$, niin $\alpha_i(\lambda) \in S_{\mathbf{c}}$ kaikilla $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ eli integraalikäyrä (erityisesti liike α_n) pysyy lehdellä $S_{\mathbf{c}}$. Triviaalisti P^i :t ovat vakioita $S_{\mathbf{c}}$:llä ja niiden arvot \mathbf{c} ‘luetteloivat’ lehdet $S_{\mathbf{c}}$, missä liikkeet sijaitsevat.

Koska muodot dP^i ovat lineaarisesti riippumattomia,¹³⁹ voidaan osoittaa, että $S_{\mathbf{c}}$ on n -ulotteinen *monisto* (S :n alimonisto). Liouville osoitti, että lisäksi on olemassa (lokaalit) suureet Q^i , $i = 1, \dots, n$ siten, että $[Q^i, Q^j] = 0$ ja $[Q^i, P^j] = \delta^{ij}$, ja siis S :n kanoninen kartta (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) (jossa

¹³⁸Eli (melkein) kaikilla $s \in S$, $\sum_{i=1}^n a_i dP^i|_s = 0 \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ ($a_i \in \mathbb{R} \forall i$). Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että funktioiden P^i generoimat vektorikentät $X_{P^i} = -\Omega^{-1}(dP^i)$ ovat pisteittäin lineaarisesti riippumattomia, sillä $a_i X_{P^i}|_s = -\Omega^{-1}|_s(a_i dP^i|_s) = 0 \iff a_i dP^i|_s = 0$.

¹³⁹Nyt lineaarisesti riippumattomat vektorikentät X_{P_i} kommutoivat keskenään eli $[X_{P_i}, X_{P_j}]_- = 0$ (sillä $[P_i, P_j] = 0$), joten niiden integraalikäyrät ovat täysin toisistaan riippumattomia ja integraalikäyrien parametrien avulla voidaan määritellä kartat \mathbf{Q}' , jolla $S_{\mathbf{c}}$:t voidaan kartoittaa. Lisäksi (lokaalisti) $X_{P_i} = \partial/\partial Q^i$ ja ne virittävät $S_{\mathbf{c}}$:n tangenttiavaruudet. Tämä on olennaisesti ns. *Frobeniuksen lause*. Voidaan myös hienosti sanoa, että S on *folioitu* lehtiin $S_{\mathbf{c}}$, jotka ovat (*involutiivisen*) *distribuition* $\{X_{P_i}\}_{i=1}^n$ *integraalimonistoja*. Vertaa kaavaa $dP^i(X_{P_j}) = X_{P_j}P^i = [P^i, P^j] = 0$ kaavaan (22), joten holonomiset side-ehdot määräävät integraalimoniston.

\mathbf{Q} ei ole yksikäsitteinen).¹⁴⁰ Muut (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) -suureet paitsi Q^n (jolle $[Q^n, H] = [Q^n, P^n] = 1$) ovat liikevakioita; Q^n on kellosuure, jonka aikakehitys on muotoa $\underline{Q}^n(t) = Q_0^n + t$.

Kuten nähtiin, suureet P^i määräävät n -ulotteiset lehdet S_c , jossa vektorikentät $X_{P^i} = \partial/\partial Q^i$ siirtelevät (toisistaan riippumatta) lehden S_c pisteitä kyseisen lehden ‘pinnalla’ integraalikäyriensä α_i pitkin. Jokainen integraalikäyrä α_i muodostaa oman Q^i -ulottuvuuden (1-ulotteisen moniston) vektorikentän $\partial/\partial Q^i$ suuntaan. On vain kaksi vaihtoehtoa: Q^i -käyrä on avoin tai suljettu eli samaistettavissa joko \mathbb{R} :n tai \mathbb{T} :n kanssa (koska ne ovat ainoat 1-ulotteiset yhteinäiset monistot). Täten on päädytty (*Liouwillen-*)*Arnoldin lauseeseen*:

Lause 9. *Täydellisesti integroituvan Hamiltonin systeemin jokainen (epätyhjä yhtenäinen) lehti S_c on samaistettavissa (eli diffeomorfinen) moniston $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ kanssa (missä $k = 0, 1, \dots, n$ ja esim. $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^0 := \mathbb{T}^n$).*

Jos liike on ‘rajoitettua’ (eli liikkeen sisältävä yhtenäinen lehti S_c on kompakti), niin Arnoldin lauseen mukaan S_c voidaan samaistaa n -ulotteisen toruksen \mathbb{T}^n kanssa; muistutetaan mieliin, että $\mathbb{T} = \{(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$, joten \mathbb{T}^n ja täten S_c voidaan parametrisoida n :n kulmamuuuttujan $\theta^i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, \dots, n$, avulla. Huomaa, että voidaan olettaa $\theta^i \in \mathbb{R}$ samaistamalla θ^i :n arvot, jotka poikkeavat toisistaan 2π :n moninkerran verran. Kulmamuuuttujiin palataan seuraavassa luvussa.

Esimerkki 60. Tarkastellaan liikettä tasossa \mathbb{R}^2 keskeiskentässä $V(r)$. Faasiavaruuden $S = T^*\mathbb{R}^2$ kanoninen kartta on (x, y, p_x, p_y) ja kiertoinvariantti Hamilton (hiukkasen massa on 1)

$$P^2 = H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

joten kiertoimpulssi $P^1 = L_z = xp_y - yp_x$ on liikevakio ja täten $[P^1, P^2] = 0$.¹⁴¹ Eli systeemi $(T^*\mathbb{R}^2, H)$ on integroituva. Nyt (2-ulotteinen) lehti $S_{(c^1, c^2)}$ koostuu pisteistä, joiden koordinaateille pätee ehdot $xp_y - yp_x = c^1$ ja $H(x, y, p_x, p_y) = c^2$. Tarkastellaan sitten isotrooppista harmonista oskillaattoria, jolle $V(r) = r^2/2$ (jousivakio on 1). Nyt on oltava $c^2 \geq 0$ ja

$$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = c^2$$

¹⁴⁰Koska $\Omega(X_{K_i}, X_{K_j}) = [K_j, K_i] = 0$, joten symplektinen (2-)muoto $\Omega = d\Lambda$ häviää lehdellä ja 1-muoto Λ on Poincarèn lemmän mukaan (lokaalisti) muotoa $\Lambda|_{S_c} = df_c$ lehdellä S_c , missä f_c on lehdellä (lokaalisti) määritelty funktio. Olkoon \mathbf{Q}' lehden S_c kartta, joten dQ'^i :t muodostavat TS_c^* :n kannan ja täten $\Lambda|_{S_c} = df_c = \sum_i P_c^i(\mathbf{Q}')dQ'^i$. Määritellään generoiva funktio $F_2(\mathbf{Q}', \mathbf{P}) := f_{c=\mathbf{P}}(\mathbf{Q}')$, jolle $P^i(\mathbf{Q}', \mathbf{P}) := P_{c=\mathbf{P}}^i(\mathbf{Q}') = \partial F_2(\mathbf{Q}', \mathbf{P})/\partial Q'^i$, ja $Q^i(\mathbf{Q}', \mathbf{P}) := \partial F_2(\mathbf{Q}', \mathbf{P})/\partial P^i$, joten muunnos $(\mathbf{Q}', \mathbf{P}') \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ on kanoninen.

¹⁴¹Lisäksi (melkein kaikissa pisteissä) $0 = a_1 dP^1 + a_2 dP^2$ implikoi $a_1 = 0 = a_2$. Käytä napakoordinaatteja. [!]

on $\sqrt{2c^2}$ -säteinen kolmiulotteinen pallonpinta neliulotteisessa avaruudessa $T^*\mathbb{R}^2$. Se leikataan kolmiulotteisella ‘pinnalla’ $xp_y - yp_x = c^1$ ja tuloksena on kaksiulotteinen lehti $S_{(c^1, c^2)}$. Liike on selvästikin rajoitettua, joten Arnoldin lauseen perusteella $S_{(c^1, c^2)} \cong \mathbb{T}^2$.

Liike on tunnetusti muotoa

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= A_x \cos(t + t_x) = B_x \cos(t) + C_x \sin(t), \\ \underline{y}(t) &= A_y \cos(t + t_y) = B_y \cos(t) + C_y \sin(t), \\ \underline{p}_x(t) &= -A_x \sin(t + t_x) = -B_x \sin(t) + C_x \cos(t), \\ \underline{p}_y(t) &= -A_y \sin(t + t_y) = -B_y \sin(t) + C_y \cos(t),\end{aligned}$$

missä $2c^2 = A_x^2 + A_y^2 = B_x^2 + C_x^2 + B_y^2 + C_y^2$ ja $c^1 = A_x A_y \sin(t_x - t_y) = B_x C_y - B_y C_x$. Selvästikin liike on origokeskinen kiertynyt ellipsi sekä (x, y) - että (p_x, p_y) -tasoissa. Kun L_z :n generoima kulman φ kierto tehdään ratkaisuun (ellipsiin), niin ellipsi kiertyy uudeksi ellipsiksi, jonka pääakselit saadaan sijoittamalla $B_x \mapsto B_x \cos \varphi - B_y \sin \varphi$, $C_x \mapsto C_x \cos \varphi - C_y \sin \varphi$, $B_y \mapsto B_x \sin \varphi + B_y \cos \varphi$ ja $C_y \mapsto C_x \sin \varphi + C_y \cos \varphi$. [!] Selvästikin c^1 ja c^2 pysyvät samoina, mutta esim. $A_x^2 = B_x^2 + C_x^2$ muuttuu.

Kulmamuuttujat nähdään heti: Nyt ensimmäinen ympyrä \mathbb{T} muodostuu (x, p_x) -tasoon ja toinen (y, p_y) -tasoon (sillä esim. $\underline{x}(t)^2 + \underline{p}_x(t)^2 = A_x^2$). Kulmamuuttujina ovat vaikkapa $\theta^1 = -\arctan(p_x/x)$ ja $\theta^2 = -\arctan(p_y/y)$. Ne ovat myös kellosuureita. Oskillaattorin jaksollinen liike tapahtuu siis neliulotteisen faasiavaruuden 2-ulotteisen donitsin \mathbb{T}^2 pinnalla. Koska kierrot eivät pidä tätä donitsia paikoillaan (säteet A_x ja A_y muuttuvat), niin saatu \mathbb{T}^2 ei ole $S_{(c^1, c^2)}$. Se on varmaankin [!] jonkun toisen parin (P^1, P^2) lehti, missä P^1 on (P^2 :sta ‘riippumaton’) liikevakio eli $[P^1, P^2] = [P^1, H] = 0$. Kandidaatteja löytyy: $p_x^2 + x^2$, $p_x p_y + xy$, $p_x x - p_y y$ jne...

24.1 Hamiltonin-Jacobin menetelmä

Nyt kun ollaan nähty, että täydellisesti integroituvat systeemit todellakin ratkeavat täydellisesti, nousee esiin seuraava kysymys: Miten osoittaa, että Hamiltonin systeemi (S, H) on täydellisesti integroituva? Pitäisi siis löytää $n - 1$ kappaletta (riippumattomia keskenään kommutoivia) liikevakioita P^i . Toki H :n symmetriat antavat joitain niistä, mutta ei varmaankaan kaikkia. Poissonin sulkuehdonkin $[f, H] = 0$ ratkaiseminen vaikuttaa työlöältä menetelmältä. Seuraavassa esitellään näppärä menetelmä, ns. *Hamiltonin-Jacobin menetelmä*, liikevakioiden P^i -löytämiseksi.

Oletetaan aluksi, että meillä on kanoninen muunnos $(\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))$ siten, että (mah-

dollisesti ajasta riippuvaa) H :ta vastaava K ei riipu mistään uusista koodinaateista (eli K on vakio ja voidaan valita nollassi, sillä Hamiltoniin voidaan aina lisätä vakio). Koska muunnos on kanoninen, sillä on (lokaali) generoiva funktio F . Oletetaan, että voidaan määrittellä tyyppin 2 generoiva funktio $F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})$ tekemällä Legendren muunnos funktioon $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$. Tällöin $\mathbf{p} = \partial F_2 / \partial \mathbf{q}$ ja $\mathbf{Q} = \partial F_2 / \partial \mathbf{P}$ ja $H + \partial F_2 / \partial t = K = 0$. Siis saadaan ns. *Hamiltonin-Jacobin yhtälö* tai lyhyesti *HJ-yhtälö*

$$H\left(t, q^1, q^2, \dots, q^n, \frac{\partial F_2}{\partial q^1}, \frac{\partial F_2}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q^n}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.$$

Ajatellaan sitten käännteistä tilannetta. Oletetaan, että H on annettu ja F_2 on tuntematon. Ratkaistaan F_2 ylläolevasta HJ-yhtälöstä: Koska HJ-yhtälö on ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö (jossa on $n + 1$ muuttujaa q^1, \dots, q^n ja t) ratkaisu voidaan ajatella syntyvän niin, että integroidaan yhtälö muuttuja kerrallaan (järjestyksellä ei ole väliä) pitäen muut muuttujat vakiona. Jokaisella integrointikerralla syntyy uusi integroimisvakio. Kaikenkaikkiaan integroimisvakioita on $n + 1$ kappaletta; merkitään niitä symboleilla c^i , missä $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Viimeisessä integroinnissa syntyvä vakio c^{n+1} voidaan kuitenkin ‘unohtaa’, sillä HJ-yhtälön ratkaisuun F_2 voidaan aina lisätä mielivaltaisen vakio ja saada uusi ratkaisu $F_2 + \text{vakio}$. Täten ratkaisu on muotoa $F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})$, missä integrointivakiot on kerätty yhteen vektoriksi $\mathbf{c} = (c^1, \dots, c^n)$.¹⁴² Kuten aiemmin todettiin, jos

$$\det \left(\frac{\partial^2 F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})}{\partial q^i \partial c^j} \right)_{i,j=1}^n \neq 0,$$

niin yhtälöt

$$p^i = \frac{\partial F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n$$

voidaan ratkaista (lokaalisti) \mathbf{c} :n suhteen eli $\mathbf{c} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, missä \mathbf{P} on ‘piilossa ollut’ (eli impliittinen) funktio. Tällöin $F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})$ määrää kanonisen muunnoksen $(\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))$ ja

$$Q^i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) := \frac{\partial F_2}{\partial c^i}(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad i = 1, \dots, n.$$

Merkitään jatkossa $P^i = c^i$ ja $\mathbf{P} = \mathbf{c}$.

Koska F_2 toteuttaa HJ-yhtälön, nähdään välittömästi, että H :ta vastaava $K = 0$ ja Hamiltonin yhtälöitten ratkaisu uusissa koordinaateissa on triviaali: $\underline{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q}_0$ ja $\underline{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}_0$. Liikkeen $t \mapsto (\underline{\mathbf{q}}(t), \underline{\mathbf{p}}(t))$ alkuehdot $(\underline{\mathbf{q}}(t_0), \underline{\mathbf{p}}(t_0)) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ määräävät vakiot \mathbf{Q}_0 ja \mathbf{P}_0

¹⁴²Integrointivakiot c^i ovat siis uusia (lokaaleita) muuttujia, jotka osoittautuvat liikevakioiksi.

seuraavasti: $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(t_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ ja $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}(t_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = (\partial F_2 / \partial \mathbf{P})(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}_0, t_0)$. Kyseiset alkuehdot toteuttava liike saadaan sitten käänteiskuvauksen $\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ avulla

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{q}(\mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0, t), \\ \underline{\mathbf{p}}(t) &= \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}(\underline{\mathbf{q}}(t), \mathbf{P}_0, t).\end{aligned}$$

Täten Hamiltonin yhtälöitten ratkaiseminen on palautunut HJ-yhtälön ratkaisemiseksi.

Huomaa, että HJ-yhtälön ratkaiseminen tai liikkeen palauttaminen alkuperäiseen karttaan (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ei ole aina yksinkertaista. On kuitenkin olemassa fysikaalisia ongelmia, joissa HJ-yhtälön ratkaiseminen on helpompaa kuin Hamiltonin yhtälöitten ratkaiseminen (esim. satelliitti, joka liikkuu tasossa kahden paikallaan pysyvän planeetan painovoimakentässä). Tarkastellaan sitten HJ-yhtälön ratkaisemista tarkemmin.

Olkoon Hamiltonin funktio H annettu. Jos H ei riipu ajasta eli $\partial H / \partial t = 0$, niin H on liikevakio ja kannattaa kirjoittaa $F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})$ muotoon

$$F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}) = W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - Et,$$

missä muuttujaa P^n on merkitty symbolilla E . Tällöin HJ-yhtälö redusoituu ajasta riippumattomaksi Hamiltonin-Jacobin yhtälöksi

$$\boxed{H\left(q^1, q^2, \dots, q^n, \frac{\partial W}{\partial q^1}, \frac{\partial W}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q^n}\right) = E.}$$

Huomaa, että $E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, joten E on usein tulkittavissa energiakoordinaatiksi. Liikevakion E arvo E_0 radalla määräytyy kyseisen liikkeen alkuehdoista: $E_0 := H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$. Välittömästi nähdään, että $\mathbf{p} = \partial W / \partial \mathbf{q}$, $Q^i = \partial W / \partial P^i$, $i = 1, \dots, n-1$, ja $Q^n = \partial W / \partial E - t$.

Jos lisäksi H ei riipu muuttujista q^i , $i = 1, 2, \dots, k$ ($k < n$) (eli $\partial H / \partial q^i = 0$), niin näitä vastaavat kanonisesti konjugoidut momentit p^i ovat liikevakioita ja ne kannattaa valita koordinaateiksi P^i ($= p^i$), $i = 1, 2, \dots, k$ (koska uudet muuttujat P^i ovat myös vakioita). Nyt kannattaa kirjoittaa $F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{P})$ muodossa

$$F_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{P}) = -Et + \sum_{i=1}^k P^i q^i + W(q^{k+1}, \dots, q^n, \mathbf{P}).$$

Tällöin HJ-yhtälö redusoituu muotoon

$$H\left(q^{k+1}, \dots, q^n, P^1, \dots, P^k, \frac{\partial W}{\partial q^{k+1}}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q^n}\right) = E,$$

mistä yritetään ratkaista funktio W (ja täten saadaan F_2 ratkaistua).

Esimerkki 61. Ratkaistaan yksiulotteinen harmoninen oskillaattori Hamiltonin-Jacobin menetelmällä. Faasiavaruus on \mathbb{R}^2 , Hamiltonin funktio $H(q, p) = 2^{-1}(p^2 + q^2)$ ja ajasta riippumaton HJ-yhtälö

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + q^2 \right] = E,$$

mistä ratkaistaan $W(q, E)$ ja $F_2(t, q, E) = W(q, E) - Et$. Koska

$$(p =) \quad \frac{\partial W(q, E)}{\partial q} = \pm \sqrt{2E - q^2},$$

niin $W(q, E) = \pm \int \sqrt{2E - q^2} dq$.¹⁴³ Täten [!]

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t = \pm \int (2E - q^2)^{-1/2} dq - t = \mp \cos^{-1}(q/\sqrt{2E}) - t$$

ja saadaan ratkaisu $q(Q, E, t) = \sqrt{2E} \cos \pm(t + Q) = \sqrt{2E} \cos(t + Q)$, missä liikevakiot Q ja E määräytyvät alkuehdoista: Jos $\underline{q}(t_0) = q_0$ ja $\underline{p}(t_0) = p_0$, niin $\underline{E}(t) = E_0 = 2^{-1}(p_0^2 + q_0^2)$ ja $\underline{Q}(t) = Q_0 = \mp \cos^{-1}(q_0/\sqrt{2E_0}) - t_0$, joten liikkeen (lokaali) ratkaisu on

$$\begin{aligned} \underline{q}(t) &= \sqrt{2E_0} \cos(t + Q_0) = \sqrt{2E_0} \cos(t - t_0 \mp \cos^{-1}(q_0/\sqrt{2E_0})), \\ \underline{p}(t) &= \pm \sqrt{2E_0 - \underline{q}(t)^2} = \pm \sqrt{2E_0} \left| \sin(t - t_0 \mp \cos^{-1}(q_0/\sqrt{2E_0})) \right|, \end{aligned}$$

missä ensimmäistä ratkaisua käytetään silloin, kun $p_0 > 0$, ja jälkimmäistä, kun $p_0 < 0$.

Esimerkki 62. Hiukkanen (massa $m = 1$) liikkuu tasossa \mathbb{R}^2 keskeiskentässä. Käytetään napakoordinaatteja (r, φ) . Keskeiskentän potentiaali on $V(r)$. Hamiltonin funktio

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi, t) = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{1}{2r^2} p_\varphi^2 + V(r),$$

missä p_r (vastaavasti p_φ) on muuttujan r (vast. φ) kanonisesti konjugoitu impulssi. Koska $\partial H/\partial t = 0 = \partial H/\partial \varphi$, niin valitaan $P_1 = p_\varphi$ ja $P_2 = E$. Sijoitetaan

$$F_2(t, r, \varphi, p_\varphi, E) = -Et + p_\varphi \varphi + W(r, p_\varphi, E)$$

HJ-yhtälöön. Saadaan

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} p_\varphi^2 + V(r) = E,$$

mistä ratkaistaan W : [!]

$$W(r, p_\varphi, E) = \pm \int \sqrt{2E - 2V(r) - p_\varphi^2 r^{-2}} dr.$$

¹⁴³Huomaa, että ratkaisuja W on kaksi. Lisäksi $\partial^2 F_2/(\partial q \partial E) = \pm(2E - q^2)^{-1/2}$ on määritelty vain, jos $q^2 < 2E$. Erityisesti on oltava $p \neq 0$.

Täten

$$Q^1 := \frac{\partial F_2}{\partial p_\varphi} = \varphi \mp p_\varphi \int (2E - 2V(r) - p_\varphi^2 r^{-2})^{-1/2} r^{-2} dr,$$

$$Q^2 := \frac{\partial F_2}{\partial E} = -t \pm \int (2E - 2V(r) - p_\varphi^2 r^{-2})^{-1/2} dr.$$

Ylläolevista kaavoista voidaan *periaatteessa* ratkaista liike. Jos ollaan kiinnostuttu vain hiukkasen radasta (eli liikkeen kuvasta), niin riittää ratkaista ensimmäinen yhtälö: Kiinnitetään liikevakioiden Q^1 , E ja p_φ arvot. Tällöin radan yhtälö napakoordinaateissa on

$$\varphi = \tilde{\varphi}(r) := \pm p_\varphi \int (2E - 2V(r) - p_\varphi^2 r^{-2})^{-1/2} r^{-2} dr + Q^1.$$

Funktio $\tilde{\varphi}(r)$ voidaan laskea Keplerin liikkeen tapauksessa $V(r) = -kr^{-1}$, missä k on vakio. [!]

Harjoitustehtävä 56. a) *Osoita, että funktio*

$$F_2(t, q, P) = \frac{1}{2}(q^2 + P^2) \cot t - qP \csc t$$

toteuttaa (ajasta riippuvan) HJ-yhtälön harmoniselle oskillaattorille $H(q, p) = p^2/2 + q^2/2$.

b) *Hiukkanen liikkuu q -akselin välillä $(-\pi/2, \pi/2)$ potentiaalikentässä $V(q) = 1/\cos^2 q$. Ratkaise liike Hamiltonin-Jacobin menetelmällä. Vinkki: kaikkia integraaleja ei tarvitse laskea.*

25 FYS: Vaikutus- ja kulmamuuttujat

Olkoon (ajasta riippumaton) Hamiltonin systeemi (S, H) täydellisesti integroitava. Nyt siis on olemassa (toisistaan riippumattomat) liikevakiot $P^i : S \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, jotka kommutoivat keskenään eli $[P^i, P^j] = 0$ kaikilla $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Oletetaan, että (epätyhjä yhtenäinen) lehti S_c on kompakti eli Arnoldin lauseen mukaan samaistettavissa toruksen \mathbb{T}^n kanssa. Vastaavien kulmamuuttujien θ^i laskeminen käy helpoiten siten, että määrätään ensin ns. vaikutusmuuttuja ja etsitään sitten tälle kanonisesti konjugoitu muuttuja, joka on myös kulmamuuttuja. Aloitetaan kyseinen tarkastelu kuitenkin olettamalla, että kulmamuuttujat tunnetaan.

Olkoon C_c^i suljettu käyrä eli *lenkki* lehdellä S_c , joka saadaan muuttamalla parametria θ^i täyden kierroksen verran ja pitämällä muut parametrit vakioina.¹⁴⁴ Määritellään i :s *vaikutusmuuttuja*

$$I^i(\mathbf{c}) := \frac{1}{2\pi} \oint_{C_c^i} \Lambda,$$

missä $\Lambda := \sum_{k=1}^n p^k dq^k$ on kanoninen 1-muoto ilmaistuna kanonisessa kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Ylläoleva integraali on ihan tavallinen käyräintegraali ja helppo laskea: jos $[u_0, u_1] \ni u \mapsto (\underline{\mathbf{q}}(u), \underline{\mathbf{p}}(u)) \in \mathbb{R}^{2n}$, $(\underline{\mathbf{q}}(u_0), \underline{\mathbf{p}}(u_0)) = (\underline{\mathbf{q}}(u_1), \underline{\mathbf{p}}(u_1))$, on lenkki C_c^i ilmaistuna kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , niin

$$\oint_{C_c^i} \Lambda := \sum_{k=1}^n \int_{u_0}^{u_1} \underline{p}^k(u) \frac{d\underline{q}^k(u)}{du} du.$$

Täten havaitaan, että *kulmamuuttujia ei tarvitse tässä vaiheessa tuntea*; riittää, että löydetään n sopivaa (siis ‘toisistaan riippumatonta’) lenkkiä C_c^i (kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ilmaistuna). Seuraavien lukujen esimerkit valoittavat sitä, miten lenkit löydetään.

Merkitään $\mathbf{I} := (I^1, \dots, I^n)$. Oletetaan, että $\mathbf{I}(\mathbf{c})$ voidaan kääntää eli $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{I})$,¹⁴⁵ ja että yhtälöistä

$$P^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c^i(\mathbf{I}), \quad i = 1, \dots, n$$

voidaan ratkaista $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{I})$ (jossain pisteen \mathbf{q}_0 ympäristössä kiinteällä \mathbf{I} :n arvolla).¹⁴⁶ Nyt voidaan määrittellä (lokaali) tyypin 2 generoiva funktio

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{I}) := \int_{(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{I}))}^{(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{I}))} \Lambda = \sum_{k=1}^n \int_{(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{I}))}^{(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{I}))} p^k(\mathbf{q}, \mathbf{I}) dq^k,$$

¹⁴⁴Eli käyrä C_c^i ilmaistuna parametrien $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ avulla on muotoa $\underline{\theta}^i(u) = u$ ja $\underline{\theta}^j(u) = \text{vakio}$, kun $j \neq i$, missä $u \in [0, 2\pi)$.

¹⁴⁵Tämä on mahdollista pisteen \mathbf{c} ympäristössä, jos $\det(\partial I^i(\mathbf{c})/\partial c^j)_{i,j=1}^n \neq 0$ (käänteiskuvauslause).

¹⁴⁶Tämä seuraa implisiittifunktioilauseesta, jos $\det(\partial P^i(\mathbf{q}_0, \mathbf{p})/\partial p^j)_{i,j=1}^n \neq 0$. Koska dP^i :t ovat pisteittäin lineaarisesti riippumattomia, aina löydetään kanoninen kartta (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , jolle kyseinen ehto pätee.

missä ylläoleva integraali on tavallinen käyräintegraali, joka lasketaan pisteitä $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{I}))$ ja $(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{I}))$ yhdistävää käyrää pitkin, joka on lehdellä $S_{\mathbf{c}(\mathbf{I})}$; voidaan osoittaa, että ko. integraali ei riipu käyrän valinnasta, kun käyrän päätepisteet ovat riittävän lähellä toisiaan. Täten voidaan määrittellä *i*:s *kulmamuuttuja*

$$\theta^i(\mathbf{q}, \mathbf{I}) := \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\partial I^i}.$$

Helposti nähdään, että

$$p^i(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\partial q^i}.$$

Sijoittamalla yhtälöt $c^i = P^i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ kulmamuuttujiin $\mathbf{I}(\mathbf{c})$, voidaan ne ilmaista koordinaattien (\mathbf{q}, \mathbf{p}) avulla: $\mathbf{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \mathbf{I}(P^1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, P^n(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$. Täten myös kulmamuuttujille $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{q}, \mathbf{I})$ voidaan määrittellä $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \boldsymbol{\theta}(\mathbf{q}, \mathbf{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$. Koodinaattimuunnos $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\boldsymbol{\theta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ on kano-ninen (koska sillä on generoiva funktio). Seuraava lasku osoittaa, että θ^i on 2π -jaksollinen ja ‘kulmamuuttuja’-nimi on täten järkevä:

$$\oint_{C_{\mathbf{c}(\mathbf{I})}^j} d\theta^i = \oint_{C_{\mathbf{c}(\mathbf{I})}^j} d\frac{\partial F_2}{\partial I^i} = \frac{\partial}{\partial I^i} \oint_{C_{\mathbf{c}(\mathbf{I})}^j} dF_2 = \frac{\partial}{\partial I^i} \oint_{C_{\mathbf{c}(\mathbf{I})}^j} \Lambda = 2\pi \frac{\partial I^j}{\partial I^i} = 2\pi \delta_j^i.$$

Koska Hamiltonin funktio $H = P^n$, niin se riippuu (uudessa kartassa) vain vaikutusmuuttujista eli $H(\mathbf{I}) = c^n(\mathbf{I})$. Hamiltonin yhtälöt $\dot{\mathbf{I}} = \vec{0}$ ja $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \partial H(\mathbf{I})/\mathbf{I} =: \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$ on helppo ratkaista. Liike on muotoa $\underline{\mathbf{I}}(t) = \mathbf{I}_0$ ja $\underline{\boldsymbol{\theta}}(t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}_0)t + \boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{R}^n$ tai $\in [0, 2\pi)^n$ tekemällä sopiva samaistus; $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$:n komponentit $\omega(\mathbf{I})^i = \partial H(\mathbf{I})/\partial I^i$ ovat *kulmanopeuksia* tai *-taajuuksia*. Jos kulmanopeudet ovat toisistaan riippuvia, niin liike on *jaksollista* eli tietyn ajan (jaksonaika) päästä systeemi palaa takaisin alkupisteeseensä. [!] Muulloin liike on *kvasijaksollista* eli rata ‘täyttää’ lehden $S_{\mathbf{c}(\mathbf{I})}$ (eli on tiheä) palaamatta koskaan lähtöpisteeseensä.¹⁴⁷

25.1 Liike yhdessä ulottuvuudessa

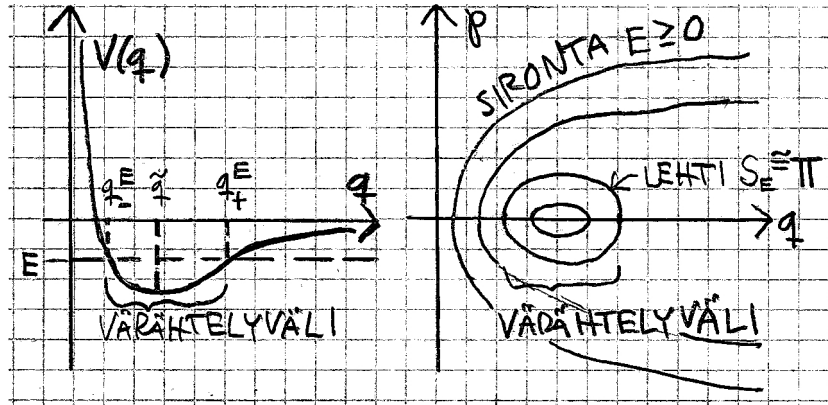
Hiukkanen (massa $m = 1$) liikkuu q -akselilla potentiaalissa $V(q)$. Faasiavaruus $S = \mathbb{R}^2$ ja Hamiltonin funktio $H(q, p) = p^2/2 + V(q)$. Hamiltonin systeemi (S, H) on integroitava.¹⁴⁸ Oletetaan, että potentiaalilla $V(q)$ on (lokaali) minimi pisteessä \tilde{q} . Merkitään $c_1 = E$. Olkoon $E > V(\tilde{q})$ (mutta riittävän lähellä $V(\tilde{q})$:ta). Tällöin lehti $S_{c_1} = S_E$ koostuu pisteistä (q, p) , jotka toteuttavat yhtälön

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q) = E.$$

¹⁴⁷Liike on kvasijaksollista, joss $\sum_{i=1}^n k_i \omega_i(\mathbf{I}) = 0$, $k_i \in \mathbb{Z} \forall i \implies k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. Muulloin liike on jaksollista (kulmanopeudet riippuvat toisistaan).

¹⁴⁸Liikevakioita tarvitaan vain yksi $P^1 = H$, koska faasiavaruus on 2-ulotteinen ja siis $n = 1$.

Liike on selvästikin rajoitettua, joten S_E voidaan 'samaistaa' ympyrän \mathbb{T} kanssa; itseasiassa hiukkanen *oskilloi* eli *värähtelee* lyhimällä \tilde{q} :n sisältävällä välillä $[q_-^E, q_+^E]$, jonka päätepisteille $V(q_-^E) = E = V(q_+^E)$. Välittömästi nähdään, että lenkki $C_{c^1}^1 = S_E$.



Kuva 14: Newtonin efektiivinen gravitaatiopotentiaali vasemmassa kuvassa. Liike q -akselilla on värähtelyä, kun E on negatiivinen. Kun $E \geq 0$ saadaan sironta. Oikeassa kuvassa liike on piirretty (q, p) -tasoon. Värähtelevä liike muodostaa ellipsin, joka voidaan samaistaa \mathbb{T} :n kanssa.

Koska $p = \pm\sqrt{2[E - V(q)]}$, niin vaikutusmuuttuja $I(c^1) = I(E)$ on helppo laskea:

$$\begin{aligned} I(E) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{S_E} p \, dq = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{q_-^E}^{q_+^E} \sqrt{2[E - V(q)]} \, dq - \int_{q_+^E}^{q_-^E} \sqrt{2[E - V(q)]} \, dq \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_{q_-^E}^{q_+^E} \sqrt{2[E - V(q)]} \, dq = \frac{1}{\pi} \int_{q_-^E}^{q_+^E} \sqrt{2[E - V(q)]} \, dq. \end{aligned}$$

Oletetaan, että kuvauksella $E \mapsto I(E)$ on käänteiskuvaus $I \mapsto E(I)$.¹⁴⁹ Generoiva funktio on

$$F_2(q, I) = \int_{q_0}^q p(q, I) \, dq = \int_{q_0}^q \sqrt{2[E(I) - V(q)]} \, dq$$

tai käyttämällä muuttujana E :tä

$$F_2(q, E) := F_2(q, I(E)) = \int_{q_0}^q \sqrt{2[E - V(q)]} \, dq,$$

missä pisteeksi q_0 voidaan valita vaikka minimipiste \tilde{q} . Kulmamuuttuja on

$$\theta(q, I) = \frac{\partial F_2(q, I)}{\partial I} = 2^{-1/2} \frac{\partial E(I)}{\partial I} \int_{q_0}^q [E(I) - V(q)]^{-1/2} \, dq$$

tai käyttämällä muuttujana E :tä

$$\theta(q, E) := \theta(q, I(E)) = 2^{-1/2} \left(\frac{\partial I(E)}{\partial E} \right)^{-1} \int_{q_0}^q [E - V(q)]^{-1/2} \, dq.$$

¹⁴⁹Näin on, jos $\partial I(E)/\partial E \neq 0$.

Kulmanopeus

$$\omega(I) = \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \frac{\partial E(I)}{\partial I}$$

tai $\omega(E) := \omega(I(E)) = (\partial I(E)/\partial E)^{-1}$.

Esimerkki 63. Harmonisen oskillaattorin tapauksessa, missä $V(q) = \omega^2 q^2/2$, saadaan $\tilde{q} = 0$, $E > 0$, $q_{\pm}^E = \pm\sqrt{2E}/\omega$ ja vaikutusmuuttuja [!]

$$I(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2E}/\omega}^{\sqrt{2E}/\omega} \sqrt{2E - \omega^2 q^2} dq = \frac{2E}{\pi\omega} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du = E/\omega,$$

missä $u = q\omega/\sqrt{2E}$. Täten $E(I) = \omega I$ ja kulmamuuttuja [!]

$$\theta(q, I) = 2^{-1/2}\omega \int_0^q [\omega I - \omega^2 q^2/2]^{-1/2} dq = \sin^{-1} \left(q\sqrt{\frac{\omega}{2I}} \right).$$

Vaikutus- ja kulmamuuttujat koordinaateissa (q, p) ovat näin ollen $I(q, p) = p^2/(2\omega) + \omega q^2/2$ ja $\theta(q, p) = \sin^{-1} \left(\omega q/\sqrt{p^2 + \omega^2 q^2} \right) = \tan^{-1}(\omega q/p)$, joille $[\theta, I] = 1$. Koska $H(I) = \omega I$, niin liike on muotoa $\underline{I}(t) = I_0$ ja $\underline{\theta}(t) = \omega t + \theta_0$ tai

$$\underline{q}(t) = \sqrt{\frac{2I_0}{\omega}} \sin(\omega t + \theta_0).$$

Esimerkki 64. Olkoon sitten potentiaali muotoa $V(q) = \tan^2 q$.¹⁵⁰ Potentiaalminimi $\tilde{q} = 0$ ja $E > 0$. Suoralla laskulla nähdään, että vaikutusmuuttuja [!]

$$I(E) = \frac{1}{\pi} \int_{q_-^E}^{q_+^E} \sqrt{2(E - \tan^2 q)} dq = \sqrt{2(E+1)} - \sqrt{2} > 0,$$

joten $H(I) = E(I) = I(I + 2^{3/2})/2$. Värähtelyn kulmanopeus $\omega(I) = \partial H(I)/\partial I = I + \sqrt{2}$ tai $\omega(E) = \sqrt{2(E+1)}$ eli se riippuu liikkeen kokonaisenergiasta E . Kulmamuuttuja [!]

$$\theta(q, E) = 2^{-1/2}\omega(E) \int_0^q (E - \tan^2 q)^{-1/2} dq = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{E+1}{E}} \sin q \right),$$

joten

$$q(\theta, E) = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{E}{E+1}} \sin \theta \right)$$

Liike, jonka kokonaisenergia on E_0 , saadaan sitten helposti. Se on

$$\underline{q}(t) = \sin^{-1} \left[\sqrt{\frac{E_0}{E_0+1}} \sin(\sqrt{2(E_0+1)}t + \theta_0) \right].$$

¹⁵⁰Faasiavaruus on nyt \mathbb{R}^2 :n avoin osajoukko, missä $q \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Harjoitustehtävä 57. *Hiukkanen (massa m) liikkuu q -akselilla potentiaalissa $V(q) = kq^4$, $k > 0$. Ratkaise sen energia E vaikutusmuuttujan I funktiona ja osoita, että kulmanopeus*

$$\omega(E) = \frac{\pi}{3C} \sqrt{\frac{2}{m}} (kE)^{1/4},$$

missä $C := \int_0^1 \sqrt{1-u^4} du \approx 0,87$.

Tarkastellaan sitten liikettä jaksollisessa potentiaalissa.

Olkoon $V(q)$ jaksollinen potentiaali, jonka jakso on l .¹⁵¹ Tällöin voidaan samaistaa pisteet q ja $q' \in \mathbb{R}$, joille $q - q' = kl$, missä $k \in \mathbb{Z}$, ja systeemin faasiavaruus on tason \mathbb{R}^2 sijasta sylinteri $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$.¹⁵² Nyt jaksollisia liikkeitä on kahdenlaista: värähtelyä ja ‘pyörivää’ liikettä eli *rotaatiota* (katso kuva 15). Värähtelyä tapahtuu potentiaalminimeitten eli ‘potentiaalikuoppien’ läheisyydessä. Tällöin liike on rajoitettu välille $[q_-^E, q_+^E]$ ja välin päätepisteissä impulssi $p = 0$ (ja vaihtaa merkkiään).

Jos liikkeen kokonaisenergia E on riittävän suuri, liike tapahtuu koko välillä $[-l/2, l/2]$ (tai reaalisuoralla, kun suoran pisteitä ei samaisteta). Liikkeen impulssi on koko ajan joko positiivinen tai negatiivinen riippuen siitä kumpaan suuntaan ympyrää \mathbb{T} kierretään.

Faasiavaruudessa liikkeitä on helppo erottaa. Kumpikin liike muodostaa lenkin $S_{c^1} = S_E$ sylinterin pinnalle. Värähdysliikkeen lenkki voidaan jatkuvalla muunnoksella kutistaa pisteeksi (eli lenkki on kontraktoituvaa), kun taas pyörivän liikkeen tapauksessa lenkki kiertää koko sylinterin pinnan ympäri. Olkoon V_{\max} on potentiaalminin suurin arvo.¹⁵³ Jos liikkeen energia $E < V_{\max}$, niin liike on värähtelyä ja, jos $E > V_{\max}$, niin kyseessä on pyörivä liike. Ratoja, joilla $E = V_{\max}$, sanotaan *separatriksiradoiksi*, koska ne erottavat liiketyypit faasiavaruudessa. Värähtelyä tarkasteltiin jo aiemmin. Katsotaan seuraavaksi, miltä vaikutus- ja kulmamuuttujat näyttävät pyörivän liikkeen tapauksessa.

Vaikutusmuuttuja on

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{S_E} p dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{2[E - V(q)]} dq,$$

ja generoiva funktio

$$F_2(q, I) = \int_{q_0}^q p(q, I) dq = \int_{q_0}^q \sqrt{2[E(I) - V(q)]} dq,$$

tai $F_2(q, E) := F_2(q, I(E))$, missä pisteeksi q_0 voidaan valita vaikka 0. Kulmamuuttuja on

$$\theta(q, I) = \frac{\partial F_2(q, I)}{\partial I} = 2^{-1/2} \frac{\partial E(I)}{\partial I} \int_{q_0}^q [E(I) - V(q)]^{-1/2} dq.$$

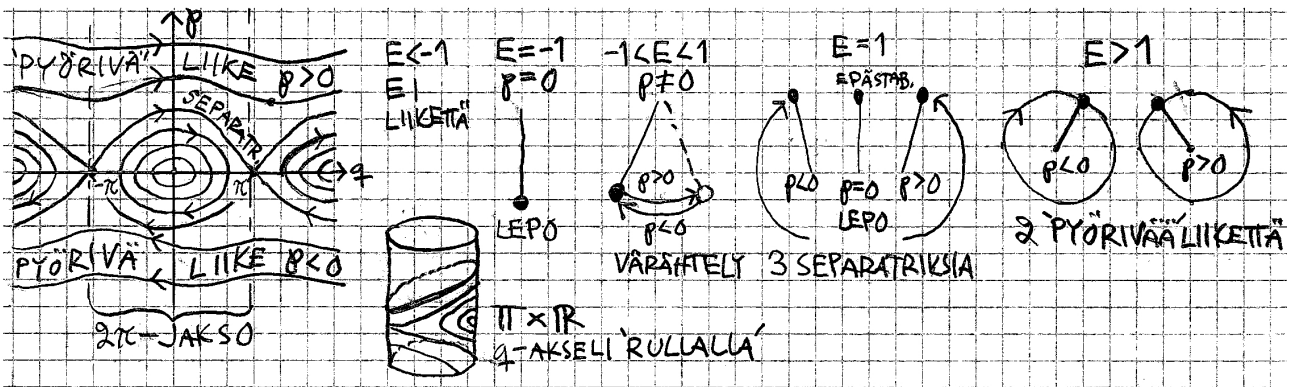
¹⁵¹Eli kaikilla $q \in \mathbb{R}$, $V(q+l) = V(q)$.

¹⁵²(Esim.) joukko $[-l/2, l/2] \times \mathbb{R}$, missä q -avaruuden pisteitä $-l/2$ ja $l/2$ ‘ajatellaan samoina pisteinä.’

¹⁵³Eli $V(q) \leq V_{\max}$ kaikilla $q \in [-l/2, l/2]$ ja on olemassa \tilde{q} siten, että $V(\tilde{q}) = V_{\max}$.

tai $\theta(q, E) := \theta(q, I(E))$. Kulmanopeus saadaan samoin kuin aiemmin.

Esimerkki 65. Tarkastellaan tasoheiluria (varren pituus, massa ja putoamiskiihtyvyyys on 1), missä koordinaattina q on heilurin varren ja pystysuoran suunnan muodostama kulma. Täten $q \in [-\pi, \pi]$, missä pisteet $-\pi$ ja π on samaistettu. Potentiaali on $V(q) = -\cos q$ ja sen maksimi $V_{\max} = 1$. Nyt vaikutus- ja kulmamuuttujien määritelmien integraalit ovat elliptisiä integraaleja, joten jätetään ne laskematta. Sen sijaan todetaan, että pienillä energioilla ($-1 < E < 1$) heiluri oskilloi edestakaisin (jos $E = -1$, niin heiluri on levossa (eli $\underline{p}(t) = 0$) ala-asennossa). Kun energiaa kasvatetaan, suurenee heilahduskulma. Kun saavutetaan energia $E = 1$ heiluri nousee (äärettömän) hitaasti pystyasentoon saavuttamatta sitä koskaan (separatriksi). Ratoja on tällöin kolme: heiluri on levossa ylä-asennossa (epästabiili rata) tai sitten heiluri nousee joko vasemmalta tai oikealta pystyyn. Jos energia on suuri ($E > 1$) heiluri pääsee pystyasennon ohi ja alkaa suorittaa kiertoliikettä joko myötä- tai vastapäivään.



Kuva 15: Tasoheilurin potentiaali $V(q) = -\cos q$ on jaksollinen, joten liikkeen (q, p) -taso voidaan samaistaa sylinterin pinnan $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ kanssa. Värähtelevä liike muodostaa ‘kutistuvan’ (pienen) ympyrän sylinterin pinnalle, kun taas pyörivän liikkeen ympyrä kiertää sylinterin pinnan ympäri. Erityyppiset liikkeet on piirretty oikeanpuoleisiin kuviin: Heiluri voi olla levossa joko stabiilissa ala-asennossa ($E = -1$) tai epästabiilissa yläasennossa ($E = 1$). Separatriksiratoja on kolme ja pyörivän liikkeen ratoja kaksi.

Esimerkki 66. Hiukkanen liikkuu jaksollisessa (jaksona $l = 2$) potentiaalissa

$$V(q) := \begin{cases} -q, & \text{kun } -1 \leq q < 0 \\ +q, & \text{kun } 0 \leq q < 1. \end{cases}$$

Potentiaalin maksimi on 1 ja minimi 0. Värähdysliikkeessä $0 < E < 1$. Tällöin [!]

$$I(E) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^E \sqrt{E - q} dq = \frac{2^{5/2} E^{3/2}}{3\pi}$$

ja

$$F_2(q, E) = \begin{cases} \sqrt{2} \int_0^q \sqrt{E+q} dq = -\frac{2^{3/2}}{3} (E^{3/2} - (E+q)^{3/2}), & -E \leq q < 0 \\ \sqrt{2} \int_0^q \sqrt{E-q} dq = \frac{2^{3/2}}{3} (E^{3/2} - (E-q)^{3/2}), & 0 \leq q < E. \end{cases}$$

Kulmamuuttuja on [!]

$$\theta(q, E) = \frac{\partial F_2(q, E)}{\partial E} \left(\frac{\partial I(E)}{\partial E} \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (-1 + \sqrt{1+q/E}), & -E \leq q < 0 \\ \frac{\pi}{2} (1 - \sqrt{1-q/E}), & 0 \leq q < E, \end{cases}$$

ja liikkeen kulmataajuus $\omega(E) = 2^{-3/2} \pi E^{-1/2}$, $0 < E < 1$.

Pyörimisliikkeessä $E > 1$. Vaikutusmuuttuja [!]

$$I(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \sqrt{E-q} dq = \frac{2^{3/2}}{3\pi} [E^{3/2} - (E-1)^{3/2}]$$

ja

$$F_2(q, E) = \begin{cases} \sqrt{2} \int_0^q \sqrt{E+q} dq = -\frac{2^{3/2}}{3} (E^{3/2} - (E+q)^{3/2}), & -1 \leq q < 0 \\ \sqrt{2} \int_0^q \sqrt{E-q} dq = \frac{2^{3/2}}{3} (E^{3/2} - (E-q)^{3/2}), & 0 \leq q < 1. \end{cases}$$

Kulmamuuttuja on [!]

$$\theta(q, E) = \begin{cases} -\pi(\sqrt{E} + \sqrt{E-1})(\sqrt{E} - \sqrt{E+q}), & -1 \leq q < 0 \\ \pi(\sqrt{E} + \sqrt{E-1})(\sqrt{E} - \sqrt{E-q}), & 0 \leq q < 1, \end{cases}$$

ja liikkeen kulmataajuus $\omega(E) = 2^{-1/2} \pi (\sqrt{E} + \sqrt{E-1})$, $E > 1$. Huomaa, että $\lim_{E \rightarrow 1+} \omega(E) = 2 \lim_{E \rightarrow 1-} \omega(E)$, mikä kuvaa liikkeen luonteen muuttumista värähtelystä pyörimiseen (kulmanopeus kaksinkertaistuu, kun ei enää palata takaisin samaa reittiä vaan jatketaan uusi kierros).

