



YLINUMEROITUVUUSKVANTTORILLISEN IDENTITEETILLISEN
ENSIMMÄISEN KERTALUVUN PREDIKAATTOLOGIIKAN TÄYDELLISYYS

LuK Joni Antero Tuomialho

Pro gradu -tutkielma
Maaliskuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:

Prof. Vesa Halava

Dos. Ilkka Törmä

Turun yliopiston laatu järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Pääaine: Matematiikka

Tekijä: Joni Antero Tuomialho

Otsikko: Ylinumeroituvuuskvanttorillisen identiteetillisen ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan täydellisyys

Ohjaaja: Prof. Vesa Halava

Sivumäärä: 65 sivua + liitteet 0 sivua

Aika: Maaliskuu 2026

Työ käsittelee ylinumeroituvuuskvanttorillisen ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan täydellisyyttä ja sen todistusta.

Työn alussa esitellään tarvittava taustatieto ja aksioomat, joita täydellisyytodistuksen käsittely ja ymmärtäminen vaatii. Tämän jälkeen konstruoidaan tarvittavat heikot mallit, joilla voidaan rakentaa standardimallit ja joiden avulla väite todistetaan. Työssä oletetaan lukijalta ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan osamista, joka yleensä saadaan logiikan aine- ja syventävien opintojen tasoisilla opintojaksoilla matematiikan yliopistotasolla.

Asiasanat: Ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka, kvanttori, täydellisyys, ylinumeroituvuus

Sisällys

1	Tausta	1
1.1	Alkuoletuksia ja määritelmiä	1
1.1.1	Loogiset systeemit ja syntaksi	1
1.1.2	Propositiot ja konnektiivit	2
1.1.3	Semantiikka	3
1.1.4	Propositiologiikan tautologiat ja päättelysäännöt	4
1.1.5	Predikaattilogiikka ja kvanttorit	4
1.2	Kielen $L(Q)$ historia	6
1.3	Logiikan $L(Q)$ täydellisyyden todistuksesta	6
2	Kieli $L(Q)$	8
2.1	Kielen määritelmä	8
2.2	Totuusarvojen invarianssi isomorfisissa malleissa	9
2.3	Semanttisia määritelmiä	11
2.4	Aksioomat ja päättelysäännöt kielelle $L(Q)$	12
2.5	Kielen $L(Q)$ malliteoria	15
2.6	Kielen $L(Q)$ syntaksi	17
2.7	Kvanttorin Q toiminta	19
3	Täydellisyydestodistus	34
3.1	Henkin-Orey-konstruktio	34
3.2	Alkeisketjut	44
3.3	Standardimallin rakentaminen	45

1 Tausta

Työ olettaa paljon perustietoja logiikasta ja joukko-opista. Niiden osalta sopivia lähteitä suomeksi ovat logiikan osalta [O3] ja joukko-opin osalta [O4]. Englanninkielisenä lähteenä logiikkaan liittyen käy [O5] ja joukko-oppiin vuorostaan [O6]. Tässä osiossa kerrataan näitä taustatietoja, jotka ovat hyödyllisiä työn ymmärtämiseksi. Työssä on käytetty OpenAI ChatGPT -ohjelmistoa tarkastamaan kieliopillisia asioita, ja tekoälyä on käytetty apuna tiedonhaussa ja jossain eri lähteiden puuttuvien yksityiskohtien selvittämisessä. Kaikki sisältö ja tulkinta on tekijän itse tuottamaa.

1.1 Alkuoletuksia ja määritelmiä

Logiikka on matematiikan osa-alue, joka tutkii matemaattisten ilmaisujen muodollisia päättelyjärjestelmiä ja formaaleja kieliä. Yksinkertaisin tällainen logiikka on propositiologiikka, joka käyttää loogisia konnektiiveja muodostamaan niistä koostuvia **kaavoja**, joiden totuusarvoja tulkinnat määrittävät. Tulee siis huomioida, että sanaa logiikka käytetään myös matematiikan osa-alueen lisäksi merkitsemään niitä kieliä, joita logiikka tutkii.

1.1.1 Loogiset systeemit ja syntaksi

Kaikki **loogiset systeemit** eli loogiset järjestelmät omaavat kolme osaa; kielen, semantiikan, ja todistusteorian. Logiikan **kieli** eli syntaksi on tarkalleen otettuna **objektikieli**, joka koostuu yksiselitteisistä hyvinmuodostetuista ilmaisuista eli merkkijonoista. Kieltä, jolla objektikieltä tarkastellaan, kutsutaan **metakieleksi**, joka on matemaattisilla ilmaisuilla rikastettu luonnollinen kieli. **Ensimmäisen kertaluvun logiikka** on loogisten kielten perhe, joista tässä työssä tutkittua kieltä merkitään L , ja tässä siihen myös oletetaan sisältyvän **identiteetti-ilmaisu** $=$, joka merkitsee kahden termin olevan sama. **Semantiikka** määrittelee hyvin muodostettujen kaavojen tulkinnat. **Todistusteoria** on se järjestelmä, joka antaa raamit kaavojen formaaliseen todistamiseen. **Aksiomatisoidussa** järjestelmässä se sisältää etukäteen valitut **päättelysäännöt** ja **aksiomat** eli alkuoletukset. **Johdettavuus** on malleista riippumaton ja perustuu syntaksiin, kun taas **totuus** koskee yksittäisiä malleja ja perustuu semantiikkaan.

Loogiseen aakkostoon sisältyvät yksilömuuttujat $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, konnektiivit, kvanttorit \forall, \exists , yhtäsuuruusmerkki $=$, sulkumerkit $($ ja $)$, ja pilkku $.$ **Termit** yli aakkoston S , eli S -termit, määritellään induktiivisesti. Jokainen muuttuja $x \in X$ ja vakiosymboli $c \in Con$ on termi. $f(t_1, \dots, t_m)$ on termi silloin, kun ky-

seinen f on m -paikkainen funktio ja t_1, \dots, t_m ovat termejä. Jos termin muuttujat ovat joukossa $\{y_1, \dots, y_n\}$, merkitään $t = t(y_1, \dots, y_n)$. Jos t_1, \dots, t_n ovat termejä, niin $t(t_1/y_1, \dots, t_n/y_n)$ saadaan termistä t korvaamalla kaikki muuttujan y_i esiintymät termillä t_i kun $i = 1, \dots, n$. **Kaavat** yli aakkoston saadaan n -paikkaisesta relaatiotermistä r ja termeistä t_1, \dots, t_n kirjoittamalla $r(t_1, \dots, t_n)$. Jos s ja t ovat termejä, niin $(s = t)$ on kaava. Jos φ ja ψ ovat kaavoja, niin samoin ovat myös $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$. Jos φ on kaava ja x on muuttuja, $(\forall x)\varphi$ ja $(\exists x)\varphi$ ovat myös kaavoja. S -kaavan **osakaavojen** joukko on pienin S -kaavojen joukko, joka sisältää kaavan itse ja on suljettu kaavan muodostussääntöjen suhteen. Muuttujan x esiintymä kaavassa φ on **sidottu** tarkalleen jos tämä esiintymä on jossain muotoa $(\forall x)\psi$ tai $(\exists x)\psi$ olevassa kaavan φ osakaavassa. Muulloin muuttujan x esiintymä on vapaa. Kaava on **lause**, eli suljettu kaava, kun siinä ei ole vapaita muuttujia. Vastaavasti se on avoin jos siinä on vapaita muuttujia. **Teoria** on suljettujen kaavojen joukko.