Harjoitustehtävä 58. Tarkastellaan hiukkasen (massa $m = 1$) liikettä jaksollisessa potentiaalissa $V(q) = q^2/2$, $-a \leq q \leq a$. Siis $l = 2a > 0$ on jakson pituus eli $V(q+2a) = V(q)$ kaikilla $q \in \mathbb{R}$. Värähtelevä liike onkin jo laskettu esimerkissä 63. Millä energian E arvoilla 'pyörivää' liikettä esiintyy? Laske vaikutus- ja kulmamuuttujat 'pyörivän' liikkeen tapauksessa. Laske myös kulmanopeus ω .

25.2 Useampiulotteinen liike

Olkoon Hamiltonin systeemi (S, H) integroitava. Olkoon muuttujat P^i , $i = 1, \dots, n-1$, ja $P^n := H$ integroitavuusehdon liikevakiot. Oletetaan, että $\tilde{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ on tyypin 2 generoiva funktio. Täten $p^i(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \partial \tilde{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) / \partial q^i$, $Q^i(\mathbf{q}, \mathbf{P}) := \partial \tilde{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) / \partial P^i$ ja muunnos $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{P}))$ on

kanoninen. Esimerkiksi \tilde{F}_2 ja muuttujat P^i voidaan löytää ratkaisemalla (ajasta riippumaton) Hamiltonin-Jacobin yhtälö.

Oletetaan, että \tilde{F}_2 on *täysin separoituva* (kartassa (\mathbf{q}, \mathbf{p})) eli muotoa

$$\tilde{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n W_i(q^i, \mathbf{P}).$$

Tällöin $p^i(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \partial W_i(q^i, \mathbf{P}) / \partial q^i =: f_{\mathbf{P}}(q^i)$.¹⁵⁴ Nyt liike palautuu liikkeisiin yhdessä ulottuvuudessa: Kiinnitetään liikevakioden P^i arvot: $\mathbf{P} = \mathbf{c}$. Muuttuja $p^i = f_{\mathbf{c}}(q^i)$ riippuu vain muuttujasta q^i , joten liikkeen projektio (käyrä) (q^i, p^i) -tasossa ei riipu muista koordinaateista. Oletetaan sitten, että liike on ‘rajoitettua’, joten voidaan siirtyä vaikutus- ja kulmamuuttujiin.

Peruslenkeiksi $C_{\mathbf{c}}^i$ voidaan valita lenkit kaksiulotteisissa (q^i, p^i) -tasoissa.¹⁵⁵ Täten i :s vaikutusmuuttuja on

$$I^i(\mathbf{c}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_{\mathbf{c}}^i} \sum_{k=1}^n p^k dq^k = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_{\mathbf{c}}^i} p^i dq^i$$

ja vastaavasti voidaan laskea $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{I})$ ja tästä vaikutusmuuttujat.

Esimerkki 67. Tarkastellaan m massaisen kappaleen liikettä keskeiskentässä. Koska liike on tasossa, käytetään napakoordinaatteja (r, φ) . Nyt Hamiltonin funktio on

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) := \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r),$$

missä $V(r)$ keskeiskentän potentiaali. Kuten esimerkissä 62 havaittiin, riippumattomia liikevakioita on kaksi (H ja p_φ) sekä tyypin 2 generoiva funktio on täydellisesti separoituva

$$\tilde{F}_2(r, \varphi, p_\varphi, E) = p_\varphi \varphi + W(r, p_\varphi, E),$$

missä

$$W(r, p_\varphi, E) = \pm \int \sqrt{2mE - 2mV(r) - p_\varphi^2 r^{-2}} dr.$$

Muuttuja $q^1 = \varphi \in [0, 2\pi)$, joten vastaava vaikutusmuuttuja

$$I^1(p_\varphi, E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = p_\varphi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = p_\varphi$$

(pyörivä liike). Oletetaan, että potentiaalilla $V(r)$ on minimi eli ‘kuoppa’ jossain pistessä. Tällöin koordinaattia $q^2 = r$ vastaava vaikutusmuuttuja on

$$I^2(p_\varphi, E) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} p_r(r, p_\varphi, E) dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2mE - 2mV(r) - p_\varphi^2 r^{-2}} dr,$$

¹⁵⁴Erityisesti, jos tiedetään, että q^i on syklinen muuttuja (p^i on liikevakio), niin valitaan $W_i(q^i, \mathbf{P}) = P^i q^i$, joten $P^i = p^i$.

¹⁵⁵ $C_{\mathbf{c}}^i$ on muotoa $[u_0, u_1] \ni u \mapsto (\mathbf{q}(u), \mathbf{p}(u)) \in \mathbb{R}^{2n}$, $(\mathbf{q}(u_0), \mathbf{p}(u_0)) = (\mathbf{q}(u_1), \mathbf{p}(u_1))$, missä $\underline{q}^j(u) = q_0^j$ ja $\underline{p}^j(u) = p_0^j$, kun $j \neq i$.

missä r_{\min} ja r_{\max} ovat funktion $2mE - 2mV(r) - p_\varphi^2 r^{-2}$ peräkkäiset nollakohdat, joiden välillä tämä lauseke on positiivinen (värähtelevä liike).

Olkoon esimerkiksi

$$V(r) = -\frac{G_N \mathcal{M} m}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

missä \mathcal{M} on (aktiivinen) painovoimamassa ja G_N gravitaatiovakio. Täten Newtonin gravitaatiopotentiaaliin on lisätty 'korjaustermi' βr^{-2} , missä β on vakio. Tiedetään, että ilman korjaustermiä sidottu liike ($E < 0$) muodostaa ellipsin (tai ympyrän). Vaikutusmuuttujan I^2 integraali voidaan nyt laskea (esim. residylaskennalla): [!]

$$I^2(p_\varphi, E) = -\sqrt{p_\varphi^2 + 2m\beta} + G_N \mathcal{M} m^{3/2} (-2E)^{-1/2}.$$

Ratkaistaan tästä E eli [!]

$$H(I^1, I^2) = -\frac{G_N^2 \mathcal{M}^2 m^3}{2[I^2 + \sqrt{(I^1)^2 + 2m\beta}]^2}.$$

Kulmataajuudet ovat

$$\omega^2(I^1, I^2) = \frac{\partial H(I^1, I^2)}{\partial I^2} = \frac{G_N^2 \mathcal{M}^2 m^3}{[I^2 + \sqrt{(I^1)^2 + 2m\beta}]^3}$$

ja

$$\omega^1(I^1, I^2) = \frac{\partial H(I^1, I^2)}{\partial I^1} = \omega^2(I^1, I^2) \frac{I^1}{\sqrt{(I^1)^2 + 2m\beta}}$$

tai sijoittamalla $I^1(p_\varphi, E) = p_\varphi$ ja $I^2(p_\varphi, E)$ ylläoleviin yhtälöihin, saadaan

$$\omega^2(p_\varphi, E) = \frac{(-2E)^{3/2}}{G_N \mathcal{M} m^{3/2}}$$

ja

$$\omega^1(p_\varphi, E) = \omega^2(p_\varphi, E) \frac{p_\varphi}{\sqrt{p_\varphi^2 + 2m\beta}} \neq \omega^2(p_\varphi, E),$$

kun $\beta \neq 0$. [!] Jos $\beta \neq 0$, niin sidotun liikkeen ellipsirata ei sulkeudu vaan ellipsi 'kiertää'. Jos $\beta \approx 0$, niin rata näyttää vielä ellipsiltä, mutta 'perisentri' (eli radan lyhin etäisyys \mathcal{M} :stä) siirtyy (prekessoi) kulmanopeudella $\omega^2 - \omega^1$. [!] Jos $\beta = 0$, niin $\omega^1 = \omega^2$ eli ellipsi ei kierry.

Lisäämällä yllä oleva korjaustermi Newtonin gravitaatioon, voidaan selittää Merkuriuksen perihelisiirtymä käyttämättä relativistista korjaustermiä (joka on verrannollinen funktioon $-1/r^3$). Itseasiassa ilmaisemalla Schwarzschildin metriikka ns. harmonisissa koordinaateissa suurin korjaustermi on muotoa β/r^2 . Tätä lähestymistapaa käytti Fock aikoinaan selittäessään Merkuriuksen perihelisiirtymää ja valon taipumista suhteellisuusteoriassa (ks. viite [5]).

26 FYS: Hyrrä

Tarkastellaan (rotaatio)symmetrisen hyrrän liikettä uniformisessa painovoimakentässä. Tarkoituksena on osoittaa, että hyrrä on täydellisesti integroitava ja karakterisoida sen liikkeeseen liittyvät jaksolliset liikkeet. Vastaavat jaksolliset liikkeet esiintyvät myös monissa muissa pyörivissä systeemeissä (esim. planeetta pyörii akselinsa ympäri).

Oletetaan, että hyrrän ja pinnan kosketuspiste pysyy paikoillaan. Valitaan (x, y, z) -laboratoriokoordinaatisto siten, että z -akseli on painovoimakentän suuntainen ja origo on hyrrän ja xy -tason kosketuspisteessä. Hyrrän aseman ilmaisemiseen riittää tuntea hyrrän symmetria-akselin suuntavektori $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ ja kiertokulma. Täten hyrrän konfiguraatioavaruus on $\text{SO}(3)$.¹⁵⁶ Parametrisoidaan $\text{SO}(3)$ Eulerin kulmia (ϕ, θ, ψ) käyttäen siten, että kulmat ϕ ja θ (akselin kallistuskulma) ilmaisevat hyrrän symmetria-akselin aseman ja ψ kiertokulman kyseisen akselin ympäri.

Hyrrän liike on (sileä) kuvaus

$$\underline{\mathbf{R}} : \mathcal{T} \rightarrow \text{SO}(3), \quad t \mapsto \underline{\mathbf{R}}(t),$$

missä $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ on (aika)väli. Koska $\underline{\mathbf{R}}(t)\underline{\mathbf{R}}(t)^T = \mathbf{1}$, niin

$$\frac{d\underline{\mathbf{R}}(t)}{dt}\underline{\mathbf{R}}(t)^T + \underline{\mathbf{R}}(t)\frac{d\underline{\mathbf{R}}(t)^T}{dt} = \mathbf{0}$$

eli $[\dot{\underline{\mathbf{R}}}(t)\underline{\mathbf{R}}(t)^T]^T = -\dot{\underline{\mathbf{R}}}(t)\underline{\mathbf{R}}(t)^T$; matriisi $\dot{\underline{\mathbf{R}}}(t)\underline{\mathbf{R}}(t)^T$ on siis antisymmetrinen¹⁵⁷ ja täten automaattisesti **[!]** muotoa

$$\dot{\underline{\mathbf{R}}}(t)\underline{\mathbf{R}}(t)^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\ell} \in \mathfrak{so}(3),$$

missä $\boldsymbol{\omega}(t) := (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ on kiertoliikkeen $\underline{\mathbf{R}}$ kulmanopeusvektori hetkellä t . Jos $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \vec{0}$, niin voidaan määrittellä hetkellinen kiertoakselin suuntavektori $\mathbf{n}(t) := \boldsymbol{\omega}(t)/\omega(t)$, missä $\omega(t) := |\boldsymbol{\omega}(t)|$ on hetkellinen kulmanopeus tai -vauhti. Näin ollaan saatu kaikille $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{d\underline{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\ell}]\underline{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(t) \times [\underline{\mathbf{R}}(t)\mathbf{a}].$$

¹⁵⁶Nythän $\text{SO}(3)$ on kolmiulotteinen monisto, jopa Lien ryhmä, jonka erään (lokaalin) kartan muodostavat Eulerin kulmat.

¹⁵⁷Vastaavasti nähdään heti, että $\text{SO}(n)$:n Lien algebra $\mathfrak{so}(n)$ on antisymmetristen $n \times n$ -reaalmatriisien muodostama n -ulotteinen vektoriavaruus varustettuna Lien tulolla, joka on matriisien kommutaattori. Lisäksi kaikki $\text{SO}(n)$:n alkioit ovat muotoa $e^{\mathbf{M}}$, missä $\mathbf{M} \in \mathfrak{so}(n)$.

Jos määritellään (lokaali) *kulmaparametri* $\varphi(t) := \int_{t_0}^t \omega(t') dt'$, niin $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$ ja $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\mathbf{n}(t)$ sekä saadaan Rodriguesin rotaatiokaavan tyyppinen yhtälö [!]

$$\frac{d\mathbf{R}(\varphi)\mathbf{a}}{d\varphi} = \mathbf{n}(\varphi) \times [\mathbf{R}(\varphi)\mathbf{a}],$$

missä siis akselin suunnan sallitaan muuttua. Tarkastellaan sitten liikettä \mathbf{R} Eulerin kulmien avulla.

Kuten aiemmin todettiin, jokainen $SO(3)$:n matriisi voidaan esittää Eulerin kulmien avulla matriisina $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$. Täten matriisi $\mathbf{R}(t)$ on muotoa $\mathbf{R}(\underline{\phi}(t), \underline{\theta}(t), \underline{\psi}(t))$, missä $\mathcal{T} \ni t \mapsto \boldsymbol{\xi}(t) = (\underline{\phi}(t), \underline{\theta}(t), \underline{\psi}(t)) \in \mathbb{R}^3$ on hyrrän liike Eulerin kulmien avulla ilmaistuna. Huomaa, että hyrrän (epäinertiaalisen) kappalekoordinaatiston kanta kiertyy hyrrän mukana ja riippuu siis ajasta; kyseinen kanta hetkellä t on $\{\mathbf{i}'(t), \mathbf{j}'(t), \mathbf{k}'(t)\}$, missä esim. $\mathbf{i}'(t) := \mathbf{R}(t)\mathbf{i}$.

Ketjusääntöä käyttäen nähdään, että kaikilla $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{a} \\ &= \underline{\dot{\phi}}(t) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} \Big|_{\boldsymbol{\xi}(t)} \mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{a} + \underline{\dot{\theta}}(t) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \Big|_{\boldsymbol{\xi}(t)} \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{a} + \underline{\dot{\psi}}(t) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \Big|_{\boldsymbol{\xi}(t)} \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Koska $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{R}(\mathbf{i}, \theta)\mathbf{R}(\mathbf{k}, \psi)$ ja $\mathbf{M}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{M}\mathbf{a}) \times (\mathbf{M}\mathbf{b})$, $\mathbf{M} \in SO(3)$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, [!] saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)}{\partial \phi} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)^{-1} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)}{d\phi} \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)^{-1} \mathbf{a} = \mathbf{k} \times \mathbf{a}, \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)}{\partial \theta} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)^{-1} \mathbf{a} &= \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi) \frac{d\mathbf{R}(\mathbf{i}, \theta)}{d\theta} \mathbf{R}(\mathbf{i}, \theta)^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)^{-1} \mathbf{a} \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi) (\mathbf{i} \times \mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)^{-1} \mathbf{a}) = (\mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{i}) \times \mathbf{a}, \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)}{\partial \psi} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)^{-1} \mathbf{a} &= (\mathbf{R}(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{R}(\mathbf{i}, \theta)\mathbf{k}) \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Täten kulmanopeus

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \underline{\dot{\phi}}(t)\mathbf{k} + \underline{\dot{\theta}}(t)\mathbf{i}_1(t) + \underline{\dot{\psi}}(t)\mathbf{k}'(t),$$

missä $\mathbf{i}_1(t) := \mathbf{R}(\mathbf{k}, \underline{\phi}(t))\mathbf{i}$ ('noodiakselin' suuntavektori).

Jäykän kappaleen mekaniikasta on tuttua, että hyrrän liike-energia (hetkellä t) on

$$T(t) = \frac{1}{2} [I_1\omega'_1(t)^2 + I_2\omega'_2(t)^2 + I_3\omega'_3(t)^2],$$

missä I_i on i :s hitausmomentti ja $\omega'_i(t)$ on kulmanopeuden i :s komponentti pääakselikoordinaatistossa, jonka kanta on hetkellä t on $\{\mathbf{i}'(t), \mathbf{j}'(t), \mathbf{k}'(t)\}$; huomaa, että hyrrä on symmetrinen

eli $I_1 = I_2 = I$. Lasketaan [!] seuraavaksi kulmanopeuden komponentit ω'_i :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega'_1 \mathbf{i}' + \omega'_2 \mathbf{j}' + \omega'_3 \mathbf{k}' = \dot{\phi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{i}_1 + \dot{\psi} \mathbf{k}' \\ &= \dot{\phi} \mathbf{R}(\mathbf{k}, -\psi) \mathbf{R}(\mathbf{i}, -\theta) \mathbf{R}(\mathbf{k}, -\phi) \mathbf{k}' + \dot{\theta} \mathbf{R}(\mathbf{k}', -\psi) \mathbf{i}' + \dot{\psi} \mathbf{k}' \\ &= \dot{\phi} [\sin \psi \sin \theta \mathbf{i}' + \cos \psi \sin \theta \mathbf{j}' + \cos \theta \mathbf{k}'] \\ &\quad + \dot{\theta} [\cos \psi \mathbf{i}' - \sin \psi \mathbf{j}'] + \dot{\psi} \mathbf{k}' \\ &= [\dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi] \mathbf{i}' + [\dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi] \mathbf{j}' + [\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}] \mathbf{k}'.\end{aligned}$$

Sijoitetaan komponentit ω'_i kineettisen energian lausekkeeseen. Saadaan [!]

$$\underline{T}(t) = \frac{1}{2} I [\dot{\theta}(t)^2 + \dot{\phi}(t)^2 \sin^2 \theta(t)] + \frac{1}{2} I_3 [\dot{\psi}(t) + \dot{\phi}(t) \cos \theta(t)]^2.$$

Hyrrän potentiaalienergia on $\underline{V}(t) = mgl \cos \theta(t)$, missä m on hyrrän massa, l massakeskipisteen etäisyys origosta ja g putoamiskiihtyvyyys. Täten hyrrän Lagrangen funktio $L : TSO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ on (lokaalisti)

$$L(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) := \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$$

ja yleistetyt impulssit

$$\begin{aligned}p_\phi &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta, \\ p_\theta &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta}, \\ p_\psi &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta).\end{aligned}$$

Koska ϕ ja ψ ovat syklisiä koordinaatteja, niin p_ϕ ja p_ψ ovat liikevakioita. Lisäksi L ei riipu ajasta, joten Hamiltonin funktio (kokonaisenergia) $H : T^*SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ on [!]

$$H(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl \cos \theta.$$

Helposti nähdään, [!] että $[H, p_\phi] = 0 = [H, p_\psi]$, mutta p_θ ei ole liikevakio: $[H, p_\theta] = \partial H / \partial \theta = (p_\phi - p_\psi \cos \theta)(p_\psi - p_\phi \cos \theta) / (I \sin^3 \theta) - mgl \sin \theta$. Koska H , p_ϕ ja p_ψ ovat toisistaan riippumattomia [!] liikevakioita, jotka kommutoivat keskenään, hyrrä on täydellisesti integroitava.

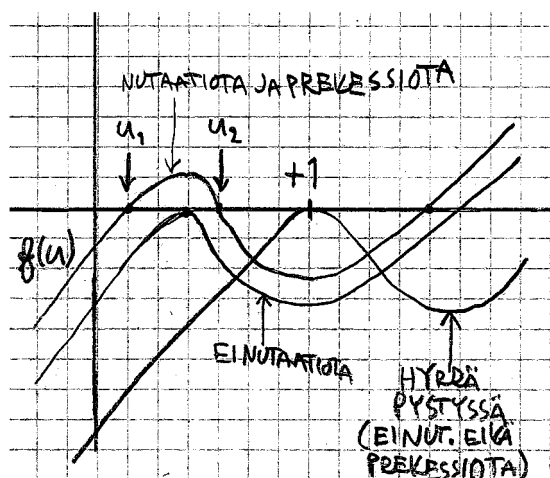
Olkoon sitten $t \mapsto \boldsymbol{\xi}(t)$ sellainen hyrrän liike (eli Hamiltonin yhtälöitten ratkaisu), että $\underline{p}_\phi(t) = Ib$, $\underline{p}_\psi(t) = Ia$ ja $\underline{H}(t) = E$, missä $a, b, E \in \mathbb{R}$ ovat sopivia vakioita. Merkitään $u(t) := \cos \theta(t)$, joten $\dot{u} = -(\sin \theta) \dot{\theta} / I$. Täten [!]

$$2(\sin^2 \theta) I^{-1} E = (b - au)^2 + (\sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 / I^2 + 2(\sin^2 \theta) I^{-1} [a^2 I^2 / (2I_3) + mgl u],$$

mistä seuraa, että *energiayhtälö* on [!]

$$\dot{u}^2 = \sin^2 \theta \left[\underbrace{2I^{-1}E - a^2 I / I_3}_{=: \alpha} - \underbrace{2mglI^{-1}u}_{=: \beta > 0} \right] - (b - au)^2 = \underbrace{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}_{=: f(u)},$$

missä $f(x) := (1 - x^2)(\alpha - \beta x) - (b - ax)^2 = \beta x^3 + \dots$ on kolmannen asteen polynomi, jolle $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Lisäksi $f(\pm 1) = -(b \mp a)^2 \leq 0$. Täten, jos on olemassa piste $y \in [-1, 1]$ siten, että $f(y) \geq 0$, on olemassa väli $[u_1, u_2] \subseteq [-1, 1]$ siten, että $\{x \in [-1, 1] \mid f(x) \geq 0\} = [u_1, u_2]$.



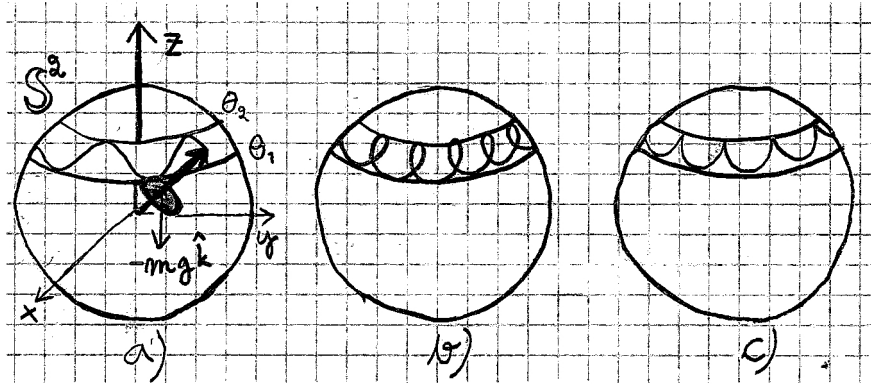
Kuva 16: Funktio $f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$ on piirretty kuvaan kolmella eri parametrien arvoilla. Jotta liikettä esiintyisi, on funktion leikattava u -akseli vähintään kerran välillä $[-1, 1]$. Jos funktio leikkaa vain kerran akselin, niin ei voi tapahtua nutaatiota, sillä kallistuskulma θ on vakio. Jos ainoa leikkauspiste $u = 1$ eli $\theta = 0$, niin hyrrä on pystyasennossa ja prekessiotakaan ei esiinny.

Koska $u(t) = \cos \theta(t) \in [-1, 1]$ ja $\dot{u}^2(t) = f(u(t)) \geq 0$ kaikilla $t \in \mathcal{T}$, niin on olemassa väli $[u_1, u_2] \subseteq [-1, 1]$ siten, että $\{u(t) \mid t \in \mathcal{T}\} \subseteq [u_1, u_2]$. Merkitsemällä $\theta_i := \cos^{-1} u_i$, $i = 1, 2$, nähdään, että kulma $\theta(t)$ kuuluu väliin $[\theta_2, \theta_1]$. Jos liikkeen (tarkastelu)aikaväli \mathcal{T} on riittävän suuri, niin on olemassa hetket t_1 ja t_2 , jolloin $\theta(t_i) = \theta_i$, $i = 1, 2$. Tällöin $-\sin \theta(t_i) \dot{\theta}(t_i) = \dot{u}(t_i) = \sqrt{f(u_i)} = 0$, joten jos $\theta_i \neq 0$, niin $\dot{\theta}(t_i) = 0$ eli liikkeen suunta vaihtuu. Hyrrän kiertoakseli oskilloi kulmien θ_1 ja θ_2 välillä; tätä liikettä kutsutaan *nutaatioksi*. Hyrrä suorittaa myös kahta muuta jaksollista liikettä. Tarkastellaan näitä seuraavassa.

Koska $p_\phi = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta$, saadaan [!]

$$\dot{\phi} = a \frac{b/a - u}{1 - u^2}.$$

Jos $b/a > u_2$, niin $\dot{\phi}(t)$ on positiivinen (tai negatiivinen) kaikilla $t \in \mathcal{T}$, joten kulma ϕ kasvaa (tai vähenee) ajan myötä (kuva 17a). Jos $b/a = u_2$, niin $\dot{\phi}(t)$ on nolla, kun $u(t) = u_2$ (kuva 17c). Jos $b/a < u_2$, niin $\dot{\phi}(t)$ saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Voidaan osoittaa, [!] että silti kulma ϕ kasvaa (tai vähenee) keskimäärin (kuva 17b). Tätä laboratoriokoordinaatiston z -akselin ympäri tapahtuvaa jaksollista liikettä sanotaan *prekessioksi*. Huomaa, että prekessiokulman ϕ kanonisesti konjugoitu (kierto)impulssi p_ϕ on liikevakio.



Kuva 17: Hyrrän akselin pää liikkuu pallonpintaa ($\cong S^2$) pitkin. Prekessoidessaan akselin pää piirtää kolmenlaisia käyriä pallon pinnalle. Liike c) on liiketyyppien a) ja b) (epästabiili) ‘rajatapaus’ ja siksi vaikeimmin todennettavissa kokeellisesti.

Kolmantena jaksollisena liikkeenä on hyrrän rotaatio symmetria-akselin ympäri (eli kulman ψ muuttuminen ajan myötä). Tämän liikkeen kiertoimpulssi eli ns. *spinkierointimpulssi* p_ψ on myös liikevakio. Johtopäätöksenä saadaan:

Hyrrän konfiguraatiovaruus $SO(3)$ on kolmiulotteinen (Lien ryhmä). Riippumattomia liikevakioita on kolme: kokonaisenergia H , prekessiokiertoimpulssi p_ϕ ja spinkierointimpulssi p_ψ . Täten systeemi on integroitava. Koska $SO(3)$ on ‘rajoitettu’ (eli kompakti), niin liike on ‘rajoitettua’ ja rata kuuluu lehteen, joka voidaan samaistaa \mathbb{T}^3 :n kanssa. Nutaatiokulma θ värähtelee välillä $[\theta_2, \theta_1]$ ja spinkulma ψ sekä prekessiokulma ϕ suorittavat (nykivää) *kiertoliikettä*. Kuhunkin liikkeeseen liittyy oma kulmanopeutensa. Hyrrän liike on (kvasi)jaksollista.

Huomautus 20. Ylläolevaa kvalitatiivista eli laadullista hyrrän liikkeen analyysia tarvitaan, koska liikettä on vaikea ratkaista Hamiltonin yhtälöistä: Koska p_θ ei ole liikevakio, sitä vastaa Hamiltonin yhtälö

$$I\ddot{\theta}(t) = \dot{p}_\theta(t) = -\frac{\partial H}{\partial \theta}(\xi(t)) = -\frac{[b - a \cos \theta(t)] [a - b \cos \theta(t)] I}{\sin^3 \theta(t)} + mgl \sin \theta(t).$$

Tästä yhtälöstä tai (energia)yhtälöstä $\dot{u}(t)^2 = f(u(t))$, missä $u(t) = \cos \theta(t)$, voisi periaatteessa ratkaista liikkeen $t \mapsto \theta(t)$ (ja sitten muut kulmat), mutta yhtälöt ovat epälineaarisia kulman θ suhteen ja ratkaiseminen on vaikeaa. Toki energiayhtälöstä seuraa, että

$$\int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta(t)} f(u)^{-1/2} du = t - t_0$$

ja ainakin numeerista analyysiä käyttäen likimääräinen ratkaisu voidaan löytää.

Huomautus 21. Kaksi kolmiulotteisen avaruuden havaitsijaa \mathbf{q} ja \mathbf{Q} ovat toisistaan (ajasta riippuvan) euklidisen muunnoksen päässä, joten hiukkasen liike kartassa \mathbf{q} on muotoa $\underline{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^3$ ja kartassa \mathbf{Q} muotoa

$$\underline{\mathbf{Q}}(t) = \underline{\mathbf{q}}_0(t) + \underline{\mathbf{R}}(t)\underline{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{\mathbf{R}}(t) \in \text{SO}(3).$$

Välittömästi saadaan tutut yhtälöt

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\mathbf{Q}}(t)}{dt} &= \frac{d\underline{\mathbf{q}}_0(t)}{dt} + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\underline{\mathbf{R}}(t)\underline{\mathbf{q}}(t)] + \underline{\mathbf{R}}(t) \frac{d\underline{\mathbf{q}}(t)}{dt}, \\ \frac{d^2\underline{\mathbf{Q}}(t)}{dt^2} &= \frac{d^2\underline{\mathbf{q}}_0(t)}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt} \times [\underline{\mathbf{R}}(t)\underline{\mathbf{q}}(t)] + \boldsymbol{\omega}(t) \times \{ \boldsymbol{\omega}(t) \times [\underline{\mathbf{R}}(t)\underline{\mathbf{q}}(t)] \} + \\ &\quad + 2\boldsymbol{\omega}(t) \times \left[\underline{\mathbf{R}}(t) \frac{d\underline{\mathbf{q}}(t)}{dt} \right] + \underline{\mathbf{R}}(t) \frac{d^2\underline{\mathbf{q}}(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

ja ‘näennäiskiihtyvyydet’ kuten Coriolis-kiihtyvyys. Galilein muunnoksen tapauksessa $\underline{\mathbf{q}}_0(t) \equiv \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^3$ ja $\underline{\mathbf{R}}(t) \equiv \mathbf{R} \in \text{SO}(3)$, joten $d^2\underline{\mathbf{Q}}(t)/dt^2 = \mathbf{R} d^2\underline{\mathbf{q}}(t)/dt^2$ ja näennäiskiihtyvyydet häviävät.

Harjoitustehtävä 59. Heitellään jäykkää kappaletta (jonka massa on m) tyhjiössä. Kiinnitetään karteellinen (x, y, z) -inertiaalikoordinaatisto (eli laboratoriokoordinaatisto \mathbb{R}^3). Olkoon $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ kappaleen massakeskipisteen ja $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^3$ kappaleen jonkun toisen (kiinteän) pisteen P asema hetkellä t . Koska kappale on jäykkä, niin vektorin $\mathbf{u}(t) := \mathbf{s}(t) - \mathbf{r}(t)$ pituus on vakio ja täten pisteen P liike on muotoa

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}_0 + \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{R}(t) \in \text{SO}(3),$$

missä $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$ ja $\mathbf{R}(0) = \mathbf{1}$. Kuten tunnettua, kappaleeseen ei vaikuta vääntömomentteja (massakeskipisteen suhteen) ja painovoima voidaan ‘keskittää’ massakeskipisteeseen eli kappaleeseen vaikuttaa vain voima $-mg\mathbf{k}$, jonka voidaan ajatella kohdistuvan massakeskipisteeseen. Laske pisteen P kiihtyvyys hetkellä t käyttäen hetkellistä $\mathbf{R}(t)$:n kulmanopeusvektoria $\boldsymbol{\omega}(t)$.

ESSEETEHTÄVÄ:

Tarkastele liikevakioita Hamiltonin (ja Lagrangen) mekaniikassa. Miksi ne ovat tärkeitä? Miten niitä voi löytää mm. Poissonin sulkuja käyttämällä, Hamiltonin-Jacobin menetelmällä tai Hamiltonin (ja Lagrangen) funktioitten symmetrioista? Tutki yhtä tai useampaa symmetristä fysikaalista systeemiä (esim. pallosymmetrinen metriikka, hyrrä tai joku muu mieleisesi systeemi).

27 FYS: Nestedynamiikka ja Navierin–Stokesin yhtälö

Tarkastellaan (epärelativistisen) nesteen virtausta euklidisessa avaruudessa \mathbb{E}^3 . Kiinnitetään origo O ja karteellinen kartta $\mathbf{r} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Oletetaan, että kaikki funktiot ovat jatkossa (paloittain) sileitä.¹⁵⁸

Neste koostuu suuresta määrästä hiukkasia (molekyylejä, atomeja, alkeishiukkasia), jotka vuorovaikuttavat keskenään ja ympäristön kanssa. Lagrangen tapa tarkastella nesteen liikettä on tutkia yksittäisten hiukkasten ratoja, jotka saadaan ratkaisemalla liikeyhtälöt (esim. Newtonin tai Lagrangen liikeyhtälöt). Koska hiukkasia on paljon, tehtävä on vaikea.

Parempi tapa on tarkastella nestettä nopeuskenttänä: kuhunkin avaruus-ajan pisteeseen (t, \mathbf{r}) liitetään nesteen (keskimääräinen) nopeus.¹⁵⁹ Tässä Eulerin lähestymistavassa ei olla kiinnostuttu yksittäisten (mikroskooppisten) hiukkasten radoista vaan ajatellaan nestettä kollektiivisena jatkuvana (makroskooppisena) ilmiönä. Eli kyseessä on (piste)mekaniikan sijasta **kenttäteoria**. Tässä luvussa tarkastellaan nesteen virtausta Eulerin lähestymistapaa käyttäen.

Olkoon $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3$ nesteen nopeus ja $\rho(t, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ nesteen tiheys avaruuden pisteessä \mathbf{r} hetkellä t eli $\mathbf{v} : (t, \mathbf{r}) \mapsto \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ on *nopeuskenttä*. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^3$ ‘rajoitettu alue’ ja $S = \partial V$ sitä rajoittava pinta¹⁶⁰ sekä dV ‘tilavuusalkio’ ja $\mathbf{n} dS$ pinnan S ‘pinta(ala)-alkio’,¹⁶¹ missä $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ on pinnan ulospäin osoittava (yksikkö)normaalivektori pinnan pisteessä \mathbf{r} . Täten ρdV on ‘massa-alkio’ ja (nesteen) kokonaismassa alueessa V hetkellä t on $\iiint_V \rho(t, \mathbf{r}) dV$.

¹⁵⁸Riippuen tilanteesta, voidaan rajoittautua \mathbb{E}^3 :n osajoukkoon, jolla on ‘reunapinta’ (esim. neste virtaa kanavassa tai putkessa). Toisaalta voidaan laittaa nesteen tiheys nolaksi pisteissä, joissa nestettä ei ole. Myös epäjatkuvat (paloittain) sileät funktiot voidaan siloittaa sileiksi funktioiksi mittaustarkkuuden rajoissa. Usein päädytään tilanteeseen, missä nesteen virtaus ratkaistaan asettamalla joku *reunaehto* eli esim. nesteen nopeus on nolla rajapinnalla (joen pohja, putken seinämä jne.).

¹⁵⁹Tässä luvussa ‘neste’ tai ‘fluidi’ on hyvin yleinen käsite sisältäen mm. ‘pölyn,’ kaasumaiset aineet tai hitaasti liikkuvan epärelativistisen plasman. Myös kiinteille aineille tämän luvun tarkastelu on monelta osin samankaltainen (esim. jännitysmatriisi). Tuulimittari on hyvä esimerkki nopeuskentän mittaustavasta: tuulipussin suunta kertoo nopeusvektorin suunnan ja vauhti voidaan mitata vaikka propellilla, joka pyörii sitä nopeammin mitä enemmän tuulee.

¹⁶⁰ V on \mathbb{R}^3 :n rajoitettu yhtenäinen 3-ulotteinen reunallinen alimonisto, jonka reunapintaa S merkitään usein symbolilla ∂V . Reunalliset alimonistot määritellään luvussa 31.

¹⁶¹ $dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ on (tilavuus) 3-muoto ja $\mathbf{n} dS$ 2-ulotteisen \mathbb{R}^3 :n alimoniston S pinta-ala 2-muoto. Esimerkiksi voidaan tässä luvussa olettaa, että V on ϵ -säteinen pallo $V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{r} - \mathbf{y}| \leq \epsilon\}$ ja $S = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{r} - \mathbf{y}| = \epsilon\}$ on sen (pallon) pinta. Nyt kaikki pintaintegraalit ovat integraaleja yli pallon pinnan S . Erityisesti S :n normaalivektori $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (\mathbf{r} - \mathbf{y})/\epsilon$ kaikilla $\mathbf{r} \in S$.

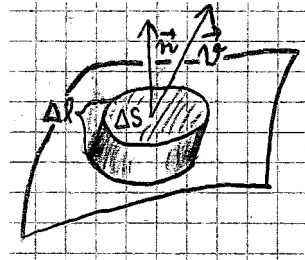
Kokonaismassan muuttumisnopeus (rajoitetussa!) alueessa V on

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(t, \mathbf{r}) dV = \iiint_V \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} dV$$

ja massan virtaamisnopeus pinnan S läpi (hetkellä t) on

$$- \iint_S \rho(t, \mathbf{r}) [\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})] dS,$$

joka on positiivinen, jos massaa virtaa V :hen enemmän kuin ulos V :stä.



Kuva 18: Kun määritellään kohtisuora nopeus $v_{\perp} := \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, nähdään, että aikavälillä Δt neste on edennyt pintaan nähden kohtisuoran matkan $\Delta \ell \approx v_{\perp} \Delta t$. Nyt ‘pinta-ala ΔS on edennyt’ saman matkan ja muodostaa ‘sylinterin,’ jonka tilavuus on $\Delta V \approx \Delta S \Delta \ell$. Massaa on täten virrannut ulos ΔS :n kautta määrä $\rho \Delta V$ eli massan muutos on $\Delta m \approx -\rho \Delta V \approx -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t$. Täten massan virtaamisnopeus ‘pinta-alkion’ ΔS läpi on $\Delta m / \Delta t \approx -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S$. ‘Liikemäärää on virrannut’ määrä $\Delta m \mathbf{v}$ ulos eli liikemäärän muuttumisnopeus johtuen nesteen virtaamisesta ΔS :n läpi on $(-\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S) \mathbf{v} = -\rho \mathbf{v} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \Delta S$.

Massan säilymislaista seuraa, että

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV,$$

missä on käytetty divergenssilauseetta. [!] Koska V on mielivaltainen, voidaan massan säilymislaki kirjoittaa muodossa

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{jatkuvuusyhtälö}).} \quad (29)$$

Jos ρ on vakio, niin jatkuvuusyhtälö (tai kontinueettiyhtälö) on $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ eli kenttä \mathbf{v} on lähteetön.¹⁶²

¹⁶²Yleisemmin $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, jos ja vain jos $\partial \rho / \partial t + (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} = 0$ eli neste on *kokoontuomaton*. Tällöin Poincarén lemmasta seuraa, että $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$ jollekin $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Nesteen *kokonaisliikemäärä* alueessa V hetkellä t on

$$\mathcal{P}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t) := \iiint_V \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) dV \in \mathbb{R}^3$$

ja sen muutosnopeus

$$\frac{d\mathcal{P}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [\rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r})] dV \in \mathbb{R}^3.$$

Kokonaisliikemäärän muuttumisnopeus johtuen nesteen virtaamisesta pinnan $S = \partial V$ läpi on

$$\mathcal{M}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t) := - \iint_S \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) [\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})] dS \in \mathbb{R}^3,$$

joten sen i :s komponentti on

$$- \iint_S \rho(t, \mathbf{r}) v^i(t, \mathbf{r}) [\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})] dS = - \iiint_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r}) v^i(t, \mathbf{r}) v^j(t, \mathbf{r})}{\partial x^j} dV \in \mathbb{R},$$

missä on käytetty taas divergenssilauseetta. [!]

Nesteen hiukkasiin (voi) vaikuttaa ulkoisia pitkän kantaman voimia kuten esimerkiksi painovoima tai, jos neste on varattua, ulkoinen sähkömagneettinen voima. Olkoon näiden voimien kokonaisvoimatiheys (siis ‘kiihtyys’) $\mathbf{g}(\mathbf{v}, t, \mathbf{r})$, johon sijoitetaan alla $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$. Tällöin nesteeseen vaikuttava *kokonaiskappalevoima* (tilavuusvoima) alueessa V hetkellä t on

$$\mathcal{F}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t) := \iiint_V \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{v}(t, \mathbf{r}), t, \mathbf{r}) dV \in \mathbb{R}^3.$$

Neste vuorovaikuttaa myös itsensä kanssa eli nestemolekyylien välillä vaikuttaa sähkömagneettisia (lyhyen kantaman) voimia. Tarkastellaan näitä seuraavassa.

Olkoon \mathbf{r} avaruuden piste, $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$ yksikkövektori ja $S_{\mathbf{n}, \mathbf{r}}$ pinta, joka kulkee pisteen \mathbf{r} kautta, ja jonka normaalivektori pisteessä \mathbf{r} on \mathbf{n} . Olkoon $\Sigma^{\rho, \mathbf{v}}(\mathbf{n}, t, \mathbf{r}) = (\Sigma_1^{\rho, \mathbf{v}}(\mathbf{n}, t, \mathbf{r}), \Sigma_2^{\rho, \mathbf{v}}(\mathbf{n}, t, \mathbf{r}), \Sigma_3^{\rho, \mathbf{v}}(\mathbf{n}, t, \mathbf{r}))$ jännitysvoima pinta-alayksikköä kohden pisteessä \mathbf{r} hetkellä t , jonka aiheuttaa neste, joka on pinnan $S_{\mathbf{n}, \mathbf{r}}$ sillä puolella mihin \mathbf{n} osoittaa ja joka kohdistuu nesteeseen, joka on pinnan toisella puolella (siis mihin $-\mathbf{n}$ osoittaa). Voidaan osoittaa (käyttämällä Newtonin lakeja), [!] että $\Sigma_i^{\rho, \mathbf{v}}(\mathbf{n}, t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) n^j$ kaikilla $i = 1, 2, 3$, missä $\boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) = (\sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}))_{i,j=1}^3$ on nesteen *jännitysmatriisi* (tai -tensori) pisteessä \mathbf{r} hetkellä t , kun nesteen tiheys–nopeuskenttä on (ρ, \mathbf{v}) . Matriisin $\boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}}$ diagonaali-alkiot $\sigma_{ii}^{\rho, \mathbf{v}}$ ovat normaali-jännityksiä ja alkiot $\sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}$, $i \neq j$, ovat tangentialijännityksiä tai leikkausjännityksiä. Täten *kokonaiskontaktivoima* (pintavoima), jonka aiheuttaa neste pinnan $S = \partial V$ ulkopuolella nesteeseen V :ssä, on (hetkellä t)

$$\mathcal{G}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t) := \iint_S \Sigma^{\rho, \mathbf{v}}(\mathbf{n}(\mathbf{r}), t, \mathbf{r}) dS \in \mathbb{R}^3,$$

joten sen i :s komponentti on

$$\iint_S \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) n^j(\mathbf{r}) dS = \iiint_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r})}{\partial x^j} dV \in \mathbb{R},$$

missä on jälleen kerran käytetty divergenssilausesta. [!]

Newtonin toisesta laista seuraa, että

$$\frac{d\mathcal{P}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t)}{dt} = \mathcal{M}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t) + \mathcal{F}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t) + \mathcal{G}_V^{\rho, \mathbf{v}}(t),$$

eli kaikilla $i = 1, 2, 3$,

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) dV = \iiint_V \left[-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \rho v^i v^j}{\partial x^j} + \rho g_i(\dots) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}}{\partial x^j} \right] dV$$

Koska V on mielivaltainen, on oltava kaikilla $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r}) v^i(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r}) v^i(t, \mathbf{r}) v^j(t, \mathbf{r})}{\partial x^j} = \rho(t, \mathbf{r}) g_i(\mathbf{v}(t, \mathbf{r}), t, \mathbf{r}) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r})}{\partial x^j}.$$

Käyttämällä jatkuvuusyhtälöä $\partial \rho / \partial t + \sum_j \partial(\rho v^j) / \partial x^j = 0$ saadaan lopulta *liikeyhtälö*

$$\boxed{\rho(t, \mathbf{r}) \frac{\partial v^i(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \rho(t, \mathbf{r}) \sum_{j=1}^3 v^j(t, \mathbf{r}) \frac{\partial v^i(t, \mathbf{r})}{\partial x^j} = \rho(t, \mathbf{r}) g_i(\mathbf{v}(t, \mathbf{r}), t, \mathbf{r}) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r})}{\partial x^j}}, \quad (30)$$

mistä pyritään ratkaisemaan $\rho(t, \mathbf{r})$ ja $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$. Toisaalta jatkuvuusyhtälö kytkee kentät $\rho(t, \mathbf{r})$ ja $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ toisiinsa, joten nämä eivät ole toisistaan riippumattomia (usein ρ jopa tunnetaan; esim. vakiotiheys). Välittömästi nähdään, että päästäksemme eteenpäin, on tarkasteltava jännitysmatriisin (ρ, \mathbf{v}) -riippuvuutta tarkemmin.

Jaetaan aluksi jännitysmatriisi $\boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}}$ kahteen osaan:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}} = \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}}) \mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}}$$

eli $\sigma_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{3}[\text{tr } \boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r})] \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r})$, missä $\text{tr } \mathbf{M} := \sum_{i=1}^3 M_{ii}$ on matriisin \mathbf{M} jälki, $\mathbf{1}$ on 3×3 -identiteettimatriisi ja $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} := -\frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}}) \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}}$, jolle täten $\text{tr } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} = 0$. Määritellään (*mekaaninen*) *paine* pisteessä \mathbf{r} hetkellä t :

$$P^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) := -\frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}),$$

joten $\boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}} = -P^{\rho, \mathbf{v}} \mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}}$. Termiä $-P^{\rho, \mathbf{v}} \mathbf{1}$ sanotaan jännitysmatriisin *isotrooppiseksi osaksi*, koska se ‘puristaa (jos $P^{\rho, \mathbf{v}} > 0$) nestettä kasaan’ joka suunnasta samalla voimalla (ajattele

pientä pallon pintaa nesteeseen sisällä; $P^{\rho, \mathbf{v}}$:n aikaansaama voima on aina pinnan normaalin suuntainen). Levossa olevalle nesteelle ($\mathbf{v} \equiv \vec{0}$) määritellään *staattinen paine*¹⁶³ $p^\rho(t, \mathbf{r}) := P^{\rho, \vec{0}}(t, \mathbf{r})$. Tällöin $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \vec{0}}(t, \mathbf{r}) = 0$, sillä muutoin leikkausjännitykset saisivat nesteen liikkumaan (\mathbf{v} ei olisi nolla). Liikkuvalle nesteelle voidaan myös määritellä staattinen paine, joka kuvaa ikäänkuin ‘hetkittäin levossa olevan’ nesteen painetta (tämä voidaan mitata suoraan painemittarilla; ajattele vaikka talon sisällä olevaa ilmapuntaria, joka mittaa keskimääräisen ilman paineen vaikka ulkona tuuleekin). Liikkuvalle nesteelle useimmiten $p^\rho(t, \mathbf{r}) \neq P^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r})$, joten määritellään *viskositeettijännitysmatriisi* $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} := \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} - P^{\rho, \mathbf{v}}\mathbf{1} + p^\rho\mathbf{1}$, jolle saattaa olla $\text{tr } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} \neq 0$. Täten

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}} = -p^\rho\mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}}}$$

ja, koska $\text{tr } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} = \text{tr } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} - P^{\rho, \mathbf{v}}\text{tr } \mathbf{1} + p^\rho\text{tr } \mathbf{1} = 3(-P^{\rho, \mathbf{v}} + p^\rho)$, niin $P^{\rho, \mathbf{v}} = p^\rho$, jos ja vain jos $\text{tr } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} = 0$.

Oletetaan sitten, että sisäinen kitka (viskositeetti) riippuu vain nestemolekyylien suhteellisesta liikkeestä toisiinsa nähden. Tällöin $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}}$ riippuu vain nopeuden \mathbf{v} paikkaderivaatoista. Jos nopeus muuttuu riittävän hitaasti siirryttäessä paikasta toiseen (ns. newtonilainen tai lineaarinen neste), voidaan tehdä lineaarinen approksimaatio:

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{k, l=1}^3 c_{ijkl}^\rho(t, \mathbf{r}) \frac{\partial v^k(t, \mathbf{r})}{\partial x^l}.$$

Huomaa, että jos nestemolekyylit liikkuvat keskimäärin samalla nopeudella eli \mathbf{v} on vakio, niin $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho, \mathbf{v}} \equiv 0$ ja täten $P^{\rho, \mathbf{v}} = p^\rho$. Lisäksi $\boldsymbol{\sigma}^{\rho, \mathbf{v}} = -p^\rho\mathbf{1}$ eli vain staattinen paine vaikuttaa.

Oletetaan, että jos nestettä pyöritetään vakiokulmanopeudella jonkun kiinteän akselin ympäri (kulmanopeus $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$), niin sisäistä kitkaa ei ole. Tällöin $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ eli $v^k(t, \mathbf{r}) = \epsilon_{knl}\omega^n x^l$ ja

$$\frac{\partial v^k(t, \mathbf{r})}{\partial x^l} + \frac{\partial v^l(t, \mathbf{r})}{\partial x^k} = \sum_{n=1}^3 (\epsilon_{knl}\omega^n + \epsilon_{lnk}\omega^n) = 0$$

sekä $\partial v^k / \partial x^k = 0$, joten oletetaan, että

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\rho, \mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) = \eta^\rho(t, \mathbf{r}) \left(\frac{\partial v^i(t, \mathbf{r})}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j(t, \mathbf{r})}{\partial x^i} \right) + c^\rho(t, \mathbf{r}) \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v^k(t, \mathbf{r})}{\partial x^k}.$$

Yllä oleva muoto ei ole yleisin mahdollinen, mutta se on symmetrinen ($\hat{\sigma}_{ij}^{\rho, \mathbf{v}} = \hat{\sigma}_{ji}^{\rho, \mathbf{v}}$) ja muotoinvariantti kierroissa (näin pitää olla isotrooppiselle nesteelle). Kun määritellään uusi kerroin

¹⁶³Joka saattaa riippua termodynaamisista muuttujista kuten lämpötilasta (kuten jotkut muutkin suureet).