Päätelysäännöt ovat syntaktisia sääntöjä, joiden avulla voidaan päätellä kaavoista ja johdoista uusia johtoja. Esimerkki päätelysäännöstä on **modus ponens**, joka kertoo, että jos tunnetaan kaavojen A ja $A \rightarrow B$ olevan todistettavia, voidaan päätellä B todistuvan myös.

1.1.2 Propositiot ja konnektiivit

Propositio on väite, jonka arvo on tosi tai epätosi¹. **Atomipropositio** on sellainen propositio, jonka arvo ei määrity minkään muun proposition kautta. **Yhdistelmäpropositio** on sellainen väite, jonka arvo määrittyy muiden propositioiden kautta loogisten konnektiivien avulla. **Konnektiivi** on symboli, joka muodostaa yhdistelmäproposition sen sisältämien propositioiden kautta konnektiivin säännön mukaisesti. **Negaatio** (merkitään \neg , joskus typografisesti \sim , ilmaistaan "ei") on konnektiivi, joka muodostaa yhdistelmäproposition $\neg P$, jonka totuusarvo on aina päinvastainen alkuperäisen proposition P kanssa. **Disjunktio** (merkitään \vee , ilmaistaan "tai") on konnektiivi, joka määrittää kahden muun proposition P ja Q avulla yhdistelmäproposition $P \vee Q$, jonka totuusarvo on epätosi jos ja vain jos molemmat P ja Q ovat epätosia, mutta on muulloin tosi. **Konjunktio** (merkitään \wedge , ilmaistaan "ja") on konnektiivi, joka määrittää kahden muun proposition P ja Q avulla yhdistelmäproposition $P \wedge Q$, jonka totuusarvo on tosi jos ja vain jos molemmat P ja Q ovat tosia, mutta on muulloin epätosi. Ne riittävät ilmaisemaan kaikki mahdolliset propositiot propositiologiikassa, mutta on olemassa myös muitakin yhdysmerkkejä kuin edellä mainitut kolme, esitellään niistä kaksi seuraavaksi.

¹Jossain järjestelmissä lause voi saada muitakin arvoja, mutta tässä tilanteessa käytämme vain yksinkertaista järjestelmää kolmannen poissuljetun lain mukaisesti.

Implikaatio² (merkitään \rightarrow , ilmaistaan "jos ... niin" tai ehkä joskus "implikoi") on konnektiivi, joka määrittää kahden muun proposition P ja Q avulla yhdistelmäproposition $P \rightarrow Q$, joka on ekvivalentti ilmaisun $\neg P \vee Q$ kanssa, ja jonka totuusarvo on tosi vain jos Q on tosi tai P on epätosi. **Ekvivalenssi** (merkitään \leftrightarrow tai \equiv ³, ilmaistaan "jos ja vain jos") on konnektiivi, joka määrittää kahden muun proposition P ja Q avulla yhdistelmäproposition $P \leftrightarrow Q$ joka on tosi jos ja vain jos $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ on tosi. Metakielessä \equiv ja \Leftrightarrow tarkoittavat **malli-teoreettista ekvivalenssia**, ja kertoo, että kaikilla malleilla merkin sitomat väitteet saavat samat totuusarvot. Kolmannen poissuljetun lain mukaisesti ilmaisu **verum** $\top := (\neg A \vee A)$ on aina tosi, ilmaisu **falsum** $\perp := (\neg A \wedge A)$ on aina epätosi. **Sulkeita** $()$ käytetään kertomaan sidonnasta, eli siitä, mitä asioita pidetään yksittäisinä tai erillisinä kokonaisuuksina ilmaisuisissa. Muuttujat ovat **vapaita muuttujia** jos niitä ei sido kvanttori. Ilmaisulla $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ tarkoitetaan sellaista kaavaa, jonka vapaat muuttujat muodostavat joukon $\{v_1, \dots, v_n\}$ osajoukon. Objektikielen lauseet ovat kaavoja, joissa ei ole vapaita muuttujia.

1.1.3 Semantiikka

Malliteoria taas tutkii semantiikkaa eli sitä, miten loogisten lauseiden sisällöt riippuvat tulkinnoista. **Struktuuri** on $\mathcal{A} = (A, S)$. Siinä epätyhjä joukko $A \neq \emptyset$ on struktuurin \mathcal{A} **universumi**, eli semanttinen sisältö, josta malli kertoo, ja $S = Fun \cup Rel \cup Con$ on kielen L kolmesta alkiovieraasta joukosta koostuva **symboliaakkosto**, jossa Fun merkitsee funktiosymbolien joukkoa, Rel relaationsymbolien joukkoa, ja Con vakiosymbolien joukkoa. Jokaiseen $f \in Fun$ liittyy tulkinta $f^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$, jokaiseen $r \in Rel$ liittyy tulkinta $r^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ ja jokaiseen $c \in Con$ liittyy alkio $c^{\mathcal{A}} \in A$.⁴ Ensimmäisen kertaluvun **tulkinta** on järjestetty pari $I = (\mathcal{A}, \alpha)$ joka koostuu struktuurista eli mallista $\mathcal{A} = (A, S)$ ja **muuttujien arvotuksesta**, joka on funktio $\alpha : X \rightarrow A$, ja antaa jokaiselle muuttujalle arvon universumissa. **Kaavan toteutuminen** määräytyy struktuurista ja arvotuksista rekursiivisesti **rakenteellisella induktiolla**, eli avaamalla yhdistetyt kaavat ja määräämällä niille arvot niiden sisältämien atomikaavojen ja konnektiivien perusteella, jolloin arvotuksella $\alpha(v_i) = a_i \in A$ alkio a_1, \dots, a_n toteuttavat kaavan $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ jos ja vain jos $I \models \varphi$.

²Filosofiassa joskus käytetään sen sijaan ilmaisua \supset ja erotellaan *materiaalinen implikaatio* (engl. *material implication*) ja *jyrkkä implikaatio* (engl. *strict implication*). Tässä työssä käytetään pelkästään materiaalista implikaatiota, kuten matematiikassa yleensäkin, ja merkintää \supset pidetään tarkalleen joukko-opillisena, ei niinkään loogisena merkintänä.

³Tässä on oltava varovainen, sillä tämä symboli ilmenee objekti- että metakielessä.

⁴Teknisesti jokaisen funktion ja relaation *argumenttiluku* n on toisistaan riippumaton.

Huomautus 1.1. Matemaattisessa logiikassa suomenkieliset ilmaisut objekti- ja metakielen lauseille ovat samat. Englannin kielessä objektikielen lauseelle, eli suljetulle kaavalle, ilmaisu on *sentence* ja metakielen lauseelle ilmaisu on *theorem*. Suomenkielisessä tekstissä eron huomaa kontekstin kautta. Metakielen lauseelle on myös yleensä erillinen nimi tai numero jolla niihin viitataan.

1.1.4 Propositiologiikan tautologiat ja päättelysäännöt

Propositiologiikan tautologiat (eli ilmaisut jotka ovat aina tosia) ovat

- (P1) Totuusarvojen itsenäisyys: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$.
- (P2) Implikaation distributiivisuus: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$.
- (P3) Kontrapositio: $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$.
- (P4) Johdettu⁵ tautologia: $(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi)$.

Sen **päättelysääntö** on (R1), ja predikaattilogiikka tuo mukaan (R2):

- (R1) Modus Ponens: Jos ϕ ja $\phi \rightarrow \psi$ niin ψ .
- (R2) Generalisaatio eli yleistys: Jos ϕ niin $(\forall x)\phi$, olettaen että x ei ole vapaana missään voimassaolevassa oletuksessa.

Nämä päättelysäännöt ja aksioomat muodostavat Hilbert-järjestelmän [O7, s.89-90].

1.1.5 Predikaattilogiikka ja kvanttorit

Predikaattilogiikka on sellainen logiikka, joka sisältää propositiologiikan lisäksi myös kvanttorit, vakiosymbolit, relaationsymbolit ja funktiosymbolit. **Kvanttorit**⁶ ovat loogisia operaattoreita jotka sitovat muuttujia ja kertovat niiden toiminnan laajuudesta predikaatin alaisena. **Universaalikvanttori** (merkitään \forall , ilmaistaan "kaikille") on kvanttori, joka sitoo muuttujan x ja kertoo, että kaikilla muuttujan x arvoilla pätee kaava φ . Tällöin muodostuu ilmaisu $(\forall x)\varphi$. **Eksistenssikvanttori** (merkitään \exists , ilmaistaan "on olemassa vähintään yksi") on kvanttori, joka sitoo muuttujan x ja kertoo, että vähintään yhdellä muuttujan x arvolla pätee kaava φ . Tällöin muodostuu ilmaisu $(\exists x)\varphi$. **Eksistenssi-introduktio** on sääntö, että kaavasta $\varphi(t)$ voidaan päätellä $(\exists x)\varphi(x)$. Tämä löytyy esimerkiksi lähteestä [O7, Lause 3.5.3].

⁵Tämä sääntö on siis teknisesti johdettu edellä mainituista säännöistä P1-P3, mutta se merkitään tässä säännöksi P4.

⁶Etymologiasta: kvanttori tulee sanasta *quantifier*, joka sanallisesti käännettynä olisi *määrällistäjä*, joka toimii intuitiona sen toiminnalle.

Predikaattilogiikan aksioomat ovat

- (F1) Universaali instantiaatio: $(\forall x)\phi(x) \rightarrow \phi(t)$.
- (F2) Kvanttorin distributiivisuus: $(\forall x)(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\forall x)\psi)$ jos x ei ole vapaa kaavassa ϕ .
- (F3) Kvanttorin dualiteetti: $(\forall x)\phi \leftrightarrow \neg(\exists x)\neg\phi$.
- (F4) Identiteettiaksioomat:
 - (F4a) Identiteetti: $(\forall x)(x = x)$,
 - (F4b) Substituutio⁷: $(x = y) \rightarrow (\phi(x) \rightarrow \phi(y))$.

Sen päättelysäännöt ovat samat kuin aikaisemmin esitetty kohdissa (R1) ja (R2). Lisäksi aiemmat tautologiat 1.1.4 sisältyvät.

Syntaktisen muuttujan x kuvaa (kaavan φ suhteen yhden vapaan muuttujan tilanteessa) kaavan φ semanttiseen todistajaan a sijoitusfunktio s , joka on yhteen muuttujaan rajoitettu arvoitus. Se on semanttinen todistaja vain kaavan φ suhteen. Kun merkitään $\varphi[a]$, se on lyhyt versio metakielen ilmaisusta $\varphi[s[x \rightarrow a]]$, joka viittaa kaavan φ totuusarvoon mallissa, kun sen vapaa muuttuja x on kuvattu sijoitusfunktion s kautta todistajaan a , joka taas on universumin A alkio.

Muuttujan korvaus yksimuuttujaisen kaavan $\varphi(x)$ tapauksessa vapaan muuttujan suhteen merkitään siten, että kirjoitetaan $\varphi(x/c)$. Joskus tämä ilmaistaan vain $\varphi(c)$, mutta on tärkeää ymmärtää, että kyse on vain vapaan muuttujan vaihdosta vakiolla, joka on syntaktinen eikä semanttinen muutos. Näin siis jos esimerkiksi $\varphi(x) := (\forall x)\psi(x)$, $\varphi(x/c) = (\forall x)\psi(x)$, koska x ei ole vapaa muuttuja kaavassa $(\forall x)\psi(x)$, koska kvanttori \forall sitoo sen.

Huomautus 1.2. Työssä oletetaan, että logiikan hyvinmuodostettujen kaavojen koelma eli logiikan formaali kieli L on *numeroituva* ensimmäisen asteen identiteetin omaava predikaattilogiikka.

Joukko on **numeroituva**, jos siitä voi muodostaa injektioin luonnollisten lukujen joukkoon \mathbb{N} . Joukko on *ylinnumeroituva*, jos se ei ole numeroituva. **Luonnolliset luvut** muodostavat joukon $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Huomautus 1.3. Formaalisti luonnollisten lukujen joukko muodostetaan joukko-opissa seuraajafunktion σ kautta, joka antaa jokaiselle luonnolliselle luvulle sitä seuraavan luvun.

⁷Myös nimellä Leibnizin laki.

Määritelmä 1.4. Valinta-aksioma kertoo, että mille tahansa epätyhjien joukkojen joukolle $\Sigma := \{S : S \neq \emptyset\}$ on olemassa valintafunktio, joka valitsee yhden alkion jokaisesta joukosta $S \in \Sigma$.

Huomautus 1.5. Valinta-aksioma oletetaan tässä työssä todeksi ellei toisin mainita.