$\zeta^\rho := c^\rho + \frac{2}{3}\eta^\rho$ saadaan lopulta [!]

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}^{\rho,\mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) &= \underbrace{\eta^\rho(t, \mathbf{r}) \left(\frac{\partial v^i(t, \mathbf{r})}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j(t, \mathbf{r})}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v^k(t, \mathbf{r})}{\partial x^k} \right)}_{= \hat{\sigma}_{ij}^{\rho,\mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) \text{ ja } \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho,\mathbf{v}})=0} \\ &\quad + \underbrace{\zeta^\rho(t, \mathbf{r}) \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v^k(t, \mathbf{r})}{\partial x^k}}_{= [p^\rho(t, \mathbf{r}) - P^{\rho,\mathbf{v}}(t, \mathbf{r})] \delta_{ij}}, \end{aligned}$$

missä η^ρ ja ζ^ρ ovat viskositeettikertoimet.¹⁶⁴ Erityisesti mekaaninen paine on

$$P^{\rho,\mathbf{v}}(t, \mathbf{r}) = p^\rho(t, \mathbf{r}) - \zeta^\rho(t, \mathbf{r})(\nabla \cdot \mathbf{v})(t, \mathbf{r}).$$

Usein viskositeettikertoimet ovat vakioita¹⁶⁵ ja muuttuvat hitaasti tiheyden muuttuessa, jotenka tällöin likimäärin $\eta^\rho(t, \mathbf{r}) = \eta$, $\zeta^\rho(t, \mathbf{r}) = \zeta$ ja [!]

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^{\rho,\mathbf{v}}(t, \mathbf{r})}{\partial x^j} = \underbrace{\eta \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v^i(t, \mathbf{r})}{\partial (x^j)^2}}_{\nabla^2 v^i} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \underbrace{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial v^k(t, \mathbf{r})}{\partial x^k}}_{\nabla \cdot \mathbf{v}}.$$

Täten nesteen likeyhtälö on redusoitunut **Navierin-Stokesin (NS) yhtälöksi** [!]

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p^\rho + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

josta pyritään ratkaisemaan (käyttäen myös jatkuvuusyhtälöä ja ehkäpä jotain lämpötilasta yms. termodynaamisista suureista riippuvia yhtälöitä) vaikkapa nopeuskenttä \mathbf{v} ja staattinen paine p^ρ (riippuen tietenkin siitä mitä suureita tai suureitten välisiä keskinäisiä riippuvuuksia tunnetaan jo aluksi). NS yhtälö on epälineaarinen ja vaikea ratkaista yleisessä tapauksessa. Tarkastellaan seuraavassa muutamia erikoistapauksia.

Esimerkki 68. Jos \mathbf{v} on vakio, niin saadaan *staattinen tasapainoyhtälö* $\rho \mathbf{g} = \nabla p^\rho$. Tästä voidaan helposti johtaa Arkhimedeen laki. Olkoon nesteen pinta ja origo xy -tasossa sekä tiheys ρ vakio. Nesteeseen vaikuttaa z -akselin suuntainen (vakio) painovoima, jonka aikaansaama putoamiskiihtyvyys on $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. Tällöin voimatiheys $\mathbf{g}(\mathbf{v}, t, \mathbf{r}) = \mathbf{g}$ ja $\nabla p^\rho = \rho \mathbf{g}$. Staattinen paine p^ρ syvyydellä h ($z = -h$) nesteen pinnasta on täten $\rho gh + p_0$ eli staattinen paine todellakin riippuu nesteen tiheydestä ρ . Kappale on upotettuna nesteeseen ja sen syrjäyttämä alue nesteessä

¹⁶⁴Nestettä, jonka viskositeettijännitysmatriisi $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rho,\mathbf{v}}$ on tätä muotoa, sanotaan *newtonilaiseksi*. Esimerkiksi vesi ja ilma ovat newtonilaisia ‘nesteitä,’ kun taas sula metalli, ketsuppi tai sampoo eivät ole.

¹⁶⁵Paikan ja ajan suhteen, mutta voivat riippua esim. lämpötilasta

on V (V :n reuna on S). Paineen aiheuttama kokonaisvoima eli noste kappaleeseen on

$$\mathbf{g}_V^{\rho, \mathbf{v}} = - \iint_S p^\rho \mathbf{n} dS = - \iiint_V \nabla p^\rho dV = -\rho \mathbf{g} \iiint_V dV = -\mathcal{M} \mathbf{g},$$

missä \mathcal{M} on kappaleen syrjäyttämän nesteen massa.

Jos tiheys ρ on vakio (tai yleisemmin neste on kokoonpuristumatonta), niin $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ja NS yhtälön viimeinen termi häviää sekä $P^{\rho, \mathbf{v}} = p^\rho$. Tällöin tarvitaan vain yksi viskositeettikerroin η (ja täten ζ -kerroin liittyy nesteen kokoonpuristuvuuteen). Esimerkiksi (lämpötilassa 20°C yhden ilmakehän paineessa) vedelle $\eta = 0,001 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$, kun taas glyserolille $\eta = 1,5 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Jos nesteen sisäinen kitka on hyvin pieni ($\eta \approx 0 \approx \zeta$) päädytään **Eulerin yhtälöön**

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p^\rho.$$

Jos neste on pyörteetön eli $\nabla \times \mathbf{v} = \vec{0}$, niin Poincarén lemman perusteella $\mathbf{v} = \nabla \phi$, missä $\phi(t, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ on *nopeuspotentiaali*. Jos lisäksi tiheys on vakio, päädytään **Laplacen yhtälöön** $\nabla^2 \phi = 0$, sillä $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot \mathbf{v}$.

Harjoitustehtävä 60. Oletetaan, että nesteen (i) tiheys ρ on vakio, (ii) $\eta \approx 0$, (iii) neste on pyörteetön ja (iv) ulkoiset voimat ovat konservatiivisia eli $\mathbf{g}(\mathbf{v}, t, \mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$.

a) Osoita, että Eulerin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + U + p^\rho / \rho = f(t), \quad (31)$$

missä $f(t)$ on joku ajasta riippuva funktio.

b) Oletetaan lisäksi, että nesteen nopeuskenttä \mathbf{v} ei riipu ajasta eli tällöin myöskin voidaan valita ϕ ajasta riippumattomaksi. Oletetaan lisäksi, että nesteeseen vaikuttaa vain z -akselin suuntainen painovoimakenttä eli $U(z) = gz$, missä g on putoamiskiiktyvyys. Osoita, että saadaan **Bernoullin laki**

$$p^\rho + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{vakio},$$

missä $v = |\mathbf{v}|$. Eli mitä suurempi vauhti v sitä pienempi paine p^ρ .

28 FYS: Kortewegin–de Vriesin yhtälö

Tarkastellaan tässä luvussa veden pyörteetöntä virtausta matalassa kanavassa ja veden pinnalla liikkuvaa solitoniaaltoa. Voidaan olettaa, että veden tiheys on vakio, $\eta \approx 0$, virtaus on pyörteetön ja ulkoisena voimana on vain painovoima. Täten käytetään yhtälöä (31), jossa voidaan valita $f(t) \equiv 0$.¹⁶⁶ Eli siis ratkaistavana on yhtälöt

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + U + p^\rho / \rho = 0.$$

Valitaan karteellinen koordinaatisto siten, että x -akseli osoittaa kanavan suuntaan ja y -akseli on nyt *pystysuora* akseli. Olkoon origo kanavan pohjassa ja, jos vesi virtaa tasaisesti, niin veden korkeus on h (eli veden pinnalla $y = h$). Veteen vaikuttaa vain painovoima, joten $U(x, y, z) = gy$. Ajatellaan, että kanava on riittävän leveä (poikittais- eli z -suunnassa), joten kanavan reunan reunaefektejä ei tarvitse ottaa huomioon. Oletetaan, että nopeuskenttä ei riipu lainkaan z -koordinaatista eikä vesi virtaa z -suunnassa, joten ongelma on kaksiulotteinen: $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = (v^1(x, y, t), v^2(x, y, t), 0) = (\phi_x(x, y, t), \phi_y(x, y, t), 0)$, missä esim. $\phi_y := \partial \phi / \partial y$; merkitään jatkossakin osittaisderivaattoja alaindekseillä (esim. $A_{sst} := \partial^3 A / (\partial s^2 \partial t)$).¹⁶⁷

Tutkitaan sitten veden pinnalla etenevää häiriötä (aaltoa). Häiriö on muotoa

$$y = h + \eta(x, t),$$

missä $\eta(x, t)$ on veden pinnan poikkeama ‘tasapainosta’ ($y = h$) pisteessä x hetkellä t . Oletetaan, että $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta(x, t) = 0$. Kaikille funktioille $g(x, y, t)$, merkitään $g^*(x, t)$:llä funktion rajoittumaa veden pinnalle eli

$$g^*(x, t) := g(x, h + \eta(x, t), t).$$

Esimerkiksi $(v^{1*}(x, t), v^{2*}(x, t), 0)$ on veden nopeus pinnalla. Tarkastellaan veden pintaa pisteessä x ja hetkellä t . Olkoon $\theta(x, t)$ veden pinnan $y = h + \eta(x, t)$ (tangentin) ja x -akselin välinen kulma eli kulmakerroin $\tan \theta(x, t) = \eta_x(x, t)$. Tällöin

$$V(x, t) := -v^{1*}(x, t) \sin \theta(x, t) + v^{2*}(x, t) \cos \theta(x, t)$$

on veden pinnan vauhti pinnan normaalin suunnassa. Mutta toisaalta

$$V(x, t) = \eta_t(x, t) \cos \theta(x, t),$$

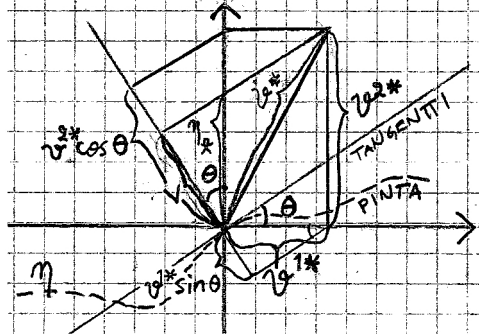
¹⁶⁶Sillä voidaan aina uudelleenmäärittää ϕ funktioksi $\phi + \int f(t)dt$. Nythän myös $\nabla(\phi + \int f(t)dt) = \nabla\phi = \mathbf{v}$.

¹⁶⁷Näihin ns. derivaattakoordinaatteihin palataan myöhemmin säikeisten monistojen yhteydessä.

joten

$$\eta_t = -v^{1*} \tan \theta + v^{2*} = \phi_y^* - \eta_x \phi_x^*, \quad (32)$$

missä esim. $\phi_y^*(x, t) = (\partial\phi/\partial y)(x, h + \eta(x, t), t)$.



Kuva 19: Tästä kuvasta nähdään välittömästi, että $-v^{1*} \sin \theta + v^{2*} \cos \theta = V = \eta_t \cos \theta$.

Nesteen pinnalla paine voidaan valita nolllaksi eli $p^{o*}(x, t) = 0$. Täten yhtälö (31) redusoituu pinnalla muotoon [!]

$$\phi_t^* + \frac{1}{2} [(\phi_x^*)^2 + (\phi_y^*)^2] + g(h + \eta) = 0.$$

Derivoidaan ylläoleva yhtälö x :n suhteen. Saadaan

$$\phi_{xt}^* + \phi_x^* \phi_{xx}^* + \phi_y^* \phi_{xy}^* + g\eta_x = 0. \quad (33)$$

Nopeuspotentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön $\nabla^2 \phi = 0$. Kehitetään ϕ muuttujan y suhteen Taylorin sarjaksi

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(x, t) y^n$$

ja sijoitetaan Laplacen yhtälöön. Saadaan *rekursiokaava* [!]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{xx}^{(n)}(x, t) y^n + \sum_{n=2}^{\infty} \phi^{(n)}(x, t) n(n-1) y^{n-2} = 0$$

eli $\phi_{xx}^{(n)}(x, t) = -\phi^{(n+2)}(x, t)(n+2)(n+1)$ kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$. Jos oletetaan, että kanavan pohja ($y = 0$) on kova, niin $\phi_y(x, 0, t) = 0$. Mutta $\phi_y(x, 0, t) = \phi^{(1)}(x, t)$ ja täten $\phi^{(2k+1)}(x, t) = 0$ kaikilla $k = 0, 1, \dots$. Rekursiokaavasta seuraa, että $\phi^{(2)} = -\phi_{xx}^{(0)}/2!$, $\phi^{(4)} = \phi_{xxxx}^{(0)}/4!$ jne. [!]

Oletetaan sitten, että häiriö on (i) matala y -suunnassa ja (ii) pitkä x -suunnassa. Valitaan sopivat (positiiviset) parametrit a ja l , joista a kuvaa aallon korkeutta eli $|\eta(x, t)| \leq a$ sekä l kuvaa aallon pituutta (eli η on 'keskittynyt' aina välille, jonka pituus on vähintään l). Näin ollen $a \ll h \ll l$ ja $\epsilon := a/h \approx 0$ sekä $\delta := h/l \approx 0$. Määritellään uudet muuttujat $X = x/l$,

$Y = y/h$ ja $T = t\sqrt{gh}/l$ sekä uudet funktiot $H := \eta/a$ ja $\Phi := \phi\sqrt{h}/(al\sqrt{g})$; kaikki funktiot voidaan nyt ilmaista uusissa koordinaateissa (X, Y, T) .

Yhtälöt (32) ja (33) näyttävät uusissa koordinaateissa seuraavilta: [!]

$$H_T + \epsilon H_X \Phi_X^* - \delta^{-2} \Phi_Y^* = 0, \quad (34)$$

$$\Phi_{XT}^* + \epsilon \Phi_X^* \Phi_{XX}^* + \epsilon \delta^{-2} \Phi_Y^* \Phi_{XY}^* + H_X = 0. \quad (35)$$

Nopeuspotentiaalin sarjakehitelmä on

$$\Phi(X, Y, T) = \Phi^{(0)}(X, T) - \frac{1}{2} \delta^2 Y^2 \Phi_{XX}^{(0)}(X, T) + \frac{1}{24} \delta^4 Y^4 \Phi_{XXXX}^{(0)}(X, T) + \dots$$

Yleisyyttä loukkaamatta¹⁶⁸ voidaan jatkossa olettaa, että $\epsilon = \delta^2$.

Pinnalla $y = h + \eta$ eli $Y = 1 + \epsilon H$, joten jos merkitään $F(X, T) := (\Phi_X^{(0)})^*(X, T)$, [!]

$$\Phi_X^* = F - \frac{1}{2} \epsilon F_{XX} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$\Phi_Y^* = -\epsilon(1 + \epsilon H)F_X + \frac{1}{6} \epsilon^2 F_{XXX} + \mathcal{O}(\epsilon^3) = -\epsilon F_X + \epsilon^2 \left(\frac{1}{6} F_{XXX} - H F_X \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Sijoitetaan ylläolevat kaavat yhtälöihin (34) ja (35). Saadaan [!]

$$\begin{aligned} & H_T + \epsilon H_X F + (1 + \epsilon H)F_X - \frac{1}{6} \epsilon F_{XXX} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= H_T + F_X + \epsilon \left(H_X F + H F_X - \frac{1}{6} F_{XXX} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} & F_T - \frac{1}{2} \epsilon F_{XXT} + \epsilon F F_X + H_X + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= F_T + H_X + \epsilon \left(F F_X - \frac{1}{2} F_{XXT} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned}$$

Koska sekä F että H ovat tuntemattomia funktioita, niin etsitään ratkaisua saattamalla ylläolevat yhtälöt samaan muotoon. Välittömästi nähdään, että kannattaa kirjoittaa

$$F = H + \epsilon \Delta + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

joka redusoi yhtälöt muotoon [!]

$$H_T + H_X + \epsilon \left(\Delta_X + H_X H + H H_X - \frac{1}{6} H_{XXX} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \quad (36)$$

$$H_T + H_X + \epsilon \left(\Delta_T + H H_X - \frac{1}{2} H_{XXT} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \quad (37)$$

¹⁶⁸Sillä määrittelemällä $\epsilon' := \max\{\epsilon, \delta^2\} \approx 0$ nähdään, että $\epsilon \leq \epsilon'$ ja $\delta^2 \leq \epsilon'$, ja voidaan uudelleenmääritellä $\epsilon := \epsilon'$ ja $\delta := \sqrt{\epsilon'}$.

Vähentämällä yhtälöt keskenään, saadaan

$$\Delta_X + 2HH_X - \frac{1}{6}H_{XXX} = \Delta_T + HH_X - \frac{1}{2}H_{XXT} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Mutta toisaalta $H_T = -H_X + \mathcal{O}(\epsilon)$, joten oletetaan, että $\Delta_T = -\Delta_X + \mathcal{O}(\epsilon)$ ja sijoitetaan kaavat ylläolevaan yhtälöön: [!]

$$\Delta_X + 2HH_X - \frac{1}{6}H_{XXX} = -\Delta_X + HH_X + \frac{1}{2}H_{XXT} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Täten

$$\Delta_X = -\frac{1}{2}HH_X + \frac{1}{3}H_{XXX} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \implies \quad \Delta = -\frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{3}H_{XX} + \mathcal{O}(\epsilon),$$

joka sijoitettuna yhtälöihin (36) ja (37) antaa kummallekin saman yhtälön [!]

$$H_T + H_X + \epsilon \left(\frac{3}{2}H_X H + \frac{1}{6}H_{XXX} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0.$$

Siirrytään sitten sellaisiin koordinaatteihin, että ylläolevan yhtälön termit ovat samaa kertalukua. Koska yhtälö sisältää termin $H_T + H_X$ on järkevää hakea koordinaatteja muodossa $\xi = X - T$ ja $\tau = \epsilon r T$, missä r on vakio. Tällöin [!]

$$H_T + H_X = -H_\xi + \epsilon r H_\tau + H_\xi = \epsilon r H_\tau.$$

Yhtälöksi tulee uusissa koordinaateissa [!]

$$\epsilon \left(r H_\tau + \frac{3}{2}H_\xi H + \frac{1}{6}H_{\xi\xi\xi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0$$

eli ensimmäisessä kertaluvussa (ϵ :in suhteen)

$$6r H_\tau + 9H_\xi H + H_{\xi\xi\xi} = 0.$$

Kun valitaan $r = 1/6$ ja $w := -\frac{3}{2}H$, niin edellinen yhtälö on **Kortewegin–de Vriesin (KdV) yhtälö**

$$\boxed{w_\tau - 6ww_\xi + w_{\xi\xi\xi} = 0.}$$

Tällä yhtälöllä on mm. *yksisolitoniratkaisu* [!]

$$w(\xi, \tau) = -\frac{c_1}{2 \cosh^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c_1} (\xi - c_1 \tau - c_2) \right]},$$

missä $c_1 \geq 0$ ja $c_2 \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Täten veden pinnan poikkeama $\eta(x, t)$ voi olla (likimäärin) muotoa

$$\eta = aH = -\frac{2a}{3}w$$

mihin sijoittamalla $\xi(x, t)$ ja $\tau(t)$ saadaan

$$\eta(x, t) = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{C}{\cosh^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{C} (x - vt - x_0) \right]},$$

missä v on solitoniaallon etenemisvauhti, $C > 0$ ja x_0 on häiriön maksimipiste hetkellä $t = 0$. Aallon η maksimikorkeus on $Ch^3/3$, joten on valittava C lähelle nollaa (matala aalto). Tällöin aalto on väistämättä hyvin pitkä.

Tällaisia veden pinnalla eteneviä matalia solitoniaaltoja on helppo muodostaa kokeellisesti sopivan mallisissa kanavissa, joissa vesi ei virtaa. Tsunamikin saattaa olla eräänlainen solitoniaalto. Solitoneilla on monia mielenkiintoisia fysikaalisia sovelluksia ja matemaattisia ominaisuuksia. **[!]** Siksi niitä tutkitaan aktiivisesti.

29 FYS: Maxwellin yhtälöt

Tarkastellaan klassista sähkömagneettista kenttää (väliaineessa) euklidisessa avaruudessa \mathbb{E}^3 karteesisessa (eli affiinissa) inertiaalikoordinaatistossa¹⁶⁹ $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ hetkellä t . Merkitään $\mathbf{x} = (ct, \mathbf{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ja kaikille funktioille lyhyesti $f(\mathbf{x}) = f((ct, \mathbf{r})) = f(t, \mathbf{r})$. Olkoon (hetkellä t pisteessä \mathbf{r})

- vektori $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E^1(t, \mathbf{r}), E^2(t, \mathbf{r}), E^3(t, \mathbf{r})) \in \mathbb{R}^3$ sähkökentän voimakkuus,
- vektori $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = (D^1(t, \mathbf{r}), D^2(t, \mathbf{r}), D^3(t, \mathbf{r})) \in \mathbb{R}^3$ sähkövuon tiheys,
- vektori $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (H^1(t, \mathbf{r}), H^2(t, \mathbf{r}), H^3(t, \mathbf{r})) \in \mathbb{R}^3$ magneettikentän voimakkuus,
- vektori $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B^1(t, \mathbf{r}), B^2(t, \mathbf{r}), B^3(t, \mathbf{r})) \in \mathbb{R}^3$ magneettivuon tiheys,
- skalaari $\rho(\mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ vapaitten varausten tiheys,
- vektori $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = (j^1(t, \mathbf{r}), j^2(t, \mathbf{r}), j^3(t, \mathbf{r})) \in \mathbb{R}^3$ (sähkö)virran tiheys (tai virtatiheys),¹⁷⁰
- 3×3 -reaalimatriisi $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = (\varepsilon^k_l(t, \mathbf{r}))_{k,l=1}^3$ (väliaineen sähköinen) permittiivisyysmatriisi tai -tensori,
- 3×3 -reaalimatriisi $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = (\mu^k_l(t, \mathbf{r}))_{k,l=1}^3$ (väliaineen magneettinen) permeabiliteettimatriisi tai -tensori,
- 3×3 -reaalimatriisi $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (\sigma^k_l(t, \mathbf{r}))_{k,l=1}^3$ (väliaineen) johtavuusmatriisi tai -tensori.

Maxwellin (differentiaali)yhtälöt:

1. Gaussin laki sähkökentälle on

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{tai pitemmin merkittynä} \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial D^i(t, \mathbf{r})}{\partial x^i} = \rho(t, \mathbf{r}) \quad \text{tai} \quad \partial_i D^i = \rho.$$

2. Gaussin laki magneettikentälle on $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ eli magneettikentän oletetaan olevan lähteetön ('magneettisia varauksia' eli magneettisia monopoleja ei ole havaittu).

¹⁶⁹Väliaine on levossa inertiaalikoordinaatistossa, mutta vapait varaukset voivat liikkua.

¹⁷⁰Usein $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, missä $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ on vapaitten varausten keskimääräinen nopeus hetkellä t pisteessä \mathbf{r} . Yhden varatun hiukkasen liikkeessä $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ formaalisti $\rho(t, \mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ ja $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) d\mathbf{r}(t)/dt$, missä q on hiukkasen varaus ja δ on 'Diracin delta' (distribuutio) eli $\iint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = f(0, 0, 0)$.

3. Faradayn laki (sähkömagneettinen induktio) on

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

4. Ampèren-Ørstedin-Maxwellin laki on

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

missä $\partial \mathbf{D} / \partial t$ on (Maxwellin) kentänmuutosvirta(tiheys).

Maxwellin (integraali)yhtälöt:¹⁷¹

Alla $V \subset \mathbb{R}^3$ on (riittävän säännöllinen) 3-ulotteinen rajoitettu alue, $S = \partial V$ sen suljettu reunapinta ja $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ pinnan ulospäin osoittava yksikkönormaalivektori pisteessä $\mathbf{r} \in S$. Samoin $S' \subset \mathbb{R}^3$ on rajoitettu (muttei välttämättä suljettu) pinta ja $C = \partial S'$ sen (oikeakätisesti kiertävä) suljettu reunakäyrä.

1. Gaussin laki sähkökentälle on

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \rho dV = Q,$$

missä ensimmäinen pintaintegraali on sähkökentän vuo (eli sähkövuo) suljetun pinnan S läpi ja Q on kokonaisvaraus alueessa V (kumpikin voi riippua ajasta t , sillä esimerkiksi $Q(t) = \iiint_V \rho(t, x, y, z) dx dy dz$).

2. Gaussin laki magneettikentälle on $\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ eli magneettikentän vuo (eli magneettivuon) suljetun pinnan S läpi on aina nolla (siksi \mathbf{B} :n 'kenttäviivat' ovat suljettuja lenkkejä).

3. Faradayn laki (sähkömagneettinen induktio) on

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

eli sähkömotorinen 'voima' $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ lenkissä C (esim. sähköjohto) aiheutuu magneettivuon muutoksesta ja kääntäen.

4. Ampèren-Ørstedin-Maxwellin laki on

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \iint_{S'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S'} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

missä $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$ on magnetomotorinen 'voima' lenkissä C .

¹⁷¹Nämä ovat kokeelliset yhtälöt ja pätevät myös epäjatkuville kentille, sillä integraalit ovat silloinkin määriteltyt.

29.1 Kenttien väliset yhteydet

Skalaarikenttä ρ ja vektorikenttä \mathbf{j} kuvaavat vapaita varauksia, jotka voidaan yhtäältä nähdä aktiivisina sähkömagneettisen kentän ‘lähteinä’ tai sitten toisaalta passiivisina varauksina, jotka liikkuvat sähkömagneettisessa kentässä.¹⁷² Sähkömagneettisen kentän kuvaamiseen tarvitaan neljä vektorikenttää: \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} ja \mathbf{B} . Linearisessa sähködynamiikassa¹⁷³ oletetaan, että tyhjiössä tarvitaan vain kaksi kenttää, joista toinen kuvaa sähkökenttää ja toinen magneettikenttää. Nimittäin ‘tyhjiössä’ (siis ei väliainetta, mutta mahdollisesti liikkuvia varauksia)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

missä ε_0 on tyhjiön permittiivisyys(vakio) ja μ_0 on tyhjiön permeabiliteetti(vakio). Valon nopeus tyhjiössä on $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, joka on kiinnitetty sekunnin ja metrin määritelmien nojalla.

Harjoitustehtävä 61. *Osoita, että tyhjiössä¹⁷⁴ Maxwellin yhtälöt ovat muotoa*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Oletetaan sitten, että $\rho = 0$ ja $\mathbf{j} = \vec{0}$. Sijoita yhtälöön tasoalto $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, missä $\omega \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{E}_0, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ ovat vakioita (ja vastaava ratkaisu \mathbf{B} :lle). Mitä vakiot kuvaavat? Minkä luonnonilmiön (alkeismallin) saat kaivettua esille ratkaisusta?

Kun varattu hiukkanen liikkuu sähkömagneettisessa kentässä, siihen vaikuttaa *Lorentzin voima*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = q \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}),$$

missä q on hiukkasen varaus (sekä \mathbf{r} ja \mathbf{v} ovat hiukkasen paikka ja nopeus hetkellä t). Tästä nähdään, että sähkökenttää kannattaa kuvata sähkökentän *voimakkuuden* \mathbf{E} avulla ja magneettikenttää magneettivuon *tiheyden* avulla \mathbf{B} . Itseasiassa $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ voidaan (ainakin teoriassa) mitata laittamalla levossa oleva testihiukkanen ($q \approx 0$) pisteeseen \mathbf{r} hetkellä t ja mittaamalla sen kiihtyvyyden. Kun \mathbf{E} tunnetaan, niin \mathbf{B} voidaan määrätä tutkimalla liikkuvia testihiukkasia. Selvästikin kentän voimakkuus on matemaattisesti erilainen suure kuin vuon tiheys. Esim. \mathbf{E} on olennaisesti voima (eli 1-muoto), mutta vuon tiheyttä \mathbf{B} integroidaan pinnan yli (2-muoto).

¹⁷²Vertaa Newtonin gravitaation tapauksessa aktiiviseen ja passiiviseen gravitaatiomassaan (jotka ovat lukuarvoltaan samat kullekin kappaleelle, mutta niiden tulkinta on eri).

¹⁷³Epälinearisessa sähködynamiikassa tarvitaan neljä kenttää myös tyhjiössä.

¹⁷⁴Itseasiassa nämä yhtälöt pätevät myös väliaineessa, kun ajatellaan ρ :n ja \mathbf{j} :n sisältävän **myös sidotut varaukset**, jotka yleensä ‘sisällytetään’ kenttiin \mathbf{D} ja \mathbf{H} .

Kun väliaine 'laitetaan' sähkökenttään \mathbf{E} , se polarisoituu eli *sidotut varaukset*¹⁷⁵ siirtyvät hieman pois paikoiltaan. Mitä suurempi kenttä \mathbf{E} sitä suurempi siirtymä. Tätä siirtymää kuvataan (sähkö)polarisaatiovektori(kentän) \mathbf{P} avulla, joka siis riippuu \mathbf{E} :stä ja mahdollisesti myös \mathbf{B} :stä. Nyt sähkövuon tiheys $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$. Vastaavasti, jos väliaine laitetaan magneettikenttään \mathbf{B} , niin se magnetisoituu. Jos \mathbf{M} on kyseinen magnetisaatio (vektorikenttä), niin $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ eli $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Monissa tapauksissa väliaine on lineaarista, jossa polarisaatiota ja magnetisaatiota voidaan kuvata (pisteittäisen) lineaarimuunnoksen eli matriisin avulla seuraavien yksinkertaisten lineaarisen materian yhtälöitten avulla.

Lineaarisen materian yhtälöt:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{j}},$$

missä viimeinen yhtälö on *Ohmin laki*.¹⁷⁶ Se sisältää johtavuusvirran $\sigma\mathbf{E}$, joka aiheutuu siitä, että sähkökenttä \mathbf{E} siirtää vapaita varauksia väliaineessa aiheuttaen sähkövirran. Virtatiheys $\tilde{\mathbf{j}}$ kuvaa muita (sähkökentästä riippumattomia) virtoja, jota voivat aiheutua esim. aineen lämpötilan tai varaustiheyden muutoksista. Erityisen yksinkertainen aine on sekä lineaarinen että isotrooppinen. Tällöin $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{1}$, $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})\mathbf{1}$ ja $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{1}$, missä $\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ on väliaineen permittiivisyys, $\mu(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ on väliaineen permeabiliteetti ja $\sigma(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ on johtavuus pisteessä \mathbf{r} hetkellä t , kun $\mathbf{x} = (ct, \mathbf{r})$. Tällöin $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ja $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{j}}$ eli esim. \mathbf{D} ja polarisaatio \mathbf{P} ovat samansuuntaisia \mathbf{E} :n kanssa joka pisteessä kaikilla hetkillä. Jos vielä lisäksi ε , μ ja σ ovat vakioita, niin aine on myös homogeenistä. Esim. jos $\mu > \mu_0$, niin aine on paramagneettista, ja jos $\mu < \mu_0$, niin aine on diamagneettista. Toisaalta esim. ferromagneettisten aineen teoriassa tarvitaan sitten jo kvanttimekaniikkaa ja spinin käsitettä. Tarkastelu on vähintäänkin semiklassinen.

Lineaarisen materian yhtälöistä nähdään, että kentät $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ ja $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ riippuvat vain kenttien $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ ja $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ arvoista *samalla hetkellä* t eikä niiden aikaisemmista arvoista. Yleisemmin kenttien välisillä yhteyksillä on *muistiominaisuus* eli \mathbf{D} ja \mathbf{B} kentät riippuvat myös kenttien \mathbf{E} ja \mathbf{H} *aikaisemmista* arvoista: esim.

$$D^k(t, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 E^k(t, \mathbf{r}) + \sum_{l=1}^3 \int_0^\infty e^{k_l(t')} E^l(t - t') dt'.$$

¹⁷⁵Sidotut varaukset eivät pääse 'vapaasti' liikkumaan aineessa. Esim. atomin alemmilla 'elektronikuorilla' olevat varaukset saattavat olla sidottuja (pysyvät ytimen lähistöllä), mutta ylempien kuorien (johtavuus)elektronit pääsevät hyppimään atomista toiseen eli ovat vapaita. Jos aineessa on vain sidottuja varauksia, niin se on eriste. Jos siinä on (myös) vapaita varauksia, niin se on johde.

¹⁷⁶Pitemmin kirjoitettuna esim. $j^k(t, \mathbf{r}) = \sum_{l=1}^3 \sigma^k_l(t, \mathbf{r}) E^l(t, \mathbf{r}) + \tilde{j}^k(t, \mathbf{r})$ kaikilla $k = 1, 2, 3$.

Muita tuloksia

Vastaavasti kuin klassisessa mekaniikassa ja nestedynamiikassa oletetaan massan säilymlaki, niin sähködynamiikassa (myös) varaus säilyy. Se voidaan kirjoittaa samalla tavalla: kokonaisvarauksen $Q(t)$ muutos alueessa V aiheutuu varauksen siirtymisestä alueeseen tai pois siitä eli

$$\frac{dQ}{dt} = - \iint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

tai jatkuvuusyhtälönä

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Myös kokonaisenergia säilyy. Tähän palaamme myöhemmin.

Lopuksi palautetaan mieleen, että magneettikentällä \mathbf{B} on vektoripotentiaali \mathbf{A} ja sähkökentällä \mathbf{E} on skalaaripotentiaali ϕ eli

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Nämäkin tulokset johdetaan myöhemmin.

29.2 Maxwellin ja NS yhtälöitten matemaattinen yhteys

Kuten ollaan nähty, nesteen Navierin-Stokesin (NS) yhtälö

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p^\rho + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

redusoituu Eulerin yhtälöksi

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p$$

mikäli nesteen sisäinen kitka on hyvin pieni ($\eta \approx 0 \approx \zeta$) ja tiheys ρ on vakio (josta seuraa $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ja voidaan merkitä $p^\rho = p$). Näin on esim. vedelle. Oletetaan lisäksi, että ulkoiset voimat ovat konservatiivisia eli $\mathbf{g} = -\nabla U$ (esim. painovoima).

Harjoitustehtävä 62. a) Osoita, että yllä olevin oletuksin NS yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\ell} - \nabla \Phi, \tag{38}$$

missä $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{v}$ kuvaa nesteen pyörteisyyttä, $\boldsymbol{\ell} := \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ on ns. Lambin vektori(kenttä) ja

$$\Phi := \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho} + U$$

on ns. skalaaripotentialiaali. Vinkki: $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(|\mathbf{v}|^2/2) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$.

b) Ota divergenssi $\nabla \cdot$ yhtälön (38) kummaltakin puolelta ja osoita, että ‘nestedynaaminen varaustiheys’

$$\xi := -\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \boldsymbol{\ell}.$$

Vinkki: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

c) Ota roottori $\nabla \times$ yhtälön (38) kummaltakin puolelta ja osoita, että

$$\nabla \times \boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}.$$

d) Totea, että $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$.

Kun määritellään vielä $\alpha := 1/|\mathbf{v}|^2$ ja ‘nestedynaaminen virtatiheys’

$$\mathbf{s} := |\boldsymbol{\omega}|^2\mathbf{v} - (\nabla^2\Phi)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \nabla(|\mathbf{v}|^2/2 - \Phi) - \mathbf{v} \times \nabla(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}) + 2\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}],$$

niin NS yhtälö muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\ell} &= \xi, & \nabla \times \boldsymbol{\ell} &= -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} &= 0, & \nabla \times \boldsymbol{\omega} &= \alpha \mathbf{s} + \alpha \frac{\partial \boldsymbol{\ell}}{\partial t}, \end{aligned}$$

joka muistuttaa jossain määrin Maxwellin yhtälöitä (korvaa $\boldsymbol{\ell}$ \mathbf{E} :llä ja $\boldsymbol{\omega}$ \mathbf{B} :llä). Lisäksi

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\ell} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

eli \mathbf{v} :ta vastaa \mathbf{A} ja Φ :tä ϕ .¹⁷⁷ Nestedynamiikassa vektoripotentialiaali \mathbf{v} (ja paine p) pyritään ratkaisemaan NS yhtälöstä, kun nesteen tiheys on vakio. Samoin tullaan osoittamaan, että \mathbf{A} ja ϕ ovat ensisijaiset kentät, jotka pyritään ratkaisemaan Maxwellin yhtälöistä.

Vaikkakin NS yhtälö muistuttaa Maxwellin yhtälöitä, niin yhteys on enimmäkseen matemaattinen vailla sen kummempaa fysikaalista merkitystä (mutta NS ratkaisuja voidaan käyttää ratkaistaessa sähkömagneettisia yhtälöitä ja kääntäen). Esimerkiksi turbulenssia ei esiinny sähkömagnetismissa ja toisaalta, jos vektoripotentialiaali \mathbf{v} ei riipu paikasta, niin sekä ‘magneettikenttä’ $\boldsymbol{\omega}$ että ‘sähkökenttä’ $\boldsymbol{\ell}$ häviävät (näin ei käy sähkömagnetismissa). Toisaalta, jos $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$, niin saadaan ‘sähköstaattinen’ tilanne $\boldsymbol{\ell} = -\nabla\Phi$. Huomaa vielä, että veden virtauksessa on vain yhdenlaisia liikkuvia hiukkasia (vesimolekyylit), kun taas sähkövirran tapauksessa varattuja hiukkasia voi olla sekä positiivisia että negatiivisia (kulkevat vastakkaisiin suuntiin).

¹⁷⁷Vastaavasti kuin sähkömagnetismissa voidaan muodostaa nelipotentialiaali $(\Phi/c, \mathbf{v})$ ja nelivirta $(c\xi, \mathbf{s})$. Myös voidaan muodostaa kenttätensori F ja Lagrangen tiheys käyttäen nelipotentialiaalia.

30 GEOM: Hodgen \star -operaattori ja kodifferentiaali δ

Kaikkialla tässä luvussa oletetaan, että M on n -ulotteinen monisto ja $\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sen (mielivaltainen) kartta.

30.1 Tensoritulo, kontraktio, alennus ja ylennys

Olkoon T ja S tyyppin (k, l) ja (s, u) tensori(kentät) M :llä eli lokaalisti

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_l}} T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{i_k}} \otimes dq^{j_1} \otimes \dots \otimes dq^{j_l}$$

ja

$$S = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_s \\ b_1, \dots, b_u}} S_{b_1, \dots, b_u}^{a_1, \dots, a_s} \frac{\partial}{\partial q^{a_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{a_s}} \otimes dq^{b_1} \otimes \dots \otimes dq^{b_u}.$$

Voidaan määritellä *tensoreitten* T ja S *tensoritulo* $T \otimes S$ tyyppin $(k + s, l + u)$ tensorikenttänä (karttariippumattomalla) kaavalla [!]

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_{k+s} \\ j_1, \dots, j_{l+u}}} T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} S_{b_1, \dots, b_u}^{a_1, \dots, a_s} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{i_k}} \otimes \frac{\partial}{\partial q^{a_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{a_s}} \otimes dq^{j_1} \otimes \dots \otimes dq^{j_l} \otimes dq^{b_1} \otimes \dots \otimes dq^{b_u}.$$

Huomaa, että yleensä $T \otimes S \neq S \otimes T$ ja 0-muodolle (eli skalaarikentälle) $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään $f \otimes T = fT$, missä $(fT)|_{\mathbf{m}} = f(\mathbf{m})T|_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in M$.

Tensorin T a :n yläindeksin ja b :n alaindeksin *kontraktio* on tyyppin $(k-1, l-1)$ -tensori $C_b^a T$, jonka komponentit ovat (mielivaltaisessa kartassa \mathbf{q}) [!]

$$(C_b^a T)_{j_1, \dots, j_{b-1}, j_{b+1}, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_{a-1}, i_{a+1}, \dots, i_k} = \sum_{p=1}^n T_{j_1, \dots, j_{b-1}, p, j_{b+1}, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_{a-1}, p, i_{a+1}, \dots, i_k}.$$

Esimerkiksi, jos

$$T = \sum_{\substack{i_1, i_2 \\ j}} T_j^{i_1, i_2} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial q^{i_2}} \otimes dq^j$$

niin

$$C_1^2 T = \sum_{i_1=1}^n \sum_{p=1}^n T_p^{i_1, p} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}}.$$

Mikä on tällöin $C_1^1 T$? [!] Huomaa, että jos T on tyyppiä $(1, 1)$ eli

$$T = \sum_{i, j=1}^n T_j^i \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dq^j,$$

niin $C_1^1 T$ on skalaarikenttä $\sum_{p=1}^n T_p^p$ (matriisin jälki). Huomaa, että kontraktio on määritelty aina yhden yläindeksin ja yhden alaindeksin suhteen. **Jos** M :llä on määritelty (pseudo)metriikka

g , niin kontraktio voidaan yleistää myös kahden ylä- (tai ala-)indeksin yli laskemalla (tai nostamalla) ensin toista indeksiä metriikan g avulla. Tarkastellaan seuraavassa miten tensorin indeksejä lasketaan tai nostetaan (alennus ja ylennys).

Tensorin T a :nneen yläindeksin lasku b :nneksi alaindeksiksi on tyyppin $(k-1, l+1)$ tensori $\downarrow_b^a T$, jonka (karttariippumattomat) **[!]** komponentit ovat

$$\left(\downarrow_b^a T\right)_{j_1, \dots, j_{l+1}}^{i_1, \dots, i_{k-1}} = \sum_{p=1}^n g_{j_b, p} T_{j_1, \dots, j_{b-1}, j_{b+1}, \dots, j_{l+1}}^{i_1, \dots, i_{a-1}, p, i_a, \dots, i_{k-1}}.$$

Vastaavasti a :nneen alaindeksin nosto b :nneksi yläindeksiksi on tyyppin $(k+1, l-1)$ tensori $\uparrow_a^b T$, jolle

$$\left(\uparrow_a^b T\right)_{j_1, \dots, j_{l-1}}^{i_1, \dots, i_{k+1}} = \sum_{p=1}^n g^{i_b, p} T_{j_1, \dots, j_{a-1}, p, j_a, \dots, j_{l-1}}^{i_1, \dots, i_{b-1}, i_{b+1}, \dots, i_{k+1}}.$$

Esimerkiksi tensorille

$$T = T_j^{i_1, i_2} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial q^{i_2}} \otimes dq^j$$

saadaan (käyttäen Einsteinin summaussääntöä)

$$\begin{aligned} \downarrow_1^1 T &= g_{j_1, p} T_{j_2}^{p, i_1} \partial_{i_1} \otimes dq^{j_1} \otimes dq^{j_2}, & \downarrow_1^2 T &= g_{j_1, p} T_{j_2}^{i_1, p} \partial_{i_1} \otimes dq^{j_1} \otimes dq^{j_2}, \\ \downarrow_2^1 T &= g_{j_2, p} T_{j_1}^{p, i_1} \partial_{i_1} \otimes dq^{j_1} \otimes dq^{j_2}, & \downarrow_2^2 T &= g_{j_2, p} T_{j_1}^{i_1, p} \partial_{i_1} \otimes dq^{j_1} \otimes dq^{j_2}, \\ \uparrow_1^2 T &= g^{i_2, p} T_p^{i_1, i_3} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \partial_{i_3}, & \uparrow_1^3 T &= g^{i_3, p} T_p^{i_1, i_2} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \partial_{i_3} \end{aligned}$$

(laske **[!]** vielä $\uparrow_1^1 T$). Operaatioita voi myös yhdistää mielivaltaisesti:

$$C_2^1(\downarrow_1^2 T) = g_{j_1, p} T_m^{m, p} dq^{j_1}, \quad C_1^1(\downarrow_1^2 T) = g_{m, p} T_{j_2}^{m, p} dq^{j_2}, \quad \downarrow_1^2 \uparrow_1^3 T = g_{j_1, m} g^{i_2, p} T_p^{i_1, m} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes dq^{j_1}.$$

Huomaa, että useimmiten jätetään nuolet \uparrow ym. merkinnät merkitsemättä tensoreitten komponenteihin. Esim yllä voidaan merkitä tensorin $\downarrow_1^2 \uparrow_1^3 T$ komponentteja lyhyesti $T_{j_1}^{i_1, i_2} = g_{j_1, m} g^{i_2, p} T_p^{i_1, m}$.

30.2 Differentiaalimuotojen \star -operaattori ja kodifferentiaali

Koska M on n -ulotteinen, niin mielivaltainen n -muoto ω on aina lokaalisti muotoa

$$\omega = \omega_{1,2,\dots,n} d^n \mathbf{q}, \quad d^n \mathbf{q} := dq^1 \wedge dq^2 \wedge \dots \wedge dq^n = \epsilon_{j_1, j_2, \dots, j_n} dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \otimes \dots \otimes dq^{j_n},$$

missä $\omega_{1,2,\dots,n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ on (sileä) funktio ja $\epsilon_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ on Levin-Civitan (permutaatio)symboli.¹⁷⁸

Moniston M sanotaan olevan *suunnistuva*, *suunnistettu* tai *orientoituva*, jos on olemassa sen

¹⁷⁸Eli $\epsilon_{12\dots n} = 1$ ja kahden indeksin vaihto muuttaa aina etumerkkiä. Huom! Esim. Minkowskin avaruudessa $\epsilon_{0123} = 1$ eli 0-indeksi on käytössä.

n -muoto ω , joka on nollasta eriävä joka pisteessä eli $\omega|_{\mathbf{m}} \neq 0$ kaikilla $\mathbf{m} \in M$. Kyseinen ehto näyttää kartassa \mathbf{q} seuraavalta: $\omega_{1,2,\dots,n}(\mathbf{m}) \neq 0$ kaikilla $\mathbf{m} \in U$. Kaksi pisteittäin nollasta eriävää n -muotoa ω ja ν ovat ekvivalentit, jos on olemassa M :n positiivinen funktio f (eli $f(\mathbf{m}) > 0$ kaikilla $\mathbf{m} \in M$) siten, että $\nu = f\omega$. Näin saatua ekvivalenssiluokkaa $[\omega]$ sanotaan M :n *orientaatioksi*. Jatkossa oletetaan, että M on suunnistuva ja yhtenäinen (eli ei voida esittää erillisten avoimien joukkojen unionina). Tällöin orientaatioita on vain kaksi $[\omega]$ ja $[-\omega]$, joista jompi kumpi pitää *valita* esim. tilavuusmuotoa määriteltäessä.

Esimerkki 69. Affiini avaruus \mathbb{A}^n (esim. euklidinen avaruus tai Minkowskin avaruus) on suunnistuva. Olkoon $\mathbf{x} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ affiini kartta. Nyt orientaatioita on kaksi $[d^n \mathbf{x}]$ ja $[-d^n \mathbf{x}]$, missä siis $d^n \mathbf{x} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$. Kaikki 1-ulotteiset monistot ovat suunnistuvia, mutta on olemassa 2-ulotteinen monisto, joka ei ole suunnistuva (Möbiuksen nauha, jolla on vain yksi pinta ja yksi reuna). [!]

Orientaatio $[\omega]$ määrää M :n ‘oikeakätisen’ kartaston $\mathcal{A}_{[\omega]}$, joka koostuu (kaikista) kartoista \mathbf{q} , joissa ilmaistuna ω :n komponenttifunktiot $\omega_{1,2,\dots,n}$ ovat positiivisia. Kartoille $\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\tilde{\mathbf{q}} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, voidaan määritellä (kartan vaihdon) Jacobin matriisin determinantti(funktio)¹⁷⁹

$$\frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} := \begin{vmatrix} \partial\tilde{q}^1/\partial q^1 & \dots & \partial\tilde{q}^1/\partial q^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial\tilde{q}^n/\partial q^1 & \dots & \partial\tilde{q}^n/\partial q^n \end{vmatrix} = \epsilon_{j_1, j_2, \dots, j_n} \frac{\partial\tilde{q}^1}{\partial q^{j_1}} \frac{\partial\tilde{q}^2}{\partial q^{j_2}} \dots \frac{\partial\tilde{q}^n}{\partial q^{j_n}},$$

joka on positiivinen funktio mikäli $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{A}_{[\omega]}$. Huomaa, että

$$d^n \tilde{\mathbf{q}} = d\tilde{q}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{q}^n = \frac{\partial\tilde{q}^1}{\partial q^{j_1}} \dots \frac{\partial\tilde{q}^n}{\partial q^{j_n}} \underbrace{dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_n}}_{= \epsilon_{j_1, \dots, j_n} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n} = \frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} d^n \mathbf{q}.$$

Jos M :llä on (pseudo)metriikka $g = g_{ij} dq^i \otimes dq^j$, niin merkitään (kartassa \mathbf{q} määritellyn) matriisin (g_{ij}) determinantin *itseisarvoa* symbolilla $|g|_{\mathbf{q}}$ eli saadaan kuvaus $U \ni \mathbf{m} \mapsto |g|_{\mathbf{q}}(\mathbf{m}) = |\det(g_{ij}(\mathbf{m}))| > 0$. Nyt voidaan määritellä orientaatioon $[\omega]$ ja (pseudo)metriikkaan g liittyvä (pseudo)tilavuusmuoto n -muotona

$$\text{vol} \equiv \text{vol}^{[\omega], g} := \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} d^n \mathbf{q}$$

kaikilla kartoilla $\mathbf{q} \in \mathcal{A}_{[\omega]}$.¹⁸⁰ Lisäksi nähdään, että jos $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{A}_{[\omega]}$, niin

$$g_{ij} = \frac{\partial\tilde{q}^k}{\partial q^i} \tilde{g}_{kl} \frac{\partial\tilde{q}^l}{\partial q^j} \quad (\text{kolmen matriisin tulo})$$

¹⁷⁹Jonka arvo lasketaan pisteissä $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{m})$, $\mathbf{m} \in U \cap \tilde{U}$, joissa siis osittaisderivaavat ovat määritelty.