1.2 Kielen $L(\mathcal{Q})$ historia

Kieli $L(\mathcal{Q})$ on identiteetti-ilmaisun = omaavan ensimmäisen kertaluvun logiikan L laajennus kvanttorilla \mathcal{Q} . Kieltä $L(\mathcal{Q})$ tutki ensimmäisenä Mostowski vuonna 1957 [S23], missä esitetään näkemys, että kielelle tulisi osoittaa Gödelin täydellisyyslausetta vastaava tulos. Craig ja Fuhrken esittivät vuonna 1962 konjektuurin, että $L(\mathcal{Q})$ täydellisyys pätee neljällä yksinkertaisella lisäaksiomalla. Kielen tutkimus eteni myöhemmin siten, että Fuhrken [S6] osoitti vuonna 1964 että kompaktisuus pätee kielessä $L(\mathcal{Q})$, ja Vaught [S31] todisti samana vuonna, että kaikkien kielen $L(\mathcal{Q})$ validien kaavojen joukko on esitettävissä rekursiivisesti numeroituvana. Tämä todistus antoi myös aikaisemmin toivotun täydellisyyslauseen kielelle $L(\mathcal{Q})$, mutta sen aksiomajoukko oli vielä tuolloin tarpeettoman monimutkainen, joten yksinkertaisempien aksiomien etsimisen toivossa näitä metodeja kehitettiin edelleen H. J. Keislerin artikkelissa vuonna 1966 [S15], ja taas H. D. Ebbinghausin artikkelissa vuonna 1968 [S4]. Tässä työssä käsitellään päälähteen H. Jerome Keislerin vuoden 1970 artikkelin [S0] tulosta, joka julkaistiin alun perin tiivistelmässä [S18] ja jossa esitetään yksinkertaisempia aksiomia käyttämällä, että ylinumeroituvuuskvantorillisen ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka on täydellinen. Kieltä on tutkittu myös muissa töissä, kuten esimerkiksi päälähteessä viitatuissa [S3], [S6], [S14], [S27] ja [S34].

1.3 Logiikan $L(\mathcal{Q})$ täydellisyyden todistuksesta

Väite, että täydellisyys pätee, voidaan osoittaa varmistamalla sen määritelmän asettaman vaatimuksen, eli jokaisella ristiriidattomalla lausejoukolla Σ on malli. Osoitetaan siis aputuloksena jokaisen ristiriidattoman lausejoukon Σ olevan toteutuva, eli omaavan mallin. Päälähteessä [S0] edellä mainitun väitteen todistus seuraa julkaisua [S16]. Tässä suurin vaikeus, kuten Slomson [S27] mainitsee, on se, että lausejoukon Σ mallin \mathcal{M} kaavan $\psi(x)$ toteuttavan osajoukon on pysyttävä numeroituvana tilanteissa $\mathcal{M} \models \neg(\mathcal{Q}x)\psi(x)$. Keislerin ratkaisu on luoda malli, joka välistäjättää joukon kaavoja, ja hän viittaa tässä esimerkkeihin [S10], [S22] ja [S32].

Keisler käyttää ensin Henkinin metodia [S11] konstruoimaan numeroituvan "heikon mallin" joukosta Σ . Siinä mallin osajoukkojen joukko, jota kutsutaan "pseudo-

realisaatioksi" julkaisussa [S27], toimii mallina ilmaisulle $\mathcal{Q}x$. Lausejoukon Σ standardimallin konstruktio toteutuu ottamalla unioni ω_1 heikon mallin alkeisketjusta. Tässä osassa yksinkertaisten ketjujen kanssa hyödynnetään Tarski-Vaught metodeja [S30], ja välistäjättämisissä taas käytetään Henkinin [S12] ja Oreyn [S26] kehittämiä metodeja. Näiden avulla täydellisyys osoitetaan vahvemmassa muodossa, joka antaa riittävän ehdon sille, että joukolla Σ on malli, joka välistäjättää jonkin kaavajoukon.

2 Kieli $L(\mathcal{Q})$

Tämän osan tehtävä on esittää kielen $L(\mathcal{Q})$ formaali rakenne ja kvanttorin \mathcal{Q} toiminta seuraten lisäselostuksella varustettua Keislerin [S0] esityksen rakennetta ja sisältöä. Kieli $L(\mathcal{Q})$ määritellään olevan ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka identiteetillä ja ylinumeroituvuuskvanttorilla \mathcal{Q} , joka määritellään osassa 2.1. Lisäksi esitetään määritelmät kaavoille, aksioomille ja päättelysäännöille. Tämän jälkeen esitellään kaksi eri tulkintajoukkoa, joista ensimmäinen on *heikot mallit* ja toinen on niiden avulla rakennetut varsinaiset *standardimallit*. Standardimallit teknisesti sisältyvät heikkoihin malleihin, mutta heikot mallit eivät sisälly standardimalleihin. Tarkoitus on edetä lopulta lemmoihin 2.31-2.47 (Nämä ovat Keislerin esityksessä yksi lemma, 1.9.) jotka määrittävät kvanttorin \mathcal{Q} käytöksen, mutta ensin tulee varmistaa kaksi asiaa. Nämä ovat kielen $L(\mathcal{Q})$ semanttiset ja syntaktiset perusominaisuudet. Semanttiset perusominaisuudet todistetaan lemmoissa 2.7-2.21, jotka vastaavat Keislerin lemmoja 1.1.-1.5. Syntaktiset perusominaisuudet todistetaan lemmoissa 2.23-2.27. Esitetään kuitenkin ensin määritelmät joihin päätelmät perustuvat.

2.1 Kielen määritelmä

Määritellään ensin kvanttori \mathcal{Q} ja kieli $L(\mathcal{Q})$ Keislerin esityksen mukaisesti.

Määritelmä 2.1 (Kvanttori \mathcal{Q}). Kvanttori \mathcal{Q} ilmaisee muuttujan x kanssa $\mathcal{Q}x$ "on olemassa ylinumeroituva⁸ määrä universumin A alkioita x , joille sidottu kaava pätee."

Määritelmä 2.2 (Kieli $L(\mathcal{Q})$). Kieli $L(\mathcal{Q})$ on ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kieli varustettuna identiteettisymbolilla $=^9$ ja numeroituvalla joukolla predikaatti-, funktio- ja vakiosymboleja, jonka kvanttoreihin on lisätty \mathcal{Q} .

Huomautus 2.3. Kuten Keisler huomauttaa, tämän myötä havaitaan, että kieli $L(\mathcal{Q})$ sisältää siis kolme kvanttoria: \exists , \forall , \mathcal{Q} . Sen kaavajoukko on näin pienin joukko ϕ , joka sisältää kaikki kielen L atomikaavat ja seuraavan ominaisuuden:

jos kaavat $\varphi, \psi \in \phi$ ja y on muuttuja, niin kaavat $\varphi \wedge \psi$, $\neg\varphi$, $(\exists y)\varphi$, $(\forall y)\varphi$ ja $(\mathcal{Q}y)\varphi$ sisältyvät joukkoon ϕ .

⁸Ylinumeroituvuus toimii tässä kuten aikaisemmin esiteltynä kohdassa 1.1.5

⁹Huomaa, että mm. Keisler ilmaisee identiteetin olevan \equiv . Tämä oli 1950-1970 lukujen käytäntö.

Määritellään seuraavaksi heikot mallit erityistapauksena kohdassa 1.1 aikaisemmin esitellystä mallin¹⁰ konseptista, ja edetään sen jälkeen hänen määritelmään kaavan toteutumisesta kielessä $L(\mathcal{Q})$.

Määritelmä 2.4 (Heikot mallit). Kielen $L(\mathcal{Q})$ heikot mallit ovat pareja (\mathcal{M}, q) , jossa \mathcal{M} on malli ensimmäisen kertaluvun kielelle L , ja tulkinta q on mallin \mathcal{M} universumin A osajoukkojen $a \subseteq A$ joukko, eli universumin A potenssijoukon $\mathcal{P}(A)$ osajoukko. Toisin sanoen $q \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Määritellään seuraavaksi mitä tarkoittaa, ja minkä pohjalta päätellään, että kaava toteutuu kielessä $L(\mathcal{Q})$.

Määritelmä 2.5 (Kaavan toteutuminen kielessä $L(\mathcal{Q})$). Ilmaisua "universumin alkiot $a_1, \dots, a_n \in A$ toteuttavat kaavan $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ kielen $L(\mathcal{Q})$ mallissa (\mathcal{M}, q) " määritellään tavalliseen tapaan rakenteellisella induktiolla kaavan φ rakenteen suhteen. Kyseinen ilmaisu merkitään $(\mathcal{M}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

$$(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}v_m)\varphi[a_1, \dots, a_n]$$

jos ja vain jos $\{b \in A \mid (\mathcal{M}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_{m-1}, b, a_{m+1}, \dots, a_n]\} \in q$,

missä $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ on kielen $L(\mathcal{Q})$ kaava ja $m \leq n$. Muut ehdot määritellään tuttuun tapaan kielestä L . Jos taas kaava φ toteutuu kaikissa kielen $L(\mathcal{Q})$ malleissa, merkitään $\models \varphi$.

2.2 Totuusarvojen invarianssi isomorfisissa malleissa

Tämän osion tarkoitus on osoittaa totuusarvojen invarianssiin liittyvä tulos, lemma 2.8, joka toimii pohjana ja oletuksena lähes kaikille myöhemmille tuloksille.

Tarkastellaan ensin sisäisten indeksien käsittelyä. Tämä tarkastelu osoittautuu hyödylliseksi esim. seuraavassa lemmassa 2.7.

Huomautus 2.6. Kuvitellaan tilanne, jossa on jono muuttujia $\bar{v} = v_1, \dots, v_n$. Tässä ulkoiset indeksit $\bar{j} = 1, \dots, n$ kertovat muuttujan v_j sijainnin jonossa \bar{v} . Kuitenkin on mahdollista, että vain osa näistä muuttujista ilmenee, joten tarvitaan uudet indeksit ilmaisemaan vain nuo kyseiset muuttujat. Tällöin kirjoitetaan sisäiset indeksit $\bar{i} = i_1, \dots, i_m$. Huomaa, että ellei kyseessä ole tilanne jossa kaikki muuttujat ilmenevät, $m \neq n$. Näin siis valitaan vain osa alkuperäisestä jonosta.

Tämä ensimmäinen lemma, joka vastaa Keislerin lemmaa 1.1, osoittaa, että vapaiden muuttujien vaihto ei vaikuta totuusarvoon.

¹⁰Keisler käyttää joskus malleista sanan "model" sijaan ilmaisua "relational systems".

Lemma 2.7. Olkoot indeksit i_1, \dots, i_m erilliset ja $m \leq n$. Jos kaikki kaavan $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ vapaat muuttujat ovat tarkalleen v_{i_1}, \dots, v_{i_m} ja jos muuttujat ovat vastaavissa kohdissa samat, eli $a_{i_1} = b_{i_1}, \dots, a_{i_m} = b_{i_m}$, niin

$$(\mathcal{M}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ jos ja vain jos } (\mathcal{M}, q) \models \varphi[b_1, \dots, b_n].$$

Todistus. Todistetaan rakenteellisella induktiolla. Jos kaavassa $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ ainoat vapaat muuttujat ovat joukossa v_{i_1}, \dots, v_{i_m} , atomikaavan totuusarvon määräävät ainoastaan sen vapaiden muuttujien arvot a_{i_j} . Kun huomioidaan, että $a_{i_j} = b_{i_j}$ kaikille j , totuusarvo on sama kaikille (a_1, \dots, a_n) ja (b_1, \dots, b_n) .

Konnektiivien ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$) muodostamien molekyylipropositioiden arvot määräytyvät vastaavasti samalla tavalla atomipropositioiden kautta. Jos siis $(\mathcal{M}, q) \models x$ ja $(\mathcal{M}, q) \models y$, niin $(\mathcal{M}, q) \models x \wedge y$. Vastaavasti jos $(\mathcal{M}, q) \not\models x$, $(\mathcal{M}, q) \models \neg x$, ja jos $(\mathcal{M}, q) \models x$ tai $(\mathcal{M}, q) \models y$, niin $(\mathcal{M}, q) \models x \vee y$.

Tilanteissa $\varphi = (\forall x)\psi$ ja $\varphi = (\exists x)\psi$ havaitaan, että $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ totuusarvo määrittyy vain φ vapaiden muuttujien pohjalta.

$$(\mathcal{M}, q) \models (\forall x)\psi(a_1, \dots, a_n) \text{ jos ja vain jos kaikilla universumin } A \text{ vakion } c \text{ arvoilla} \\ c \in A, (\mathcal{M}, q) \models \psi(a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Jos ψ vapaat muuttujat ovat joukossa $(v_{i_1}, \dots, v_{i_m}, x)$, missä kvanttori sitoo x , induktio-oletuksesta seuraa, että jos a -jono korvataan b -jonolla joissa kaikki mainitut i_j ovat samanarvoiset, niin jokaiselle vakiolle c universumissa A , eli $c \in A$, pätee

$$(\mathcal{M}, q) \models \psi(a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n) \\ \text{jos ja vain jos } (\mathcal{M}, q) \models \psi(b_1, \dots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \dots, b_n).$$

Täten ehto "kaikilla c " pätee molemmille tuplille, joten molemmat toteuttavat tai molemmat eivät toteuta kaavaa $(\forall x)\psi$. Sama päättely pätee kaavalle $(\exists x)\psi$. Todistajien $c \in A$ joukko jotka toteuttavat $\psi(\dots, c, \dots)$ on identtinen molemmille tuplille induktio-oletuksen kautta. Samoin siis kvanttorin $(\mathcal{Q}x)\psi$ suhteen

$$(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}x)\psi(a_1, \dots, a_n) \\ \text{jos ja vain jos } \{c \in A \mid (\mathcal{M}, q) \models \psi(a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n)\} \in q,$$

jossa $q \subseteq \mathcal{P}(A)$ on kokoelma A osajoukkoja kyseisessä heikossa mallissa. Näin määritellään

$$S_a = \{c \in A \mid (\mathcal{M}, q) \models \psi(a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n)\}$$

ja vastaavasti S_b . Induktio-oletuksesta seuraa, että jokaiselle $c \in A$

$$(\mathcal{M}, q) \models \psi(a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n) \text{ jos ja vain jos} \\ (\mathcal{M}, q) \models \psi(b_1, \dots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \dots, b_n).$$

Täten $S_a = S_b$. Näin kvanttorin \mathcal{Q} tulkinta heikossa mallissa riippuu vain siitä, kuuluuko kyseinen joukko kokoelmaan q , ja täten molemmat jonot joko toteuttavat tai eivät toteuta kaavaa $(\mathcal{Q}x)\psi$. \square

Seuraava lemma, joka vastaa Keislerin lemmaa 1.2, osoittaa, että totuusarvot eivät muutu korvauksilla joilla on sama tulkinta.