¹⁸⁰Jos $\mathbf{q} \in \mathcal{A}_{[\omega]}$ on (skaalattu) Riemannin normaalikoodinaatisto pisteessä \mathbf{m} , niin $\text{vol}|_{\mathbf{m}} = d^n \mathbf{q}|_{\mathbf{m}}$.

ja täten (käyttämällä kaavaa $\det(\mathbf{MN} \dots) = \det(\mathbf{M}) \det(\mathbf{N}) \dots$)

$$\det(g_{ij}) = \left[\frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} \right]^2 \det(\tilde{g}_{kl})$$

osoittaen, että

$$\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} d^n \tilde{\mathbf{q}} = \sqrt{|\det(\tilde{g}_{kl})|} \frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} d^n \mathbf{q} = \sqrt{|\det(g_{ij})|} \left| \frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} \right|^{-1} \frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} d^n \mathbf{q} = \text{vol}.$$

Huomaa, että jos $\mathbf{q} \notin \mathcal{A}_{[\omega]}$, niin $\text{vol}^{[\omega],g} = -\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} d^n \mathbf{q}$. Lisäksi nähdään, että $\text{vol} = \text{vol}^{[\omega],g} \in [\omega]$ eli $[\omega] = [\text{vol}]$ ja $\text{vol}^{[-\omega],g} = -\text{vol}^{[\omega],g} = -\text{vol}$.

Harjoitustehtävä 63. *Olkoon (M, g) kaksiulotteinen suunnistuva semi-Riemannin monisto ja $(q^1, q^2) = (u, v)$ sen joku kartta. Merkitään tässä kartassa $E := g_{11}$, $F := g_{12}$ ja $G := g_{22}$. Laske M :n tilavuusmuoto. Laske erikoistapauksena R -säteisen pallon pinnan ‘tilavuusmuoto’ eli pinta-ala 2-muoto (kun pallon pinta perii \mathbb{R}^3 :n euklidisen metriikan).*

Vinkki: pallokoordinaatit.

Moniston M k -muodot muodostavat lineaariavaruuden $\Omega^k(M)$ ja ulkoinen derivaatta $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ eli *differentiaali* on lineaarikuvaus.¹⁸¹ Jos (M, g) on semi-Riemannin monisto, niin (psedo)metriikka g voidaan ‘laajentaa’ avaruuteen $\Omega^k(M)$ bilineaarisesti kuvaukseksi

$$\bar{g} : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^0(M)$$

kaavalla (mielivaltaisessa $[\!|$] kartassa \mathbf{q} ilmaistuna)

$$\bar{g}(\sigma, \nu) := \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} g^{i_1, j_1} \dots g^{i_k, j_k} \sigma_{i_1, \dots, i_k} \nu_{j_1, \dots, j_k} = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \sigma_{i_1, \dots, i_k} \nu^{i_1, \dots, i_k},$$

missä $\nu^{i_1, \dots, i_k} = g^{i_1, j_1} \dots g^{i_k, j_k} \nu_{j_1, \dots, j_k}$ (ovat tensorin $\uparrow_1^1 \uparrow_2^2 \dots \uparrow_k^k$ ν komponentit). Erityisesti jos $k = 1$, niin $\bar{g} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^0(M)$ on g :n käänteistensori (kenttä) g^{-1} , ja jos $k = 0$, niin $\bar{g}(f, g) := fg$, missä f ja g ovat 0-muotoja eli funktioita $M \rightarrow \mathbb{R}$.¹⁸²

Jos $[\omega]$ on semi-Riemannin moniston (M, g) orientaatio ja $\text{vol} = \text{vol}^{[\omega],g}$ tilavuusmuoto, niin voidaan määritellä lineaarinen *Hodgen \star -operaattori* $\star : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ kaavalla $[\!|$]

$$\star \nu := \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{s_1, \dots, s_{n-k}} \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} \nu^{i_1, \dots, i_k} \epsilon_{i_1, \dots, i_k, s_1, \dots, s_{n-k}} \right) dq^{s_1} \wedge \dots \wedge dq^{s_{n-k}}$$

¹⁸¹Huomaa, että $\Omega^k(M) = \{0\}$, jos $k > n$.

¹⁸²Itseasiassa $\Omega^k(M)$ on (funktio)algebran $\Omega^0(M)$ moduli ja \bar{g} on eräänlainen sisätulo eli tavanomaisen pistetulon yleistys.

kaikilla $\mathbf{q} \in \mathcal{A}_{[\text{vol}]}$. Hodgen \star riippuu siis orientaatiosta $[\text{vol}]$. Toinen orientaatio $[-\text{vol}]$ antaa vastakkaismerkkisen $\star\nu$:n. Hodgen \star -operaattori voitaisiin myös määritellä siten, että $\star\nu$ toteuttaa yhtälön

$$\sigma \wedge (\star\nu) = \bar{g}(\sigma, \nu) \text{ vol} \quad \text{kaikilla } \sigma \in \Omega^k(M),$$

sillä (kartassa $\mathbf{q} \in \mathcal{A}_{[\text{vol}]}$)

$$\begin{aligned} \sigma \wedge (\star\nu) &= \frac{\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}}{k!(n-k)!} \nu^{i_1, \dots, i_k} \epsilon_{i_1, \dots, i_k, s_1, \dots, s_{n-k}} \frac{1}{k!} \sigma_{a_1, \dots, a_k} dq^{a_1} \wedge \dots \wedge dq^{a_k} \wedge dq^{s_1} \wedge \dots \wedge dq^{s_{n-k}} \\ &= \frac{1}{k!} \sigma_{a_1, \dots, a_k} \nu^{i_1, \dots, i_k} \frac{1}{k!(n-k)!} \underbrace{\epsilon_{i_1, \dots, i_k, s_1, \dots, s_{n-k}} \epsilon_{a_1, \dots, a_k, s_1, \dots, s_{n-k}}}_{= (n-k)! (\delta_{i_1}^{a_1} \dots \delta_{i_k}^{a_k} - \delta_{i_1}^{a_2} \dots \delta_{i_k}^{a_k} + \dots)} \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} d^n \mathbf{q} = \bar{g}(\sigma, \nu) \text{ vol}. \end{aligned}$$

Erityisesti k -muodolle ν saadaan $\star(\star\nu) = \text{sgn}(g)(-1)^{k(n-k)}\nu$ ja lisäksi 0-muodolle $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\star f = f \text{ vol}$ sekä $\star(f \text{ vol}) = \text{sgn}(g)f$, missä $\text{sgn}(g) = \pm 1$ on matriisin $(g_{ij}(\mathbf{m}))$ determinantin etumerkki (joka on sama kaikissa kartoissa $\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja kaikissa pisteissä $\mathbf{m} \in U$, sillä M oletetaan olevan yhtenäinen). [!] Esimerkiksi euklidiselle avaruuden \mathbb{E}^n metriikalle $\text{sgn}(g) = 1$, mutta Minkowskin avaruuden \mathbb{M}^n metriikalle $\text{sgn}(g) = -1$.

Hodgen \star :n avulla voidaan määritellä vielä (lineaarinen) *kodifferentiaali*

$$\delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M), \quad \delta := \text{sgn}(g) (-1)^{nk+n+1} \star d \star = \text{sgn}(g) \begin{cases} -\star d \star, & n \text{ on parillinen,} \\ (-1)^k \star d \star, & n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Lisäksi 0-muodolle $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään $\delta f := 0$. Helposti nähdään, että $\delta^2 = 0$. Jos orientaatiota vaihdetaan $[\text{vol}]$:sta $[-\text{vol}]$:ksi, niin \star muuttuu $-\star$:ksi, mutta δ ei muutu eli δ ei riipu orientaatiosta.

Esimerkki 70. Olkoon \mathbf{x} affiinin avaruuden \mathbb{A}^n affiini kartta ja $[d^n \mathbf{x}]$ sen orientaatio. Varus-tetaan \mathbb{A}^n pseudometriikalla g , jonka matriisialkiot (kartassa \mathbf{x}) ovat (vakioita) $g_{ij} = \pm \delta_{ij}$. Suoralla laskulla nähdään, [!] että tällöin

$$\delta \nu = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{j_1, \dots, j_{k-1}} \left(\sum_i \frac{\partial \nu_{j_1, \dots, j_{k-1}}^i}{\partial x^i} \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}},$$

missä $\nu_{j_1, \dots, j_{k-1}}^i = g^{i, j_k} \nu_{j_1, \dots, j_k} = \pm \nu_{j_1, \dots, j_{k-1}, i}$ (ovat tensorin $\uparrow_k^k \nu$ komponentit).

Harjoitustehtävä 64. a) Osoita, että $\delta(\delta \nu) = 0$ eli lyhyesti $\delta^2 = 0$.

b) Olkoon (x, y, z) euklidisen avaruuden \mathbb{E}^3 affiini kartta, $[dx \wedge dy \wedge dz]$ sen orientaatio, $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ euklidinen metriikka ja $f, f_i : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ funktioita.

Merkitään $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Osoita, että

$$\begin{aligned} \star f &= f \, dx \wedge dy \wedge dz, & \star(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) &= f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy, \\ \star(f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy) &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, & \star(f \, dx \wedge dy \wedge dz) &= f, \\ \delta f &= 0, & \delta(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) &= -\nabla \cdot \mathbf{f} = -\partial f_1 / \partial x - \partial f_2 / \partial y - \partial f_3 / \partial z, \\ \delta(f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy) &= (\nabla \times \mathbf{f})_1 dx + (\nabla \times \mathbf{f})_2 dy + (\nabla \times \mathbf{f})_3 dz \\ &= (\partial f_3 / \partial y - \partial f_2 / \partial z) dx + (\partial f_1 / \partial z - \partial f_3 / \partial x) dy + (\partial f_2 / \partial x - \partial f_1 / \partial y) dz, \\ \delta(f \, dx \wedge dy \wedge dz) &= -(\nabla f)_1 dy \wedge dz - (\nabla f)_2 dz \wedge dx - (\nabla f)_3 dx \wedge dy \\ &= -(\partial f / \partial x) dy \wedge dz - (\partial f / \partial y) dz \wedge dx - (\partial f / \partial z) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

c) Määritellään Laplacen-deRhamin operaattori $\Delta := (\delta + d)^2 = \delta d + d\delta$. Osoita, että $\Delta f = -\nabla^2 f$ (siis \mathbb{E}^3 :ssa).

Harjoitustehtävä 65. Olkoon $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ Minkowskin avaruuden \mathbb{M}^4 affini kartta, $[d^4 \mathbf{x}]$ sen orientaatio ja $g = \eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$ Minkowskin metriikka (jolle siis $\text{sgn}(\eta) = -1$). Osoita, että

$$\begin{aligned} \star dx^0 &= -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, & \star dx^1 &= -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\ \star(dx^0 \wedge dx^1) &= -dx^2 \wedge dx^3, & \star(dx^2 \wedge dx^3) &= dx^0 \wedge dx^1, \\ \star(dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= -dx^1, & \star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= -dx^0 \end{aligned}$$

ja, jos $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ on 2-muoto, niin

$$\begin{aligned} \delta F &= \star d\star F = (\partial_1 F_0^1 + \partial_2 F_0^2 + \partial_3 F_0^3) dx^0 + \\ &+ (\partial_0 F_1^0 + \partial_2 F_1^2 + \partial_3 F_1^3) dx^1 + (\partial_0 F_2^0 + \partial_3 F_2^3 + \partial_1 F_2^1) dx^2 + (\partial_0 F_3^0 + \partial_1 F_3^1 + \partial_2 F_3^2) dx^3 \\ &= (\partial_1 F_{01} + \partial_2 F_{02} + \partial_3 F_{03}) dx^0 + \\ &+ (\partial_0 F_{01} + \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13}) dx^1 + (\partial_0 F_{02} + \partial_3 F_{23} + \partial_1 F_{21}) dx^2 + (\partial_0 F_{03} + \partial_1 F_{31} + \partial_2 F_{32}) dx^3, \end{aligned}$$

missä $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$.

31 GEOM: Integrointiteoriaa

Tässä luvussa oletetaan, että M on n -ulotteinen monisto. Olkoon $0 < k \leq n$. Moniston M k -ulotteinen (säännöllinen) *alimonisto* N on joukko (topologinen aliavaruus) $N \subseteq M$, joka toteuttaa seuraavan ehdon: jokaiselle $\mathbf{m}' \in N$ on olemassa M :n kartta $\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolle $\mathbf{m}' \in U$ ja

$$\mathbf{q}(N \cap U) \in \mathbf{q}(U) \cap \{(a^1, \dots, a^k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid a^j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq k\}$$

eli siis kaikilla $\mathbf{m} \in N \cap U$, $\mathbf{q}(\mathbf{m}) = (q^1(\mathbf{m}), \dots, q^k(\mathbf{m}), 0, \dots, 0)$. Selkeästi [!]

$$\mathbf{q}_N : N \cap U \rightarrow \mathbb{R}^k, \mathbf{m} \mapsto \mathbf{q}_N(\mathbf{m}) := (q^1(\mathbf{m}), \dots, q^k(\mathbf{m}))$$

on N :n kartta, joten N on k -ulotteinen monisto. Nyt N :n tangenttivektori (pisteessä $\mathbf{m} \in N \cap U$) on muotoa $\sum_{j=1}^k v^j \partial/\partial q^j|_{\mathbf{m}}$ ja siis myös M :n tangenttivektori. Täten vektoriavaruuden $TN_{\mathbf{m}}$:n virittävät vektorit $\partial/\partial q^j|_{\mathbf{m}}$, $1 \leq j \leq k$, ja $TM_{\mathbf{m}}$:n virittävät vektorit $\partial/\partial q^j|_{\mathbf{m}}$, $1 \leq j \leq n$ eli siis $TN_{\mathbf{m}}$ on $TM_{\mathbf{m}}$:n k -ulotteinen vektorialiavaruus.

Esimerkki 71. Esimerkiksi R -säteinen pallon pinta S_R^2 on \mathbb{R}^3 :n 2-ulotteinen alimonisto. Yhtenä karttana voisi olla vaikka \mathbb{R}^3 :n pallokoordinaateista (r, θ, φ) saatu kartta $\mathbf{q}_{S_R^2} = (\theta, \varphi)$, joka voidaan väsäätä vaikka \mathbb{R}^3 :n kartasta $\mathbf{q} = (\theta, \varphi, r - R)$. (Sopivassa) pisteessä $\mathbf{a} \in S_R^2$ (eli $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ja $r(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}| = R$) sijaitsevan tangentiavaruuden $TS^2|_{\mathbf{a}}$ kanta on $\{\partial/\partial r|_{\mathbf{a}}, \partial/\partial \theta|_{\mathbf{a}}, \partial/\partial \varphi|_{\mathbf{a}}\}$ ja tangenttitason $TS^2|_{\mathbf{a}}$ kanta on $\{\partial/\partial \theta|_{\mathbf{a}}, \partial/\partial \varphi|_{\mathbf{a}}\}$.

Esimerkki 72. Moniston M avoin osajoukko V on M :n n -ulotteinen alimonisto eli avoin alimonisto. Jos M on suunnistuva, niin V perii M :n orientaation (rajoita M :n orientaation antava n -muoto avoimeen joukkoon V). Triviaalisti monisto M on itsensä alimonisto. Joskus sanotaan, että $(n-1)$ -ulotteinen alimonisto N on (M :n) hyperpinta. Äärellinen (tai numeroituvasti ääretön) joukko $\{\mathbf{m}_i\}_{i=1}^s$ M :n pisteitä määrittellään olevan M :n 0-ulotteinen alimonisto.

Moniston M osajoukko N on k -ulotteinen *reunallinen alimonisto*, mikäli on olemassa M :n k -ulotteinen alimonisto N_+ siten, että $N \subseteq N_+$ ja N voidaan kirjoittaa muodossa $N = N_0 \cup \partial N$, $N_0 \cap \partial N = \emptyset$, missä *sisäosa* $N_0 \neq \emptyset$ on N_+ :n avoin joukko¹⁸³ (siis k -ulotteinen avoin alimonisto) ja *reuna* ∂N on N_+ :n $(k-1)$ -ulotteinen alimonisto (eli N_+ :n hyperpinta). Lisäksi oletetaan, että jokaisella $\mathbf{m} \in \partial N$ on olemassa N_+ :n kartta $\mathbf{q}_+ : V \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{m} \in V$, jonka ensimmäiselle koodinaatille $q_+^1(\mathbf{m}) = 0$ kaikille $\mathbf{m} \in V \cap \partial N$ ja $q_+^1(\mathbf{m}) < 0$, kun $\mathbf{m} \in V \cap N_0$.¹⁸⁴

¹⁸³Eli N_+ :n avoimet joukot ovat aina muotoa $N_+ \cap U$, missä U on M :n avoin joukko.

¹⁸⁴Aina oletetaan myös, että ∂N on N_0 :n topologinen reuna N_+ :ssa eli jokainen N_+ avoin joukko V , joka sisältää ∂N :n pisteen, sisältää myös pisteen N_0 :sta ja jonkun pisteen komplementista $N_+ \setminus N$ (mikäli epätyhjä).

Esimerkki 73. Voidaan määritellä, että alimonisto on reunallinen alimonisto, jonka reuna on tyhjä joukko: olkoon N M :n alimonisto ja valitse $\partial N = \emptyset$ (tyhjä joukko on ‘mitä tahansa’), $N_0 = N$ ja erityisesti $N_+ = N$ yllä. Huomaa, että N :n reuna ∂N on reunaton eli $\partial(\partial N) = \emptyset$. Vastaavasti kuin aiemmin sanotaan, että $(n-1)$ -ulotteinen reunallinen alimonisto N on (M) :n reunallinen hyperpinta.

Reunallinen alimonisto N on suunnistuva, jos N_+ voidaan valita siten, että se on suunnistuva. Tällöin N_0 :n orientaatio $[\omega^{N_0}]$ saadaan rajoittamalla N_+ :n orientaatio $[\omega^{N_+}]$ avoimeen alimonistoonsa N_0 . Heti nähdään, että yllä oleva kartta $\mathbf{q}_+ : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ voidaan valita siten, että $\omega^{N_+} = \omega_{1,\dots,k}^{N_+} dq_+^1 \wedge \dots \wedge dq_+^k$, missä $\omega_{1,\dots,k}^{N_+}(\mathbf{m}) > 0$, $\mathbf{m} \in V$, eli $\mathbf{q}_+ \in \mathcal{A}_{[\omega^{N_+}]}$. Nyt myös ∂N on suunnistuva ja sen (indusoitu) orientaatio $[\omega^{\partial N}]$ valitaan aina sellaiseksi, että ∂N :n $(k-1)$ -muoto

$$\omega^{\partial N}|_{\mathbf{m}} = \omega_{2,3,\dots,k}^{\partial N}(\mathbf{m}) dq_+^2|_{\mathbf{m}} \wedge dq_+^3|_{\mathbf{m}} \wedge \dots \wedge dq_+^k|_{\mathbf{m}}, \quad \omega_{2,3,\dots,k}^{\partial N}(\mathbf{m}) > 0, \quad \mathbf{m} \in V \cap \partial N.$$

Vaikka M olisi suunnistuva, siitä ei seuraa, että sen (reunallisella) alimonistolla N olisi orientaatio (esim. Möbiuksen nauha \mathbb{R}^3 :n alimonistona). Nyt kuitenkin jatkossa aina oletetaan, että jokainen M :n reunallinen alimonisto N on suunnistuva. Jos N on suunnistetun M :n n -ulotteinen reunallinen alimonisto ($\partial N \neq \emptyset$), niin N_0 perii M :n orientaation, joka indusoi ∂N :lle orientaation. Eli nyt $N_+ = M$ ja M :n (sekä N_0 :n) orientaation antava n -muoto ω voidaan kirjoittaa muodossa $\omega = \omega_{1,\dots,n} dq_+^1 \wedge \dots \wedge dq_+^n$, missä $\omega_{1,\dots,n}$ on positiivinen funktio. Sisäosassa N_0 q_+ -koordinaatti on negatiivinen ja $(n-1)$ -ulotteisella reunalla ∂N se on 0. Reunan orientaation antaa joku $\omega^{\partial N} = \omega_{2,\dots,k}^{\partial N} dq_+^2 \wedge \dots \wedge dq_+^k$, missä $\omega_{2,\dots,k}^{\partial N}$ on positiivinen funktio (esim. vakiofunktio 1). Nyt sanotaan, että reunan tangettivektori $\sum_{j=1}^n v^j \partial/\partial q_+^j|_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in V \cap \partial N$, osoittaa ulospäin, jos $v^1 > 0$, ja sisäänpäin mikäli $v^1 < 0$.

Esimerkki 74. Olkoon $R_2 > R_1 \geq 0$. Nyt $\overline{\mathbb{B}_{R_1,R_2}^3} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid R_1 \leq |\mathbf{a}| \leq R_2\}$ on \mathbb{R}^3 :n 3-ulotteinen reunallinen alimonisto, jonka sisäosa on (tapauksessa $R_1 \neq 0$) avoin alimonisto

$$\mathbb{B}_{R_1,R_2}^3 := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid R_1 < |\mathbf{a}| < R_2\}$$

ja reuna $\overline{\mathbb{B}_{R_1,R_2}^3} = \mathbb{S}_{R_1}^2 \cup \mathbb{S}_{R_2}^2$. Nyt monistoksi N_+ yllä voidaan valita vaikkapa \mathbb{R}^3 ja (sopivan pisteen $\mathbf{m} \in \mathbb{S}_{R_2}^2$ riittävän pienen ympäristön kartaksi $\mathbf{q}_+ = (r - R_2, \theta, \varphi)$ (sillä $q_+^1 = r - R_2$ on negatiivinen sisäosassa jossa $r < R_2$). Vastaavasti pisteen $\mathbf{m} \in \mathbb{S}_{R_1}^2$ ympäristössä kartaksi \mathbf{q}_+ valitaan $(R_1 - r, \varphi, \theta)$ (sillä sisäosassa $r > R_1$).

Jos \mathbb{R}^3 varustetaan orientaatiolla $[dx \wedge dy \wedge dz]$, niin sisäosa \mathbb{B}_{R_1, R_2}^3 perii saman orientaation. Koska (lokaalisti)

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = r^2 \sin \theta d(r - R_2) \wedge d\theta \wedge d\varphi = r^2 \sin \theta d(R_1 - r) \wedge d\varphi \wedge d\theta,$$

niin $\mathbb{S}_{R_2}^2$:n (indusoidun) orientaation antaa $d\theta \wedge d\varphi$ sekä $\partial/\partial(r - R_2) = \partial/\partial r$ ulospäin osoittava ja myös tangenttitason $T\mathbb{S}_{R_2}^2|_{\mathbf{a}}$ (ja pinnan $\mathbb{S}_{R_2}^2$) ‘(yksikkö)normaalivektori’ (tässä tarvitaan kohtisuoruuden käsitettä, jonka antaa nyt \mathbb{R}^3 :n euklidinen metriikka). Tähän orientaatioon yhteensopiva \mathbb{S}_R^2 :n ‘tilavuusmuoto’ on nyt pallon pinnan pinta-ala 2-muoto $(R^2)^2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$.

Vastaavasti $\mathbb{S}_{R_1}^2$:n orientaation generoi $d\varphi \wedge d\theta = -d\theta \wedge d\varphi$ ja $\partial/\partial(R_1 - r) = -\partial/\partial r$ osoittaa ulospäin. (Hyper)pinnan $\mathbb{S}_{R_1}^2$ ‘tilavuusmuoto’ on nyt pallon pinnan pinta-ala 2-muoto $(R^1)^2 \sin \theta d\varphi \wedge d\theta = -(R^1)^2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$.

Jos \mathbb{R}^3 varustetaan orientaatiolla $[-dx \wedge dy \wedge dz]$, niin sisäosan ja pintojen orientaatiot vaihtavat myös merkkejään. [!] Pintojen ulospäin osoittavat vektorit kuitenkin pysyvät samoina.

Helposti nähdään, että isoympyrä $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ on \mathbb{S}_R^2 :n hyperpinta ja myös \mathbb{R}^3 :n 1-ulotteinen alimonisto. Nyt sen orientaation $d\varphi$ määrää kyseisen ympyrän parametrisointi $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, tai ‘kiertosuunta’ (eli kun radan parametri φ kasvaa niin kierretään ympyrää pitkin oikeakätisesti z -akselin ympäri). [!]

Harjoitustehtävä 66. *Olkkoon $R_2 > R_1 \geq 0$ ja määritellään \mathbb{R}^2 :n reunallinen alimonisto $\overline{\mathbb{B}_{R_1, R_2}^2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$. Mikä on sen sisäosa \mathbb{B}_{R_1, R_2}^2 ja reuna $\partial\overline{\mathbb{B}_{R_1, R_2}^2}$ (käytä napakoodinaatteja (r, φ) ja valitse sopivat \mathbf{q}_+ -kartat)? Varustetaan \mathbb{R}^2 orientaatiolla $[dx \wedge dy]$. Mitkä ovat sisäosan ja reunan orientaatiot? Entä reunan ‘tilavuusmuodot’ (eli pituus 1-muodot) ja ulospäin osoittavat vektorit?*

Vinkki: tehtävä on samanlainen mutta helpompi kuin edellinen esimerkki.

31.1 Yleistetty Stokesin lause

Olkkoon M :n orientaatio $[\omega]$ ja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (kompaktitukinen¹⁸⁵) funktio. Huomaa, että mielivaltaisen n -muoto ν voidaan kirjoittaa muodossa $\nu = f\omega$ (missä f on sileä; ν on kompaktitukinen, jos f on kompaktitukinen).

¹⁸⁵Funktion f tuki $\text{supp } f$ on joukon $\{\mathfrak{m} \in M \mid f(\mathfrak{m}) \neq 0\}$ sulkeuma (eli pienin suljettu joukko, joka sisältää ko. joukon). Eli nyt oletetaan, että $\text{supp } f$ on kompakti eli (suljettu ja) ‘rajoitettu.’ Tarkemmin: kompaktin joukon C jokaisella avoimella peitteellä $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, $\cup_{i \in \mathcal{I}} U_i = C$, on äärellinen osapeite $\{U_{i_k}\}_{k=1}^K$, $K \in \mathbb{N}$, $\cup_{k=1}^K U_{i_k} = C$. Itseasiassa funktion f ei tarvitse olla tässä tarkastelussa jatkuva saatika sileä. Riittää, että se on (Borel) mitallinen eli ‘hyvin yleistä muotoa’ (tämä seuraa Rieszin esityslauseesta, jonka mukaan ω määrää mitan).

Jos f on nolla kartan $\mathbf{q} \in \mathcal{A}_{[\omega]}$ määrittelyalueen U ulkopuolella,¹⁸⁶ niin voidaan määrittellä integraali

$$\int_M f\omega := \int_U f(\mathbf{q})\omega_{1,2,\dots,n}(\mathbf{q})dq^1dq^2\cdots dq^n$$

(joka on tavanomainen Riemannin (tai yleisemmin Lebesguen) integraali, joka on olemassa, sillä f on kompaktitukinen). Jos $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{A}_{[\omega]}$ on toinen kartta (ja f häviää myös sen määrittelyalueen \tilde{U} ulkopuolella), niin lokaalisti

$$\omega = \omega_{1,\dots,n}d^n\mathbf{q} = \tilde{\omega}_{1,\dots,n}d^n\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\omega}_{1,\dots,n}\frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)}d^n\mathbf{q},$$

missä Jacobin matriisin determinantti on positiivinen. Täten¹⁸⁷

$$\int_{\tilde{U}} f(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\omega}_{1,\dots,n}(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{d}q^1\cdots\tilde{d}q^n = \int_U f(\mathbf{q})\omega_{1,\dots,n}(\mathbf{q})dq^1\cdots dq^n$$

eli $\int_M f\omega$ ei riipu kartan \mathbf{q} valinnasta kunhan vaan $\mathbf{q} \in \mathcal{A}_{[\omega]}$. Jos $\mathbf{q} \in \mathcal{A}_{[-\omega]}$, niin selkeästi integraalin etumerkki ‘muuttuu vastakkaiseksi.’

Olkoon sitten $\{\mathbf{q}_s : U_s \rightarrow \mathbb{R}\}$ (indeksoitu) joukko karttoja, jotka peittävät koko M :n (eli $\cup_s U_s = M$), ja $\{\rho_s : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ joukko (ei-negatiivisia) funktioita, jotka toteuttavat seuraavat ehdot: funktio ρ_s tuki sisältyy joukkoon U_s ja kaikilla $\mathbf{m} \in M$, $f_s(\mathbf{m}) \neq 0$ vain äärellisellä määrällä indeksejä s sekä (täten äärellinen summa) $\sum_s \rho_s(x) = 1$.¹⁸⁸ Heti nähdään, [!] että voidaan olettaa karttojen \mathbf{q}_s kuuluvan kartastoon $\mathcal{A}_{[\omega]}$. Määritellään (kartta- ja ρ_s -riippumaton) integraali [!]

$$\int_M f\omega := \sum_s \int_M f\rho_s\omega.$$

Jos $N = N_0 \cup \partial N \subseteq N_+ \subseteq M$ on M :n k -ulotteinen reunallinen alimonisto ja $[\omega^N]$ sen orientaatio, niin voidaan määrittellä kaikille (kompaktitukisille) funktioille $f : N_+ \rightarrow \mathbb{R}$ integraali

$$\int_N f\omega^N := \int_{N_+} \chi_N f\omega^{N_+},$$

missä $\chi_N : N_+ \rightarrow \{0, 1\}$ on joukon karakteristinen funktio eli $\chi_N(\mathbf{m}) = 1$, kun $\mathbf{m} \in N$, ja $\chi_N(\mathbf{m}) = 0$, kun $\mathbf{m} \in N_+ \setminus N$. Erityisen näppärä on seuraava *yleistetty Stokesin lause*:

Lause 10. *Olkoon ν N_+ :n kompaktitukinen $(k-1)$ -muoto. Tällöin*

$$\int_{\partial N} \nu = \int_N d\nu.$$

Seurauksia: Jos $\partial N = \emptyset$ (eli $N_+ = N$), niin $\int_N d\nu = 0$. Jos $d\nu = 0$, niin $\int_{\partial N} \nu = 0$.

¹⁸⁶Tarkemmin: $\text{supp } f \subseteq U$.

¹⁸⁷Integraalimuuttujanvaihtolauseen nojalla, sillä $|\frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)}| = \frac{\partial(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)}$.

¹⁸⁸Tämä on mahdollista, kun M on *parakompakti*. Käytännössä aina fysiikassa käytetyt monistot ovat parakompakteja, joten jatkossa kaikki monistot ovat parakompakteja.

Esimerkki 75. Olkoon $M = \mathbb{R}^3$ ja $N = V$ sen 3-ulotteinen reunallinen alimonisto (eli suljettu 3-ulotteinen ‘alue’). Nyt $\partial N = \partial V$ on joko tyhjä tai sitten reunaton 2-ulotteinen alimonisto (eli reunaton pinta). Varustetaan \mathbb{R}^3 ja täten V orientaatiolla $[dx \wedge dy \wedge dz]$. Olkoon $B_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, (sileitä kompaktitukisia) funktiota, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ja

$$\nu = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

\mathbb{R}^3 :n 2-muoto, jolle siis [!]

$$d\nu = (\nabla \cdot \mathbf{B}) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Yleistetystä Stokesin lauseesta seuraa heti *divergenssilause*

$$\int_{\partial V} B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dx \wedge dy \wedge dz = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dx dy dz.$$

Jos \mathbf{q}_+ on \mathbb{R}^3 :n kartta, jolle $q_+^1 < 0$ sisäosassa V_0 ja $q_+^1 = 0$ reunalla ∂V sekä $\omega^{\partial V} = dq_+^2 \wedge dq_+^3$ antaa ∂V :n orientaation,¹⁸⁹ niin $\sum_{j=1}^3 v^j \partial / \partial q_+^j$ on ulospäin osoittava vektori(kenttä), jos v^1 on positiivinen (funktio). Pinnan pisteet voidaan parametrizoida (lokaalisti) käyttäen jotain funktiota $\mathbf{r}(q_+^2, q_+^3) = (f(q_+^2, q_+^3), g(q_+^2, q_+^3), h(q_+^2, q_+^3)) \in \mathbb{R}^3$; palauta mieleen esimerkki 19. Kun rajoitetaan ν pinnalle ∂V saadaan (lokaalisti) [!]

$$\nu = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}) dq_+^2 \wedge dq_+^3,$$

missä $\mathbf{N}(q_+^2, q_+^3) = \partial \mathbf{r}(q_+^2, q_+^3) / \partial q_+^2 \times \partial \mathbf{r}(q_+^2, q_+^3) / \partial q_+^3$ on pinnan normaalivektori pinnan pisteessä $\mathbf{r}(q_+^2, q_+^3)$. Ulospäin osoittava vektori(kenttä) $\partial / \partial q_+^1 = (\partial x / \partial q_+^1) \partial / \partial x + (\partial y / \partial q_+^1) \partial / \partial y + (\partial z / \partial q_+^1) \partial / \partial z$ voidaan esittää vektori(kenttänä) $\mathbf{M} := (\partial x / \partial q_+^1, \partial y / \partial q_+^1, \partial z / \partial q_+^1)$ ja $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ on (Jacobin matriisin determinanttina) positiivinen. Täten \mathbf{N} osoittaa pinnasta ulospäin. Nyt voidaan määritellä pinnan *ulospäin osoittava yksikkönormaalivektori(kenttä)* $\mathbf{n} = \mathbf{N} / |\mathbf{N}|$ ja pinta-ala 2-muoto $dS := |\mathbf{N}| dq_+^2 \wedge dq_+^3$ (lokaalisti), jotenka

$$\nu = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS$$

eli ollaan saatu tuttu (epätäsmällinen) kaava: $\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV$, missä $S = \partial V$.

Esimerkki 76. Olkoon sitten f ja g 0-muotoja eli (sileitä) funktioita¹⁹⁰ $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Määritellään 1-muoto $g df - f dg$. Suoralla laskulla nähdään, [!] että $\delta(g df - f dg) = g \Delta f - f \Delta g$, missä $\Delta =$

¹⁸⁹Eli lokaalisti $dx \wedge dy \wedge dz = \omega_{123} dq_+^1 \wedge dq_+^2 \wedge dq_+^3$, missä ω_{123} on positiivinen funktio.

¹⁹⁰Joille $f \chi_V$ ja $g \chi_V$ ovat kompaktitukisia.

$d\delta + \delta d$ on Laplacen-deRhamin operaattori. Koska \mathbb{R}^3 :ssa $\star\star = 1$, $\star 1 = \text{vol}$ ja $\delta\nu = (-1)^k \star d\star\nu$, missä ν on k -muoto, niin

$$\int_{\partial V} \star(g df - f dg) = \int_V d\star(g df - f dg) = - \int_V \star\delta(g df - f dg) = - \int_V (g\Delta f - f\Delta g)\text{vol}.$$

Tämä on ns. Greenin toinen identiteetti, joka näyttää karteesisissa koordinaateissa seuraavalta:

$$\int_{\partial V} (g\nabla f - f\nabla g) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g) dx dy dz.$$

Jatketaan sitten esimerkkiä 74.

Olkoon $V = \overline{\mathbb{B}_{R_1, R_2}^3}$ ja $g(\mathbf{r}) = 1/r$, kun $\mathbf{r} \neq \vec{0}$. Koska $\star dr = r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$, niin

$$\star(g df - f dg) = fr^{-2}\star dr + r^{-1}\star df = fr^{-2}\star dr + r^{-1}\partial_r f \star dr + \dots = (f + r\partial_r f) \sin\theta d\theta \wedge d\varphi + \dots$$

ja $\Delta g = \delta dg = -\delta(r^{-2}dr) = \star d\star(r^{-2}dr) = \star d(r^{-2}r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi) = 0$, jotenka¹⁹¹

$$\begin{aligned} - \int_{\overline{\mathbb{B}_{R_1, R_2}^3}} r^{-1} \Delta f \text{vol} &= - \int_V g \Delta f \text{vol} = \int_{\partial V} \star(g df - f dg) = \int_{\partial \overline{\mathbb{B}_{R_1, R_2}^3}} (f + r\partial_r f) \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= \int_{S_{R_2}^2} (f + R_2 \partial_r f)(R_2, \theta, \varphi) \sin\theta d\theta \wedge d\varphi - \int_{S_{R_1}^2} (f + R_1 \partial_r f)(R_1, \theta, \varphi) \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (f + R_2 \partial_r f)(R_2, \theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (f + R_1 \partial_r f)(R_1, \theta, \varphi) \sin\theta d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Jos nyt f häviää jonkun (mielivaltaisen suuren) pallon ulkopuolella,¹⁹² niin yllä oleva ensimmäinen termi menee nolaksi rajalla $R_2 \rightarrow \infty$. Jos myös $R_1 \rightarrow 0$, niin

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow 0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (f + R_1 \partial_r f)(R_1, \theta, \varphi) \sin\theta d\varphi d\theta &= \lim_{R_1 \rightarrow 0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R_1, \theta, \varphi) \sin\theta d\varphi d\theta \\ &= f(\vec{0}) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\varphi d\theta = 4\pi f(\vec{0}) \end{aligned}$$

eli ollaan saatu tuttu kaava

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^3} r^{-1} \Delta f \text{vol} = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla^2 f}{r} dx dy dz = 4\pi f(\vec{0})}. \quad (39)$$

Esimerkki 77. Olkoon $M = \mathbb{R}^3$ ja $N = S$ sen suunnistuva 2-ulotteinen reunallinen alimonisto (eli suljettu 2-ulotteinen pinta). Nyt ∂S koostuu ‘suljetuista’ reunattomista käyristä (tai on tyhjä) ja S indusoi niihin orientaation. Vastaavasti kuin edellisissä esimerkeissä mielivaltainen (kompaktitukinen) 1-muoto

$$\nu = B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz$$

¹⁹¹Pintaintegraaleissa yli pallon pintojen, riittää käyttää vain yhtä karttaa (θ, φ) sillä kyseisen kartan määrittelyalueen komplementti on käyrä ja täten sen pinta-ala on 0 eli käyrä on 0-mitallinen pinta-alamitan suhteen.

¹⁹²Tai yleisemmin f on ns. *nopeasti vähenevä* radiaalisuunnassa $r \rightarrow \infty$ (eli menee nopeammin nolaksi kuin mikään r :n polynomi; esim. muotoa e^{-r}).

voidaan esittää (kompaktitukisena) vektori(kenttänä) $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ja

$$d\nu = (\nabla \times \mathbf{B})_1 dy \wedge dz + (\nabla \times \mathbf{B})_2 dz \wedge dx + (\nabla \times \mathbf{B})_3 dx \wedge dy.$$

Täten saadaan (klassinen) *Stokesin lause*

$$\int_{\partial S} B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz = \int_S (\nabla \times \mathbf{B})_1 dy \wedge dz + (\nabla \times \mathbf{B})_2 dz \wedge dx + (\nabla \times \mathbf{B})_3 dx \wedge dy$$

tai muinaisin merkinnöin

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Harjoitustehtävä 67. a) Osoita, että tasossa \mathbb{R}^2 yleisestä Stokesin lauseesta seuraa Greenin lause (eli nyt \mathbb{R}^2 :n orientaatio on $[dx \wedge dy]$, ν on 1-muoto ja N 2-ulotteinen alue, jota rajaa käyrä(t) ∂N).

b) Jatka edellistä harjoitustehtävää, jossa $N = \overline{\mathbb{B}_{R_1, R_2}^2}$. Valitaan vaikkapa $\nu = r^s d\varphi$, $s \in \mathbb{R}$ (napakoodinaatit). Laske $\int_{\partial N} \nu$ ja $\int_N d\nu$ (pitäisivät olla sama luku).

32 FYS: Maxwellin yhtälöt Minkowskin avaruudessa

Olkoon \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} ja \mathbf{B} sähkömagneettiseen kenttään liittyvät kentät, jotka ovat siis kuvauksia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inertiaalikoodinaatistossa \mathbf{r} . Ajatellaan aikaa parametrina (eli ei ole koordinaatti). Koska \mathbb{E}^3 :n metriikka on eulidinen eli

$$dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = \sum_{k,l=1}^3 \delta_{kl} dx^k \otimes dx^l,$$

niin esim. $\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$ voidaan esittää joko vektorikenttänä $\sum_{l=1}^3 E^l \partial / \partial x^l$ tai differentiaalimuotona $\sum_{k=1}^3 E_k dx^k$, missä $E_k = \sum_{l=1}^3 \delta_{lk} E^l = E^k$ eli *komponentit ovat samat inertiaalikoodinaatistossa ja* $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$. Samoin merkitään inertiaalikoodinaatistossa $D_k = D^k$, $H_k = H^k$ ja $B_k = B^k$ olipa kenttien geometrinen tulkinta mikä tahansa (ks. alla). Vastaavasti voidaan merkitä permittiivisyysmatriisille $\varepsilon_{kl} = \varepsilon^{kl} = \varepsilon^k_l$ jne.

Määritellään seuraavat differentiaalimuodot \mathbb{E}^3 :ssa.

- Sähkökentän voimakkuus on 1-muoto

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^3 E_i dx^i = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz,$$

koska sen aiheuttama voima (1-muoto) varauksen q omaavaan hiukkaseen on $F = q\mathcal{E}$.

- Koska tyhjiössä $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ nähdään, että (yleisestikin) sähkövuon tiheys \mathbf{D} määrää 1-muodon $\mathcal{D}' = \sum_{i=1}^3 D_i dx^i$ (eli tyhjiössä $\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E}$). Täten voidaan määritellä sähkövuon tiheys 2-muotona

$$\mathcal{D} = \star \mathcal{D}' = \sum_{i,j,k=1}^3 D_i \epsilon_{ijk} dx^j \otimes dx^k = D_1 dy \wedge dz + D_2 dz \wedge dx + D_3 dx \wedge dy,$$

joka siis riippuu \star -operaattorin valinnasta eli \mathbb{E}^3 :n orientaatiosta.¹⁹³

- Magneettivuon tiheys on 2-muoto

$$\mathcal{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 B_i \epsilon_{ijk} dx^j \otimes dx^k = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy,$$

sillä \mathbf{B} :n aiheuttama voima on $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$: Jos havaitsija käyttää karttaa \mathbf{r} ja havaitsee kentän $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, niin karttaa $\tilde{\mathbf{r}} = -\mathbf{r}$ ($\tilde{\mathbf{v}} = -\mathbf{v}$) käyttävälle havaitsijalle Lorentzin voima (1-muoto) on $q \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}}(t, \tilde{\mathbf{r}}) = \tilde{\mathbf{F}}(t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{v}}) = -\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = -q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, jotenka $\tilde{\mathbf{B}}(t, \tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ ja $\tilde{B}^i \epsilon_{ijk} d\tilde{x}^j \otimes d\tilde{x}^k = B^i \epsilon_{ijk} d(-x^j) \otimes d(-x^k) = B^i \epsilon_{ijk} dx^j \otimes dx^k = \mathcal{B}$.

¹⁹³Eli jos orientaatiota $[d^3\mathbf{r}]$ käyttävän havaitsijan mielestä sähkövuon tiheys on 2-muoto $\mathcal{D} = (+\star)\mathcal{D}'$, niin toisen orientaatiota $[-d^3\mathbf{r}]$ käyttävän havaitsijan mielestä se on $-\mathcal{D} = (-\star)\mathcal{D}'$. Joskus \mathcal{D} :tä sanotaan parittomaksi 2-muodoksi tai 1-virraksi. Vastaavasti \mathcal{H} on pariton 1-muoto tai 2-virta.

- Koska tyhjiössä $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ nähdään, että 2-muoto $\mathcal{H}' = H^i \epsilon_{ijk} dx^j \otimes dx^k$ määrää magneettikentän voimakkuuden 1-muotona

$$\mathcal{H} = \star \mathcal{H}' = \sum_{i=1}^3 H_i dx^i = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz,$$

joka riippuu \mathbb{E}^3 :n orientaatiosta.

- Virtatiheys on (orientaatiosta riippuva) 2-muoto

$$\mathcal{J} = \star \mathcal{J}' = \sum_{i,j,k=1}^3 j_i \epsilon_{ijk} dx^j \otimes dx^k = j_1 dy \wedge dz + j_2 dz \wedge dx + j_3 dx \wedge dy,$$

missä $\mathcal{J}' = \sum_{i=1}^3 j_i dx^i$ on 1-muoto.

Kun tulkitaan \mathcal{E} 1-muotona ja \mathcal{B} 2-muotona, nähdään heti seuraavat sähkö- ja magneettivuon ominaisuudet: Jos ensimmäinen havaitsija käyttää orientaatiota $[d^3 \mathbf{r}]$ ja toinen havaitsija orientaatiota $[-d^3 \mathbf{r}]$, niin jos ensimmäisen havaitsijan havaitsemat vuon tiheydet ovat \mathcal{D} ja \mathcal{B} , niin toisen ovat $-\mathcal{D}$ ja \mathcal{B} . Täten sähkövuon tiheys suunnistetun pinnan S läpi on

$$\int_S \mathcal{D} = \int_{-S} -\mathcal{D},$$

missä $-S$ on sama pinta S varustettuna vastakkaisella orientaatiolla. Eli sähkövuo ei riipu orientaatiosta, mikä on luonnollista, sillä sähkökentän ‘voimaviivat’ alkavat aina positiivisesta varauksesta ja päättyvät negatiiviseen (eli niillä on selkeä suunta riippumatta havaitsijasta).¹⁹⁴ Toisaalta, jos ensimmäisen havaitsijan havaitsema magneettivuon tiheys on $\int_S \mathcal{B}$, niin toisen havaitsema on

$$\int_{-S} \mathcal{B} = - \int_S \mathcal{B}$$

eli vastakkaismerkinen. Tämä johtuu siitä, että magneettisilla ‘voimaviivoilla’ ei ole havaitsijasta riippumatonta suuntaa (kumpi pää sauvamagneetista on pohjoisnapa?). Jos havaitsijan orientaatio muuttuu, niin magneetin pohjois- ja etelänavat vaihtavat paikkaa.

Harjoitustehtävä 68. *Olkoon $\text{vol} = dx \wedge dy \wedge dz$ ja merkitään (esim.)*

$$\dot{\mathcal{B}} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \frac{\partial B_1}{\partial t} dy \wedge dz + \frac{\partial B_2}{\partial t} dz \wedge dx + \frac{\partial B_3}{\partial t} dx \wedge dy = \dot{B}_1 dy \wedge dz + \dot{B}_2 dz \wedge dx + \dot{B}_3 dx \wedge dy.$$

¹⁹⁴Huomaa myös, että $Q = \int_V \rho d^3 \mathbf{r} = - \int_{-V} \rho d^3 \mathbf{r} = \int_{-V} \rho(-d^3 \mathbf{r})$, missä V on 3-ulotteinen reunallinen alimonisto. Eli kokonaisvaraus Q alueessa V (esim. 1 elektroni pallon sisällä) ei tietenkään vaihda merkkiään vaikka orientaatio vaihtuu.

Osoita, että Maxwellin (differentiaali)yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left\{ \begin{array}{ll} d\mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}} & (\text{Faradayn laki}), \\ d\mathcal{B} = 0 & (\text{Gaussin laki magneettikentälle}), \\ d\mathcal{D} = \rho \text{ vol} \iff \delta\mathcal{D}' = -\rho & (\text{Gaussin laki sähkökentälle}), \\ d\mathcal{H} = \mathcal{J} + \dot{\mathcal{D}} \iff \delta\mathcal{H}' = \mathcal{J}' + \dot{\mathcal{D}}' & (\text{Ampèren-Ørstedin-Maxwellin laki}) \end{array} \right.$$

tai integraalimuodossa

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\partial S} \mathcal{E} = - \int_S \dot{\mathcal{B}} & (\text{Faradayn laki}), \\ \int_{\partial V} \mathcal{B} = 0 & (\text{Gaussin laki magneettikentälle}), \\ \int_{\partial V} \mathcal{D} = \int_V \rho \text{ vol} & (\text{Gaussin laki sähkökentälle}), \\ \int_{\partial S} \mathcal{H} = \int_S (\mathcal{J} + \dot{\mathcal{D}}) & (\text{Ampèren-Ørstedin-Maxwellin laki}), \end{array} \right.$$

missä V on \mathbb{R}^3 :n 3-ulotteinen reunallinen alimonisto ja S on suunnistuva 2-ulotteinen reunallinen alimonisto.

Harjoitustehtävä 69. Olkoon $\mathcal{E} = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$ ja $\mathcal{B} = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$. Kirjoita \mathcal{E} , \mathcal{B} ja Faradayn laki $d\mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}}$ sylinterikoordinaatistossa (ei ole sallittua käyttää roottorin $\nabla \times$ esitystä sylinterikoordinaatistossa).

Tarkastellaan sitten sähkömagneettista kenttää Minkowskin avaruuden \mathbb{M}^4 affiinissa kartassa $\mathbf{x} = (ct, \mathbf{r})$, missä nyt $x^0 = ct$ on koordinaatti eikä parametri kuten aiemmin. Kuten aiemmin, Minkowskin avaruus varustetaan pseudometriikalla $\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$.

Määritellään sähkömagneettinen *kenttätensori* 2-muotona

$$F := \mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B} = \sum_{i=1}^3 E_i c^{-1} dx^i \wedge dx^0 + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

jonka matriisi on siis

$$(F_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vastaavasti voitaisiin määritellä 2-muoto

$$\tilde{G} := \mathcal{H} \wedge dt - \mathcal{D} = \sum_{i=1}^3 H_i c^{-1} dx^i \wedge dx^0 - D_1 dx^2 \wedge dx^3 - D_2 dx^3 \wedge dx^1 - D_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

jonka matriisi on

$$(\tilde{G}_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -H_1/c & -H_2/c & -H_3/c \\ H_1/c & 0 & -D_3 & D_2 \\ H_2/c & D_3 & 0 & -D_1 \\ H_3/c & -D_2 & D_1 & 0 \end{pmatrix},$$

mutta selkeästi se riippuu orientaatiosta (koska \mathcal{H} ja \mathcal{D} riippuvat). Parempi on määritellä (orientaattoriippumaton) *viritystensori*

$$G := H_1 c^{-1} dx^2 \wedge dx^3 + H_2 c^{-1} dx^3 \wedge dx^1 + H_3 c^{-1} dx^1 \wedge dx^2 - \sum_{i=1}^3 D_i dx^0 \wedge dx^i,$$

jolle $G = \star \tilde{G}$ (huom! M^4 :n orientaatio $[d^4\mathbf{x}]$). [!] Nyt G :n matriisi on

$$(G_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & H_3/c & -H_2/c \\ D_2 & -H_3/c & 0 & H_1/c \\ D_3 & H_2/c & -H_1/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Viritystensori G kuvaa materian ‘virittäytymistä’ (polarisaatio ja magnetisaatio) sähkömagneettisessa kentässä F . Tyhjiössä $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ja $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ eli

$$F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} G$$

sillä $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ja täten $F_{0i} = -E_i/c = -E_i \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \cdot (-\varepsilon_0 E_i) = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} (-D_i) = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} G_{0i}$ sekä $B_i = \mu_0 H_i = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} H_i \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} H_i/c$.

Harjoitustehtävä 70. a) Osoita, että

$$\begin{aligned} \delta G &= -(\nabla \cdot \mathbf{D})c dt + c^{-1}(-\dot{\mathbf{D}} + \nabla \times \mathbf{H})_1 dx^1 + c^{-1}(-\dot{\mathbf{D}} + \nabla \times \mathbf{H})_2 dx^2 + c^{-1}(-\dot{\mathbf{D}} + \nabla \times \mathbf{H})_3 dx^3, \\ \delta F &= -(\nabla \cdot \mathbf{E})dt + (-c^{-2}\dot{\mathbf{E}} + \nabla \times \mathbf{B})_1 dx^1 + (-c^{-2}\dot{\mathbf{E}} + \nabla \times \mathbf{B})_2 dx^2 + (-c^{-2}\dot{\mathbf{E}} + \nabla \times \mathbf{B})_3 dx^3. \end{aligned}$$

Vinkki: harjoitustehtävä 65.

b) Osoita, että Maxwellin yhtälöt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ja $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa $dF = 0$.

Varaukselle ρ ja virralle $\mathbf{j} = (j^1, j^2, j^3) = (j_1, j_2, j_3)$ määritellään sähkömagneettisen kentän lähde 1-muoto $j = \sum_{\nu=0}^3 j_\nu dx^\nu = -c\rho dx^0 + \sum_{k=1}^3 j_k dx^k$, jota vastaa virtanelivektori tai nelivirta

$$j^\sharp = \uparrow_1^1 j = \sum_{\nu=0}^3 j^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = c\rho \frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^3 j_k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Huomaa, että $j^0 = -j_0 = c\rho$.

Edellisen harjoitustehtävän nojalla saadaan *Maxwellin yhtälö*

$$\boxed{\delta G = c^{-1}j},$$

joka vastaa tuttuja yhtälöitä $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ja $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$. [!] Tyhjiössä Maxwellin yhtälö redusoituu yhtälöksi $\delta F = \mu_0 j$ eli yhtälöiksi $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ ja $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + c^{-2} \dot{\mathbf{E}}$.

Vastaavasti yhtälöitä $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ja $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ vastaa [!]

$$\boxed{dF = 0},$$

mutta se ei oikeastaan ole kenttäyhtälö lainkaan vaan *geometrinen* yhtälö, joka kertoo, että 2-muoto F on *suljettu*. Poincarén lemman nojalla $dF = 0$ on yhtäpitävä yhtälön

$$\boxed{F = dA}$$

kanssa (Minkowskin avaruudessa¹⁹⁵), missä $A = \sum_{\mu=0}^3 A_{\mu} dx^{\mu}$ on *potentiaali* (1-muoto). Sen ylennystä $A^{\sharp} = \sum_{\mu} A^{\mu} \partial/\partial x^0$ sanotaan *potentiaalinelivektoriksi* tai *nelipotentialiksi*. Huomaa, että $A_i = A^i$ ja $A_0 = -A^0$.

Potentiaali A ei ole yksikäsitteinen, sillä jos $F = dA$, niin myös $F = dA'$, missä $A' = A + df$ ja f on mielivaltainen 0-muoto. Muunnosta $A \mapsto A + df$ sanotaan *mittamuunnokseksi*. Selvästikin komponenttiin A_{μ} lisätään $\partial_{\mu} f = \partial f/\partial x^{\mu}$ mittamuunnoksessa.

Harjoitustehtävä 71. *Osoita, että $F = dA$ voidaan kirjoittaa seuraavissa muodoissa:*

a) $F_{\mu\nu} = \partial A_{\nu}/\partial x^{\mu} - \partial A_{\mu}/\partial x^{\nu},$

b) $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t,$ missä $\phi = cA^0$ ja $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3)$ ovat skalaari- ja vektoripotentiaalit.

Välittömästi nähdään, että Maxwellin yhtälö $\delta G = c^{-1}j$ on ‘Minkowskin avaruudesta riippumaton’ yhtälö ja voidaan määritellä millä tahansa sopivalla monistolla M . Erityisesti mielenkiintoinen on Lorentzin moniston tapaus. Yleinen Lorentzin monisto on n -ulotteinen semi-Riemannin monisto (M, g) , missä (jokaisen pisteen ympäristössä) on olemassa g :n Riemannin normaalikoordinaatit \mathbf{x} , jossa g :n matriisi (kyseisessä pisteessä) on $\text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$. Nyt $x^0 = ct$ tulkitaan aikakoordinaatiksi.

Kun määritellään ‘sähkömagneettisen kentän kenttätensori’ suljettuna 2-muotona F , niin sähkökenttää \mathbf{E} vastaa komponentit $F_{0i} = -E_i/c, i = 1, 2, \dots, (n-1)$ jne. Vastaavasti voidaan

¹⁹⁵Joka on affiinina avaruutena kutistuva. Jos avaruus ei ole kutistuva, niin A on olemassa vain lokaalisti joka pisteen ympäristössä eli ‘yhden’ *koko* monistolla määrittelyn A :n sijasta niitä on monta.

yleistää viritystensori G , lähde 1-muoto j , potentiaali A ja kaikki muutkin suureet. Lisäksi voidaan kirjoittaa ‘Maxwellin yhtälö’ $\delta G = c^{-1}j$.

Esimerkki 78. Ajatellaan tilannetta, missä avaruutena on suljettu lenkki (esim. hyvin ohut johdesilmukka, joka on eristetty ympäristöstään). Olkoon l lenkin pituus, joten ‘avaruus’ voidaan parametrizoida paikkakoordinaatilla x^1 , joka on l -jaksollinen eli pisteet x^1 ja $x^1 + l$ voidaan samaistaa. Täten oikeastaan $x^1 \in [0, l)$ ja avaruus on monistona ympyrä \mathbb{T} . Jos aikakoordinaatti on $x^0 = ct \in \mathbb{R}$, niin avaruus aika on sylinteri $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ parametrizointinaan (x^0, x^1) . Metriikka on (lokaalisti) muotoa $\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1$.

Nyt sähkömagneettisen kentän kenttätensori on $F = E_1 dx^1 \wedge dt$, missä $E_1 : \mathbb{R} \times [0, l)$ on (sileä) funktio, joka on jaksollinen eli $E_1(t, l) = E_1(t, 0)$. Nyt siis magneettikenttää ei ole lainkaan! Koska $F = dA$, $A = A_0 dx^0 + A_1 dx^1$, niin $E_1 = c\partial A_0/\partial x^1 - \partial A_1/\partial t$. **[!]** Viritystensori on $G = D_1 dx^1 \wedge dx^0$ ja lähde 1-muoto on $j = -c\rho dx^0 + j_1 dx^1$, joten Maxwellin yhtälö $\delta G = c^{-1}j$ redusoituu yhtälöiksi **[!]**

$$\frac{\partial D_1}{\partial x^1} = \rho, \quad \frac{\partial D_1}{\partial t} = -j_1.$$

Erityisesti, jos oletetaan, että $D_1 = \varepsilon E_1$, missä ε on vakio, ja että vapaita varauksia ei ole eli $\rho = 0 = j_1$, niin D_1 sekä E_1 ovat myös vakioita (eli testivaraus kiihtyy vakiokentässä ‘tasaisesti,’ muttei voi ylittää valon nopeutta kuten myöhemmin nähdään). Tällöin A on aina muotoa **[!]**

$$A = (\partial f/\partial t)dt + (-E_1 t + \partial f/\partial x^1)dx^1,$$

missä $f : \mathbb{R} \times [0, l)$ on sileä funktio, jonka kaikki osittaisderivaatat ovat jaksollisia, mutta voi olla, että $f(t, l) \neq f(t, 0)$. Esimerkiksi funktio $f(t, x^1) = ax^1$, $a \in \mathbb{R}$, käy mainiosti.

Vastaavasti voidaan käsitellä vaikka sähkömagneettista kenttää pallon pinnalla (lisättynä eulidisella ajalla t) tai sitten voidaan olettaa, että myös aika on jaksollinen (ympyrä). **[!]**

33 FYS: Varauksen liike sähkömagneettisessa kentässä

Tarkastellaan (testi)hiukkasen (lepomassa $m > 0$ ja varaus q) liikettä Minkowskin avaruudessa \mathbb{M}^4 sähkömagneettisessa kentässä $F = dA$ ja käytetään Poincarén karttaa $\mathbf{x} : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tapahtumien kuvaamiseen. Hiukkasen ominaisajalla τ parametrisoitu maailmanviiva $\alpha : (\tau_0, \tau_1) \rightarrow \mathbb{M}^4$ ilmaistaan kartassa \mathbf{x} funktiona $\underline{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ \alpha : (\tau_0, \tau_1) \rightarrow \mathbb{R}^4$. Olkoon (\mathbf{x}, \mathbf{u}) , $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$, tangenttikimpun $T\mathbb{M}^4$ kartta, jossa pisteen $(\mathbf{m}, a) = (\mathbf{m}, a^\mu \partial_\mu|_{\mathbf{m}})$ koordinaatit ovat $(x^0(\mathbf{m}), \dots, x^3(\mathbf{m}), a^0, \dots, a^3)$ eli $u^\mu(a) = \dot{x}^\mu(a) = a^\mu$. Erityisesti $\dot{\alpha}(\tau)$:n koordinaatit ovat $(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau))$, missä

$$\underline{\mathbf{u}}(\tau) = \frac{d\underline{\mathbf{x}}(\tau)}{d\tau}$$

antaa hiukkasen nelinopeuden $\dot{\alpha}(\tau) = \underline{u}^\mu(\tau) \partial_\mu|_{\alpha(\tau)} \in T\mathbb{M}^4|_{\alpha(\tau)}$ (ja siis $\dot{\alpha}(\tau) = (\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau)) \in T\mathbb{M}^4$). Kuten aiemmin on osoitettu, (käyrän τ -parametrisoinnin määrää ehto)

$$\eta|_{\alpha(\tau)}(\dot{\alpha}(\tau), \dot{\alpha}(\tau)) = \underline{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \boldsymbol{\eta} \underline{\mathbf{u}}(\tau) \equiv -c^2,$$

ja hiukkasen γ -tekijä määräytyy yhtälöstä $\underline{\gamma}(\tau) = \underline{u}^0(\tau)/c$ sekä tavanomaisen (3-ulotteisen) nopeuden $\underline{v}^i(\tau) \partial_i|_{\alpha(\tau)}$ komponentit ovat

$$\underline{v}^i(\tau) = \underline{\gamma}(\tau)^{-1} \underline{u}^i(\tau), \quad i = 1, 2, 3.$$

Varatun hiukkasen liike α tai $\tau \mapsto \underline{\mathbf{x}}(\tau)$ saadaan relativistisen liikeyhtälön $m\ddot{\alpha} = K \circ \dot{\alpha}$ eli yhtälön

$$m \frac{d^2 \underline{\mathbf{x}}(\tau)}{d\tau^2} = \mathbf{K}(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau))$$

ratkaisuna, missä Minkowskin voiman (K tai) \mathbf{K} komponentit ovat¹⁹⁶

$$\boxed{K^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = qF^\mu{}_\nu(\mathbf{x})u^\nu}$$

ja $F^\mu{}_\nu$ on tensorin $\uparrow_1^1 F$ komponentti. Jos $i = 1, 2, 3$, niin

$$K^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = qF_{i0}(\mathbf{x})u^0 + qF_{ij}(\mathbf{x})u^j = qc^{-1}E_i(\mathbf{x})u^0 + q\epsilon_{ijk}u^j B_k(\mathbf{x}),$$

$$K^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -qF_{0j}(\mathbf{x})u^j = qc^{-1}E_j(\mathbf{x})u^j.$$

Kun merkitään $\mathbf{F} := (K^1, K^2, K^3)$, niin

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = q \frac{u^0}{c} \mathbf{E}(\mathbf{x}) + q(u^1, u^2, u^3) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

¹⁹⁶Eli voidaan määritellä (karttariippumaton horisontaalinen) 1-muoto $K|_{(\mathbf{m}, a)} := K_\mu(\mathbf{m}, a) dx^\mu|_{(\mathbf{m}, a)} = qF_{\mu\nu}(\mathbf{m}) a^\nu dx^\mu|_{(\mathbf{m}, a)} = -qa^\nu F_{\nu\mu}(\mathbf{m}) dx^\mu|_{(\mathbf{m}, a)} = -qF|_{\mathbf{m}}(a)$ (katso luku 16.1). [!]

ja täten radalla α saadaan

$$\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \underline{\gamma}[q\mathbf{E}(\underline{\mathbf{x}}) + q\underline{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}})]$$

sekä yhtälö (6) eli¹⁹⁷

$$K^0(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \underline{\gamma}c^{-1}q\mathbf{E}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{v}}c^{-1}.$$

Relativistinen liikeyhtälö on nyt muotoa

$$\begin{aligned} mc \frac{d\underline{\gamma}(\tau)}{d\tau} &= K^0(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau)) = \underline{\gamma}(\tau)c^{-1}q\mathbf{E}(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) \cdot \underline{\mathbf{v}}(\tau), \\ m \frac{d\underline{\gamma}(\tau)\underline{\mathbf{v}}(\tau)}{d\tau} &= \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{u}}(\tau)) = \underline{\gamma}(\tau)[q\mathbf{E}(\underline{\mathbf{x}}(\tau)) + q\underline{\mathbf{v}}(\tau) \times \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}(\tau))] \end{aligned}$$

ja redusoituu hitaasti liikkuvan ($\tau \approx t$, $\underline{\gamma}(\tau) \approx 1 + \frac{1}{2}|\underline{\mathbf{v}}(\tau)|^2/c^2$) hiukkasen tapauksessa yhtälöiksi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[mc^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}(t)^2 \right] &\approx q\mathbf{E}(t, \underline{\mathbf{r}}(t)) \cdot \underline{\mathbf{v}}(t), \\ m \frac{d\underline{\mathbf{v}}(t)}{dt} &\approx q\mathbf{E}(t, \underline{\mathbf{r}}(t)) + q\underline{\mathbf{v}}(t) \times \mathbf{B}(t, \underline{\mathbf{r}}(t)) \end{aligned}$$

eli saatiin Newtonin toinen laki, missä voimana on *Lorentzin voima*. Lisäksi liike-energian muutosnopeus on sähköisen voiman $q\mathbf{E}$ teho hiukkasen radalla.

Olkoon $\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{o}$ toinen Poincarén kartta eli $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + o^\mu$ tai kääntäen $x^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu x'^\mu - \Lambda_\mu{}^\nu o^\mu$ (koska $\Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\alpha_\nu$). Nyt

$$\uparrow_1 F = F^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\nu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} F^\mu{}_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \otimes dx'^\beta = \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\mu F^\mu{}_\nu \Lambda_\beta{}^\nu}_{=: F'^\alpha{}_\beta} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \otimes dx'^\beta$$

ja $u'^\beta = \Lambda^\beta{}_\sigma u^\sigma$, jotenka

$$K'^\alpha(\mathbf{x}', \mathbf{u}') := qF'^\alpha{}_\beta(\mathbf{x}')u'^\beta = q\Lambda^\alpha{}_\mu F^\mu{}_\nu(\mathbf{x})\Lambda_\beta{}^\nu \Lambda^\beta{}_\sigma u^\sigma = q\Lambda^\alpha{}_\mu F^\mu{}_\nu(\mathbf{x})u^\nu = \Lambda^\alpha{}_\mu K^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

eli $\mathbf{K}'(\mathbf{x}', \mathbf{u}') = \mathbf{\Lambda}\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Täten relativistinen liikeyhtälö on muotoa

$$m \frac{d^2 \underline{\mathbf{x}}'(\tau)}{d\tau^2} = \mathbf{K}'(\underline{\mathbf{x}}'(\tau), \underline{\mathbf{u}}'(\tau)),$$

ja voidaan todeta, että *sähkömagnetismi on Poincaré-relativistinen teoria*.

Harjoitustehtävä 72. *Olkoon \mathbf{x} ja $\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{o}$ kaksi Poincarén karttaa ja*

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}F'_{\alpha\beta}dx'^\alpha \wedge dx'^\beta = dA$$

sähkömagneettinen kenttä.

a) *Osoita, että $F'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}') = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\beta{}^\nu F_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ ja $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu F'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')$.*

b) *Etsi myös potentiaalin $A = A_\mu dx^\mu = A'_\alpha dx'^\alpha$ komponenttien välinen muunnoskaava.*

Osoita, että siitä ja kaavasta $F = dA$ saat myös a)–kohdan muunnoskaavan F :n komponenteille.

¹⁹⁷Joka pätee nyt mielivaltaiselle käyrälle α , jonka ei tarvitse toteuttaa relativistista liikeyhtälöä!

Harjoitustehtävä 73. *Jatketaan edellistä harjoitustehtävää ja oletetaan, että $\mathbf{o} = \vec{0}$ sekä Λ antaa Lorentzin muunnoksen $x^0 = x^0 \cosh \phi - x^1 \sinh \phi$, $x^1 = -x^0 \sinh \phi + x^1 \cosh \phi$, $x^2 = x^2$, $x^3 = x^3$ eli $t' = \gamma(t - vc^{-2}x^1)$ ja $x'^1 = \gamma(x^1 - vt)$, missä $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = \tanh \phi$ ja $v = \beta c$. Jos \mathbf{x}' -havaintsija mittaa kentät \mathbf{E}' ja \mathbf{B}' eli $F = \mathcal{E}' \wedge dt' + \mathcal{B}'$, missä esim. $\mathcal{E}' = E'_i dx'^i$, niin osoita, että \mathbf{x} -havaintsija mittaa kentät \mathbf{E} ja \mathbf{B} , joiden komponentit ovat*

$$\begin{aligned} E_1 &= E'_1, & E_2 &= \gamma(E'_2 + vB'_3), & E_3 &= \gamma(E'_3 - vB'_2), \\ B_1 &= B'_1, & B_2 &= \gamma(B'_2 - E'_3 v/c^2), & B_3 &= \gamma(B'_3 + E'_2 v/c^2). \end{aligned}$$

Vinkki: $F = \mathcal{E}' \wedge dt' + \mathcal{B}' = \mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B}$, missä esim. $\mathcal{E} = E_j dx^j$, tai edellisen tehtävän a)-kohdan jälkimmäinen muunnoskaava.

Edellistä harjoitustehtävää vastaavat kaavat saadaan tietenkin myös viritystensoren G kentille \mathbf{D} ja \mathbf{H} , koska G määritellään samaan tapaan kuin F . Huomaa, että mielivaltaiseen suuntaan tehty nopeussysäys voidaan aina nähdä jonkun kartan x^1 -akselin suuntaan tehtynä kiertämällä koordinaatistoa sopivasti.

Mielenkiintoinen huomio on, että vaikka \mathbf{x}' -havaintsija mittaisi vain pelkän sähkökentän, niin ‘paikallaan pysyvä’ \mathbf{x} havaitsee myös magneettikentän. Esimerkiksi jos sähkömagneettisen kentän lähteenä oleva varaus Q liikkuu tasaisella nopeudella v havaintsijan \mathbf{x} x^1 -akselia pitkin, niin varaukseen sidotussa kartassa \mathbf{x}' havaitaan vain (Coulombin lain mukainen) sähkökenttä \mathbf{E}' ja $\mathbf{B}' \equiv \vec{0}$. Mutta \mathbf{x} -havaintsija mittaa sekä sähkökentän $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3) = (E'_1, \gamma E'_2, \gamma E'_3)$ että (nollasta eriävän) magneettivuon tiheyden $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3) = (0, -\gamma E'_3 v/c^2, \gamma E'_2 v/c^2)$. Viimeistään tämä havainto vakuuttanee meidät siitä, että sähkö- ja magneettikentät ovat ‘samassa roolissa’ sähkömagnetismissa, ja että sähkömagnetismi (sähkö+magneetti) on aito yhteinäiskenttäteoria. Tarkastellaan lopuksi vielä varatun hiukkasen Lagrangen funktiota.

Vapaan hiukkasen Lagrangen funktioksi voidaan valita esimerkiksi kuvaus

$$T\mathbb{M}^4 \ni (\mathbf{m}, a) \mapsto \frac{m}{2} \eta|_{\mathbf{m}}(a, a) = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu \in \mathbb{R},$$

missä m on hiukkasen massa. Selvästikin tämä on ‘massametriikan’ $m\eta$ antama yleistetty ‘liike-energia’. Kun hiukkanen liikkuu sähkömagneettisessa kentässä $F = dA$, niin vapaan hiukkasen Lagrangen funktioon pitää lisätä joku hiukkasen varauksesta q , liikkeestä $\dot{\alpha}(\tau) = (\alpha(\tau), \dot{\alpha}(\tau))$ ja kentästä A riippuva termi. Yksikertaisin termi lienee $qA|_{\mathbf{m}}(a)$, joten määritellään *varatun hiukkasen Lagrangen funktio*

$$L : T\mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{m}, a) \mapsto \frac{m}{2} \eta|_{\mathbf{m}}(a, a) + qA|_{\mathbf{m}}(a) = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu + qA_\sigma(\mathbf{m}) a^\sigma,$$

joten

$$(L \circ \dot{\alpha})(\tau) = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \underline{u}^\mu(\tau) \underline{u}^\nu(\tau) + A_\sigma(\alpha(\tau)) \underbrace{q \underline{u}^\sigma(\tau)}_{\text{'virta'}}.$$

Kartan $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ avulla ilmaistuna

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + q A_\sigma(\mathbf{x}) u^\sigma.$$

Harjoitustehtävä 74. *Osoita, että L :n Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöt*

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

antavat relativistisen liikeyhtälön, jossa Minkowskin voimana on $K^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = q F^\mu{}_\nu(\mathbf{x}) u^\nu$. Määrittää myös (kanonisesti konjugoitu) impulssi, Hamiltonin funktio ja Hamiltonin liikeyhtälöt.

Heti nähdään (korvaamalla η g :llä), että L voidaan yleistää mielivaltaiselle semi-Riemannin monistolle (M, g) ja M :n 1-muodolle A . Selvästikin m ja q ovat tärkeitä vakioita: hitausmassa m antaa hiukkasen 'hitauden' (massiivinen hiukkanen vastustelee liiketilansa muutosta) ja varaus q antaa vuorovaikutuksen 'kytkennän' voimakkuuden eli voimakkuuden, millä hiukkanen kytkeytyy kenttään A (jos $q = 0$, niin hiukkanen on vapaa ja liikkuu g :n geodeesia pitkin). Huomaa, että jos hiukkasen massa ja/tai varaus on suuri, niin se vaikuttaa metriikkaan g ja kenttään A eli hiukkanen 'kaareuttaa' itsekin avaruusaikaa ja luo ympärilleen sähkömagneettisen kentän. Siksi L kuvaa oikeastaan vain riittävän pienen (passiivisen)¹⁹⁸ testihiukkasen liikettä metriikassa g ja kentässä A .

Huomautus 22. Kuten tunnettua, lineaarisen isotrooppisen väliaineen tapauksessa meillä on materian yhtälöt $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ja Ohmin laki $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (kun oletetaan, että $\tilde{\mathbf{j}} \equiv \vec{0}$). Tarkastellaan nyt tilannetta, missä kyseinen väliaine liikkuu vakionopeudella \mathbf{v} Poincarén kartassa \mathbf{x} eli väliaineen nelinopeus on $\mathbf{u} = \gamma(c, v^1, v^2, v^3)$, missä $\gamma = 1/\sqrt{1 - (|\mathbf{v}|/c)^2}$.

¹⁹⁸Jos hiukkasta (varaus Q) ajatellaan aktiivisena sähkömagneettisen kentän lähteenä, niin siihen liittyvän nelivirran (lähde 1-muoto) komponentit ovat (formaalisti) muotoa $j^\mu(\mathbf{x}) = cQ \int \delta(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}(\tau)) \underline{u}^\mu(\tau) d\tau$ eli, koska $\underline{u}^\mu(\tau) = d\underline{x}^\mu(\tau)/d\tau$, saadaan $j^0(t, \mathbf{r}) = cQ \delta(\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}(t)) = \rho_0(t, \mathbf{r}) \underline{u}^0(t)$ ja samoin $j^k(t, \mathbf{r}) = \underline{v}^k(t) Q \delta(\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}(t)) = \rho_0(t, \mathbf{r}) \underline{u}^k(t)$, missä $\rho_0(t, \mathbf{r}) := \underline{\gamma}(t)^{-1} \rho(t, \mathbf{r})$ ja $\rho(t, \mathbf{r}) := Q \delta(\mathbf{r} - \underline{\mathbf{r}}(t))$ on varaustiheys. Hiukkasen 'lepokoordinaatistossa' $\underline{\mathbf{x}}'$ eli (hetkellä t) hiukkasen mukana tasaisesti liikkuvan inertiaalisen havaitsijan kartassa varaustiheys on ρ_0 , sillä harjoitustehtävästä 73 nähdään, että [!]

$$\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \rho \underline{\gamma}(t)^{-1} dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 + \dots = \rho_0 dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 + \dots$$

Nyt materian yhtälö on

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu c} F_{\alpha\beta} + \frac{\chi}{\mu c^3} (u_\beta u^{\sigma'} F_{\sigma'\alpha} - u_\alpha u^\sigma F_{\sigma\beta}),$$

missä

$$\chi := \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} - 1.$$

Materian yhtälö voidaan esittää yhtäpitävässä muodossa [!]

$$\mathbf{D} + c^{-2}\mathbf{v} \times \mathbf{H} = \varepsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B} - c^{-2}\mathbf{v} \times \mathbf{E} = \mu(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})$$

eli tapauksessa $\mathbf{v} = \vec{0}$ saadaan tutut yhtälöt. Yleisesti $G_{\alpha\beta} \neq \sqrt{\varepsilon/\mu} F_{\alpha\beta}$, mutta tyhjiössä (ei väliainetta) $\chi = 0$ ja yhtälö pätee.

Jos johde liikkuu nopeudella \mathbf{v} ja sen lepokoordinaatistossa varaustiheys on nolla, niin Ohmin laki on kartassa \mathbf{x} muotoa $j_\alpha = \sigma F_{\alpha\beta} u^\beta$ tai

$$\mathbf{j} = \sigma\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \rho = c^{-2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$$

eli varaustiheys ρ ei nyt olekaan nolla (mikäli $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \neq 0$)! Tämä on puhtaasti relativistinen efekti.

34 FYS: Säilymislait

Kun operoidaan Maxwellin yhtälöön $\delta G = c^{-1}j$ kodifferentiaalilla δ , saadaan $\delta(\delta G) = 0 = c^{-1}\delta j$ eli *jatkuvuusyhtälö* (tai *kontinuiteetti-yhtälö*)

$$0 = -\delta j = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}$$

joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx \wedge dy \wedge dz = -d\mathcal{J}$$

tai

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dx \wedge dy \wedge dz = - \int_{\partial V} \mathcal{J},}$$

missä V on \mathbb{R}^3 :n 3-ulotteinen reunallinen alimonisto ja $Q(t)$ on kokonaisvaraus alueessa V (hetkellä t), eli ollaan saatu *varauksen säilymislaki*: Varauksen Q muutosnopeus (mielivaltaisessa) alueessa V johtuu (vain ja ainoastaan) varauksen virtaamisesta eli sähkövirrasta \mathcal{J} reunapinnan ∂V läpi. Myös kokonaisenergia säilyy, kuten seuraavaksi nähdään.

Sähkömagneettisen kentän *energiatiheys* on

$$W := \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

ja *Poyntingin vektori(kenttä)*

$$\mathbf{S} \equiv (S_1, S_2, S_3) := \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Tyhjiössä esim. $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu_0^{-1}|\mathbf{B}|^2$. Määritellään sähkömagneettisen kentän *energiatiheys* uudelleen \mathbb{R}^3 :n 3-muotona (aika on nyt parametri)

$$\mathcal{W} := \star W = \frac{1}{2} \mathcal{E} \wedge \mathcal{D} + \frac{1}{2} \mathcal{H} \wedge \mathcal{B},$$

missä ensimmäinen termi on sähkökentän energiatiheys ja toinen termi on magneettikentän energiatiheys. Vastaavasti määritellään \mathbb{R}^3 :n *Poyntingin 2-muoto*

$$\mathcal{S} := \mathcal{E} \wedge \mathcal{H} = S_1 dy \wedge dz + S_2 dz \wedge dx + S_3 dx \wedge dy.$$

Käyttämällä Maxwellin yhtälöitä $d\mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}}$ ja $d\mathcal{H} = \mathcal{J} + \dot{\mathcal{D}}$ saadaan seuraava tulos \mathbb{R}^3 :ssa (eli ns. *Poyntingin lause*):

$$d\mathcal{S} = d\mathcal{E} \wedge \mathcal{H} - \mathcal{E} \wedge d\mathcal{H} = -(\mathcal{H} \wedge \dot{\mathcal{B}} + \mathcal{E} \wedge \dot{\mathcal{D}}) - \mathcal{E} \wedge \mathcal{J}.$$

Ajasta riippumattoman lineaarisen aineen tapauksessa

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \epsilon^k_l}{\partial t} \equiv 0 \equiv \frac{\partial \mu^k_l}{\partial t},$$

joten $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon \dot{\mathbf{E}}$ ja $\dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}}$ sekä täten

$$\mathcal{H} \wedge \dot{\mathbf{B}} + \mathcal{E} \wedge \dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathcal{W}}.$$

Tässä tapauksessa Poyntingin lause redusoituu yhtälöksi

$$\dot{\mathcal{W}} = -d\mathcal{S} - \mathcal{E} \wedge \mathcal{J} \quad (40)$$

eli vektorimuodossa $\dot{W} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$, tai integroimalla \mathbb{R}^3 :n reunallisen 3-ulotteisen alimoniston V yli, yhtälöksi

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = - \int_{\partial V} \mathcal{S} - \int_V \mathcal{E} \wedge \mathcal{J},}$$

missä $E := \int_V \mathcal{W}$ on sähkömagneettisen kentän energia alueessa V . Täten ollaan saatu (varausten ja kentän muodostaman systeemin) *energian säilymislaki*: Energian E muutosnopeus (mielellätaisesti) alueessa V johtuu energiavirrasta (esim. sähkömagneettisesta säteilystä) $\int_{\partial V} \mathcal{S}$ reunapinnan ∂V läpi (Poyntingin vektorikentän vuo pinnan yli) sekä sähkövirrasta \mathcal{J} (varausten liikkeestä) riippuvasta termistä $\int_V \mathcal{E} \wedge \mathcal{J}$, joka kuvaa kentän ja hiukkasten vuorovaikutusta, hiukkasten mekaanisen energian muutoksia ja mm. lämmöksi muuttuvaa energiaa (aineen resistiivisyys).

34.1 Sähkömagneettisen kentän energia-impulssitensori tyhjiössä

Tarkastellaan sitten sähkömagneettisen kentän energiaa ja impulssia **tyhjiössä**. Määritellään 1-muoto $f = -F(j^\sharp)$, jonka komponentit

$$f_\alpha = -j^\beta F_{\beta\alpha} = F_{\alpha\beta} j^\beta$$

muodostavat *Lorentzin voimatiheyden* $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3) = (f_1, f_2, f_3)$, sillä suoralla laskulla nähdään, että $f_0 = -f^0 = F_{0k} j^k = -(E_k/c) j^k = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}/c$ ja $f_k = E_k \rho + \epsilon_{klm} j^l B_m$ eli $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$.¹⁹⁹ Erityisesti, jos²⁰⁰ $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ (missä \mathbf{v} on sähkövirran keskimääräinen nopeuskenttä), niin

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad f^0 = \frac{1}{c} \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

¹⁹⁹Väliaineessa (makroskooppiseen) voimatiheyteen \mathbf{f} pitää lisätä mm. väliaineen polarisaatiosta ja magnetisaatiosta riippuvia lisätermejä!

²⁰⁰Huom! Jos jokaisessa tilavuuselementissä on likimäärin yhtä paljon vapaita positiivisia ja negatiivisia varauksia, niin $\rho = 0$, mutta silti voi olla, että $\mathbf{j} \neq \vec{0}$.

eli $f = -(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})dt + \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$, missä on merkitty enemmän tai vähemmän²⁰¹ formaalisti $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Maxwellin yhtälöstä $\delta G = c^{-1}j$ eli $j_\beta = c\partial_\sigma G_\beta^\sigma$ seuraa, että

$$f_\alpha = F_{\alpha\beta}j^\beta = cF_{\alpha\beta}\partial_\sigma G^{\beta\sigma}.$$

Toisaalta, jos määritellään ns. (tyhjiön) energia-impulssitensori $T = T_\alpha^\beta \partial/\partial x^\beta \otimes dx^\alpha$ kaavalla²⁰²

$$T_\alpha^\beta := -cF_{\alpha\sigma}G^{\sigma\beta} - \frac{c}{4}F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta,$$

niin suoralla laskulla nähdään, että koska tyhjiössä $F = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}G$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c}\frac{\partial T_\alpha^\beta}{\partial x^\beta} &= (\partial_\beta F_{\alpha\sigma})G^{\sigma\beta} + F_{\alpha\sigma}\partial_\beta G^{\sigma\beta} + \frac{1}{4}\partial_\beta(F_{\mu\nu}G^{\mu\nu})\delta_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\beta F_{\alpha\sigma})G^{\sigma\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\beta F_{\alpha\sigma})G^{\sigma\beta} + F_{\alpha\sigma}\partial_\beta G^{\sigma\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\alpha F_{\mu\nu})G^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu F_{\alpha\nu})G^{\nu\mu} + (\partial_\nu F_{\alpha\mu})G^{\mu\nu} + (\partial_\alpha F_{\mu\nu})G^{\mu\nu}] + F_{\alpha\sigma}\partial_\beta G^{\sigma\beta} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{[\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu}]}_{\equiv 0, \text{ sillä } dF=0 \text{ [!]}}G^{\mu\nu} + F_{\alpha\beta}\partial_\sigma G^{\beta\sigma} = \frac{1}{c}f_\alpha \end{aligned}$$

eli

$$\boxed{\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -f^\alpha.} \quad (41)$$

Harjoitustehtävä 75. Osoita, että

$$\bar{\eta}(F, G) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = \frac{1}{c}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}),$$

$$(T^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=0}^3 = \begin{pmatrix} W & c^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_1 & c^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_2 & c^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_3 \\ c(\mathbf{D} \times \mathbf{B})_1 & W - E_1 D_1 - H_1 B_1 & -E_1 D_2 - H_1 B_2 & -E_1 D_3 - H_1 B_3 \\ c(\mathbf{D} \times \mathbf{B})_2 & -E_2 D_1 - H_2 B_1 & W - E_2 D_2 - H_2 B_2 & -E_2 D_3 - H_2 B_3 \\ c(\mathbf{D} \times \mathbf{B})_3 & -E_3 D_1 - H_3 B_1 & -E_3 D_2 - H_3 B_2 & W - E_3 D_3 - H_3 B_3 \end{pmatrix},$$

jälki $\sum_{\alpha=0}^3 T_\alpha^\alpha = 0$, $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ ja, että laittamalla $\alpha = 0$ kaavaan (41), saat energian säilymlain (40). Vinkki: tyhjiössä $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ jne.

Edellisen harjoitustehtävän nojalla nähdään, että matriisin $(T^{\alpha\beta})$ nollannella vaaka (ja pystyriivillä) on vektorin $\mathbf{S}/c = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c = c(\mathbf{D} \times \mathbf{B})$ komponentit. Lisäksi kaava (41)

²⁰¹Itseasiassa $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$ on 'vektoriarvoinen' 1-muoto.

²⁰²Eli $T := cC_2^1(F \otimes \uparrow_1 \uparrow_2^2 G) + c2^{-1}\bar{\eta}(F, G)I$, missä $\bar{\eta}$ on metriikan η laajennus 2-muodoille ja I on identiteetitensori.

antaa energian säilymislain. Seuraavaksi ihmetellään kaavan (41) muita komponentteja (eli $\alpha = k \in \{1, 2, 3\}$):

$$-\sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial T^{k\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial S^k}{\partial t} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} = f^k = \rho E^k + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})^k$$

eli määrittelemällä *Maxwellin jännitystensori* $\sum_{k,l=1}^3 \sigma^{kl} \partial_k \otimes \partial_l$,

$$\sigma^{kl} := -T^{kl} = E^k D^l + H^k B^l - \delta^{kl} W,$$

saadaan

$$f^k = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial S^k}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial x^l}. \quad (42)$$

Koko loppuluvun ajan kiinnitetään hetki t ja \mathbb{R}^3 :n reunallinen 3-ulotteinen alimonisto V . Vä-
 littömästi nähdään, että (ajasta riippuva) vektori

$$\int_V \mathbf{f} \, dx \wedge dy \wedge dz$$

on alueessa V oleviin/liikkuviin varauksiin vaikuttava (Lorentzin) kokonaisvoima.

Esimerkki 79. Tarkastellaan tilannetta missä magneettikenttä $\mathbf{H} \equiv \vec{0}$, jotenka $\mathbf{S} \equiv \vec{0}$ ja $\sigma^{kl} = E^k D^l - \delta^{kl} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$. Tällöin yhtälö (42) redusoituu kaavaksi

$$\rho E^k = f^k = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial x^l},$$

josta integroimalla saadaan alueessa V oleviin varauksiin vaikuttavan kokonaisvoiman k :s kom-
 ponentti [!]

$$\begin{aligned} \int_V f^k \, dx \wedge dy \wedge dz &= \int_V d(\sigma^{k1} dy \wedge dz + \sigma^{k2} dz \wedge dx + \sigma^{k3} dx \wedge dy) \\ &= \int_{\partial V} \sigma^{k1} dy \wedge dz + \sigma^{k2} dz \wedge dx + \sigma^{k3} dx \wedge dy, \end{aligned} \quad (43)$$

joka siis on (pelkästä sähkökentästä \mathbf{E} riippuvan) Maxwellin jännitystensorin generoiman ‘pin-
 tavoiman’ k :s komponentti.

Tutkitaan sitten levykondensaattorin kenttää: Olkoon xy -tasossa positiivisesti varauttu levy,
 jonka varaus on $Q > 0$, ja levyn yläpuolella korkeudella $z_0 > 0$ samanlainen levy (siis myös
 xy -tason suuntaisessa tasossa), jonka varaus on $-Q$. Levyjen voidaan ajatella olevan tyhjiössä.
 Jos levyn pinta-ala on A , niin tunnetusti (myös kokeellisesti) sähkökenttä \mathbf{E} levyjen välissä²⁰³
 (kaukana reunoista) on

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} (0, 0, 1)$$

²⁰³Levyjen muodostaman systeemin ulkopuolella $\mathbf{E} \equiv \vec{0}$.

ja ylempään levyn alempaan levyyn kohdistama kokonais voima on

$$\mathbf{F} = (F^1, F^2, F^3) = Q \frac{\mathbf{E}}{2} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} (0, 0, 1) = \frac{\epsilon_0 A}{2} |\mathbf{E}|^2 (0, 0, 1).$$

Toisaalta $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, joten ainoa nollasta eriävä matriisialkio σ^{kl} on

$$\sigma^{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \quad (\text{levyjen ulkopuolella tämäkin on } 0).$$

Jos alue V kiittää vain alemman levyn ympäri ja on vaakatasossa levyjen välissä, niin

$$\int_{\partial V} \sigma^{k1} dy \wedge dz + \sigma^{k2} dz \wedge dx + \sigma^{k3} dx \wedge dy = \delta^{k3} \int_A \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 dx \wedge dy = F^k.$$

Jos levykondensaattori on säädettävä siten, että levyjen pinta-alaa A voidaan muuttaa, niin voidaan osoittaa, että muutkin matriisialkiot σ^{kl} ovat nollasta eriäviä (eli saadaan leikkausjännityksiäkin) ja kaava (43) pätee. Täysin vastaavasti voidaan käsitellä tapaus $\mathbf{E} \equiv \vec{0}$ ja päädytään samaan lopputulokseen, jota voidaan testata sopivan ‘katkaistun’ renkaan mallisen kestopagneetin raon magneettikentässä.

Oletetaan sitten, että (42) pätee ja V on niin suuri, että varauksia ei pääse virtaamaan sen ulkopuolelle (edelleen ollaan tyhjiössä). Newtonin toisen lain perusteella kokonaisvoima $\int_V \mathbf{f} dx \wedge dy \wedge dz$ on kaikkien V :ssä olevien varattujen hiukkasten liikemäärien summan (eli kokonaisliikemäärän) \mathcal{P}_V aikaderivaatta. Täten integroimalla kaava (42) saadaan

$$\boxed{\frac{d(\mathcal{P}_V + \mathcal{S}_V)}{dt} = \mathcal{M}_V}, \quad (44)$$

missä Maxwellin jännitystensorin generoiman ‘pintavoiman’ \mathcal{M}_V :n k :s komponentti on

$$\int_{\partial V} \sigma^{k1} dy \wedge dz + \sigma^{k2} dz \wedge dx + \sigma^{k3} dx \wedge dy$$

ja

$$\mathcal{S}_V := \int_V \frac{1}{c^2} \mathbf{S} dx \wedge dy \wedge dz$$

tulkitaan *sähkömagneettisen kentän liikemääräksi* alueessa V . Täten $\mathbf{S}/c^2 = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ on kentän liikemäärätiheys, $\mathcal{P}_V + \mathcal{S}_V$ on kokonaisliikemäärä (varaukset+kenttä) ja (44) (tai (42)) on *liikemäärän säilymlaki*. Erityisesti, jos $V = \mathbb{R}^3$ (ja fysikaaliset kentät tietenkin häviävät ‘äärettömydessä’), niin $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^3} = \vec{0}$ ja kokonaisliikemäärä $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^3} + \mathcal{S}_{\mathbb{R}^3}$ on vakio. Toisaalta, jos ei ole varattuja hiukkasia (vaan pelkkä kenttä) alueessa V , niin $\dot{\mathcal{S}}_V = \mathcal{M}_V$ ja (yleisemminkin) \mathcal{M}_V voidaan tulkita liikemäärän muuttumisnopeutena johtuen ‘liikemäärän virtaamisesta’ pinnan ∂V läpi. Sähkömagneettisella *kentällä* (samoin kuin materiaalakin) on siis liikemäärä ja jännitystensori.

Johtopäätöksenä voidaan sanoa, että *energia-impulssitensori antaa sekä energian että liikemäärän (impulssin) säilymislait kaavan (41) muodossa*. Tämä on energia-impulssitensorin perusominaisuus olipa kentät ja/tai materia mitä tahansa.

Huomaa, että yhtälö (44) kuvaa vain sähkömagneettista tilannetta. Jos aineeseen vaikuttaa ulkoisia voimia (esim. gravitaatio) tai varauksen kuljettajien välillä on pintavoimia (viskositeetti), niin kaavaan (44) pitää lisätä termejä (esim. ulkoisten voimien tiheys tai materia jännitystensoritermi). Palautetaan seuraavaksi nestedynamiikan tilanne mieleen.

Huomautus 23. Tarkastellaan nestettä (tiheyskenttä ρ ja nopeuskenttä \mathbf{v}) 3-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Aiemmin ollaan osoitettu, että

- nesteen kokonaisliikemäärä on

$$\mathcal{P}_V^{\rho, \mathbf{v}} = \int_V \rho \mathbf{v} dx \wedge dy \wedge dz,$$

- kokonaisliikemäärän muuttumisnopeus johtuen nesteen virtaamisesta pinnan ∂V läpi on

$$\mathcal{M}_V^{\rho, \mathbf{v}} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} (v^1 dy \wedge dz + v^2 dz \wedge dx + v^3 dx \wedge dy),$$

- nesteeseen vaikuttava kokonaiskappalevoima (tilavuusvoima) on

$$\mathcal{F}_V^{\rho, \mathbf{v}} = \int_V \rho \mathbf{g} dx \wedge dy \wedge dz,$$

missä $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) = (g^1, g^2, g^3)$ on (ulkoisten voimien) kentänvoimakkuus (voima/massayksikkö eli kiihtyvyyys),

- kokonaiskontaktivoima (pintavoima), jonka aiheuttaa neste pinnan ∂V ulkopuolella nesteeseen V :ssä, on $\mathcal{G}_V^{\rho, \mathbf{v}}$, jonka k :s komponentti on

$$\int_{\partial V} \sigma_{k1}^{\rho, \mathbf{v}} dy \wedge dz + \sigma_{k2}^{\rho, \mathbf{v}} dz \wedge dx + \sigma_{k3}^{\rho, \mathbf{v}} dx \wedge dy = \int_V \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \sigma_{kl}^{\rho, \mathbf{v}}}{\partial x^l} dx \wedge dy \wedge dz,$$

missä $\sigma = \sum_{k,l=1}^3 \sigma_{kl}^{\rho, \mathbf{v}} \partial_k \otimes \partial_l$ on nesteen jännitystensori (jonka diagonaali-alkiot $\sigma_{kk}^{\rho, \mathbf{v}}$ ovat normaalijännityksiä ja alkio $\sigma_{kl}^{\rho, \mathbf{v}}$, $k \neq l$, ovat leikkausjännityksiä). Merkitään jatkossa lyhyesti $\sigma^{kl} := \sigma_{kl}^{\rho, \mathbf{v}}$.

- Newtonin toisesta laista seuraa, että

$$\frac{d\mathcal{P}_V^{\rho, \mathbf{v}}}{dt} = \mathcal{M}_V^{\rho, \mathbf{v}} + \mathcal{G}_V^{\rho, \mathbf{v}} + \mathcal{F}_V^{\rho, \mathbf{v}}$$

eli saadaan nesteen liikeyhtälö (ja tästä sitten NS yhtälö)

$$\frac{\partial \rho v^k}{\partial t} = \frac{\partial \rho v^k c}{\partial x^0} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial (\sigma^{kl} - \rho v^k v^l)}{\partial x^l} + \rho g^k. \quad (45)$$

Jos $\mathbf{g} \equiv \vec{0}$, niin $\dot{\mathcal{P}}_V^{\rho, \mathbf{v}} = \mathcal{M}_V^{\rho, \mathbf{v}} + \mathcal{G}_V^{\rho, \mathbf{v}}$ ja (verrattaessa yhtälöön (44)), niin Maxwellin jännitystensori ‘vastaa’ oikeastaan tensoria $(\sigma^{kl} - \rho v^k v^l) \partial_k \otimes \partial_l$.

Välittömästi nousee esille kysymys: Mikä on nesteen (relativistinen) energia-impulssitensori?

Meillä on siis jatkuvuusyhtälö $\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ ja (45), jotka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho c c}{\partial x^0} + \frac{\partial \rho c v^l}{\partial x^l} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v^k c}{\partial x^0} + \frac{\partial (\rho v^k v^l - \sigma^{kl})}{\partial x^l} &= \rho g^k. \end{aligned} \quad (46)$$

Ilmaistaan neste Minkowskin avaruuden Poincarén kartassa $\mathbf{x} = (ct, \mathbf{r})$ ja määritellään $\beta^k(\mathbf{x}) := v^k(t, \mathbf{r})/c$, $\gamma(\mathbf{x}) := (1 - \sum_{k=1}^3 |\beta^k(\mathbf{x})|^2)^{-1/2}$ ja nesteen nelinopeus(kenttä) $u = u^\alpha \partial / \partial x^\alpha$, missä $u^0(\mathbf{x}) := \gamma(\mathbf{x})c$ ja $u^k(\mathbf{x}) := \gamma(\mathbf{x})v^k(t, \mathbf{r})$, joten nähdään, että $\eta(u, u) = -(u^0)^2 + \sum_k (u^k)^2 \equiv -c^2$.