Lemma 2.8. Olkoon (\mathcal{M}, q) heikko malli, ja $\varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ kielen $L(\mathcal{Q})$ kaava. Muodostetaan ψ korvaamalla jokainen vapaiden muuttujien y_1, \dots, y_n esiintymä kaavassa φ vakioilla c_1, \dots, c_n . Jos d_1, \dots, d_n ovat vakioiden c_1, \dots, c_n tulkinnat mallissa \mathcal{M} , niin kaikille $a_1, \dots, a_m \in A$ pätee

$$(\mathcal{M}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_m, d_1, \dots, d_n] \text{ jos ja vain jos } (\mathcal{M}, q) \models \psi[a_1, \dots, a_m]$$

Todistus. Väite todistetaan rakenteellisella induktiolla. Ensin käydään läpi atomipropositiot. Tässä jokainen vapaa muuttuja y_i korvataan vastaavalla vakiolla c_i . Koska atomipropositio arvo riippuu vain sen vapaista muuttujista, totuusarvo säilyy.

Konnektiivien muodostamien molekyylipropositioiden kanssa tapaus rakentuu atomipropositioista konnektiivien sääntöjen kautta. Jos $(\mathcal{M}, q) \models x$ ja $(\mathcal{M}, q) \models y$, niin $(\mathcal{M}, q) \models x \wedge y$. Jos $(\mathcal{M}, q) \not\models x$, niin $(\mathcal{M}, q) \models \neg x$, $(\mathcal{M}, q) \models x$ tai $(\mathcal{M}, q) \models y$, niin $(\mathcal{M}, q) \models x \vee y$.

Kvanttorien tapauksissa $\varphi = (\forall x)\psi$, $\varphi = (\exists x)\psi$ ja $\varphi = (\mathcal{Q}x)\psi$ havaitaan, että jos ψ vapaat muuttujat ovat (y_1, \dots, y_n, x) , jotka korvataan (c_1, \dots, c_n, x) , ja x sidotaan, niin totuusarvo säilyy myös. \square

Siinä, missä lemma 2.7 siis kertoo, että vapaiden muuttujien vaihto ei vaikuta totuusarvoon, lemma 2.8 yleistää tämän tuloksen tilanteisiin joissa korvaukset tehdään saman tulkinnan omaavilla alkioilla. Näin siis totuusarvot ovat invariantteja isomorfisissa malleissa.

2.3 Semanttisia määritelmiä

Seuraavaksi esitellään lauseen standardimallin, vapaamuuttujaisen kaavan mallinuksen ja välistäjäntämisen määritelmät.

Määritelmä 2.9 (Lauseen standardimalli). Olkoon \mathcal{M} malli kielelle L .

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ jos ja vain jos } (\mathcal{M}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n],$$

missä q on kaikkien joukon A ylinumeroituvien osajoukkojen joukko. Sanotaan, että \mathcal{M} on objektikielen lauseen *standardimalli* jos ja vain jos $\mathcal{M} \models \varphi$ yllä olevaan

tapaan. Täten \mathcal{M} on standardimalli kaavalle φ vain, jos φ pätee mallissa \mathcal{M} , jossa $\mathcal{Q}x$ tulkitaan tarkoittavan "on olemassa ylinumeroituva määrä x ".

Määritelmä 2.10 (Vapaamuuttujaisen kaavan mallinnus). Jos φ on kielen $L(\mathcal{Q})$ kaava, jossa on vapaat muuttujat $u_1 \dots u_n$, niin

$$(\mathcal{M}, q) \models \varphi \text{ ilmaisee } (\mathcal{M}, q) \models \forall(u_1 \dots u_n)\varphi$$

ja

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ ilmaisee } \mathcal{M} \models \forall(u_1 \dots u_n)\varphi.$$

Määritelmä 2.11 (Välistäjättäminen).¹¹ Olkoon $\Sigma(x)$ kielen $L(\mathcal{Q})$ kaavajoukko, jonka kaavoissa on korkeintaan x vapaana. Ilmaisuihin " (\mathcal{M}, q) välistäjättää joukon Σ " on tosi jos ja vain jos ei ole olemassa sellaista alkiota $a \in A$ jolle

$$(\mathcal{M}, q) \models \sigma[a] \text{ kaikilla } \sigma \in \Sigma.$$

Standardimalleille ilmaisu " \mathcal{M} välistäjättää joukon Σ " määritellään samoin.

Tämä tarkoittaa, että mallissa (\mathcal{M}, q) ei ole universumin alkiota joka toteuttaisi kaikki joukon Σ vaatimukset σ , joten sitä pidetään välistäjätettynä.

Nämä määritelmät muodostavat tarvittun perustan mallien semantiikalle, jota taas käytetään todistamaan logiikan $L(\mathcal{Q})$ täydellisyys.

2.4 Aksiomat ja päättelysäännöt kielelle $L(\mathcal{Q})$

Nyt esitellään Keislerin joukko aksiomia kielelle $L(\mathcal{Q})$.¹² Valitut aksiomat ovat yksinkertaisia kaavoja, jotka ovat oletettu todeksi kaikissa standardimalleissa. Sisällytetään myös kaikki edellä mainitut perusaksiomat kohdasta 1.1.5 kielelle L , mukaan lukien identiteettiaksiomat.

Määritelmä 2.12 (Lisäaksiomat kielelle $L(\mathcal{Q})$).

- (A1) $\neg(\mathcal{Q}x)(x = y \vee x = z)$,
Jokainen joukko, jossa on kaksi alkiota, on numeroituva.
- (A2) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)\psi)$, jossa φ ja ψ ovat kielen $L(\mathcal{Q})$ kaavoja.
Joukko on ylinumeroituva, jos sen osajoukko on ylinumeroituva.

¹¹Joskus käytetään myös ilmaisuja "jättää välistä", "ohittaa" ja "omittaa".

¹²Nämä ovat tarkalleen ne aksiomat, joita Keisler mainitsi Craigin ja Fuhrkenin harkinteen vuonna 1962 [S3], kun he esittivät konjektuurin, että täydellisyyslause on tosi kielelle $L(\mathcal{Q})$.