Jaetaan nesteen jännitystensori σ osiin kuten aiemmin: $\sigma = -p \sum_{k=1}^3 \partial_k \otimes \partial_k + \hat{\sigma}$, missä $p = p^0$ on staattinen paine ja $\hat{\sigma}$ on ‘viskositeettijännitystensori.’ Ajatellaan, että ulkoiset voimat ‘sisältyvät’ johonkin nelivoimavektorikenttään $f = f^\alpha \partial_\alpha$ (jonka komponentit $f^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ voivat riippua myös nopeuskoodinaateista $\mathbf{u} = (u^\alpha)$) ja jännitystensori σ johonkin Minkowskin avaruuden tensoriin $\tau = \tau^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta$ (jonka komponentit voivat riippua myös \mathbf{u} :sta).²⁰⁴ Jaetaan myös τ osiin: $\tau = -p\eta^{-1} + \hat{\tau}$ eli $\tau^{\alpha\beta} = -p\eta^{\alpha\beta} + \hat{\tau}^{\alpha\beta}$. Jos $|\mathbf{v}(t, \mathbf{r})| \ll c$, niin $u^0(\mathbf{x}) \approx c$ ja $u^k(\mathbf{x}) \approx v^k(t, \mathbf{r})$. Oletetaan, että myös tällöin $f^k(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \approx \rho(\mathbf{x})g^k(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}(t, \mathbf{r}))$ ja $\hat{\tau}^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \approx \hat{\sigma}^{kl}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}(t, \mathbf{r}))$.

Määritellään (relativistisen) nesteen energia-impulssitensori

$$T := (\rho + pc^{-2})u^\alpha u^\beta \partial_\alpha \otimes \partial_\beta + p\eta^{-1} - \hat{\tau},$$

jonka matriisi pisteessä \mathbf{x} (sijoituksen $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ jälkeen) on

$$(T^{\alpha\beta}) \approx \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v^1 & \rho c v^1 & \rho c v^1 \\ \rho v^1 c & \rho v^1 v^1 + p - \hat{\sigma}^{11} & \rho v^1 v^2 - \hat{\sigma}^{12} & \rho v^1 v^3 - \hat{\sigma}^{13} \\ \rho v^2 c & \rho v^2 v^1 - \hat{\sigma}^{21} & \rho v^2 v^2 + p - \hat{\sigma}^{22} & \rho v^2 v^3 - \hat{\sigma}^{23} \\ \rho v^3 c & \rho v^3 v^1 - \hat{\sigma}^{31} & \rho v^3 v^2 - \hat{\sigma}^{32} & \rho v^3 v^3 + p - \hat{\sigma}^{33} \end{pmatrix}$$

kun $|\mathbf{v}(t, \mathbf{r})| \ll c$ (tässä on myös oletettu, että matriisin nollansilla vaaka- sekä pystyriveillä tekijät $\rho c v^k$ hallitsevat). Välittömästi nähdään, että yhtälö

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = f^\alpha$$

²⁰⁴Eli itseasiassa f ja τ ovat (ylennettyjä) horisontaalisia $T^*(TM^4)$:n tensorikenttiä.

antaa likimäärin yhtälöt (46) pienillä nesteen nopeuksilla. Lisäksi $T^{00} = \gamma^2 \rho c^2 + (\gamma^2 - 1)p - \hat{\tau}^{00}$ on nesteen energiatiheys (koska ‘ $E = mc^2 + \dots$ ’). Jokaiselle pistetapahtumalle $\mathbf{m} \in \mathbb{M}^4$ on olemassa (nesteen mukana liikkuva) *Poincarén kartta* \mathbf{x} siten, että siinä ilmaistuna nesteen nelinopeus $u|_{\mathbf{m}} = c\partial_0|_{\mathbf{m}}$ eli \mathbf{x} on nesteen lepokoordinaatisto (pisteessä \mathbf{m}). Jos sisäistä kitkaa ei ole eli $\hat{\tau} \equiv 0$, niin tässä kartassa $(T^{\alpha\beta}(\mathbf{m})) = \text{diag}(\rho(\mathbf{m})c^2, p(\mathbf{m}), p(\mathbf{m}), p(\mathbf{m}))$. [!]

Huomautus 24. Jos jollain *Minkowskin avaruuden* kentällä on energia-impulssitensori T , niin voidaan määritellä *kentän kiertoimpulssitiheystensori(kenttä)* L tapahtuman $\mathbf{m} \in \mathbb{M}^4$ suhteen kaavalla²⁰⁵

$$L^{\mu\nu\sigma}(\mathbf{x}) := x^\mu T^{\nu\sigma}(\mathbf{x}) - x^\nu T^{\mu\sigma}(\mathbf{x}),$$

missä \mathbf{x} on *Poincarén kartta*, jolle $\mathbf{x}(\mathbf{m}) = \vec{0}$. Selkeästi kaava pysyy samannäköisenä Lorentzin muunnoksissa eli myös Poincarén kartassa $\mathbf{x}' = \Lambda\mathbf{x}$. Nyt

$$\frac{\partial L^{\mu\nu\sigma}(\mathbf{x})}{\partial x^\sigma} = x^\mu \frac{\partial T^{\nu\sigma}(\mathbf{x})}{\partial x^\sigma} - x^\nu \frac{\partial T^{\mu\sigma}(\mathbf{x})}{\partial x^\sigma}$$

mikäli T on symmetrinen eli $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Jos lisäksi ‘ulkoisia voimia’ f (tai kentän lähteitä j) ei ole, niin $\partial_\beta T^{\alpha\beta} \equiv 0$ ja täten $\partial_\sigma L^{\mu\nu\sigma} \equiv 0$ eli integroimalla \mathbb{R}^3 :n reunallisen 3-ulotteisen alimoniston yli saadaan *kentän* energian, impulssin ja kiertoimpulssin säilymislait

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V T^{00} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= -c \int_{\partial V} T^{01} dx^2 \wedge dx^3 + T^{02} dx^3 \wedge dx^1 + T^{03} dx^1 \wedge dx^2, \\ \frac{d}{dt} \int_V T^{k0} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= -c \int_{\partial V} T^{k1} dx^2 \wedge dx^3 + T^{k2} dx^3 \wedge dx^1 + T^{k3} dx^1 \wedge dx^2, \\ \frac{d}{dt} \int_V L^{\mu\nu 0} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= -c \int_{\partial V} L^{\mu\nu 1} dx^2 \wedge dx^3 + L^{\mu\nu 2} dx^3 \wedge dx^1 + L^{\mu\nu 3} dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Jos $V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja kahden ylimmän kaavan oikeat puolet lähenevät nollaa, niin voi olla, että alimman yhtälön oikea puoli ei lähene nollaa (johtuen x^μ :llä kertomisesta jne.)

²⁰⁵Sähkömagneettiselle kentälle \mathbf{S}/c^2 on liikemäärätiheys, joten $L^{k10}(\mathbf{x})/c = x^k S_l(\mathbf{x})/c^2 - x^l S_k(\mathbf{x})/c^2$ ja $(L^{230}(\mathbf{x}), L^{310}(\mathbf{x}), L^{120}(\mathbf{x}))/c = \mathbf{r} \times \mathbf{S}(\mathbf{x})/c^2$.

35 GEOM: Konnektio, kaarevuus ja Einsteinin tensori

Olkoon $\mathcal{F}(M)$ funktioiden $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ja \mathcal{TM} moniston M vektorikenttien $v : M \rightarrow \mathcal{TM}$ muodostamat lineaariavaruudet. Moniston M *konnektio* on kuvaus

$$D : \mathcal{TM} \times \mathcal{TM} \rightarrow \mathcal{TM}, \quad (v, w) \mapsto D_v w,$$

joka toteuttaa seuraavat ehdot:

$$\text{(D1)} \quad D_{f_1 v_1 + f_2 v_2} w = f_1 D_{v_1} w + f_2 D_{v_2} w \text{ kaikilla } f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M) \text{ ja } v_1, v_2, w \in \mathcal{TM},$$

$$\text{(D2)} \quad D_v(a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 D_v w_1 + a_2 D_v w_2 \text{ kaikilla } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ ja } v, w_1, w_2 \in \mathcal{TM},$$

$$\text{(D3)} \quad D_v(fw) = (vf)w + fD_v w \text{ kaikilla } f \in \mathcal{F}(M) \text{ ja } v, w \in \mathcal{TM}.$$

Vektorikenttää $D_v w$ sanotaan vektorikentän w *kovariantiksi derivaataksi* vektorikentän²⁰⁶ v suhteen (tai suuntaan). Jos M :llä on määrittely (pseudo)metriikka g , niin M :n konnektiota D sanotaan *Levin-Civitan (Christoffelin tai Riemannin) konnektioksi*, mikäli se toteuttaa seuraavat lisäehdot:

$$\text{(D4)} \quad [v, w] = vw - wv = D_v w - D_w v \text{ kaikilla } v, w \in \mathcal{TM},$$

$$\text{(D5)} \quad u(g(v, w)) = g(D_u v, w) + g(v, D_u w) \text{ kaikilla } u, v, w \in \mathcal{TM}.$$

Suoralla laskulla nähdään, että Levin-Civitan konnektio toteuttaa *Koszulin kaavan* [!]

$$2g(D_v w, u) = v(g(w, u)) + w(g(u, v)) - u(g(v, w)) - g(v, [w, u]) + g(w, [u, v]) + g(u, [v, w])$$

kaikilla $u, v, w \in \mathcal{TM}$, joten Levin-Civitan konnektio on yksikäsitteinen!

Olkoon \mathbf{q} joku M :n kartta. Merkitään lyhyesti $D_k := D_{\partial/\partial q^k}$. Helposti voidaan osoittaa, että

$$D_j(\partial/\partial q^k) = \sum_s \Gamma_{jk}^s \partial/\partial q^s,$$

missä (lokaalit) funktiot Γ_{jk}^s ovat tuttuja Christoffelin symboleja²⁰⁷ eli [!]

$$\Gamma_{jk}^s = \frac{1}{2} \sum_i g^{si} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right).$$

²⁰⁶Ehdosta (D1) nähdään, että $D_v w$ voidaan myös määrittellä jonkun pisteessä \mathbf{m} olevan *vektorin* v suhteen eli v :n ei tarvitse olla vektorikenttä määritelmässä. Myöskään vektorikentän w (tai yleisemmin tensorikentän T) ei tarvitse olla koko M :llä määritelty; riittää, että se on määritelty jossain M :n avoimessa joukossa.

²⁰⁷Jotka siis häviävät pisteessä \mathbf{m} pisteen \mathbf{m} normaalikoordinaateissa laskettuna.

Lisäksi nähdään, että [!]

$$D_i \left(\sum_j w^j \partial_j \right) = \sum_k \left(\frac{\partial w^k}{\partial q^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k w^j \right) \partial_k$$

eli D_i on osittaisderivaatta ∂_i höystettynä lisätermillä.

Harjoitustehtävä 76. Olkoon (M, g) kaksiulotteinen semi-Riemannin monisto ja $\mathbf{q} = (u, v)$ sen kartta. Oletetaan, että $g_{12} \equiv 0$. Merkitään totutusti $E := g_{11}$ ja $G := g_{22}$ sekä lyhyesti $\partial_u = \partial/\partial u$ jne. Osoita, että

$$D_{\partial_u} \partial_u = \frac{\partial_u E}{2E} \partial_u - \frac{\partial_v E}{2G} \partial_v, \quad D_{\partial_v} \partial_v = -\frac{\partial_u G}{2E} \partial_u + \frac{\partial_v G}{2G} \partial_v$$

sekä

$$D_{\partial_u} \partial_v = D_{\partial_v} \partial_u = \frac{\partial_v E}{2E} \partial_u + \frac{\partial_u G}{2G} \partial_v.$$

Tarkastele erikoistapauksena tason $M = \mathbb{R}^2$ napakoordinaatteja $u = r$ ja $v = \varphi$ (varustetaan taso siis tavanomaisella euklidisella metriikalla). Piirrä kuvaan vektorit ∂_r , ∂_φ , $D_{\partial_\varphi} \partial_\varphi$ jne.

Olkoon v mielivaltainen vektorikenttä. Levin-Civitan konnektion D määrämä kovariantti derivaatta $D_v : \mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}M$ voidaan laajentaa 'lineaarikuvauksiksi' $D_v : \mathcal{T}_l^k M \rightarrow \mathcal{T}_l^k M$ (mielivaltaiset tensorit) seuraavien kaavojen avulla:

$$(D6) \quad D_v f = v f \text{ kaikilla } f \in \mathcal{F}(M),$$

$$(D7) \quad D_v(T \otimes S) = (D_v T) \otimes S + T \otimes (D_v S) \text{ kaikilla } T \in \mathcal{T}_l^k M \text{ ja } S \in \mathcal{T}_u^s M,$$

$$(D8) \quad D_v(C_b^a T) = C_b^a(D_v T) \text{ kaikilla } T \in \mathcal{T}_l^k M, 1 \leq a \leq k \text{ ja } 1 \leq b \leq l.$$

Tensorikenttä T on yhdensuuntainen (paralleeli) mikäli $D_v T = 0$ kaikilla $v \in \mathcal{T}M$. Esimerkiksi g on yhdensuuntainen. [!]

Välittömästi nähdään, että $D_i f = \partial_i f$ ja 1-muodolle ω

$$D_v(\omega w) = D_v(\omega_j w^j) = D_v(C_1^1(\omega \otimes w)) = C_1^1((D_v \omega) \otimes w + \omega \otimes (D_v w)),$$

joten valitsemalla $v = \partial_i$ saadaan

$$\begin{aligned} D_i(\omega_j w^j) &= \partial_i(\omega_j w^j) = (\partial_i \omega_j) w^j + \omega_j \partial_i w^j = C_1^1((D_i \omega) \otimes w + \omega \otimes (D_i w)) \\ &= (D_i \omega)_j w^j + \omega_k (D_i w)^k = (D_i \omega)_j w^j + \omega_k (\partial_i w^k + \Gamma_{ij}^k w^j) \end{aligned}$$

ja valitsemalla sitten $w = \partial_a$

$$D_i \omega = (D_i \omega)_a dq^a = (\partial_i \omega_a - \omega_k \Gamma_{ia}^k) dq^a.$$

Vastaavat kaavat voidaan johtaa mielivaltaisen tensorin $D_i T$ komponenteille.²⁰⁸ Esimerkiksi tensorille $T = T_{kl} dq^k \otimes dq^l$ (käyttämällä tulon derivointisääntöä (D7) kahdesti)²⁰⁹

$$\begin{aligned} D_i T &= D_i(T_{kl} dq^k \otimes dq^l) = (D_i T_{kl}) dq^k \otimes dq^l + T_{kl} (D_i dq^k) \otimes dq^l + T_{kl} dq^k \otimes (D_i dq^l) \\ &= (\partial_i T_{kl}) dq^k \otimes dq^l - T_{kl} \Gamma_{ia}^k dq^a \otimes dq^l - T_{kl} \Gamma_{ia}^l dq^k \otimes dq^a \\ &= (\partial_i T_{rs} - T_{ks} \Gamma_{ir}^k - T_{rl} \Gamma_{is}^l) dq^r \otimes dq^s. \end{aligned}$$

35.1 Yhdensuuntaissiirtymä

Olkoon α käyrä monistolla M ja λ sen parametri. Oletetaan, että $\dot{\alpha}(\lambda) \neq 0$ joka pisteessä λ ja merkitään $\underline{q}^i(\lambda) = (q^i \circ \alpha)(\lambda)$. Asteen (k, l) tensorikenttä T käyrällä α on (sileä) kokoelma tensoreita $T|_{\alpha(\lambda)} \in T_l^k M_{\alpha(\lambda)}$ eli ‘jokaisella käyrän pisteellä on tensori.’ Koska $\dot{\alpha}(\lambda) \neq 0$ (eli α on M :n 1-ulotteinen alimonisto), niin T laajenee (lokaaliksi) tensorikentäksi. Määritellään T :n *kovariantti derivaatta käyrää α pitkin* käyrän pisteessä $\alpha(\lambda)$ tensorina

$$\left. \frac{DT}{d\lambda} \right|_{\alpha(\lambda)} := (D_{\dot{\alpha}(\lambda)} T)|_{\alpha(\lambda)} = \sum_i \frac{dq^i(\lambda)}{d\lambda} (D_i T)|_{\alpha(\lambda)}.$$

Jos jossain käyrän pisteessä $\alpha(\lambda_0)$ on annettu tensori T_0 , niin se voidaan ‘laajentaa’ tensorikentäksi T koko käyrälle α (ja sen ympäristöön) ratkaisemalla *yhdensuuntaissiirtymäyhtälö*

$$\left. \frac{DT}{d\lambda} \right|_{\alpha(\lambda)} \equiv 0.$$

Näin saatua kenttää T käyrällä α sanotaan tensorin T_0 *yhdensuuntaissiirtymäksi* käyrää α pitkin.²¹⁰ Jos tensorikenttä T' on yhdensuuntainen, niin $\left. \frac{DT'}{d\lambda} \right|_{\alpha(\lambda)} \equiv 0$ kaikille käyrille α eli se antaa kaikkien tensoreittensa $T'|_m$ yhdensuuntaissiirtymät mielivaltaisia käyriä pitkin.

Esimerkiksi jos T on vektorikenttä w käyrällä α (laajennettuna käyrän ympäristöön), niin

$$\left. \frac{Dw}{d\lambda} \right|_{\alpha(\lambda)} = \sum_i \frac{dq^i(\lambda)}{d\lambda} (D_i w)|_{\alpha(\lambda)} = \sum_k \left[\frac{dw^k(\alpha(\lambda))}{d\lambda} + \sum_{i,j} \frac{dq^i(\lambda)}{d\lambda} \Gamma_{ij}^k(\alpha(\lambda)) w^j(\alpha(\lambda)) \right] \partial_k|_{\alpha(\lambda)}$$

eli vektorin $w_0 \in TM_{\alpha(\lambda_0)}$ yhdensuuntaissiirtymä $\lambda \mapsto w(\lambda) = w|_{\alpha(\lambda)}$ käyrää α pitkin toteuttaa yhtälöt $w(\lambda_0) = w|_{\alpha(\lambda_0)} = w_0$ ja

$$\frac{dw^k(\lambda)}{d\lambda} + \sum_{i,j} \frac{dq^i(\lambda)}{d\lambda} \Gamma_{ij}^k(\alpha(\lambda)) w^j(\lambda) \equiv 0$$

²⁰⁸Itseasiassa voidaan määritellä, että tyypin (k, l) -tensorikenttä T kuvautuu tyypin $(k, l + 1)$ -tensorikentäksi DT , jonka komponentit ovat $(DT)_{j_1, \dots, j_l; j}^{i_1, \dots, i_k} := (D_j T)_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$. [!] Nyt DT on T :n *kovariantti differentiaali*.

²⁰⁹Tässä kaavassa T voi olla metriikka g , jolle saadaan $D_i g \equiv 0$ (laske Riemannin normaalikoordinaateissa).

²¹⁰Eli siis yleisesti ‘kaarevissa’ avaruuksissa yhdensuuntaissiirtymä riippuu reitistä!

(josta siis ratkaistaan funktiot $w^k(\lambda)$ ja täten saadaan $w(\lambda) = w^k(\lambda)\partial_k|_{\alpha(\lambda)}$).²¹¹ Jos käyrä α on sellainen, että se yhdensuuntaissiirtää oman ‘nopeusvektorinsa’ eli $D\dot{\alpha}/d\lambda|_{\alpha(\lambda)} \equiv 0$ tai

$$\frac{d^2 \underline{q}^k(\lambda)}{d\lambda^2} + \sum_{i,j} \frac{d \underline{q}^i(\lambda)}{d\lambda} \Gamma_{ij}^k(\alpha(\lambda)) \frac{d \underline{q}^j(\lambda)}{d\lambda} \equiv 0 \quad (\text{geodeesiyhtälö}),$$

niin α on *geodeesi* (ja kääntäen).

35.2 Kaarevuustensori

Olkoon D metriikan g generoima Levin-Civitan konnektio. Kuvaus (itseasiassa tyyppin (1,3) tensorikenttä) $R : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}M$,

$$(v, w, u) \mapsto R_{vw}u := [D_v, D_w]u - D_{[v,w]}u = D_v(D_w u) - D_w(D_v u) - D_{v-w}u$$

on *Riemannin kaarevuustensori*.²¹² Joskus voidaan merkitä $R \equiv R[g]$, jos halutaan korostaa sitä, että R määritellään metriikan g avulla. Jos $R \equiv 0$, niin moniston (M, g) sanotaan olevan *litteä* eli ‘epäkaareva.’ Huomaa, että R kuvaa M :n ‘sisäistä’ kaarevuutta, joka on eri asia kuin ‘ulkoisen’ kaarevuus (eli se miltä M näyttää, kun se on upotettu suurempidimensioiseen monistoon). Esimerkiksi käyrä (siis 1-ulotteinen monisto) on aina sisäisesti litteä, mutta se voidaan upottaa tasoon äärettömän monella eri tapaa. Jos se upotetaan suoraksi, niin se on ulkoisesti litteä, mutta jos se upotetaan esim. paraabeliksi, niin sitten se on ulkoisesti kaareva. Yleensä fysiikassa avaruusaikaa ei upoteta mihinkään, jotenka avaruusajalle relevantti kaarevuus on sisäinen kaarevuus, jonka antaa R .

Harjoitustehtävä 77. a) Osoita, että R :n komponentit (eli $R_{\partial_k \partial_l} \partial_j = \sum_i R_{jkl}^i \partial_i$) ovat

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial q^l} + \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m - \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m.$$

b) Laske Riemannin kaarevuustensori R (eli sen komponentit) tason \mathbb{R}^2 euklisen metriikan tapauksessa napakoordinaateille. Onko taso litteä?

c) Osoita, että mielivaltainen 1-ulotteinen monisto on litteä.

Jos moniston (M, g) (jokaisen pisteen ympäristössä) on olemassa kartta \mathbf{q} siten, että (siinä lasketut) metriikan g komponentit g_{ij} ovat vakioita (eli $\partial_k g_{ij} \equiv 0$), niin myös $\Gamma_{jk}^s \equiv 0$ sekä

²¹¹Ratkaisu on olemassa ja yksikäsitteinen Picardin (olemassaolo)lauseen perusteella.

²¹²Joskus määritellään, että Riemannin kaarevuustensori on $-R$. Ole tarkkana R :n etumerkin kanssa kirjallisuutta selaillessasi!

$R_{jkl}^i \equiv 0$ eli $R \equiv 0$ eli M on litteä. Voidaan osoittaa, että tämä tulos pätee myös kääntäen. Koska symmetrinen (vakio)matriisi voidaan aina diagonalisoida, niin litteät monistot ovat aina sellaisia, että niiden metriikat ovat lokaalisti muotoa $\sum_i \pm dq^i \otimes dq^i$ jonkun kartan \mathbf{q} suhteen (ei siis kaikissa kartoissa; ajattele tason euklidista metriikkaa napakoordinaateissa). Huom! Yllä oleva kartta \mathbf{q} litteälle monistolle on siis *jokaisen* \mathbf{q} :n määrittelyalueen pisteen Riemannin normaalikoordinaatisto.

Laskettaessa R :n komponentteja kannattaa ensin laskea tensorin $\downarrow_1^1 R$ komponentit $R_{ijkl} = g_{ii'} R_{j'kl}$ ja ottaa huomioon seuraavat identiteetit (pätevät kaikissa kartoissa):²¹³ [!]

- $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ ja $R_{ijkl} = -R_{jikl}$
- $R_{ij\ kl} = R_{kl\ ij}$
- $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} \equiv 0$.

Näistä ehdoista saadaan, että n -ulotteisen moniston (M, g) Riemannin tensorilla on $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ *toisistaan riippumatonta* komponenttia. [!] Esimerkiksi tapauksessa $n = 4$ on 20 riippumatonta komponenttia.

Riemannin kaarevuustensorin $R = R[g]$ avulla voidaan määritellä *Riccin (kaarevuus)tensori* $\text{Ric} \equiv \text{Ric}[g] := \mathbb{C}_2^1 R$, jonka komponentit ovat siis $\text{Ric}_{ij} = \sum_a R_{iaj}^a$.²¹⁴ Jos moniston (M, g) Riccin kaarevuustensori $\text{Ric} \equiv 0$, niin sanotaan, että M on *Ricci-litteä*. Tästä ei seuraa, että M olisi litteä eli $R \equiv 0$ (kuten myöhemmin nähdään). Toki litteä monisto on Ricci-litteä. Riccin tensorin avulla määritellään *skalaarikaarevuus* $S \equiv S[g] := \mathbb{C}_1^1(\uparrow_1^1 \text{Ric})$, joka on funktio $M \rightarrow \mathbb{R}$. Lokaalisti

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} \text{Ric}_{ij} = \sum_{i,j,a} g^{ij} R_{iaj}^a.$$

Määritellään lopuksi vielä *Einsteinin tensori*

$$G \equiv G[g] := \text{Ric}[g] - \frac{1}{2} S[g] g$$

eli mielivaltaisessa kartassa \mathbf{q} kirjoitettuna

$$G_{ij} = \text{Ric}_{ij} - \frac{S}{2} g_{ij}$$

Huomaa, että $G_{ij} \equiv G_{ji}$ ja $\sum_k [D_k(\uparrow_1^1 \uparrow_2^2 G)]^{kl} \equiv 0$.²¹⁵

²¹³Jotka voidaan helposti todistaa käyttämällä pisteen m Riemannin normaalikoordinaatistoa, jossa ilmaistuna

$2R_{ijkl} = \partial_k \partial_j g_{il} - \partial_k \partial_i g_{lj} - \partial_l \partial_j g_{ik} + \partial_l \partial_i g_{kj}$ (siis pisteessä m).

²¹⁴Joskus Riccin tensori määritellään tensorina $\mathbb{C}_3^1 R = -\mathbb{C}_2^1 R$.

²¹⁵Tämän tulos seuraa pitkällä mutta suoraviivaisella laskulla. [!] Käytä Riemannin normaalikoordinaatteja!

Valitettavasti symboli G on vakiintunut kirjallisuuteen tarkoittamaan sekä viritystensoria että Einsteinin tensoria. Tästä lähtien G tarkoittaa vain Einsteinin tensoria, sillä tutkimme enää sähkömagneettisia kenttiä tyhjiössä, joten kenttätensori F riittää kentän kuvaamiseen.

Harjoitustehtävä 78. *Tarkastellaan s -säteisen pallon pintaa varustettuna tutulla metriikalla $g = s^2 d\theta \otimes d\theta + s^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$. Laske Christoffelin symbolit, R , Ric, S ja G .*

36 FYS: Einsteinin yhtälö ja varattu musta aukko

Kerrataan aluksi hieman aiemmin käsiteltyjä asioita. Yleisessä suhteellisuusteoriassa avaruusaikaa mallinnetaan neli-ulotteisella Lorentzin monistolla (M, g) , joka siis on lokaalisti likimäärin Minkowskin avaruus (\mathbb{M}^4, η) . Vapaa kappale kulkee M :n geodeesia pitkin. Geodeesit α saadaan esimerkiksi g :n generoiman Levin-Civitan konnektion D määräämän yhdensuuntaissiirtymäyhtälön (käyrän nelinopeusvektoreille $\dot{\alpha}(\tau)$) ratkaisuna. Erityisesti Newtonin gravitaatioteoria (ja hiukkasen liike Newtonin gravitaatiokentässä) saadaan pallosymmetrisen kappaleen ulkopuolella vallitsevasta Schwarzschildin metriikasta. Vahvan ekvivalenssiperiaatteen nojalla fysiikan lait (sähkömagnetismi, nestedynamiikka yms.) redusoituvat lokaalisti (g :n Riemannin normaalkoodinaatistoissa) erityisen suhteellisuusteorian mukaisiksi.

‘Jatkuvan’ aineen (neste, pöly yms.) energian ja liikemäärän jakaumaa erityisessä suhteellisuusteoriassa kuvataan energia-impulssitensorin avulla. Vastaava energia-impulssitensori liittyy myös sähkömagneettisen kenttään (esim. säteilyyn) F tyhjiössä ja yleisemminkin väliaineessa. Eli siis koko avaruuden aineen ja säteilyn jakaumaa voidaan kuvata jonkun energia-impulssitensorin $T = T^{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta$ avulla (siihen sisällytetään siis kaikki energia-impulssijakaumat, mm. sähkömagneettisessa kentässä liikkuvat varaukset). Tällöin erityisessä suhteellisuusteoriassa T :n on toteutettava energian ja impulssin säilymislait eli yhtälö $\partial_\beta T^{\alpha\beta} \equiv 0$. Miltä tämä yhtälö näyttää yleisessä suhteellisuusteoriassa eli monistolla (M, g) ?

Yleisen kovarianttisuusperiaatteen²¹⁶ mukaisesti yhtälö $\partial_\beta T^{\alpha\beta} \equiv 0$ korvataan yhtälöllä²¹⁷

$$\boxed{(D_\beta T)^{\alpha\beta} \equiv 0,} \quad (47)$$

joka redusoituu yhtälöksi $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ jokaisen pisteen Riemannin normaalikoordinaatistossa (ko. pisteessä). Huomaa, että Einsteinin tensori $\uparrow_1\uparrow_2 G$ toteuttaa myös tämän yhtälön. Miten sitten T saadaan?

Esimerkiksi säteilyn tapauksessa Maxwellin yhtälöt näyttävät Lorentzin monistolla (M, g) samalta kuin Minkowskinkin avaruudessa eli esim. tyhjiössä (myös $j = 0$) $dF = 0$ ja $\delta F = \mu_0 j = 0$, mistä yritetään ratkaista F (joka riippuu yleisesti ottaen metriikasta g). Nyt F :n avulla muodostettu sähkömagneettisen kentän energia-impulssitensorikin $T^{\alpha\beta} = -cg^{\alpha\sigma} F_{\sigma\tau} G^{\tau\beta} - (c/4)g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ riippuu g :stä (tyhjiössä $G^{\mu\nu} = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} F^{\mu\nu}$). Vastaavasti nesteen (ei ulkoisia voimia) energia-impulssitensori on $T^{\alpha\beta} = (\rho + pc^{-2})u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta} - \hat{\tau}^{\alpha\beta}$.²¹⁸

²¹⁶Yhtälöiden pitää olla tensoriyhtälöitä; $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ ei ole tensoriyhtälö eli ei ‘muunnu’ kuin tensori.

²¹⁷Tai täysin karttariippumattomasti merkittynä $C_1^2(DT) \equiv 0$.

²¹⁸Kummankin T :n pitää toteuttaa yhtälö (47), joka on yleisen energia-impulssitensorin ‘perusominaisuus.’

Yleisesti energia-impulssitensori $T \equiv T[g]$ riippuu siis metriikasta g . Miten sitten metriikka g saadaan?

Lähtökohtaisesti avaruusaikaa kuvataan neliulotteisena monistona M eli joukkona, joka voidaan kartoittaa lokaalisti neljän koordinaatin avulla. Tämä ei tietenkään vielä riitä vaan tarvitaan (vielä tässä vaiheessa tuntematon) metriikka, joka antaa mm. avaruusajan jaon kolmiulotteiseen avaruuteen ja aikaan (kunkin havaitsijan suhteen), ajankulun nopeuden, avaruuden tilavuusmuodon (kappaleitten tilavuudet), kappaleitten välisen etäisyyden (geodeesejä pitkin) ym. fysikaalisesti relevantteja ja mitattavia suureita. Einsteinin keskeisenä ideana oli, että avaruuden energia-ainejakauma (eli energia-impulssitensori) $T[g]$ määrää avaruuden kaarevuuden (metriikan g ja täten Riemannin karevuustensorin $R[g]$ sekä Einsteinin tensorin $G[g]$). Koska Einsteinin tensori, energia-impulssitensori ja g^{-1} toteuttavat saman ‘säilymlakiyhtälön’ (47), hän päätyi ns. *Einsteinin (kenttä)yhtälöön* $\uparrow_1\uparrow_2^2 G[g] + g^{-1}\Lambda = 8\pi c^{-4}G_N T[g]$, missä Λ on ns. *kosmologinen vakio* ja G_N on Newtonin gravitaativakio. Kyseisestä yhtälöstä pyritään siis ratkaisemaan metriikka g (tai jos g tunnetaan, niin voidaan laskea T , joka aiheuttaa ko. avaruusajan käyristymisen). Einsteinin yhtälö on komponenttimuodossa²¹⁹ (kartassa \mathbf{x})

$$\boxed{G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\Lambda = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\alpha\beta}}, \quad (48)$$

missä $G_{\alpha\beta} = \text{Ric}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}S/2 = R_{\alpha\sigma\beta}^{\sigma} - g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\mu\kappa\nu}^{\kappa}/2$, $R_{\mu\kappa\nu}^{\sigma} = \partial_{\kappa}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\kappa\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\kappa\xi}^{\sigma}\Gamma_{\nu\mu}^{\xi} - \Gamma_{\nu\xi}^{\sigma}\Gamma_{\kappa\mu}^{\xi}$ ja $2\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = g^{\sigma\zeta}(\partial_{\mu}g_{\zeta\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\zeta} - \partial_{\zeta}g_{\nu\mu})$, josta siis pitäisi ratkaista (lokaalit) komponenttifunktiot $g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, kun vielä T :kin riippuu niistä! Pahalta näyttää, mutta onneksi sentään joitain fysikaalisesti tärkeitä ratkaisuja (kuten tähdet, mustat aukot ja kosmologiset mallit) saadaan ratkaistua analyttisesti. Einsteinin yhtälö voidaan toki monesti ratkaista numeerisesti. Seuraavaksi tarkastellaan joitain ratkaisuja.

Määritellään tensorikenttä

$$T^{\Lambda} = T^{\Lambda}[g] := -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G_N} g^{-1}$$

tai (indeksien laskun jälkeen) komponenttimuodossa

$$T_{\alpha\beta}^{\Lambda} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G_N} g_{\alpha\beta}$$

Selvästikin Einsteinin yhtälö (48) voidaan kirjoittaa muodossa

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G_N}{c^4} (T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^{\Lambda}),$$

²¹⁹Indeksien laskun jälkeen.

joten T^Λ on jonkinlainen energia-impulssitensori. Tyhjiössä $T \equiv 0$, joten T^Λ tulkitaan joskus *tyhjiön energiaimpulssitensoriksi*. Vertaamalla [!] sitä nesteen energia-impulssitensoriin, voidaan todeta, että tyhjiön energiatiheys $\rho^\Lambda = \Lambda c^4 / (8\pi G_N)$.

Kerrotaan sitten (48) funktiolla $g^{\alpha\beta}$ ja summataan α :n ja β :n yli:

$$g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} + \underbrace{g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}}_{=4} \Lambda = \frac{8\pi G_N}{c^4} \underbrace{g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}}_{=: \text{tr}[T]} \iff$$

$$g^{\alpha\beta} \text{Ric}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} S/2 + 4\Lambda = S - 4S/2 + 4\Lambda = -S + 4\Lambda = \frac{8\pi G_N}{c^4} \text{tr}[T].$$

Täten (48) redusoituu muotoon

$$\text{Ric}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} S/2 = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \Lambda + g_{\alpha\beta} \left(2\Lambda - \frac{8\pi G_N}{c^4} \text{tr}[T] / 2 \right)$$

eli saadaan Einsteinin yhtälön variantti:

$$\boxed{\text{Ric}_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G_N}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \text{tr}[T] g_{\alpha\beta} \right) + \Lambda g_{\alpha\beta}.} \quad (49)$$

Tyhjiössä $T_{\alpha\beta} \equiv 0$ ja saadaan *tyhjiön Einsteinin yhtälö*

$$\text{Ric}[g] \equiv \Lambda g.$$

Sen ratkaisuja (M, g) sanotaan joskus *Einsteinin monistoiksi*. Useimmiten²²⁰ oletetaan, että Λ on hyvin pieni eli $\Lambda \approx 0$. Tällöin tyhjiössä $T_{\alpha\beta} \equiv 0$ ja

$$\text{Ric}[g] \equiv 0$$

eli tyhjiö on *Ricci-litteä*. Selvästikin Minkowskin avaruus (\mathbb{M}^4, η) on Ricci-litteä eli kuvaa tyhjiötä. Mutta on tietenkin (sillä Ricci-litteä ei ole välttämättä litteä) muitakin ratkaisuja kuten kohta nähdään.

Tarkastellaan Einsteinin yhtälöitä, kun avaruusajassa on pelkästään sähkömagneettinen kenttä F (ja siis viritystensori on tyhjiössä $G = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} F$). Nyt energia-impulssitensori on

$$T^{\alpha\beta} = -c g^{\alpha\alpha'} F_{\alpha'\sigma} G^{\sigma\beta} - (c/4) g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \left(F^\alpha{}_\sigma F^{\sigma\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

eli ratkaistavana on *Einsteinin(-Maxwellin) yhtälö(t)*

$$G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \Lambda = -\frac{8\pi G_N}{c^4 \mu_0} \left(F_{\alpha\sigma} F^\sigma{}_\beta + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

tai (koska $\text{tr}[T] = 0$)

$$\text{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G_N}{c^4 \mu_0} \left(F_{\alpha\sigma} F^\sigma{}_\beta + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + g_{\alpha\beta} \Lambda.$$

Lisäksi pitää tietenkin ratkaista Maxwellin yhtälöt $dF = 0$ ja $\delta F = 0$ (huomaa, että δ riippuu metriikasta g). Tarkastellaan sitten pallosymmetristä tapausta.

²²⁰Olettamusta $\Lambda \neq 0$ käytetään lähinnä kosmologiassa, jossa tyhjiön energialla on merkitystä.

36.1 Reissnerin-Nordströmin metriikka

Kuten aiemmin ollaan mainittu, pallosymmetrinen metriikka g voidaan aina kirjoittaa lokaalisti muodossa

$$g = -f_t(\tilde{t}, r)d\tilde{t} \otimes d\tilde{t} + f_r(\tilde{t}, r)dr \otimes dr + r^2[d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi]$$

jossain kartassa $\mathbf{q} = (q^0, q^1, q^2, q^3) = (\tilde{t}, r, \theta, \varphi)$. Huomaa, että nyt $q^0 = \tilde{t} = ct$, ja että on oltava $f_t(\tilde{t}, r) \neq 0$ ja $f_r(\tilde{t}, r) \neq 0$ kaikissa pisteissä (\tilde{t}, r) . Selkeästi²²¹ on kaksi vaihtoehtoa (jotta matriisin determinantti olisi joka pisteessä negatiivinen): a) $f_t > 0$ ja $f_r > 0$ sekä b) $f_t < 0$ ja $f_r < 0$. Schwarzschildin metriikan tapauksessa b)-tapaus vastaa tilannetta mustan aukon tapahtumahorisontin sisällä, missä nyt esim. t onkin paikanluonteinen koordinaatti. Koska a)-vaihtoehto on selkeästi fysikaalisesti perustellumpi (eli t on ajanluonteinen ja r on yksinkertaisesti vain 'näennäinen suora etäisyys origosta' eli radiaalikoordinaatti), oletetaan jatkossa, että a) pätee. Tällöin voidaan määrittellä funktiot $a(\tilde{t}, r) := \frac{1}{2} \ln f_t(\tilde{t}, r)$ ja $b(\tilde{t}, r) := \frac{1}{2} \ln f_r(\tilde{t}, r)$, jotenka

$$g = -e^{2a(\tilde{t}, r)}d\tilde{t} \otimes d\tilde{t} + e^{2b(\tilde{t}, r)}dr \otimes dr + r^2[d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi],$$

jonka Riccin tensorin laskeminen jätetään harjoitustehtäväksi:

Harjoitustehtävä 79. *Yllä olevan metriikan tapauksessa osoita, että (laske ainakin pari komponenttia joka ryhmästä; alla on kaikki relevantit nollasta eroavat komponentit)*

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \partial_0 a, & \Gamma_{01}^0 &= \partial_1 a, & \Gamma_{11}^0 &= e^{2(b-a)} \partial_0 b, \\ \Gamma_{00}^1 &= e^{2(a-b)} \partial_1 a, & \Gamma_{01}^1 &= \partial_0 b, & \Gamma_{11}^1 &= \partial_1 b, \\ \Gamma_{12}^2 &= 1/r, & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2b}, & \Gamma_{13}^3 &= 1/r, \\ \Gamma_{33}^1 &= -re^{-2b} \sin^2 \theta, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{23}^3 &= \cos \theta / \sin \theta, \end{aligned}$$

$$R_{101}^0 = e^{2(b-a)} [\partial_0(\partial_0 b) + (\partial_0 b)^2 - (\partial_0 a)(\partial_0 b)] + [(\partial_1 a)(\partial_1 b) - \partial_1(\partial_1 a) - (\partial_1 a)^2],$$

$$\begin{aligned} R_{202}^0 &= -re^{-2b} \partial_1 a, & R_{303}^0 &= -re^{-2b} \sin^2 \theta \partial_1 a, \\ R_{212}^0 &= -re^{-2a} \partial_0 b, & R_{313}^0 &= -re^{-2a} \sin^2 \theta \partial_0 b, \\ R_{212}^1 &= re^{-2b} \partial_1 b, & R_{313}^1 &= re^{-2b} \sin^2 \theta \partial_1 b, \\ R_{323}^2 &= (1 - e^{-2b}) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

²²¹Mikäli kartan \mathbf{q} määrittelyalue on yhtenäinen avoin joukko.

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{00} &= \partial_0(\partial_0 b) + (\partial_0 b)^2 - (\partial_0 a)(\partial_0 b) + e^{2(a-b)} [\partial_1(\partial_1 a) + (\partial_1 a)^2 - (\partial_1 a)(\partial_1 b) + 2r^{-1}\partial_1 a], \\
\text{Ric}_{11} &= -\partial_1(\partial_1 a) - (\partial_1 a)^2 + (\partial_1 a)(\partial_1 b) + 2r^{-1}\partial_1 b + e^{2(b-a)} [\partial_0(\partial_0 b) + (\partial_0 b)^2 - (\partial_0 a)(\partial_0 b)], \\
\text{Ric}_{01} &= 2r^{-1}\partial_0 b, \quad \text{Ric}_{22} = e^{-2b} [r(\partial_1 b - \partial_1 a) - 1] + 1, \quad \text{Ric}_{33} = \text{Ric}_{22} \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten metriikkaa tyhjiössä (eli $T = 0$ ja $\Lambda = 0$) eli ratkastavana on yhtälöt $\text{Ric}_{\alpha\beta} = 0$. Jaetaan ratkaisu seuraaviin osiin:

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{01} = 2r^{-1}\partial_0 b = 0 &\iff b(r, \tilde{t}) \equiv b_r(r), \\
\partial_0 \text{Ric}_{22} = e^{-2b} r (-\partial_1 \partial_0 a) = 0 &\iff a(r, \tilde{t}) \equiv a_t(\tilde{t}) + a_r(r),
\end{aligned}$$

$$g = -e^{2a_r} e^{2a_t} d\tilde{t} \otimes d\tilde{t} + e^{2b_r} dr \otimes dr + r^2[\dots] = -e^{2a_r} dt' \otimes dt' + \dots, \quad t'(\tilde{t}) := \int_{t_0}^{\tilde{t}} e^{a_t(\mathbf{t})} d\mathbf{t},$$

eli voidaan yleisyyttä loukkaamatta olettaa, että $t' = \tilde{t}$ ja $a_t(\tilde{t}) \equiv 0$, joten $\partial_0 a = 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{00} &= e^{2(a-b)} [\partial_1(\partial_1 a) + (\partial_1 a)^2 - (\partial_1 a)(\partial_1 b) + 2r^{-1}\partial_1 a] = 0, \\
\text{Ric}_{11} &= -\partial_1(\partial_1 a) - (\partial_1 a)^2 + (\partial_1 a)(\partial_1 b) + 2r^{-1}\partial_1 b = 0 \implies
\end{aligned}$$

$$e^{2(b-a)} \text{Ric}_{00} + \text{Ric}_{11} = 2r^{-1}(\partial_1 a + \partial_1 b) = 2r^{-1}\partial_1(a_r + b_r) = 0 \iff a_r(r) + b_r(r) \equiv C \in \mathbb{R},$$

eli $g = -e^{-2b_r} e^{2C} d\tilde{t} \otimes d\tilde{t} + e^{2b_r} dr \otimes dr + \dots = -e^{-2b_r} dt'' \otimes dt'' + e^{2b_r} dr \otimes dr + \dots$, missä $t''(\tilde{t}) = e^C \tilde{t}$ eli voidaan olettaa, että vakio $C = 0$ eli $b_r = -a_r$ (ja $t'' = \tilde{t}$). Yhtälö $\text{Ric}_{22} = 0$ on nyt muotoa

$$\begin{aligned}
0 &= e^{-2b} [r(\partial_1 b - \partial_1 a) - 1] + 1 = e^{2a_r} [r(-2\partial_1 a_r) - 1] + 1 \iff \\
1 &= e^{2a_r} (r 2\partial_1 a_r + 1) = \partial_1 (r e^{2a_r}) \iff r e^{2a_r} = r + B \iff \\
e^{2a_r} &= 1 + B/r = e^{-2b_r}, \quad B \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

ja r on määritelty, kun $1 + B/r > 0$ eli $r > -B$ (ja lisäksi $r > 0$). Ollaan saatu *Birkhoffin lause*: Pallonsymmetrinen metriikka g toteuttaa tyhjiön ('fysikaalisen' eli t on ajanluonteinen) Einsteinin yhtälön $\text{Ric}[g] \equiv 0$ (eli (M, g) on Ricci-litteä), jos ja vain jos (joka pisteen ympäristössä) on olemassa kartta (t, r, θ, φ) ja vakio $B \in \mathbb{R}$ siten, että (lokaalisti)

$$g = - \left(1 + \frac{B}{r}\right) c^2 dt \otimes dt + \left(1 + \frac{B}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi].$$

Erityisesti, kun $B = -2G_N \mathcal{M}/c^2$, $\Phi(r) = -G_N \mathcal{M}/r$, saadaan Schwarzschildin metriikka

$$g = -[c^2 + 2\Phi(r)] dt \otimes dt + [1 + 2\Phi(r)/c^2]^{-1} dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi].$$

Lisätään sitten (Schwarzschildin) metriikkaan lisätermi eli tarkastellaan metriikkaa

$$g = -e^{2a(r)} d\tilde{t} \otimes d\tilde{t} + e^{-2a(r)} dr \otimes dr + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi], \quad (50)$$

missä $\tilde{t} = ct = q^0$ ja

$$e^{2a(r)} = 1 + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}, \quad B, C \in \mathbb{R},$$

jotenka $e^{2a(r)} \rightarrow 1$, $r \rightarrow \infty$, eli g lähestyy Minkowskin metriikkaa (on asympotoottisesti litteä).

Huomautus 25. Huomaa, että on oltava $Cs^2 + Bs + 1 > 0$ (missä $s := r^{-1}$) eli ratkaistaan kyseisen toisen asteen polynomin nollakohdat: ne ovat $s = s_{\pm} := (-B \pm \sqrt{B^2 - 4C})/(2C)$. Jos nyt $C > 0$ (ylöspäin aukeava paraabeli), niin saadaan seuraavat tapaukset:

1. Jos diskriminantti $D := B^2 - 4C < 0$, niin kaikki arvot ($s > 0$ tai siis) $r > 0$ käy.
2. Jos $D = 0$, niin $C = B^2/4$ ja $s_{\pm} = -B/(2C) = -2/B$, joten tapauksessa $B < 0$ arvot $r > 0$, $r \neq -B/2$, käy.
3. Jos $D > 0$ eli $B^2 > 4C$, niin tapauksessa $B < 0$ kaikki arvot $0 < r < r_-$ tai $r > r_+$ käy, missä $r_{\pm} := 1/s_{\mp} = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4C})/2$.

Harjoitustehtävä 80. Laske yllä olevan metriikan (50) Riccin tensori. Osoita siis, että tensorin Ric nollasta eriävät komponentit ovat

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{00} &= e^{2a(r)}C/r^4, & \text{Ric}_{11} &= -e^{-2a(r)}C/r^4, \\ \text{Ric}_{22} &= C/r^2, & \text{Ric}_{33} &= (\sin^2 \theta)C/r^2. \end{aligned}$$

Osoita, että skalaarikaarevuus $S = 0$.

Vinkki: Edellinen harjoitustehtävä. Laske ensiksi Ric₁₁. Huomaa, että $\partial_1 e^{2a} = 2e^{2a} \partial_1 a = \dots$, mistä voit ratkaista $\partial_1 a$:n.

Tapauksessa $C = 0$ saadaan siis Schwarzschildin metriikka, joka toteuttaa tyhjiön Einsteinin yhtälön, mutta jos $C \neq 0$, metriikka ei voi kuvata tyhjiötä, vaan avaruusajassa pitää olla materiaa/säteilyä eli energia-impulssitensorin T pitää olla nollasta eriävä (joka pisteessä).

Laitetaan sitten origoon $r = 0$ staattinen ‘pistevaraus’ Q eli sähkökenttänä²²² on Coulombin lain mukainen kenttä [!]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr \quad \text{eli} \quad F := \mathcal{E} \wedge dt = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{Q}{r^2} dr \wedge d\tilde{t},$$

joten ainoat nollasta eriävät komponentit ovat $F_{10} = -F_{01} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} r^{-2}$.

²²²Magneettikenttä on tietenkin nolla.

Harjoitustehtävä 81. a) Osoita, että $dF = 0$ (voit etsiä myös jonkun A :n, jolle $F = dA$).

b) Osoita, että $\delta F = 0$ (kun $r > 0$ eli pistevarauksen Maxwellin yhtälö tyhjiössä). Vinkki: $\delta F = -\star d\star F$ (itseasiassa jo $d(\star F) = 0$).

c) Osoita, että F :n energia-impulssitensorin $T = T_\alpha^\beta \partial/\partial q^\beta \otimes dq^\alpha$ komponentit

$$T_\alpha^\beta = -\frac{1}{\mu_0} \left(F_{\alpha\sigma} F^{\sigma\beta} + \frac{1}{4} \delta_\alpha^\beta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

ovat

$$-T_0^0 = -T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{(F_{10})^2}{2\mu_0} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}$$

(ja muut nolliä). Erityisesti $\text{tr}[T] = 0$. Huom! Kun nostetaan F :n indeksejä, metriikkana on siis kaavan (50) metriikka g .

Edellisten harjoitustehtävien nojalla nähdään, että $-\text{Ric}_0^0 = -\text{Ric}_1^1 = \text{Ric}_2^2 = \text{Ric}_3^3 = C/r^4$ (ja muut komponentit nolliä), joten metriikka g toteuttaa pistevarauksen Einsteinin-Maxwellin yhtälön $\text{Ric}_\alpha^\beta = 8\pi c^{-4} G_N T_\alpha^\beta$, kun

$$C = \frac{8\pi G_N}{c^4} \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} = \frac{G_N Q^2}{4\pi \varepsilon_0 c^4} =: C(Q).$$

Huomaa, että nyt energian ja impulssin säilymlaki pätee automaattisesti:

$$(D_\beta T)^{\alpha\beta} = (D_\beta G)^{\alpha\beta} / (8\pi c^{-4} G_N) \equiv 0.$$

Jos lisäksi valitaan $B = -2G_N \mathcal{M}/c^2$, niin ollaan päädytty Schwarzschildin metriikan ($Q = 0$) yleistykseseen eli *Reissnerin-Nordströmin metriikkaan*

$$g = -[c^2 + 2\Phi(r) + c^2 C(Q)/r^2] dt \otimes dt + [1 + 2\Phi(r)/c^2 + C(Q)/r^2]^{-1} dr \otimes dr \\ + r^2 [d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi].$$

Koska pallomaisen varatun kappaleen aiheuttama staattinen Coulombin kenttä on pallon ulkopuolella sama kuin (saman varauksisen) pistevarauksen kenttä, nähdään, että Reissnerin-Nordströmin metriikka kuvaa varatun (varaus Q) pallosymmetrisen \mathcal{M} -massaisen kappaleen aiheuttamaa metriikkaa eli 'avaruusajan käyristymää.' Erityisesti se kuvaa siis varattua tähteä tai varattua mustaa aukkoa.

Huomautuksen 25 nojalla nähdään, että varatulla mustalla aukolla saattaa olla 0, 1 tai 2 koordinaattisingulariteettia (ja yksi todellinen singulariteetti origossa $r = 0$):

1. Jos $|Q| > \mathcal{M} \sqrt{4\pi \varepsilon_0 G_N}$ (suuri varaus), niin kartta (t, r, θ, φ) käy kaikilla arvoilla $r > 0$, t on ajanluonteinen, ja koordinaattisingulariteettia (tapahtumahorisonttia) ei ole lainkaan.

Nyt siis voidaan matkustaa origon läheisyyteen ja palata takaisin. Singulariteettia $r = 0$ sanotaan alastomaksi, sillä sitä ei ‘peitä’ tapahtumahorisontti. (Monet uskovat, että tällainen musta aukko on epäfysikaalinen.)

2. Jos $|Q| = \mathcal{M} \sqrt{4\pi\epsilon_0 G_N}$ (kriittinen varaus), niin koordinaattisingulariteetteja on yksi pisteessä $r = G_N \mathcal{M}/c^2$. Tämä piste ei ole tapahtumahorisontti, koska sen ympäristössä t on aina ajanluonteinen. Koska tässä mallissa varauksen ja massan pitää olla täydellisessä ‘balanssissa,’ voidaan mallia pitää jokseenkin epäfysikaalisena. Se on kuitenkin tärkeä teoreettinen työkalu ja ansaitsee oman nimenkin ‘äärimmäinen musta aukko.’
3. Jos $|Q| < \mathcal{M} \sqrt{4\pi\epsilon_0 G_N}$ (pieni varaus), niin saadaan kaksi koordinaattisingulariteettia (ja tapahtumahorisonttia) pisteissä

$$r = r_{\pm} = \frac{G_N}{c^2} \left(\mathcal{M} \pm \sqrt{\mathcal{M}^2 - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 G_N}} \right),$$

jotka voidaan peittää paremmilla kartoilla. Kun havaitsija putoaa aukkoon (ulkopuolelta $r > r_+$), niin hänen lähettämänsä signaalit punasiirtyvät kuten aiemminkin eli paikallaan oleva havaitsija ei koskaan näe hänen ylittävän tapahtumahorisonttia! Ylitettyään rajan $r = r_+$ koordinaatti t muuttuu paikanluonteiseksi ja r ajanluonteiseksi. Edelleen r pienenee kunnes ylitetään raja $r = r_-$ ja t muuttuu takaisin ajanluonteiseksi (ja r paikanluonteiseksi). Alueessa $r < r_-$ koordinaatin r ei enää tarvitse pienentyä, joten välttämättä ei päädytä pisteeseen $r = 0$. Voidaan siis liikkua singulariteetin $r = 0$ ympäristössä $r < r_-$ (samoin kuin alueessa $r > r_+$).

Huomaa, että on olemassa vielä kolmaskin musta-aukkotyyppi, ns. *Kerrin musta aukko* (ja tietenkin näitten kolmen tyyppin kombinaatiot). Kerrin musta aukko (tai Kerrin metriikka) kuvaa pyörivää mustaa aukkoa.

Esimerkki 80. Kosmologiassa homogeenista ja isotrooppista avaruusaikaa kuvataan (pallonsymmetrisenä) Lorentzin monistona varustettuna *Robertsonin-Walkerin metriikalla*

$$g = -c^2 dt \otimes dt + a(t)^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi) \right],$$

missä *skaalatekijä* $a(t)$ kuvaa avaruuden ‘kokoaa’ hetkellä t ja vakio k kuvaa avaruuden geometrista ‘luonnetta’ (jos $k = 0$, niin avaruus on euklidinen, mutta tapauksissa $k > 0$ tai $k < 0$ avaruus on joko ‘suljettu’ tai ‘avoin’). Tyypillisesti avaruusajan aine-energiajakaumaa mallinetaan relativistisena ideaalimesteenä: Relativistisen ideaalimesteen energia-impulssitensori on

muotoa

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + pc^{-2})u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta}$$

(siis $\hat{\tau}^{\alpha\beta} \equiv 0$ eli viskositeetti on hyvin pieni). Lisäksi oletetaan, että neste on keskimäärin levossa kartassa $\mathbf{x} = (ct, r, \theta, \varphi)$ eli $u = c\partial/\partial x^0$ ja [!] täten²²³

$$(T^\alpha_\beta)_{\alpha,\beta=0}^3 = \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p).$$

Sijoittamalla T metriikan g määräämään Einsteinin yhtälöön (49) päädytään lopulta ns. *Friedmannin yhtälöihin*, joista voidaan yrittää ratkaista skaalaustekijä $a(t)$ tai määrätä joitain sen ominaisuuksia. [!] Tätä mallia käytetään mm. alkuräjähdysteoriassa. [!]

²²³Sijoittamalla T yhtälöön (47) (missä D on g :n Levin-Civitan konnektio) ja olettamalla, että tiheys ρ ja paine p toteuttavat ns. *tilanyhtälön* $p = w\rho c^2$, missä $w \in \mathbb{R}$, saadaan, että $\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}$. [!] Esim. säteilyn dominoimassa maailmakaikkeudessa $w = 1/3$, kun taas aineen ('pölyn') dominoimassa $w = 0$ eli $p = 0$.

37 FYS: Aaltoyhtälön ratkaisuja

Tarkastellaan aluksi sähkömagneettista kenttää F tyhjiössä Lorentzin monistolla (M, g) (esim. Minkowskin avaruus (\mathbb{M}^4, η)). Nyt siis F toteuttaa yhtälöt $F = dA$ (eli $dF = 0$) ja $\delta F = \mu_0 j$ (missä potentiaali 1-muoto A on mittamuunnosta $A + df$ vaille yksikäsitteinen). Kuten aiemmin, määritellään Laplacen-deRhamin operaattori $\Delta = (\delta + d)^2 = \delta d + d\delta$. Tehdään olettaus, että (riittävän säännöllisillä sileillä) funktioilla $f, \tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ yhtälö $\Delta f = \tilde{f}$ pystytään ratkaisemaan (eli jos \tilde{f} on annettu, niin on olemassa f siten, että yhtälö pätee).

Maxwellin yhtälöistä seuraa, että $\Delta A = \delta(dA) + d(\delta A) = \delta F + d(\delta A) = \mu_0 j + d(\delta A)$. Olettuksen mukaan yhtälö $\Delta f = -\delta A$ pystytään ratkaisemaan ja voidaan täten määritellä $A' := A + df$, jolle $\delta A' = \delta A + \delta df = \delta A + \Delta f = 0$ (sillä 0-muodolle $\delta f = 0$). Koska myös A' toteuttaa Maxwellin yhtälöt $F = dA' = dA$ ja $\delta F = \mu_0 j$, saadaan $\Delta A' = \mu_0 j$. Kääntäen, jos on olemassa 1-muoto siten, että $\delta A = 0$ ja $\Delta A = \mu_0 j$, niin $F = dA$ toteuttaa Maxwellin yhtälön $\delta F = \mu_0 j$ (ja triviaalisti yhtälön $dF = d(dA) = 0$). Ehtoa $\delta A = 0$ sanotaan (A :n) *Lorenzin*²²⁴ *mittaehdoksi*. Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaisuuden vuoksi vain Minkowskin avaruutta (\mathbb{M}^4, η) (ja laskuja sen Poincarén kartassa $\mathbf{x} = (x^\alpha)_{\alpha=0}^3$).

Minkowskin avaruudessa $\delta A = -\partial A^\alpha / \partial x^\alpha$, $\delta F = (\partial F_\beta^\alpha / \partial x^\alpha) dx^\beta$ ja $F_{\beta\alpha} = \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta$, joten $\Delta A = \delta F + d(\delta A) = (\partial_\alpha F_\beta^\alpha - \partial_\beta \partial_\alpha A^\alpha) dx^\beta = (\square A_\beta) dx^\beta$, missä [!]

$$\square := \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

on *d'Alambert'n operaattori*. Toisaalta (0-muodolle f) saadaan $\Delta f = \delta(df) = \square f$ eli jos osataan ratkaista *aaltoyhtälö*

$$\square f = \tilde{f}$$

'yleisessä' tapauksessa, niin voidaan etsiä Maxwellin yhtälön $\delta F = \mu_0 j$ ratkaisua $F = dA$ ratkaisemalla yhtälöt $\delta A = 0$ ja $\Delta A = \mu_0 j$ eli yhtälöt [!]

$$\sum_{\alpha=0}^3 \partial_\alpha A^\alpha = 0, \quad \square A^\beta = \mu_0 j^\beta, \quad \beta = 0, 1, 2, 3,$$

missä neljä viimeistä yhtälöä ovat aaltoyhtälöitä. Etsitään siis aaltoyhtälön ratkaisuja.

Olkoot f_\pm aaltoyhtälön $\square f_\pm = \tilde{f}$ kaksi ratkaisua (missä siis \tilde{f} määrää kyseisen yhtälön, jonka ratkaisuja haetaan), jotenka $\square(f_+ - f_-) = 0$ eli $f_0 = f_+ - f_-$ toteuttaa (lineaarisen) *homogeenisen aaltoyhtälön* $\square f_0 = 0$. Täten aaltoyhtälön $\square f = \tilde{f}$ kaikki ratkaisut ovat muotoa

²²⁴Ludvig Lorenz on eri kaveri kuin Hendrik Lorentz (muunnos).

$f = f_s + f_0$, missä f_s on aaltoyhtälön yksittäisratkaisu ($\square f_s = \tilde{f}$) ja f_0 on homogeenisen aaltoyhtälön mielivaltainen ratkaisu.²²⁵

Harjoitustehtävä 82. Olkoon f ja \tilde{f} kaksi (sileää) funktiota $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Kartassa $\mathbf{x} = (x^\alpha)$ ilmaistuna aaltoyhtälö on siis muotoa $\tilde{f} = \square f = \partial^2 f / \partial (x^0)^2 - \nabla^2 f$. Kiinnitetään vektori $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^3$ ja määritellään etäisyys $r := \sqrt{(x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + (x^3 - a^3)^2}$, ‘aika’ $y^0 := x^0 + r$ ja funktiot $f_1(y^0, x^1, x^2, x^3) := f(y^0 - r, x^1, x^2, x^3)$ sekä $\tilde{f}_1(y^0, x^1, x^2, x^3) := \tilde{f}(y^0 - r, x^1, x^2, x^3)$. Osoita, että aaltoyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\nabla^2 f_1 - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_1}{\partial y^0} \right) = \tilde{f}_1, \quad (51)$$

missä siis koordinaatit (y^0, x^1, x^2, x^3) ovat riippumattomia. Huomaa, että voidaan määritellä (toisistaan riippumattomat) ‘pallokoordinaatit’ $(y^0, r, \theta, \varphi)$ liittyen siirrettyihin karteesiisiin koordinaatteihin $\tilde{x}^i := x^i - a^i$, $i = 1, 2, 3$ (kartan origo on nyt pisteessä $(x^1, x^2, x^3) = (a^1, a^2, a^3)$).

Jaetaan yhtälö (51) r :llä ja integroidaan kummatkin puolet \mathbb{R}^3 :n yli. Erityisesti tällöin toinen termi menee nolllaksi,

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_1}{\partial y^0} \right) \underbrace{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}_{= d\tilde{x}^1 d\tilde{x}^2 d\tilde{x}^3} &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_1}{\partial y^0} \right) dr \right] \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\left. r \frac{\partial f_1}{\partial y^0} \right|_0^\infty \right] \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \end{aligned}$$

mikäli $(f_1$ ja) $\partial f_1 / \partial y^0$ ovat nopeasti väheneviä²²⁶ rajalla $r \rightarrow \infty$ (kaikilla kiinteillä y^0 :n arvoilla). Oletetaan tämä ehto jatkossa ja lisäksi, että jokaisella kiinteällä y^0 :lla $\tilde{f}_1(y^0, \bullet)$ on kompaktitukinen \mathbb{R}^3 :ssa. Tällöin myös toisen puolen integraali (missä nyt $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{f}_1(y^0, \tilde{x}^1 + a^1, \tilde{x}^2 + a^2, \tilde{x}^3 + a^3)}{r} d\tilde{x}^1 d\tilde{x}^2 d\tilde{x}^3 = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{f}(y^0 - |\mathbf{r} - \mathbf{a}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} dx^1 dx^2 dx^3$$

on olemassa. Koska kaavasta (39) seuraa, että²²⁷

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla^2 f_1}{r} d\tilde{x}^1 d\tilde{x}^2 d\tilde{x}^3 = 4\pi f_1(y^0, a^1, a^2, a^3) = 4\pi f(y^0, a^1, a^2, a^3),$$

niin ollaan saatu aaltoyhtälön *retardoitu* (eli ‘viivästynyt’) ratkaisu

$$f(y^0, \mathbf{a}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{f}(y^0 - |\mathbf{a} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}|} d^3 \mathbf{r},$$

²²⁵Ratkaisut muodostavat siis affiinin avaruuden.

²²⁶Huomaa, että jos $r \rightarrow \infty$, niin $x^0 = y^0 - r \rightarrow -\infty$ eli f :n on hävittävä ‘menneisyydessä.’

²²⁷Eli oikealla puolella $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) = \vec{0}$ eli $(x^1, x^2, x^3) = (a^1, a^2, a^3)$ ja $r = 0$.

joka kuvaa fysikaalisia tilanteita, joissa ‘lähteen’ (esim. varaustiheys) \tilde{f} pisteistä \mathbf{r} lähtee valon nopeudella kulkevia signaaleja hetkillä $(y^0 - |\mathbf{a} - \mathbf{r}|)/c$, jotka saapuvat havaitsijan avaruuden pisteeseen \mathbf{a} hetkellä y^0/c . Havaitsija havaitsee ‘kentän arvon’ $f(y^0, \mathbf{a})$, jonka lähteenä on \tilde{f} . Jos $\tilde{f} \equiv 0$, niin retardoitu ratkaisu f yllä on 0-funktio, joten homogeeniselle aaltoyhtälölle $\square f_0 = 0$ on etsittävä muita ratkaisuja. Huomaa vielä, että retardoitu ratkaisu f toteuttaa yhtälön $\square f = \tilde{f}$, joten jos $\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in U$, missä $U \subseteq \mathbb{R}^4$ (avoin) joukko, niin $(\square f)(\mathbf{x}) = 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in U$.

Harjoitustehtävä 83. a) Osoita, että tasoaalto $f_0(\mathbf{x}) = \cos(\sum_{\alpha=0}^3 k_\alpha x^\alpha)$, $k_\alpha \in \mathbb{R}$, toteuttaa homogeenisen aaltoyhtälön $\square f_0 = 0$, kun k_0 on valittu sopivasti. Voiko kosinin korvata sinillä?

b) Osoita, että palloaalto $f_0(x^0, \mathbf{r}) = h(x^0 + |\mathbf{r}|)/|\mathbf{r}|$ (missä $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on mielivaltainen) toteuttaa homogeenisen aaltoyhtälön. Vinkki: kaava (51).

c) Osoita, että palloaalto $f_0(x^0, \mathbf{r}) = h(x^0 - |\mathbf{r}|)/|\mathbf{r}|$ on myös ratkaisu. Mikä on näitten (\pm) palloallooratkaisuiden fysikaalinen merkitys?

Koska homogeeninen aaltoyhtälö on lineaarinen, yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa tasoaaltojen/palloaltojen summana (tai sarjana tai jopa Fourier’n muunnoksena).

37.1 Dipolimomentti

Palataan lopuksi vielä retardoituun ratkaisuun

$$f(y^0, \mathbf{a}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{f}(y^0 - |\mathbf{a} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}.$$

Oletetaan, että kaikilla tarkasteltavilla ajan $x^0 = ct$ arvoilla ‘lähde’ \tilde{f} häviää jonkun R -säteisen pallon ulkopuolella eli $\tilde{f}(x^0, \mathbf{r}) = 0$, kun $|\mathbf{r}| > R$. Tarkastellaan sitten lähdettä kaukaa eli $a := |\mathbf{a}| \gg R$. Yllä olevassa integraalissa voidaan olettaa täten, että $r := |\mathbf{r}| \leq R$, jotenka $r/a \approx 0$. Täten (koska $(1+x)^{\pm 1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x + \dots$) [!]

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} - \mathbf{r}| &= \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{r})} = \sqrt{a^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + r^2} = a\sqrt{1 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}/a^2 + (r/a)^2} \\ &= a \left\{ 1 + \frac{1}{2}[-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}/a^2 + (r/a)^2] + \dots \right\} \approx a - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{a}, \end{aligned}$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{r}|^{-1} = (a^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + r^2)^{-1/2} = \frac{1}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{2}[-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}/a^2 + (r/a)^2] + \dots \right\} \approx \frac{1}{a} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{a^3}$$

ja (käyttämällä Taylorin sarjaa)

$$\tilde{f}(y^0 - |\mathbf{a} - \mathbf{r}|, \mathbf{r}) \approx \tilde{f}(y^0 - a + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}/a, \mathbf{r}) \approx \tilde{f}(y^0 - a, \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{a} \underbrace{\frac{\partial \tilde{f}(x^0, \mathbf{r})}{\partial x^0} \Big|_{x^0=y^0-a}}_{= \partial_0 \tilde{f}(y^0-a, \mathbf{r})}$$

saadaan lopulta (merkitsemällä $\hat{\mathbf{a}} := \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \mathbf{a}/a$) [!]

$$\begin{aligned}
 f(y^0, \mathbf{a}) &\approx \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} [\tilde{f}(y^0 - a, \mathbf{r}) + (\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{r}) \partial_0 \tilde{f}(y^0 - a, \mathbf{r})] \left[\frac{1}{a} + \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{r}}{a^2} \right] d^3\mathbf{r} \\
 &\approx \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\tilde{f}_{(i)}(y^0, \mathbf{a})}{a} + \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{(i)'}(y^0, \mathbf{a})}{a} + \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{(ii)}(y^0, \mathbf{a})}{a^2} \right], \\
 \tilde{f}_{(i)}(y^0, \mathbf{a}) &:= \iiint_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(y^0 - a, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \in \mathbb{R}, \\
 \tilde{\mathbf{f}}_{(i)'}(y^0, \mathbf{a}) &:= \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r} \partial_0 \tilde{f}(y^0 - a, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \\
 \tilde{\mathbf{f}}_{(ii)}(y^0, \mathbf{a}) &:= \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r} \tilde{f}(y^0 - a, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.
 \end{aligned}$$

Ensimmäistä termiä $f_{(i)}$ voidaan kutsua 'jakauman' \tilde{f} 'kokonaismassaksi' tai 'kokonaisvaraukseksi' ja termiä $\tilde{\mathbf{f}}_{(ii)}$ 'jakauman' \tilde{f} *dipolimomentiksi* (origon $\mathbf{r} = \vec{0}$ suhteen). Huomaa, että $\tilde{\mathbf{f}}_{(i)'} = \partial \tilde{\mathbf{f}}_{(ii)}(y^0, \mathbf{a}) / \partial y^0$, joten merkitään jatkossa $\tilde{\mathbf{f}}_{(i)'} = \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_{(ii)}$ ja siis $(4\pi)f \approx \tilde{f}_{(i)}/a + \hat{\mathbf{a}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_{(ii)}/a + \hat{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{(ii)}/a^2$.

38 FYS: Säteil

Tarkastellaan varaustiheyttä $\rho(\mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{r})$ ja virtatiheyttä $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ (eli lähde 1-muotoa $j = j_\nu dx^\nu = -c\rho dx^0 + j_k dx^k$) tyhjiössä Minkowskin avaruudessa. Fysikaalisesti järkevää on olettaa, että kaikilla tarkasteltavilla hetkillä t tiheys ρ ja virta \mathbf{j} häviävät jonkun (mielivaltaisen suuren ajasta riippumattoman) \mathbb{R}^3 :n pallon ulkopuolella. Olkoon $(ct, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^4$ tarkastelupiste (pistetapahtuma), missä sähkömagneettista kenttää mitataan. Nyt Maxwellin yhtälöiden $\square A^\beta = \mu_0 j^\beta$, $\beta = 0, 1, 2, 3$, retardoidut ratkaisut ovat

$$A^\beta(y^0, \mathbf{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{j^\beta(y^0 - |\mathbf{a} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r},$$

eli käyttämällä kaavoja $y^0 = ct$, $(A^\beta) = (\phi/c, \mathbf{A})$, $(j^\beta) = (c\rho, \mathbf{j})$ ja $1/\varepsilon_0 = \mu_0 c^2$,

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{a}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t - |\mathbf{a} - \mathbf{r}|/c, \mathbf{r})}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}, \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{a}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(t - |\mathbf{a} - \mathbf{r}|/c, \mathbf{r})}{|\mathbf{a} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 84. Osoita, että yllä oleva retardoitu ratkaisu $A^\beta(y^0, a^1, a^2, a^3)$ toteuttaa myös Lorenzin mittaehdon $\delta A = 0$ eli ehdon

$$\frac{\partial A^0}{\partial y^0} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A^k}{\partial a^k} = 0.$$

Vinkki: vaihda integrointimuuttuja muuttujaksi $\tilde{\mathbf{r}} := \mathbf{r} - \mathbf{a}$ ja käytä jatkuvuusyhtälöä $\delta j = 0$.

Tarkastellaan sitten sähkömagneettista kenttää kaukana lähteestä j . Ollaan aiemmin osoitettu, että [!]

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{a}) &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q}{a} + \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{d}}(t - a/c)}{ca} + \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{d}(t - a/c)}{a^2} \right], \\ Q &:= \rho_{(i)}(t, \mathbf{a}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(t - a/c, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (\text{kokonaisvaraus, joka on vakio}), \\ \mathbf{d}(t - a/c) &:= \boldsymbol{\rho}_{(ii)}(t, \mathbf{a}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r} \rho(t - a/c, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (\rho\text{:n dipolimomentti}), \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{a}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{a} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(t - a/c, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi a} \dot{\mathbf{d}}(t - a/c), \end{aligned}$$

sillä $\nabla \cdot (x^k \mathbf{j}) = (\nabla x^k) \cdot \mathbf{j} + x^k \nabla \cdot \mathbf{j}$ ja täten käyttämällä divergenssilauseetta (integroiden yli valtavan \mathbb{R}^3 :n pallon) $0 = \iiint_{\mathbb{R}^3} j^k d^3\mathbf{r} + \iiint_{\mathbb{R}^3} x^k \nabla \cdot \mathbf{j} d^3\mathbf{r}$ eli (jatkuvuusyhtälöstä)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = - \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r} \rho d^3\mathbf{r}.$$

Nyt *likimääräiset* kentät \mathbf{E} ja \mathbf{B} voidaan laskea esimerkiksi kaavoista $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}}$ sekä $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Siirrytään pallokoordinaatteihin (a, θ, φ) (sillä paikkavektorina on nyt \mathbf{a} ja radiaalikoordinaattina a).²²⁸ Nyt \mathbf{A} riippuu vaan radiaalikoordinaatista a , joten

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{a}) = \hat{\mathbf{a}} \times \partial_a \mathbf{A}(t, \mathbf{a}) = \underbrace{-\frac{\mu_0}{4\pi ca} \hat{\mathbf{a}} \times \ddot{\mathbf{d}}(t - a/c)}_{=: \mathbf{B}_R(t, \mathbf{a})} - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi a^2} \hat{\mathbf{a}} \times \dot{\mathbf{d}}(t - a/c)}_{=: \mathbf{B}_I(t, \mathbf{a})} = \mathbf{B}_R(t, \mathbf{a}) + \mathbf{B}_I(t, \mathbf{a}).$$

Harjoitustehtävä 85. a) *Osoita, että*

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \nabla\phi &= -Q \frac{\hat{\mathbf{a}}}{a^2} + \frac{1}{ca} \hat{\mathbf{a}} \cdot \nabla \dot{\mathbf{d}} + \frac{1}{a^2} \hat{\mathbf{a}} \cdot \nabla \mathbf{d} + \dot{\mathbf{d}} \cdot \nabla \frac{\hat{\mathbf{a}}}{ca} + \mathbf{d} \cdot \nabla \frac{\hat{\mathbf{a}}}{a^2} \\ &+ \frac{1}{ca} \hat{\mathbf{a}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{d}}) + \frac{\hat{\mathbf{a}}}{a^2} \times (\nabla \times \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Vinkki: $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w})$ sekä $\nabla f(a) = \hat{\mathbf{a}} \partial_a f(a)$ ja $\nabla \times \mathbf{v}(a) = \hat{\mathbf{a}} \times \partial_a \mathbf{v}(a)$.

b) *Osoita, että* $\mathbf{E}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{E}_R(t, \mathbf{a}) + \mathbf{E}_I(t, \mathbf{a}) + \mathbf{E}_S(t, \mathbf{a}) + (4\pi\epsilon_0)^{-1} Q \hat{\mathbf{a}}/a^2$, missä

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R(t, \mathbf{a}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \left\{ \hat{\mathbf{a}} [\hat{\mathbf{a}} \cdot \ddot{\mathbf{d}}(t - a/c)] - \ddot{\mathbf{d}}(t - a/c) \right\}, \\ \mathbf{E}_I(t, \mathbf{a}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c a^2} \left\{ 3\hat{\mathbf{a}} [\hat{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{d}}(t - a/c)] - \dot{\mathbf{d}}(t - a/c) \right\}, \\ \mathbf{E}_S(t, \mathbf{a}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left\{ 3\hat{\mathbf{a}} [\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{d}(t - a/c)] - \mathbf{d}(t - a/c) \right\}. \end{aligned}$$

Välittömästi nähdään seuraavat asiat:

- Jos varausjakauma ei muutu ajan myötä eli $\rho(t, \mathbf{r}) \equiv \rho_0(\mathbf{r})$, niin dipolimomentti \mathbf{d} on myös vakio ja tällöin $\mathbf{B} \equiv \vec{0}$ sekä sähkökenttä on ajan suhteen vakio. Tässä tapauksessa saadaan $\mathbf{E}(\mathbf{a}) = \mathbf{E}_S(\mathbf{a}) + (4\pi\epsilon_0)^{-1} Q \hat{\mathbf{a}}/a^2$.
- Termi $(4\pi\epsilon_0)^{-1} Q \hat{\mathbf{a}}/a^2$ on (staattisen) varausjakauman tavanomainen Coulombinen sähkökenttä ja termiä $\mathbf{E}_S(t, \mathbf{a})$ kutsutaan (myös) *staattiseksi sähkökentäksi*, sillä se riippuu (yleisestikin) vain varausten sijainneista (jotka voivat yleensä vaihdella ajan myötä) eikä niiden 'liikkeistä' (eli nopeuksista tai kiihtyvyyksistä). Coulombinen kenttä on paikkavektorin \mathbf{a} suuntainen eli ns. *pitkittäinen kenttä*.
- Sähkömagneettista kenttää $(\mathbf{E}_I(t, \mathbf{a}), \mathbf{B}_I(t, \mathbf{a}))$ kutsutaan 'välisentäksi' tai *induktiokentäksi*, sillä se on staattisen kentän ja seuraavaksi esiteltävän säteilykentän 'välissä' (se riippuu etäisyydestä kertoimella $1/a^2$ kuten Coulombin kenttäkin).

²²⁸Siis $a^1 = a \sin \theta \cos \varphi$, $a^2 = a \sin \theta \sin \varphi$ ja $a^3 = a \cos \theta$.

- Kun etäisyys a kentän lähteisiin on hyvin suuri (ja varaukset kiihtyvät riittävästi), niin sähkömagneettinen kenttä $(\mathbf{E}_R(t, \mathbf{a}), \mathbf{B}_R(t, \mathbf{a}))$ dominoi. Sitä sanotaan (dipoli-) *säteilykentäksi*. Kyseinen kenttä riippuu varausten kiihtyvyyksistä (eli $\ddot{\mathbf{d}}$:stä ja täten $\partial^2\rho/\partial t^2$:sta). Säteilykenttä on *poikittainen* eli kohtisuorassa paikkavektoria vastaan, sillä $\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}_R(t, \mathbf{a}) \equiv 0 \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}_R(t, \mathbf{a})$. Lisäksi sähkö- ja magneettikentät ovat toisaan vastaan kohtisuorassa: $\mathbf{E}_R(t, \mathbf{a}) = -c\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{B}_R(t, \mathbf{a})$.²²⁹ Säteilykentän energiatiheys ja Poyntingin vektori ovat muotoa [!]

$$\begin{aligned} W_R(t, \mathbf{a}) &= \frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}_R(t, \mathbf{a})|^2 + \frac{1}{2}\mu_0^{-1}|\mathbf{B}_R(t, \mathbf{a})|^2 = \frac{\mu_0}{16\pi^2c^2a^2}|\hat{\mathbf{a}} \times \ddot{\mathbf{d}}(t - a/c)|^2, \\ \mathbf{S}_R(t, \mathbf{a}) &= \mathbf{E}_R(t, \mathbf{a}) \times \mathbf{B}_R(t, \mathbf{a})/\mu_0 = c\mu_0^{-1}\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{B}_R(t, \mathbf{a})|^2 = cW_R(t, \mathbf{a})\hat{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Säteilykenttä $(\mathbf{E}_R(t, \mathbf{a}), \mathbf{B}_R(t, \mathbf{a}))$ riippuu etäisyydestä tekijällä $1/a$ kuten palloaaltoakin.

Tarkastellaan sitten tarkemmin tilannetta, missä säteilykenttä dominoi.

Jos meillä on etäisyydellä a detektori pisteessä \mathbf{a} , jonka aktiivisen alueen (hyvin pieni) pinta-ala on \mathcal{A} , ja joka on paikkavektorin \mathbf{a} suuntainen (eli pinta-ala on \mathbf{a} :ta vastaan ‘kohtisuorassa’), niin detektoriin virtaava sähkömagneettinen energia on aikavälillä $[0, T]$ likimäärin ($\mathcal{A} \approx 0$)

$$\mathcal{A} \int_0^T [\mathbf{S}_R(t, \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{a}}] dt = \mathcal{A}c \int_0^T W_R(t, \mathbf{a}) dt$$

eli siis detektoriin virtaavan energian intensiteetti on $cW_R(t, \mathbf{a}) \sim 1/a^2$ hetkellä t , missä c on säteilyn nopeus ja $W_R(t, \mathbf{a})$ sen energiatiheys. Lasketaan sitten paljonko energiaa virtaa a -säteisen pallonpinnan läpi aikayksikössä.

Kiinnitetään a ja t sekä valitaan koodinaatisto siten, että $\ddot{\mathbf{d}}(t - a/c)$ on a^3 -akselin suuntainen eli $\hat{\mathbf{a}} \times \ddot{\mathbf{d}}(t - a/c) = |\ddot{\mathbf{d}}(t - a/c)| \sin\theta$. Täten pallonpinnan läpi virtaavan säteilyenergian teho hetkellä t on

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi cW_R(t, a\hat{\mathbf{a}}) a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi c \frac{\mu_0}{16\pi^2c^2a^2} |\hat{\mathbf{a}} \times \ddot{\mathbf{d}}(t - a/c)|^2 a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2c} |\ddot{\mathbf{d}}(t - a/c)|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\mathbf{d}}(t - a/c)|^2. \end{aligned}$$

Jos jakauma ρ koostuu vain yhdestä hiukkasesta, jonka varaus on Q ja liike $\mathbf{r}(t)$, niin²³⁰ sen dipolimomentti on $\mathbf{d}(t - a/c) = Q\mathbf{r}(t - a/c)$ ja vastaava säteilyteho $P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} Q^2 |\ddot{\mathbf{r}}(t - a/c)|^2$ eli olennaisesti hiukkasen kiihtyvyys hetkellä $t - a/c < t$, jolloin säteily lähtee hiukkasesta kuin ‘palloaltona’ (edeten valonnopeudella etäisyydelle $a \gg 0$ hetkellä t); mitä suurempi varaus ja kiihtyvyys, sitä suurempi säteilyteho. Jos hiukkaseen ei ‘pumpata’ lisää (mekaanista)

²²⁹Seuraa heti ‘back cab’-kaavasta $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

²³⁰Sillä enemmän tai vähemmän formaalisti $\rho(t, \mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$.

energiaa, sen on menetettävä liike-energiaansa säteillessään. Tästä syystä ‘klassinen atomi’ ei pysy kasassa: elektronit menettävät energiaansa (säteilynä) liikkeessaan ‘ympyräradoilla’ ytimen ympärillä ja ratojen säteet pienenevät hyvin nopeasti. Atomi luhistuu siis kasaan. Onneksi kvanttimekaniikka selittää atomien ja aineen pysyvyyden.

38.1 Homodynidetektor

Jos varauksia ei ole ($j = 0$), niin oletetaan, että nelipotentiali toteuttaa Lorenzin mittaehdon $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ eli $\partial_0 A^0 = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ ja myös Maxwellin yhtälöt $\square A^\beta = \partial_0(\partial_0 A^\beta) - \nabla^2 A^\beta = 0$. Jos $A^0 = 0$, niin myös $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Jos $A^0 \neq 0$, niin tehdään mittamuunnos $A' = A + df$, missä $f(\mathbf{x}) = f(x^0, \mathbf{r}) := \int_{y^0}^{x^0} A^0(u, \mathbf{r}) du + h(\mathbf{r})$, $y^0 \in \mathbb{R}$ ja $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ on joku funktio. Nyt $A'^0 = A^0 - \partial_0 f = 0$ ja

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{A}')(\mathbf{x}) &= (\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}) + \nabla^2 f(\mathbf{x}) = (\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}) + \int_{y^0}^{x^0} (\nabla^2 A^0)(u, \mathbf{r}) du + \nabla^2 h(\mathbf{r}) \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}) + \int_{y^0}^{x^0} [\partial_0(\partial_0 A^0)](u, \mathbf{r}) du + \nabla^2 h(\mathbf{r}) \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}) + (\partial_0 A^0)(\mathbf{x}) - (\partial_0 A^0)(y_0, \mathbf{r}) + \nabla^2 h(\mathbf{r}) = 0, \end{aligned}$$

mikäli h valitaan Poissonin yhtälön $\nabla^2 h(\mathbf{r}) = (\partial_0 A^0)(y_0, \mathbf{r})$ ratkaisuksi: Kaavan (39) nojalla (ainakin kun $\partial_0 A^0$ on ‘riittävän’ nopeasti vähenevä)

$$h(\mathbf{a}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{(\partial_0 A^0)(y_0, \mathbf{r} + \mathbf{a})}{r} d^3 \mathbf{r}$$

(tähän ratkaisuun voidaan tietenkin vielä lisätä Laplaceen yhtälön $\nabla^2 h_0 = 0$ ratkaisu h_0). Täten A' toteuttaa Lorenzin mittaehdon ja (siksi) Maxwellin yhtälöt $\square A'^\beta = 0$. Eli jos lähde $j = 0$, niin voidaan aina etsiä ratkaisuja A , $A^0 = 0$, jotka toteuttavat *Coulombin (säteily)mittaehdon* $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ja tietenkin aaltoyhtälöt $\square A^k = 0$, $k = 1, 2, 3$, tai lyhyesti $\square \mathbf{A} = \vec{0}$. Erityisen käyttökelpoinen ratkaisu on tasoalto, jota käytetään fyysisessä optiikassa (ja jopa laservalon alkeismallina kvanttioptiikassa).

Tarkastellaan sähkömagneettista kenttää äärellisen kokoisessa tyhjiössä (‘kaviteetissa’) $V \subset \mathbb{R}^3$ (esim. sylinteri). Olkoon tyhjiön V tilavuus $\mathcal{V} < \infty$. Yksinkertaisin tapa kuvata ‘yksiväristä’ (monokromaattista yhden moodin) kenttää on käyttää *tasoaltoa*

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2E}{\varepsilon_0 \mathcal{V} \omega^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi) \mathbf{u}, \quad (52)$$

missä $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ on *aaltovektori* (eli aallon etenemissuunta), $\omega = c|\mathbf{k}|$ on *kulmanopeus* (eli valon ‘väri’), $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{u}| = 1$, $\mathbf{u} \perp \mathbf{k}$, on *polarisaatiovektori*, E on (yhden syklin yli) keskimääräistetty aallon *energia(määrä)* (tilavuudessa \mathcal{V}) ja φ on (*absoluuttinen*) *vaihe*.

Harjoitustehtävä 86. a) Osoita, että tasoaalto (52) toteuttaa aaltoyhtälön

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

ja Coulombin mittaehdon $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

b) Koska $\mathbf{u} \perp \mathbf{k}$, valitaan kartta $\mathbf{r} = (x, y, z) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$ siten, että $\mathbf{k} = (\omega/c) \hat{\mathbf{k}}$ ja $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}}$. Laske sähkömagneettinen kenttä eli $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$ ja $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ sekä kenttätensori F .

c) Laske energia-impulssitensori T . Mitkä ovat energian ja impulssin säilymislaivit nyt? Eri-tyisesti osoita, että tasoaallon energiatiheys

$$W(t, \mathbf{r}) = \frac{2E}{\mathcal{V}} \sin^2((\omega/c)z - \omega t + \varphi)$$

ja Poyntingin vektori $\mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = cW(t, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{k}}$.

d) Osoita, että

$$\int_V \left[\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} W(t, \mathbf{r}) dt \right] dx dy dz = E.$$

Laitetaan fotodetektori origoon siten, että sen aktiivinen alue on kohtisuorassa z -akselia vastaan. Nyt detektoriin virtaavan valon intensiteetti hetkellä t on

$$cW(t, \vec{0}) = \frac{2cE}{\mathcal{V}} \sin^2(-\omega t + \varphi).$$

Yleisesti valon intensiteettiä mitattaessa mittausaika on paljon pitempi kuin yhden oskillaation aika $2\pi/\omega$ eli (optimaalisesti) mitattu intensiteetti on aikakeskiarvo

$$\mathcal{I} := \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} cW(t, \vec{0}) dt = \frac{cE}{\mathcal{V}}.$$

Koska detektorit ovat epätäydellisiä, niin mitattu intensiteetti on (tosiasiallisesti) $\alpha \mathcal{I}$, missä $\alpha \in [0, 1]$ on detektorin tehokkuus (eli vain $\alpha \times 100\%$ valosta/fotoneista havaitaan). Mitattu energia ('fotonien lukumäärä') aikavälillä $[0, T]$ on

$$\alpha \mathcal{A} \int_0^T cW(t, \vec{0}) dt = \alpha \mathcal{A} \mathcal{I} \left[T + \frac{\sin(2\varphi - 2\omega T) - \sin(2\varphi)}{2\omega} \right] \sim \alpha \mathcal{A} T \mathcal{I}$$

kun mittausaika $T \gg 2\pi/\omega$ ja \mathcal{A} on detektorin aktiivisen alueen pinta-ala. Välittömästi saadaan

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \text{Re} \left(\sqrt{\mathcal{I}} e^{i\varphi} f_\omega(z, t) \right) \hat{\mathbf{i}}$$

missä

$$f_\omega(z, t) := \sqrt{\frac{2}{c\epsilon_0\omega^2}} e^{i(\omega/c)z - i\omega t}.$$

Tasoaaltoa voidaan siis kuvata seuraavien kokeellisesti mitattavien parametrien avulla: kulmanopeus ('väri') ω , polarisaatio $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}}$, intensiteetti \mathcal{I} ja vaihe φ .²³¹ Yhdellä fotodetektorilla voi siis mitata suureen $\alpha\mathcal{I}$, mutta ei vaihetta φ . Sen mittaamiseksi tarvitaan lisää fotodetektoreja ja joku ennalta annettu referenssikenttä (ns. lokaalioskillaattori), jonka vaiheeseen φ :tä voidaan verrata.

Homodyynidetektiossa kaksi (samanväristä ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) sekä samoinpolaroitua) 'tasoaaltoa' yhdistetään (50:50) säteenjakajalla (joka ei muuta polarisaatiota). Aaltojen intensiteettien \mathcal{I}_1 ja \mathcal{I}_2 (tai vaiheiden φ_1 ja φ_2) eivät tarvitse kuitenkaan olla yhtä suuria. Jos ensimmäinen resultanttiaalto etenee z -akselia pitkin eli on superpositioperiaatten mukaisesti muotoa $\text{Re} [(2^{-1/2}\sqrt{\mathcal{I}_1} e^{i\varphi_1} + 2^{-1/2}i\sqrt{\mathcal{I}_2} e^{i\varphi_2}) f_\omega(z, t)] \hat{\mathbf{i}}$ ja mitataan fotodetektorilla (jonka tehokkuus on α) saadaan kyseisen resultanttiaallon (mitattu) intensiteetti $\alpha\mathcal{I}_3$, missä

$$\mathcal{I}_3 := \left| 2^{-1/2}\sqrt{\mathcal{I}_1} e^{i\varphi_1} + 2^{-1/2}i\sqrt{\mathcal{I}_2} e^{i\varphi_2} \right|^2 = \frac{\mathcal{I}_1}{2} + \frac{\mathcal{I}_2}{2} + \sqrt{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Vastaavasti toisen resultanttiaallon (mitattu) intensiteetti on $\alpha\mathcal{I}_4$ (toisella detektorilla on sama tehokkuus), missä

$$\mathcal{I}_4 := \left| 2^{-1/2}i\sqrt{\mathcal{I}_1} e^{i\varphi_1} + 2^{-1/2}\sqrt{\mathcal{I}_2} e^{i\varphi_2} \right|^2 = \frac{\mathcal{I}_1}{2} + \frac{\mathcal{I}_2}{2} - \sqrt{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Balansoidussa homodyynimittauksessa intensiteettien $\alpha\mathcal{I}_3$ ja $\alpha\mathcal{I}_4$ erotus rekisteröidään. Näin saadaan mitattua signaalikenttien vaihe-eron $\varphi_1 - \varphi_2$ sini eli

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\alpha\mathcal{I}_3 - \alpha\mathcal{I}_4}{2\sqrt{\alpha\mathcal{I}_1\alpha\mathcal{I}_2}}.$$

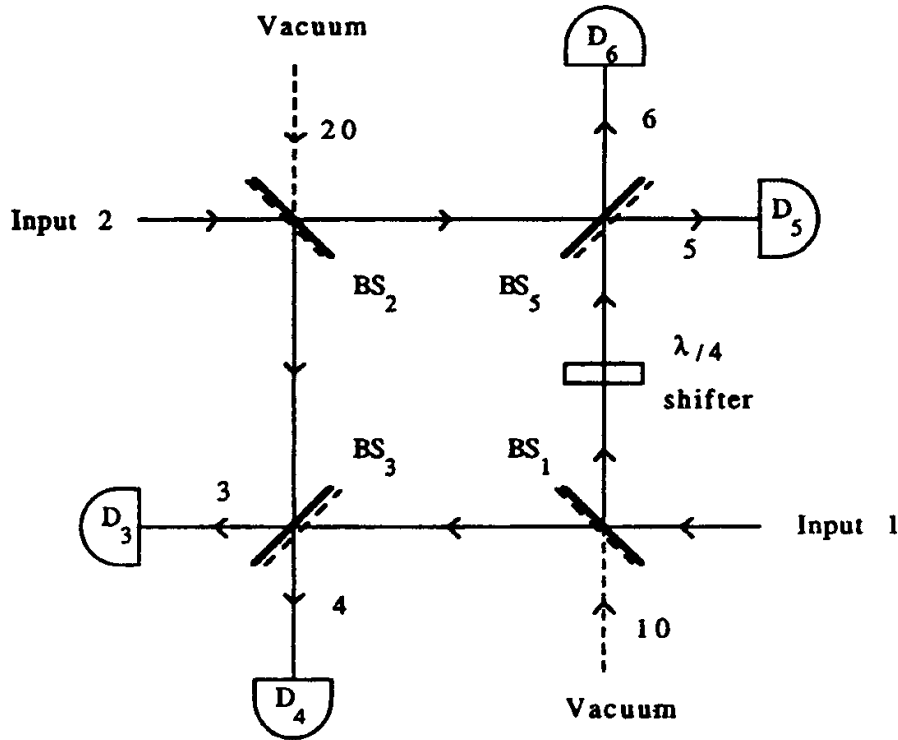
Jos vaihetta φ_1 siirretään vaihesiirtäjällä (neljännesaallonpituuslevy) ennen aaltojen yhdistämistä, niin saadaan mitattua myös kosini, sillä

$$\sin(\varphi_1 + \pi/2 - \varphi_2) = \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Jos yhdistetään nämä mittaukset kahdeksan portin homodyynidetektorilla, voidaan mitata sekä sini että kosini eli koko vaihe-ero $\varphi_1 - \varphi_2$. Seuraavassa kuvassa on esitetty tämä mittausjärjestely. Siinä käytetään neljää samanlaista fotodetektoria D_3, D_4, D_5 ja D_6 , jotka mittaavat intensiteetit $\mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4, \mathcal{I}_5$ ja \mathcal{I}_6 (kerrottuna tehokkuudella α). Näin saadaan

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{\alpha\mathcal{I}_4 - \alpha\mathcal{I}_3}{2\sqrt{\alpha\mathcal{I}_1\alpha\mathcal{I}_2}}, \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{\alpha\mathcal{I}_6 - \alpha\mathcal{I}_5}{2\sqrt{\alpha\mathcal{I}_1\alpha\mathcal{I}_2}}. \end{aligned}$$

²³¹Yleisemmin voidaan ottaa eri tasoaaltojen superpositioita. Esimerkiksi, jos yhdistetään kaksi eri suuntaan polaroitunutta aaltoa, joiden vaiheet eivät ole samat (ja pidetään muut suureet samoina), saadaan esim. ympyräpolaroitua valoa.



Kuva 20: Kahdeksan portin homodyynidetektori. ‘Tasoaallot’ (esim. lasersäteet) 1 ja 2 syötetään ‘Input’-portteihin. ‘Vacuum’-portteihin ei syötetä mitään kenttiä. BS tarkoittaa ‘beam splitteriä’ eli (50:50) säteenjakajaa. Vaihesiirtäjä on neljännesaallopituslevy eli ‘ $\lambda/4$ -shifter’.

38.2 Gravitaatiosäteily

Tarkastellaan tilannetta kaukana massiivisista kohteista (jotka ‘kaareuttavat’ avaruusaikaa). Havaittu metriikka g on asympotoottisesti litteä eli melkein Minkowskin metriikka η . Voidaan siis kirjoittaa $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\mathbf{x})$, missä $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \approx 0$ (ja lisäksi oletetaan, että $\partial_\alpha h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \approx 0$). Nyt käänteismetriikan matriisialkiot $g^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(\mathbf{x})$, missä $h^{\mu\nu}(\mathbf{x}) := \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$.²³² Kun lasketaan tai nostetaan indeksejä, voidaan käyttää (likimäärin) η -metriikkaa. Cristoffelin symbolit ovat

$$2\Gamma_{\mu\nu}^\rho = g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \approx \eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu})$$

ja Riemannin tensorin (alennetut) komponentit [!]