- (A3) $(\mathcal{Q}x)\varphi(x) \leftrightarrow (\mathcal{Q}y)\varphi(y)$, jossa $\varphi(x, \dots)$ on kielen $L(\mathcal{Q})$ kaava, jossa y ei esiinny ja $\varphi(y, \dots)$ seuraa korvaamalla jokaisen x vapaa esiintymä muuttujalla y . Tämä tarkoittaa, että vapaiden muuttujien vaihto ei vaikuta totuusarvoon.
- (A4) $(\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi \rightarrow (\exists x)(\mathcal{Q}y)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)(\exists y)\varphi$, jossa φ on kielen $L(\mathcal{Q})$ kaava. Tämä tarkoittaa, että jos $\cup_{x \in X}(a_x)$ on ylinumeroituva, joko jokin a_x tai X on ylinumeroituva. Intuitiona toimii, että numeroituvan monen numeroituvan joukon unioni on numeroituva.

Määritelmä 2.13 (Johto). Sanotaan, että kaavalle φ on *johto* tai *todistus*, jos ja vain jos on olemassa äärellinen kaavajono jonka viimeinen kaava on φ , ja joka on joko aksiooma, tai saatu aiemmista kaavoista tai aksioomista päättelysääntöjen (R1) ja (R2) avulla. Merkitään tätä $\vdash \varphi$ ¹³.

Huomautus 2.14. Keisler huomauttaa, että valinta-aksioomaa käytetään siinä, että varmistetaan että (A4) pätee kaikissa standardimalleissa.

Huomautus 2.15. (R1) ja (R2) pätevät myös kielessä $L(\mathcal{Q})$.

Huomautus 2.16. Jokaisessa esitetystä aksioomassa kaavat φ ja ψ saattavat sisältää vapaita muuttujia, ja x, y, z ovat mielivaltaisia muuttujia.

Huomautus 2.17. Monta eri predikaattilogiikan lausetta voidaan todistaa samoin kielelle $L(\mathcal{Q})$ jaettujen aksioomien vuoksi; esimerkiksi $\vdash (\forall x)\varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$. Tämän kaltaisia päätelmiä ja niistä seuraavia tuloksia tullaan käyttämään ilman erillistä mainintaa. Näin tullaan käyttämään myös tiettyjä tutuksi oletettuja määritelmiä ja tuloksia predikaattilogiikasta.

Seuraava lemma, joka vastaa Keislerin lemmaa 1.3, osoittaa, että jokainen kielen L malli \mathcal{M} on jokaisen kielen $L(\mathcal{Q})$ aksiooman standardimalli. Jos näin ei olisi, jokin selkeä rakenteellinen virhe olisi tapahtunut siirtyessämme kielestä L kieleen $L(\mathcal{Q})$.

Lemma 2.18. Jokainen kielen L malli \mathcal{M} on jokaisen laajennetun kielen $L(\mathcal{Q})$ aksiooman standardimalli.

Todistus. Looginen väite voidaan tulkita joukko-opillisesti. Esimerkiksi $(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}x)\varphi(x)$ tarkoittaa, että $S_\varphi = \{a \in A \mid (\mathcal{M}, q) \models \varphi[a]\}$ on ylinumeroituva. Käydään aksioomat läpi hyödyntämällä vastaavaa päättelyä.

¹³Tätä voi ajatella lyhenteenä ilmaisulle $\emptyset \vdash \varphi$, eli mitään oletuksia ei vaadittu. Vastaavaa ajattelua ei voi soveltaa $\models \varphi$ kanssa, sillä semanttinen totuus määritellään kaikkien mallien suhteen, ja mallien universumit oletetaan aina kohdan 1.1.3 mukaisesti epätyhjiksi.

$$1. \neg(\mathcal{Q}x)((x = y) \vee (x = z))$$

Voidaan tutkia joukkoa $\{x \in A \mid (x = y) \text{ tai } (x = z)\} = \{y, z\}$, jossa on korkeintaan kaksi alkioa, ja vain yksi jos $x = y = z$. Aksioma pätee, sillä mikään äärellisen monen alkion joukko ei ole ylinumeroituva.

$$2. (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)\psi)$$

Premissistä seuraa, että $S_\varphi \subseteq S_\psi$. Seuraus kertoo, että jos S_φ on ylinumeroituva, niin myös S_ψ on. Aksioma pätee, sillä mikä tahansa ylinumeroituvan joukon ylijoukko on ylinumeroituva.

$$3. (\mathcal{Q}x)\varphi(x) \leftrightarrow (\mathcal{Q}y)\varphi(y)$$

Tässä muuttujan uudelleen nimeäminen ei muuta joukkoa S_φ . Aksioma pätee, sillä muuttujan nimen vaihto ei vaikuta totuusarvoon.

$$4. (\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi \rightarrow (\exists x)(\mathcal{Q}y)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)(\exists y)\varphi$$

Olkoon malli $\mathcal{M} = (A, I)$. Tarkastellaan tilannetta

$$S_x = \{x \in A \mid \{y \in A \mid (\mathcal{M}, q) \models \varphi(x, y)\} \text{ on ylinumeroituva}\}.$$

Toisin sanoen, jos jokaiselle $x \in A$ määritellään

$S_x = \{y \in A \mid (\mathcal{M}, q) \models \varphi(x, y)\}$, niin jokainen S_x on säiejoukko¹⁴, ja jos määritellään projektio $T = \{y \in A \mid \exists x \in A \mid (\mathcal{M}, q) \models \varphi(x, y)\}$, niin havaitaan, että

$$T = \bigcup_{x \in A} (S_x).$$

Näin siis jos T on ylinumeroituva, eli $(\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi(x, y)$, niin joko vähintään yksi säiejoukko S_x on ylinumeroituva, eli $(\exists x)(\mathcal{Q}y)\varphi(x, y)$, tai on olemassa ylinumeroituva määrä epätyhjiä $S_x \neq \emptyset$, eli $(\mathcal{Q}x)(\exists y)\varphi(x, y)$.

□

Huomautus 2.19. Nämä huomiot perustuvat Keislerin alkuperäiseen esitykseen:

1. $\mathcal{M} \models (\mathcal{Q}x)(x = x)$ jos ja vain jos A on ylinumeroituva. Tässä työssä, kuten Keislerin alkuperäisessä julkaisussa, lausetta $(\mathcal{Q}x)(x = x)$ ei oteta aksiomaksi vaan hyväksytään myös numeroituvat standardimallit. Kuitenkin olisi mahdollista yhtä hyvin sisällyttää se aksiomana ja vahvistaa standardimallin määritelmää vaatimalla A olevan ylinumeroituva alkioujoukko.

¹⁴Tätä termiä käytetään monella matematiikan alalla hahmottamaan alun perin geometristopologista konseptia, jossa säiejoukko sisältää kaikki jossain projektiossa samaan pisteeseen kuvautuvat pisteet. Tässä riittää ymmärtää että kyseessä on joukko.