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx \eta_{\mu\lambda}\partial_\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \eta_{\mu\lambda}\partial_\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\lambda \approx \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}).$$

Lasketaan [!] vielä Riccin tensorin komponentit, skalaarikaarevuus ja Einsteinin tensori:

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\mu\nu} &= R_{\mu\lambda\nu}^\lambda \approx \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu \text{tr}[h] + \square h_{\mu\nu}), \\ S &= g^{\mu\nu}\text{Ric}_{\mu\nu} \approx \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} + \square \text{tr}[h], \end{aligned}$$

²³²Sillä $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} \approx (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma}) = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} + \eta^{\mu\nu}h_{\nu\sigma} - h^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} - h^{\mu\nu}h_{\nu\sigma} \approx \delta_\sigma^\mu$.

$$G_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}S \approx \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu \text{tr}[h] + \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\square \text{tr}[h]),$$

missä $\text{tr}[h] = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Tästä sitten saadaan likimääräinen Einsteinin yhtälö kehittämällä myös energia-impulssitensori T sarjaksi ‘häiriötten’ $h_{\mu\nu}$ suhteen ja ottamalla mukaan vain ensimmäisen kertaluvun termit. Sähködynamiikan innoittamana kokeillaanpa sitten sattuisiko gravitaatioaalto toteuttamaan likimääräisen Einsteinin yhtälön (tyhjiössä; $T \approx 0$).

Oletetaan, että $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = b_{\mu\nu} \cos(k_\sigma x^\sigma) = b_{\mu\nu} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, missä $(b_{\mu\nu})$ on symmetrinen reaalinen matriisi, $b_{\mu\nu} \approx 0$, $(k_\sigma) = (-\omega/c, \mathbf{k})$ ja $\omega = c|\mathbf{k}|$ (jotenka $\eta_{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta = 0$). Ajatellaan, että ‘gravitaatiohäiriö’ h ei juurikaan vaikuta aikaan (eli $b_{0\nu} \equiv 0$), ja että aalto liikkuu z -akselia pitkin eli $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$. Jos vielä aalto on poikittain z -akselia vastaan, niin voidaan olettaa, että ainoat nollasta eriävät komponentit ovat $b_{11} = b$, $b_{12} = b_{21} = b'$ ja $b_{22} = b''$. Täten

$$(h_{\mu\nu}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b' & 0 \\ 0 & b' & b'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t),$$

jolle $\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma = 0$ ja $\square h_{\mu\nu} \equiv 0$ (koska $\omega^2 = c^2k^2$). Nyt $\text{Ric}_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu \text{tr}[h]$ ja $(\text{tr}[h])(\mathbf{x}) = (b+b'') \cos(kz - \omega t)$, joten jos valitaan $b'' = -b$, niin $g = \eta + h$ toteuttaa likimäärin tyhjiön Einsteinin yhtälön $\text{Ric} \equiv 0$. Esimerkiksi tilanteessa $b'' = -b \neq 0$ ja $b' = 0$ saadaan (nollasta eriävät symbolit)

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{11}^0 = \Gamma, \\ \Gamma_{31}^1 &= \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{22}^0 = -\Gamma, \end{aligned}$$

missä $\Gamma(\mathbf{x}) := 2^{-1}bk \sin(kz - \omega t)$. Nämä aiheuttavat ‘näennäsvoimia,’ sillä geodeesiyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\ddot{x}^\rho = -\Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

missä oikean puolen (nollasta eriävä) termi voidaan ajatella voimaksi massayksikköä kohden.

Huomaa, että yleensä gravitaatiohäiriön vaikutus (esim. mittalaitteeseen) lasketaan käyttämällä ns. geodeesideviaatioyhtälöä, joka antaa kahden ‘lähekkäisen’ geodeesin välisen ‘(vuorovesi)voiman.’ Itseasiassa \mathbf{x} -kartta on vain häiriöttömän η -metriikan Riemannin normaalikoordinaatisto muttei ‘mitatun’ metriikan $g = \eta + h$! Täten kartan \mathbf{x} fysikaalinen tulkinta saattaa olla problemaattinen.

39 GEOM: Suihkumonistot

Säikeinen monisto on kolmikko (E, π, M) (tai lyhyesti vain π), missä E ja M ovat monistoja ja $\pi : E \rightarrow M$ on surjektio.²³³ Yleensä käytetään seuraavia termejä: E on *totaalimonisto*, π *projektiio*, M *kantamonisto* ja $E_{\mathbf{m}} := \pi^{-1}(\{\mathbf{m}\}) \subseteq E$ on *säie* (tai kuitu) pisteen $\mathbf{m} \in M$ yllä. Olkoon $n > 0$ M :n dimensio ja $p > 0$ säikeitten dimensio eli E :n dimensio on $n + p$. Jokaisen E :n pisteen jossain (avoimessa) ympäristössä $V \subseteq E$ on olemassa *säiekartta* $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, joka toteuttaa seuraavan ehdon: jos $\mathbf{e}, \mathbf{e}' \in V$ ja $\pi(\mathbf{e}) = \pi(\mathbf{e}') = \mathbf{m} \in M$, niin $\mathbf{q}(\mathbf{e}) = \mathbf{q}(\mathbf{e}') =: \mathbf{q}(\mathbf{m}) \in \mathbb{R}^n$. Täten E :n pisteen \mathbf{q} -koordinaatit kertovat sen, missä säikeessä $E_{\mathbf{m}}$ piste lepää;²³⁴ \mathbf{u} -koordinaatit taas kuvaavat pisteen sijaintia kyseisessä säikeessä.

Esimerkki 81. Jos N on monisto, niin voidaan määritellä $\text{pr}_1 : M \times N \rightarrow M$, $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto \mathbf{m}$, ja saadaan *triviaali säikeinen monisto* $(M \times N, \text{pr}_1, M)$. Nyt säiekartta (\mathbf{q}, \mathbf{u}) voidaan koostaa kantamoniston M kartasta \mathbf{q} ja säikeen N kartasta \mathbf{u} . Vastaavasti saadaan toinenkin triviaali säikeinen monisto $(M \times N, \text{pr}_2, N)$. Esimerkiksi taso \mathbb{R}^2 on triviaali säikeinen monisto (ainakin) kahdella tapaa, missä $\text{pr}_1(x, y) = x$ tai $\text{pr}_2(x, y) = y$. Vastaavasti \mathbb{R}^4 voidaan varustaa monilla projektiioilla, esim. $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x^0, x^2)$ tai $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow x^1$. (Mitkä ovat nyt vastaavien triviaalien säikeisten monistojen säikeiden ja kantamonistojen dimensiot?) [!]

Esimerkki 82. Tensorikimppuja²³⁵ $T_l^k M$ voidaan ajatella säikeisinä monistoina $(T_l^k M, \pi, M)$, missä $\pi(\mathbf{m}, T) = \mathbf{m}$ kaikilla $\mathbf{m} \in M$ ja $T \in T_l^k M_{\mathbf{m}}$. Nyt säiekartta voidaan rakentaa M :n kartasta \mathbf{q} kuvauksena $(\mathbf{m}, T) \mapsto (\mathbf{q}(\mathbf{m}), \mathbf{u}(\mathbf{m}, T))$, missä $\mathbf{u}(\mathbf{m}, T)$ koostuu (pisteen \mathbf{m} päällä lepäilevän) tensorin $T = T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \partial_{i_1} |_{\mathbf{m}} \otimes \dots \otimes dq^{j_l} |_{\mathbf{m}}$ komponenteista $T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$ peräkkäin kirjoitettuna. (Mikä on säikeen dimensio?) [!]

Esimerkki 83. Muistutetaan mieleen, että Newtonin (tai Aristoteleen) avaruus-aika on triviaali säikeinen monisto $(\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1, \text{pr}_2, \mathbb{E}^1)$. Jos oletetaan, että avaruus ei ole absoluuttinen mutta aika on, niin päädytään Galilein avaruus-aikaan, joka on säikeinen monisto $(\mathbb{A}^4, \pi, \mathbb{E}^1)$ varustettuna aikajärjestyksellä ja samanaikaisten pisteiden euklidisella etäisyydellä. Erityisen suhteellisuusteorian avaruusaika eli Minkowskin avaruus \mathbb{M}^4 ei ole säikeinen monisto, sillä yhtä fysikaalisesti perusteltua projektiota ei helposti löydy. Samoin yleisen suhteellisuusteorian

²³³Ja ns. submersio, mistä seuraa, että säikeet $E_{\mathbf{m}}$ ovat E :n alimonistoja, joiden dimensiot ovat $\dim E_{\mathbf{m}} = \dim E - \dim M$. Oletetaan seuraavassa lisäksi, että $\dim E > \dim M$ eli $\dim E_{\mathbf{m}} \neq 0$.

²³⁴Kartan \mathbf{q} voidaan ajatella olevan myös M :n kartta.

²³⁵Yleisemmin voidaan määritellä *säiekimppu* eli säikeinen monisto, jonka säikeet voidaan 'niputtaa yhteen' luonnollisella tavalla. Erikoistapauksina tästä ovat vektorikimput ja pääsäiekimput, joilla on käyttöä mm. (Yangin-Millsin) mittakenttäteoriassa (esim. sähkömagnetismi).

avaruusaika eli neliulotteinen Lorentzin monisto (M, g) ei ole (luonnollisella tavalla) säikeinen. Näissä avaruusajoissa löytyy projektiot ‘aika-akseleille’ vain (lokaalisti) kunkin havaitsijan \mathbf{x} suhteen (eli lokaalisti $\mathbf{x} \mapsto x^0$).

Säikeisen moniston (E, π, M) *lokaali sektio* (viipale) on kuvaus $s : U \rightarrow E$, missä $U \subseteq M$ on avoin joukko, joka toteuttaa seuraavan ehdon: $\pi(s(\mathbf{m})) = \mathbf{m}$ kaikilla $\mathbf{m} \in U$. Jos $U = M$, niin lokaalia sektiota sanotaan (globaaliksi) *sektioksi*. Sektio siis liittää kantamoniston pisteeseen \mathbf{m} yksikäsitteisen säikeen $E_{\mathbf{m}}$ pisteen $s(\mathbf{m})$ (sileällä tavalla). Esimerkiksi tensorikenttä on tensorikimpun sektio. [!] Toisaalta triviaalin säikeisen moniston $(M \times N, \text{pr}_1, M)$ sektio voidaan nähdä kuvauksena $s : M \rightarrow N$ ja kääntäen. [!] Jos nyt $M = \mathbb{R}$ edellä, niin käyrä monistolla N on (lokaali) sektio. Yleisesti kenttäteoriassa *fysikaaliset kentät ovat säikeisten monistojen (lokaaleja) sektioita*. Merkitään säikeisen moniston π sektioiden joukkoa notaatiolla $\Gamma(\pi)$. Jokaiselle \mathbf{m} :lle $\Gamma_{\mathbf{m}}(\pi)$ tarkoittaa lokaaleitten sektioitten $s : U \rightarrow E$, $\mathbf{m} \in U$, muodostamaa joukkoa.

Jos (\mathbf{q}, \mathbf{u}) on säiekartta ja $s : U \rightarrow E$ (lokaali) sektio, niin kirjoittamalla $s^a := u^a \circ s \circ \mathbf{q}^{-1}$ voidaan s esittää (hieman epätäsmällisesti) ‘koordinaattimuodossa’ $u^a = s^a(q^1, \dots, q^n)$, missä $a = 1, \dots, p$. Näin voidaan määritellä esim. osittaisderivaattafunktiot $\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} s^a$ kaavalla

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} s^a(\mathbf{q}) := \frac{\partial^k s^a(\mathbf{q})}{\partial q^{i_1} \dots \partial q^{i_k}}, \quad \mathbf{q} \in \mathbf{q}(U).$$

Esim. käyrälle ‘lähtöpuolella’ on vain yksi koordinaatti eli $\mathbf{q} = \lambda$ ja sektio on nyt $u^a = s^a(\lambda)$ kuten käyrälle pitääkin. Tällöin merkitään $\dot{s}^a = ds^a/d\lambda$, $\ddot{s}^a = d^2s^a/d\lambda^2$, jne.

Vastaavasti kuin aikoinamme määrittelimme vektorin (toisiaan sivuavien) käyrien ekvivalenssiluokkina, voimme nyt määritellä ekvivalentit sektiot: Olkoon $\mathbf{m} \in M$ sekä $s : U \rightarrow E$ ja $\tilde{s} : \tilde{U} \rightarrow E$ kaksi lokaalia sektiota, joille $\mathbf{m} \in U$ ja $\mathbf{m} \in \tilde{U}$. Sanotaan, että s ja \tilde{s} ovat *k-ekvivalentit pisteessä \mathbf{m}* , jos $s(\mathbf{m}) = \tilde{s}(\mathbf{m})$ sekä jossain²³⁶ (pisteen $s(\mathbf{m})$ ympäristössä määritellyssä) säiekartassa (\mathbf{q}, \mathbf{u}) toteutuu ehdot

$$\left. \frac{\partial^l s^a(\mathbf{q})}{\partial q^{i_1} \dots \partial q^{i_l}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{m})} = \left. \frac{\partial^l \tilde{s}^a(\mathbf{q})}{\partial q^{i_1} \dots \partial q^{i_l}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{m})}$$

kaikilla $a = 1, 2, \dots, p$, $l = 1, 2, \dots, k$ ja $i_1, i_2, \dots, i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Merkitään *k-ekvivalenttien lokaaleitten sektioitten s (pisteessä \mathbf{m}) muodostamaa ekvivalenssiluokkaa* (ns. *s:n k-suihkua pisteessä \mathbf{m}*) symbolilla $j_{\mathbf{m}}^k s$. Kiinnitetään $k \in \{1, 2, \dots\}$ ja määritellään *k:s suihkumonisto*

$$J^k \pi := \{j_{\mathbf{m}}^k s \mid \mathbf{m} \in M, s \in \Gamma_{\mathbf{m}}(\pi)\}.$$

²³⁶Ja täten missä tahansa säiekartassa, kuten on helppo nähdä käyttämällä ketjusääntöä. [!]

Nyt π :n säiekartta $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ indusoi moniston $J^k\pi$ kartan $(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{U})$ (jonka määrittelyalue on $V^k = \{j_m^k s \mid s(m) \in V\}$), missä $\mathbf{q}(j_m^k s) := \mathbf{q}(m)$, $\mathbf{u}(j_m^k s) := \mathbf{u}(s(m))$ ja $\mathbf{U}(j_m^k s)$ ‘koostuu’ derivaattakoordinaateista

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_l}^a(j_m^k s) := \left. \frac{\partial^l s^a(\mathbf{q})}{\partial q^{i_1} \dots \partial q^{i_l}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(m)},$$

missä $a = 1, 2, \dots, p$, $l = 1, 2, \dots, k$ ja $i_1, i_2, \dots, i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Esimerkiksi $J^1\pi$:n koordinaatteina (eli $k = 1$) ovat

$$(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = (q^1, q^2, \dots, q^n; u^1, u^2, \dots, u^p; \underbrace{u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1, u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2, \dots, u_1^p, u_2^p, \dots, u_n^p}_{=\mathbf{U}}),$$

missä

$$u_i^a(j_m^1 s) = \partial_i s^a(\mathbf{q}(m)) = \left. \frac{\partial s^a(\mathbf{q})}{\partial q^i} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(m)}.$$

Koordinaatteja on nyt $n + p + np$ kappaletta ja se on myös moniston $J^1\pi$ dimensio. Monistossa $J^2\pi$ on ‘samat’ koordinaatit kuin edellä, mutta indusoituihin karttoihin pitää lisätä vielä toisen asteen koordinaatit

$$u_{ij}^a(j_m^2 s) = \partial_i \partial_j s^a(\mathbf{q}(m)) = \left. \frac{\partial^2 s^a(\mathbf{q})}{\partial q^i \partial q^j} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(m)}.$$

Huomaa, että $u_{ij}^a = u_{ji}^a$, joten (riippumattomia) toisen asteen koordinaatteja on $[n + (n^2 - n)/2]p$ kappaletta. Täten $J^2\pi$:n dimensio on $n + p + np + [n + (n^2 - n)/2]p$. Jos koordinaattifunktioita q^i merkitään joillain symboleilla, niin ne laitetaan usein alaindekseiksi; esim. jos \mathbb{R}^2 :ssa $\mathbf{q} = (x, y)$, niin merkitään $u_1^a = u_x^a$, $u_2^a = u_y^a$, $u_{11}^a = u_{xx}^a$, $u_{12}^a = u_{xy}^a$, $u_{121}^a = u_{112}^a = u_{211}^a = u_{xxy}^a$ jne.

Harjoitustehtävä 87. a) Poistetaan kolmiulotteisesta avaruudesta origo eli määritellään monisto $E = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Olkoon $M = \mathbb{S}^2$ pallon pinta (säde on 1). Määritellään kuvaus $\pi : E \rightarrow M$, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Miksi (E, π, M) on säikeinen monisto? Osoita, että pallokoordinaatit $(\theta, \varphi; r)$ muodostavat säiekartan.

b) Tarkastellaan jotain säikeistä monistoa (E, π, M) , missä $M = \mathbb{R}^2$ on taso. Käytetään tasolle joko karteesisia koodinaatteja $\mathbf{q} = (x, y)$ tai napakoordinaatteja $\mathbf{q} = (r, \varphi)$ eli meillä on kaksi säiekarttaa $(x, y; \mathbf{u})$ ja $(r, \varphi; \mathbf{u})$. Nämä kumpikin kartta indusoi $J^2\pi$:lle kaksi karttaa $(x, y; u^a; u_x^a, u_y^a, u_{xx}^a, u_{xy}^a, u_{yy}^a)$ ja $(r, \varphi; u^a; u_r^a, u_\varphi^a, u_{rr}^a, u_{r\varphi}^a, u_{\varphi\varphi}^a)$. Mitkä ovat näiden karttojen väliset koordinaattimuunnokset? Vinkki: ketjusääntö.

Suihkumonisto $J^k\pi$ on myös säikeinen monisto $(J^k\pi, \pi_k, M)$, missä nyt (lähde)projektio $\pi_k(j_m^k s) := \mathbf{m} \in M$.²³⁷ Jokainen π :n (lokaali) sektio $s : U \rightarrow E$, $U \subseteq M$, voidaan ‘pidentää’

²³⁷Vastaavasti voidaan määrittellä (kohde)projektio $j_m^k s \mapsto s(m) \in E$.

säikeisen moniston $(J^k\pi, \pi_k, M)$ (lokaaliksi) sektioiksi $j^k s : U \rightarrow J^k\pi$ (ns. s :n k :s *prolongaatio*) kaavalla $j^k s(\mathbf{m}) := j_{\mathbf{m}}^k s$, $\mathbf{m} \in U$. Seuraavaksi annetaan mahdollisimman yleinen (ja geometrinen) määritelmä (osittais)differentiaaliyhtälölle.

39.1 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Olkoon (E, π, M) säikeinen monisto. (*Osittais*)differentiaaliyhtälö \mathbf{D} on (jonkun) säikeisen moniston $(J^k\pi, \pi_k, M)$ alimonisto. Differentiaaliyhtälön \mathbf{D} ratkaisu on π :n (lokaali) sektio $s : U \rightarrow E$ mikäli $j^k s(\mathbf{m}) \in \mathbf{D}$ kaikilla $\mathbf{m} \in U$.

Esimerkki 84. Tarkastellaan vaikkapa säikeistä monistoa $(\mathbb{R}^2, \text{pr}_1, \mathbb{R})$. Nyt säiekarttana on (x, y) (eli esim. $\mathbf{q}(x) = x$ tai lyhyesti $\mathbf{q} = x$), ja se indusoi suihkumoniston $J^1\text{pr}_1$ kartan (x, y, y_x) eli (jos merkitään $z = y_x$) $J^1\text{pr}_1$ voidaan samaistaa \mathbb{R}^3 :n kanssa. Nyt $\mathbf{D} := \{(x, y, y_x) \mid y_x = yx\}$ (tai lyhyesti $y_x = yx$) on selkeästi $J^1\text{pr}_1$:n alimonisto (sehän on vain (‘satula’)pinta $z = yx$ avaruudessa \mathbb{R}^3 ; piirrä kuvaaja). [!] Yhtälön \mathbf{D} ratkaisut ovat sektioita (eli käyriä)

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto s(x) = (x, Ce^{x^2/2}), \quad C \in \mathbb{R},$$

sillä

$$\begin{aligned} x(j_x^1 s) &= x, \\ y(j_x^1 s) &= y(s(x)) = s^1(x) = Ce^{x^2/2}, \\ y_x(j_x^1 s) &= \frac{ds^1(x)}{dx} = Ce^{x^2/2}x = y(j_x^1 s)x(j_x^1 s) = (yx)(j_x^1 s). \end{aligned}$$

Toisin sanoen, kaikilla $x \in \mathbb{R}$,

$$j^1 s(x) = (x, Ce^{x^2/2}, Ce^{x^2/2}x) \in \mathbf{D}$$

eli $j^1 s$ on pinnalla $z = yx$ kulkeva käyrä (piirrä kuva). Jokaista pistettä $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ kohden löytyy yksikäsitteinen käyrä $s(x) = (x, Ce^{x^2/2})$, joka kulkee sen kautta; valitse $C = be^{-a^2/2}$, joten $s(a) = (a, b)$.

Vastaavasti voidaan (tällä tavalla luonnollisesti tai geometrisesti) tulkita kaikki osittaisdifferentiaaliyhtälöt. Esimerkiksi KdV-yhtälön $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ tulkitsemiseksi tarvitaan kaksiulotteinen kantamonisto M , jonka karttana on (t, x) , ja yksiulotteinen säie, jonka karttana on u . Säikeinen monisto π on siis kolmiulotteinen. Nyt u_t jne. ovat derivaattakoordinaatteja. Koska yhtälössä esiintyy kolmannen kertaluvun derivaattakoordinaatti u_{xxx} , niin KdV-yhtälö on (12-ulotteisen) moniston $J^3\pi$ (11-ulotteinen) alimonisto (eli hyperpinta).

Usein fysiikassa differentiaaliyhtälön (esim. ominaisarvoyhtälö) määrää joku differentiaalioperaattori. Olkoon (E, π, M) ja (E', π', M) säikeisiä monistoja (sama kantamonisto M) ja $F : J^k\pi \rightarrow E'$ (sileä) funktio, jolle $\pi' \circ F = F \circ \pi_k$ eli F pitää kantamoniston M pisteet paikallaan ja operoi vain säikeissä. *Differentiaalioperaattori* \mathcal{D}_F kuvaa (lokaalin) sektion $s : U \rightarrow E$ lokaaliksi sektioksi $\mathcal{D}_F s : U \rightarrow E'$, missä

$$(\mathcal{D}_F s)(\mathbf{m}) := F(j_{\mathbf{m}}^k s) = (F \circ j^k s)(\mathbf{m}), \quad \mathbf{m} \in U.$$

Differentiaalioperaattorin \mathcal{D}_F ja (lokaalin) sektion $\tilde{s} : \tilde{U} \rightarrow E'$ määräämä differentiaaliyhtälö on $J^k\pi$:n alimonisto

$$\mathbf{D}_{F;\tilde{s}} := \{j_{\mathbf{m}}^k s \mid F(j_{\mathbf{m}}^k s) = \tilde{s}(\mathbf{m}), \mathbf{m} \in \tilde{U}\},$$

ja sen ratkaisu s toteuttaa siis yhtälön $\mathcal{D}_F s = \tilde{s}$.

Esimerkki 85. Edellisen esimerkin tapauksessa määritellään $F : J^1\text{pr}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kaavalla $F(j_x^1 s) := (x, y_x(j_x^1 s) - y(s(x)))x$ ja $\tilde{s}(x, y) := (x, 0)$. Nyt $(\mathcal{D}_F s)(x) = (x, (y_x - yx) \circ j_x^1 s)$ ja $\mathbf{D}_{F;\tilde{s}} = \{j_x^1 s \mid (y_x - yx) \circ j_x^1 s = 0\} \cong \mathbf{D}$, kun samaistetaan $J^1\text{pr}_1$:n alkiot $j_x^1 s$ niiden 'koordinaattien' kanssa. Vastaavasti voidaan tulkita [!] muutkin edellä esitetyt differentiaaliyhtälöt tai differentiaalioperaattorit (esim. d, δ, Δ, \dots).

Esimerkiksi 1-muodot $\omega \in \Omega^1(M)$ ovat tensorikimpun $T_1^0 M$ sektioita ($\pi(\mathbf{m}, T) = \mathbf{m}$). Jos \mathbf{q} on M :n kartta, niin voidaan muodostaa T^*M :n säiekartta $(\mathbf{q}, \mathbf{u})(\mathbf{m}, T) = (\mathbf{q}(\mathbf{m}); T_1, \dots, T_n)$, missä $T = \sum_{a=1}^n T_a dq^a|_{\mathbf{m}}$, eli $u^a(\mathbf{m}, T) = T_a$. Ensimmäinen suihkumonisto koostuu (lokaaleiden) 1-muotojen $\omega : U \rightarrow T^*M$ ekvivalenssiluokista $j_{\mathbf{m}}^1 \omega$ ja indusoidut koodinaatit ovat $\mathbf{q}(j_{\mathbf{m}}^1 \omega) = \mathbf{q}(\mathbf{m})$, $u^a(j_{\mathbf{m}}^1 \omega) = \omega_a(\mathbf{m})$ sekä $u_i^a(j_{\mathbf{m}}^1 \omega) = \partial_i \omega_a(\mathbf{q}(\mathbf{m}))$. Ulkoinen derivaatta d kuvaa (lokaalin) 1-muodon ω (lokaaliksi) 2-muodoksi $d\omega$ (lokaalilla) kaavalla $d\omega = \sum_{i,a} \partial_i \omega_a dq^i \wedge dq^a$. Määritellään kuvaus $F : J^1\pi \rightarrow T_2^0 M$ kaavalla

$$F(j_{\mathbf{m}}^1 \omega) := (\mathbf{m}, d\omega|_{\mathbf{m}}) = \left(\pi_1(j_{\mathbf{m}}^1 \omega), \sum_{i,a} u_i^a(j_{\mathbf{m}}^1 \omega) dq^i|_{\mathbf{m}} \wedge dq^a|_{\mathbf{m}} \right),$$

jotenka $(\mathcal{D}_F \omega)(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}, d\omega|_{\mathbf{m}})$ eli d on differentiaalioperaattori.

40 FYS: Lagrangen kenttäteoriaa

Olkoon (E, π, M) säikeinen monisto. Funktio $L : J^k \pi \rightarrow \mathbb{R}$ on k :nnen kertaluvun *Lagrangen tiheys*. Oletetaan, että M on n -ulotteinen (suunnistuva) semi-Riemannin monisto ja vol sen tilavuusmuoto, ja sanotaan, että $L \text{ vol}$ on Lagrangen muoto.²³⁸ Olkoon $N \subset M$:n (kompakti) reunallinen n -ulotteinen alimonisto. Määritellään *vaikutusfunktionaali* tai *vaikutusintegraali*

$$I : \Gamma(\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto I[s] := \int_N (L \circ j^k s) \text{ vol}.$$

Etsitään I ääriarvosektiot s (minimit/maksimit) seuraavin rajuin oletuksin: Tarkastellaan vain tapausta $k = 1$. Oletetaan, että säikeet $E_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in M$, ovat vektoriavaruuksia, joten voidaan määritellä sektioitten s_1 ja s_2 lineaarikombinaatio kaavalla

$$(c_1 s_1 + c_2 s_2)(\mathbf{m}) := c_1 s_1(\mathbf{m}) + c_2 s_2(\mathbf{m}), \quad \mathbf{m} \in M,$$

missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että on olemassa säiekartta (\mathbf{q}, \mathbf{u}) , missä $\mathbf{q} : U \rightarrow M$ on sellainen M :n kartta, että N 'mahtuu' sen määrittelyalueeseen ($N \subset U$), ja että kartta on lineaarinen eli $\mathbf{u}(c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2) = c_1 \mathbf{u}(\mathbf{e}_1) + c_2 \mathbf{u}(\mathbf{e}_2)$ kaikilla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{m} \in U$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in E_{\mathbf{m}}$.²³⁹ Ilmaistaan (ensimmäisen kertaluvun) Lagrangen tiheys L tässä kartassa:

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = L(q^1, \dots, q^n; u^1, \dots, u^p; u_1^1, \dots, u_n^1, \dots, u_1^p, \dots, u_n^p),$$

joten

$$L_s(\mathbf{q}) := (L \circ j^1 s)(\mathbf{q}) = L(\mathbf{q}; s^1(\mathbf{q}), \dots, s^p(\mathbf{q}); \partial_1 s^1(\mathbf{q}), \dots, \partial_n s^1(\mathbf{q}), \dots, \partial_1 s^p(\mathbf{q}), \dots, \partial_n s^p(\mathbf{q})),$$

$$I[s] := \int_N (L \circ j^1 s) \text{ vol} = \int_N L_s(\mathbf{q}) \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) d^n \mathbf{q}.$$

Kiinnitetään sitten joku sektio $s_0 \in \Gamma(\pi)$ ja määritellään pienempi sektioitten joukko $\Gamma_{s_0, \partial N}(\pi) := \{s \in \Gamma(\pi) \mid s(\mathbf{m}) = s_0(\mathbf{m}), \mathbf{m} \in \partial N\}$, joka siis koostuu sektioista s , jotka saavat samat arvot reunalla ∂N . Jos $s, s' \in \Gamma_{s_0, \partial N}(\pi)$, niin erotus $\Delta := s - s' \in \Gamma(\pi)$ häviää reunalla eli $\Delta(\mathbf{m}) = 0 \in E_{\mathbf{m}}$ kaikilla $\mathbf{m} \in \partial N$. Kiinnitetään sitten mielivaltainen $\Delta \in \Gamma(\pi)$, joka häviää reunalla ∂N . Jos s on vaikutusintegraalin (rajoittuman) $I : \Gamma(\pi)_{s_0, \partial N} \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto I[s]$, ääriarvo

²³⁸Siis lokaalisti säiekartassa $L \text{ vol}$ on muotoa $L(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) d^n \mathbf{q}$ (eli $L \text{ vol}$ on ns. horisontaalinen suihku-moniston $J^k \pi$ n -muoto).

²³⁹Eli kartta (\mathbf{q}, \mathbf{u}) trivialisoi E :n eli lokaalisti (E, π, M) 'on' muotoa $(\mathbf{q}(U) \times \mathbb{R}^p, \text{pr}_1, \mathbf{q}(U))$, missä $\mathbf{q}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin joukko. Lisäksi $\mathbf{q}(N) \subset \mathbf{q}(U)$.

(ekstremaali), niin $dI(\epsilon)/d\epsilon|_{\epsilon=0} = 0$, missä $I(\epsilon) := I[s + \epsilon\Delta]$, $\epsilon \in \mathbb{R}$. Lasketaan sitten

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} &= \int_N \frac{\partial L_{s+\epsilon\Delta}(\mathbf{q})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} d^n \mathbf{q} \\ &= \int_N \sum_{a=1}^p \left[\frac{\partial L}{\partial u^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} \Delta^a(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial u_i^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} \frac{\partial \Delta^a(\mathbf{q})}{\partial q^i} \right] \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} d^n \mathbf{q} \\ &= \int_N \sum_{a=1}^p \left[\frac{\partial L}{\partial u^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}} \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial L \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}}{\partial u_i^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} \right] \Delta^a(\mathbf{q}) \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} d^n \mathbf{q} \\ &\quad + \int_N \sum_{i=1}^n \sum_{a=1}^p \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\frac{\partial L \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}}{\partial u_i^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} \Delta^a(\mathbf{q}) \right] d^n \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Viimeinen termi on muotoa $\int_N d\omega$, missä ω on moniston M lokaali $(n-1)$ -muoto [!]

$$\omega := \sum_{i=1}^n \sum_{a=1}^p \left[\frac{\partial L \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}}{\partial u_i^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} \Delta^a(\mathbf{q}) \right] dq^{i+1} \wedge dq^{i+2} \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dq^1 \wedge dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^{i-1}.$$

Yleistetystä Stokesin lauseesta seuraa, että $\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega = 0$, sillä $\Delta(\mathbf{m}) = 0$, kun $\mathbf{m} \in \partial N$, tai kartan avulla ilmaistuna $\Delta^a(\mathbf{q}) = 0$ kaikilla $\mathbf{q} \in \mathbf{q}(\partial N)$. Koska Δ on ‘mielivaltainen’, ekstremaalisektion s on toteutettava *Eulerin-Lagrangen yhtälöt*

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} \frac{\partial L}{\partial u_i^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} \right]} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})}, \quad a = 1, 2, \dots, p. \quad (53)$$

Huomaa, että kyseiset yhtälöt voidaan tulkita geometrisesti moniston $J^2\pi$ alimonistona, jonka määrää (lokaalit) yhtälöt

$$\frac{1}{\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}} \frac{d}{dq^i} \left[\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} \frac{\partial L}{\partial u_i^a} \right] = \frac{\partial L}{\partial u^a}, \quad a = 1, 2, \dots, p,$$

missä

$$\frac{d}{dq^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} + u_i^b \frac{\partial}{\partial u^b} + u_{ij}^b \frac{\partial}{\partial u_j^b}$$

on ns. totaaliderivaatta. Yhtälön ratkaisu $j^1 s$ siis sisältyy kyseiseen alimonistoon yhtälön (53) mukaisesti.

Harjoitustehtävä 88. Määritellään vektorikentän $w = w^i \partial / \partial q^i$ kovariantti divergenssi

$$\operatorname{div} w := \sum_{i=1}^n (D_i w)^i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial w^i}{\partial q^i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^i w^j \right] = D_i w^i \quad (\text{lyhyt merkintätapa}).$$

a) Osoita, että litteässä avaruudessa on olemassa kartta \mathbf{q} siten, että Eulerin-Lagrangen yhtälöt ovat muotoa

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial L}{\partial u_i^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})}, \quad a = 1, 2, \dots, p.$$

Mikä on $\operatorname{div} w$ tässä kartassa?

b) Osoita, että

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}}{\partial q^i} &= \frac{1}{2} \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} = \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} \sum_k \Gamma_{ki}^k, \\ \operatorname{div} w &= \frac{1}{\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sqrt{|g|_{\mathbf{q}}} w^i}{\partial q^i}.\end{aligned}$$

Vinkki: Jos $\det(g_{ij}) < 0$, niin $|g|_{\mathbf{q}} = -\det(g_{ij})$. Käytä Jacobin kaavaa $d[\det \mathbf{M}(t)]/dt = [\det \mathbf{M}(t)] \operatorname{tr} [\mathbf{M}(t)^{-1} d\mathbf{M}(t)/dt]$ matriisiarvoiselle funktiolle $\mathbf{M}(t)$.

c) Edellisen kohdan nojalla Eulerin-Lagrangen yhtälöt voidaan kirjoittaa (kovariantissa) ‘divergenssimuodossa’

$$\sum_{i=1}^n D_i \frac{\partial L}{\partial u_i^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^a} \Big|_{j^1 s(\mathbf{q})}, \quad a = 1, 2, \dots, p.$$

Esimerkki 86. Olkoon (M, g) semi-Riemannin monisto, $(M \times \mathbb{R}, \operatorname{pr}_1, M)$ säikeinen monisto ja $\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ M :n kartta sekä $(\mathbf{q}, u) : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ säiekartta. Nyt sektio $s : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ on muotoa $s(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \phi(\mathbf{m}))$, missä $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ on (sileä) funktio eli lokaalisti $u = \phi(\mathbf{q})$ ja $u_i = \partial \phi(\mathbf{q}) / \partial q^i$. Määritellään eräänlainen ‘liike-energia’ $\frac{1}{2} g^{-1}(d\phi, d\phi) = \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi$ ja ‘potentiaalienergia’ $\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4$, missä $m \geq 0$ on kentän ‘massa’ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ‘itseiskytkentävakio.’ Jos Lagrangen tiheys on $L(\mathbf{q}; u; u^1, \dots, u^n) := \frac{1}{2} g(\mathbf{q})^{ij} u_i u_j - \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{4} \lambda u^4$, niin

$$\begin{aligned}L_s(\mathbf{q}) &= (L \circ j^1 s)(\mathbf{q}) = L(\mathbf{q}; \varphi(\mathbf{q}); \partial_1 \varphi(\mathbf{q}), \dots, \partial_1 \varphi(\mathbf{q})) \\ &= \frac{1}{2} g^{ij}(\mathbf{q}) \partial_i \phi(\mathbf{q}) \partial_j \phi(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} m^2 \phi(\mathbf{q})^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi(\mathbf{q})^4\end{aligned}$$

(eli muotoa ‘liike-energia’ miinus ‘potentiaalienergia’). Täten saadaan $\partial L / \partial u_i = g^{ij} u_j$ ja $\partial L / \partial u = -m^2 u - \lambda u^3$, joten Eulerin-Lagrangen yhtälö on

$$\frac{1}{\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\sqrt{|g|_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})} g^{ij}(\mathbf{q}) \frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{\partial q^j} \right] \equiv -m^2 \phi(\mathbf{q}) - \lambda \phi(\mathbf{q})^3.$$

Esimerkiksi Minkowskin avaruudessa (\mathbb{M}^4, η) yhtälö redusoituu ollen

$$\square \phi = - \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \phi = m^2 \phi + \lambda \phi^3.$$

40.1 Sähkömagneettisen kentän Lagrangen tiheys tyhjiössä

Tarkastellaan sähkömagneettista kenttää $F \in \Omega^2(M)$ (tyhjiössä) Lorentzin monistolla (M, g) . Määritellään ‘liike-energia’ $\frac{1}{2} \bar{g}(F, F) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} F_{\alpha'\beta'} F_{\alpha\beta}$. Koska $F = dA$,

niin $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Jos j on lähde 1-muoto, niin $\bar{g}(A, j) = \sum_\alpha A^\alpha j_\alpha = g^{\alpha\alpha'} A_{\alpha'} j_\alpha$. Olkoon sitten (\mathbf{q}, \mathbf{u}) tensorikimpun $(TM^* = \Omega^1(M), \pi, M)$ säiekartta, missä $u^a(\mathbf{m}, \omega) = \omega_a$. Määritellään sähkömagneettisen kentän Lagrangen tiheys $L : J^1\pi \rightarrow \mathbb{R}$ (lokaalisti) kaavalla

$$L(\mathbf{q}; \mathbf{u}; \mathbf{U}) := \frac{1}{4} g^{\alpha\alpha'}(\mathbf{q}) g^{\beta\beta'}(\mathbf{q}) (u_{\alpha'}^{\beta'} - u_{\beta'}^{\alpha'}) (u_\alpha^\beta - u_\beta^\alpha) - \mu_0 g^{\alpha\alpha'}(\mathbf{q}) u^{\alpha'} j_\alpha(\mathbf{q}),$$

jotenka $L_A = L \circ j^1 A = \frac{1}{2} \bar{g}(dA, dA) - \mu_0 \bar{g}(A, j)$. [!]

Harjoitustehtävä 89. a) Osoita, että

$$\frac{\partial L}{\partial u_\sigma^\nu} = \frac{1}{2} (g^{\sigma\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta}) (u_\alpha^\beta - u_\beta^\alpha), \quad \left. \frac{\partial L}{\partial u_\sigma^\nu} \right|_{j^1 A(\mathbf{q})} = F^{\sigma\nu}(\mathbf{q}).$$

b) Osoita, että Eulerin-Lagrangen yhtälöt ovat

$$\sum_{\sigma=0}^3 D_\sigma F^{\nu\sigma} = \mu_0 j^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

c) Osoita kaavan (53) avulla, että Eulerin-Lagrangen yhtälöt ovat Maxwellin yhtälö $\delta F = \mu_0 j$. Vinkki: 2-muodolle F pätee $\delta F = \text{sgn}(g)(-1)^{n+1} \star d \star F$. Lisäksi $\star\star = \pm 1$, joten ota \star kummaltakin puolen yhtälöä $\delta F = \mu_0 j$ saadaksesi sen kanssa ekvivalentin yhtälön.

Harjoitustehtävä 90. Tarkastellaan Minkowskin avaruudessa $\mathbb{M}^4 \cong \mathbb{R}^4$ etenevää gravitaatiotaaltoa $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \approx 0$, missä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. Koska $h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = h_{\nu\mu}(\mathbf{x})$, niin kenttänä on oikeastaan $\mathbf{h} := (h_{00}, h_{01}, h_{02}, h_{03}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{22}, h_{23}, h_{33})$, joka on kuvaus \mathbb{R}^4 :sta \mathbb{R}^{10} :een. (Mikä mahtaa olla säikeinen monisto nyt?) Merkitään lyhyesti $x^\rho(j^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})) = x^\rho$, $u^{\mu\nu}(j^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})) = h_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ ja $u_\rho^{\mu\nu}(j^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})) = \partial_\rho h_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ (eli siis säikeen koordinaatit on indeksoitu kahdella kirjaimella: $u^a = u^{\mu\nu}$). Määritellään Lagrangen tiheys L kaavalla

$$L_{\mathbf{h}} = L \circ j^1 \mathbf{h} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu h^{\mu\nu}) \partial_\nu \text{tr}[h] - (\partial_\mu h^{\rho\sigma}) \partial_\rho h_\sigma^\mu + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu h^{\rho\sigma}) \partial_\nu h_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \text{tr}[h]) \partial_\nu \text{tr}[h] \right]$$

(huomaa, että indeksejä nostetaan η -metriikalla ja $\text{tr}[h] = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_\alpha^\alpha$). Mitkä ovat Eulerin-Lagrangen yhtälöt nyt? Saatko kenties (likimääräisen) tyhjiön Einsteinin yhtälön?

Huomautus 26. Gravitaatiokentän Lagrangen tiheys on toista kertalukua, joten siihen ei päde yllä esitetyt Eulerin-Lagrangen yhtälöt. Tyhjiön Einsteinin yhtälöt $G[g] = 0$ tai $\text{Ric}[g] = 0$ voidaan kuitenkin johtaa myös suoraan. Olkoon M (orientaationa $[\omega]$) monisto ja $\mathcal{G}(M)$ sen (pseudo)metriikoiden g joukko. Valitaan mielivaltainen avoin ja 'rajoitettu' joukko²⁴⁰ $U \subseteq M$.

²⁴⁰Eli U :n sulkeuma on kompakti

Jos $\Delta \in \mathcal{T}_2^0 M$ on (mielivaltainen) symmetrinen tensorikenttä, niin $g + \epsilon \Delta$ on myös (pseudo)metriikka²⁴¹ rajoitettuna alueeseen U mikäli $\epsilon \approx 0$. [!] Määritellään *Hilbertin vaikutus(funktionaali)*

$$I : \mathcal{G}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto I[g] := \int_U S[g] \text{vol}^{[\omega],g}.$$

Jos g on sen ekstremaalimetriikka, niin on oltava [!]

$$0 = \left. \frac{d}{d\epsilon} I[g + \epsilon \Delta] \right|_{\epsilon} = \int_U G[g]_{\mu\nu} \Delta^{\mu\nu} \text{vol}^{[\omega],g} \quad (54)$$

eli g toteuttaa tyhjiön Einsteinin yhtälön $G[g] = 0$ (sillä U ja Δ ovat ‘mielivaltaisia’). Täten gravitaatiokentän Lagrangen tiheys ‘on’ skalaarikaarevuus S . Jos halutaan yleinen Einsteinin yhtälö, niin jonkinlainen energia-impulssitensoria vastaava termi pitää lisätä Lagrangen tiheyteen S . Tämä onkin sitten yleensä vahvasti epätriviaali juttu.

ESSEETEHTÄVÄ:

Tarkastele jotain mieleistäsi kenttäteoriaa. Esimerkiksi voit käsitellä sähkömagneettista kenttää ‘kaarevassa’ avaruusajassa. Mikä aiheuttaa kaarevuuden? Mitkä ovat kenttien liikeyhtälöt? Entä niiden Lagrangen tiheydet? Miten (testi)hiukkaset liikkuvat kyseisissä kentissä? Voit tarkastella jotain fysikaalisesti perusteltua esimerkkiä (esim. varattu musta-aukko). [Bonustehtävä: Osoita, että tyhjiön gravitaatiokentän Lagrangen tiheys on skalaarikaarevuus eli johda yllä oleva yhtälö (54).] Jos vielä intoa riittää, niin voit etsiä tietoa siitä, miten sähkömagnetismi ja gravitaatio voidaan yhdistää yhdeksi kenttäteoriaksi viisiulotteisella monistolla (Kaluzan-Kleinin tai Nordströmin mallit).

²⁴¹Eli kääntyvä (ja mahdollisesti positiivisemidefiniitti, jos sitä vaaditaan).

41 Kirjallisuutta

Tämän kirjan lukemisen jälkeen voi helposti laajentaa opintojaan tutustumalla viitteissä oleviin fysiikan kirjoihin, jotka käyttävät samanlaista geometrista lähestymistapaa. En osaa suositella mitään erityistä differentiaaligeometrian perusteiden kirjaa, sillä niitä on kirjoitettu niin monia. Sen sijaan muutamia mainioita fysiikan kirjoja voin suositella:

Yleiskirjat

Yleiskirjoissa käsitellään esimerkkejä monilta eri fysiikan aloilta. Nakaharan kurssikirja [11] on klassikko ja samaa tyyliisuuntaa edustanee Frankelin kirja [6]. Nämä kirjat ovat helposti lähestyttäviä ja voin suositella niitä aluksi luettaviksi. Thirringin helposti luettava kirjasarja sisältää monia kirjoja ja ainakin kaksi ensimmäistä [13] sopivat hyvin käsillä olevan kirjan teemoihin. Jos kaipaa hieman tuhdimpaa luettavaa ja paljon esimerkkejä, Choquet-Bruhat'n ja DeWitt-Moretten kahden kirjan kokonaisuus [4] sammuttanee pahimman tiedonjanon.

Mekaniikka

Mekaniikkaan keskittyy Arnoldin klassikko [2]. Siinä on mm. Arnoldin lauseen todistus ja muuta kivaa. Abrahamin ja Marsdenin mekaniikan kirja [1] on jyty teos, jota voi selailla vaikka Arnoldin jälkeen. Mangiarotti ja Sardanashvily [9] ovat ottaneet varsin mielenkiintoisen ja modernin lähestymistavan mekaniikkaan, mutta kirja on vaikeahko enkä suosittelen sitä ihan ensimmäiseksi mekaniikan kirjaksi.

Suhteellisuusteoria

Suhteellisuusteoriasta on kirjoitettu lukemattomia hyviä kirjoja. Itse olen ihastunut O'Neillin teokseen [12], sillä siinä esitellään myös suhteellisuusteoriassa tarvittava matematiikka perusteellisesti. Tietenkin Misnerin, Thornen ja Wheelerin [10] 'musta tiiliskivi' ansaitsee erikoismaininnan. Sitä ei suotta käytetä kurssikirjana monilla kursseilla. Muuten Fockin klassikkokirja [5] on varsin mielenkiintoinen. Miten se Merkuriuksen perihelisiirtymä pitikään laskea?

Elektrodynamiikka ja mittakenttäteoria

Pelkästään elektrodynamiikkaan keskittyviä geometriseen sävyyn kirjoitettuja kurssikirjoja on vaikea löytää. Mutta onneksi on mainio Ingardenin ja Jamiolkowskin kirjoittama kirja [8]. Jos ei pelkkä elektrodynamiikka riitä ja yleisempi mittakenttäteoria kiinnostaa, niin suosittelen lämpimästi Bleeckerin ‘taskukirjaa’ [3]. Siinä on muuten myös luku Kaluzan-Kleinin teoriaa ja Higgsin hiukkanenkin esiintyy kirjan lopussa.

Lagrangen ja Hamiltonin kenttäteoria

Sokerina pohjalla on Giachettan, Mangiarottin ja Sardanashvilyn kirja [7]. Kirja ei todellakaan ole helpoimmasta päästä, mutta tosi hyvin kirjoitettu.

Viitteet

- [1] R. Abraham ja J. E. Marsden: *Foundations of Mechanics* (Benjamin/Cummings, 1978).
- [2] V. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, 1978).
- [3] D. Bleecker: *Gauge Theory and Variational Principles* (Dover, 1981).
- [4] Y. Choquet-Bruhat ja C. DeWitt-Morette: *Analysis, Manifolds and Physics* (North-Holland, 1982); *Analysis, Manifolds and Physics – Part II: 92 Applications* (North-Holland, 1989).
- [5] V. Fock: *Theory of Space, Time and Gravitation* (Pergamon, 1964).
- [6] T. Frankel: *The Geometry of Physics – An Introduction* (Cambridge University Press, 1997).
- [7] G. Giachetta, L. Mangiarotti ja G. Sardanashvily: *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory* (World Scientific, 1997).
- [8] R. S. Ingarden ja A. Jamiolkowski: *Classical Electrodynamics* (PWN, Elsevier, 1985).
- [9] L. Mangiarotti ja G. Sardanashvily: *Gauge Mechanics* (World Scientific, 1998).
- [10] C. W. Misner, K. S. Thorne ja J. A. Wheeler: *Gravitation* (Freeman, 1973).
- [11] M. Nakahara: *Geometry, Topology and Physics* (Institute of Physics Publishing, 2003).
- [12] B. O’Neill: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity* (Academic Press, 1983).
- [13] W. Thirring: *A Course in Mathematical Physics I – Classical Dynamical Systems* (Springer-Verlag, 1978); *A Course in Mathematical Physics II – Classical Field Theory* (Springer-Verlag, 1979).