2. On helppo löytää heikkoja malleja standardimallien ulkopuolella, jotka eivät toteuta kielen $L(\mathcal{Q})$ aksioomia. Kuitenkin on olemassa tärkeitä esimerkkejä heikoista malleista, jotka eivät ole standardimalleja ja jotka toteuttavat $L(\mathcal{Q})$ aksioomat. Esimerkiksi: jos q on A kaikkien äärettömien osajoukkojen joukko, (\mathcal{M}, q) on selkeästi jokaisen $L(\mathcal{Q})$ aksiooman heikko malli.
3. Generalisaatiossa x ei saa esiintyä vapaana missään oletusjoukon Σ kaavassa.
4. Kuten yleensä, $\Sigma \vdash \varphi$ ilmaisee, että φ on johdettavissa oletuksista Σ .
5. Tässä työssä tarkastellaan vain deduktioita lausejoukosta Σ . Mielivaltaisista kaavoista lähteviä deduktioita ei käsitellä.

Seuraavaksi tulee varmistaa, että kielen malliteoria ja syntaksi toimivat tarvittavalla tavalla.

2.5 Kielen $L(\mathcal{Q})$ malliteoria

Loogisen järjestelmän terveys on ominaisuus, joka kertoo, että kaikki päättelysääntöjen tuottamat tulokset ovat semanttisesti valideja. Todistetaan tämä seuraavaksi. Aloitetaan osoittamalla järjestelmän terveys, englanniksi *soundness*. Tämä ominaisuus osoittaa, että päättelyjärjestelmä ei tuota ristiriitaa malliteorian kanssa. Tämä lemma vastaa Keislerin lemmaa 1.4.

Lemma 2.20 (Terveyslemma). Olkoon (\mathcal{M}, q) heikko malli kaikille kielen $L(\mathcal{Q})$ aksioomille. Jos $\vdash \varphi$, niin $(\mathcal{M}, q) \models \varphi$. Jos $\Sigma \vdash \varphi$ ja (\mathcal{M}, q) on joukon Σ heikko malli, niin $(\mathcal{M}, q) \models \varphi$.

Todistus. Todistetaan induktiolla kaavan φ johdon suhteen.

1. Perustapauksessa voidaan sanoa, että jos viimeinen osa johtoa on $L(\mathcal{Q})$ aksiooma (joko tavallisen tai erityisesti $L(\mathcal{Q})$ logiikan), niin $(\mathcal{M}, q) \models \varphi$, koska (\mathcal{M}, q) on kielen $L(\mathcal{Q})$ aksioomien heikko malli. Aksioomakaavat tulkitaan universaalisesti suljettuina.
2. Jos johdon viimeinen rivi on $\sigma \in \Sigma$ ja $(\mathcal{M}, q) \models \Sigma$, niin $(\mathcal{M}, q) \models \sigma$.
3. Lisäksi $L(\mathcal{Q})$ päättelysääntöihin sisältyy Modus Ponens (R1) ja generalisaatio (R2) kuten mainittu kohdassa 2.15. Käydään ne läpi seuraavaksi.
 - (a) Jos viimeinen osa johtoa on Modus Ponens kaavoista ψ ja $\psi \rightarrow \varphi$, niin induktio-oletuksen myötä $(\mathcal{M}, q) \models \psi$ ja $(\mathcal{M}, q) \models \psi \rightarrow \varphi$, ja näin $(\mathcal{M}, q) \models \varphi$.

- (b) Jos viimeinen osa on generalisaatio (tulee muistaa huomion 2.19 kohta 3), eli $\varphi = (\forall x)\psi$ premissillä ψ , niin induktio-oletuksesta seuraa $(\mathcal{M}, q) \models \psi$ ja täten generalisaatiosta seuraa $(\mathcal{M}, q) \models (\forall x)\psi$. Jos kaavassa ψ on vapaita muuttujia u_1, \dots, u_n , niin $(\mathcal{M}, q) \models \psi$ tarkoittaa, että $(\mathcal{M}, q) \models (\forall(u_1)) \dots (\forall(u_n))\psi$.

Täten, jos $\vdash \varphi$, niin $(\mathcal{M}, q) \models \varphi$. Jos on kyse tapauksesta, jossa johdetaan väite joukosta Σ , voidaan sanoa, että jos $(\mathcal{M}, q) \models \Sigma$ ja $\Sigma \vdash \varphi$, seuraa $(\mathcal{M}, q) \models \varphi$. \square

On myös tärkeä varmistaa, että kielen $L(\mathcal{Q})$ aksioomajärjestelmä on ristiriidaton standardimalleissa. Tämä lemma vastaa Keislerin lemmaa 1.5 ja sen todistus käyttää edellistä lemmaa 2.20.

Lemma 2.21. Kaksiosainen:

1. Jos \mathcal{M} on joukon Σ standardimalli ja $\Sigma \vdash \varphi$, niin φ on tosi mallissa \mathcal{M} .
2. Standardimallin omaava kielen $L(\mathcal{Q})$ lausejoukko Σ on ristiriidaton.

Todistus. Todistetaan induktiolla todistuksen askelten määrän n suhteen.

1. (a) Perustapaus on, että todistuksen viimeinen kaava φ on joko aksiooma tai $\varphi \in \Sigma$. Kaikki aksioomat ovat määritelmällisesti tosia kaikissa joukon Σ standardimalleissa, ja jos φ sisältyy kaavajoukkoon Σ , se on tosi kaikissa standardimalleissa.
- (b) Jos väite on voimassa todistuksille, joiden pituus on $n - 1$, mikä on induktio-oletus, on olemassa kaksi mahdollista viimeistä päätelmää, Modus Ponens, eli jos φ ja $\varphi \rightarrow \psi$ ovat totta, niin ψ on totta, ja generalisaatio, eli jos ψ on tosi kaikissa joukon Σ standardimalleissa kaikilla muuttuja-arvoilla, niin myös $(\forall x)\psi$ on. Molemmat säilyttävät totuuden kaikissa joukon Σ standardimalleissa kaikilla muuttuja-valinnoilla lemmän 2.20 mukaisesti. Näin jokainen todistettava väite on tosi kaikissa joukon Σ standardimalleissa.
2. (a) Oletetaan, että Σ omaa standardimallin \mathcal{M} .
- (b) Oletetaan, että Σ tuottaa ristiriidan, eli $\Sigma \vdash \perp$.

Ensimmäisestä osasta (1.) seuraa, että kaikki φ , joille voidaan johtaa todistus joukosta Σ , ovat tosia kaikissa Σ standardimalleissa. \perp on aina epätosi kaikissa rakenteissa, joka on ristiriita¹⁵. Jokin oletus on siis väärin, ja tämä oletus on (b). Σ on ristiriidaton.

¹⁵Tässä ei tarkoiteta siis ristiriitaa joukossa Σ , jota yritetään todistaa ristiriidattomaksi, vaan argumentissa itsessään.

□

Huomautus 2.22. Keisler tekee seuraavat huomiot tämän jälkeen: Yllä olevan lemmän todistuksessa valinta-aksiomaa tarvitaan vain siinä, että (A4) pätee kaikissa standardimalleissa, tähän viitattiin kohdassa 2.14. Ehto "x on ylinumeroituva" voidaan määritellä ilman valinta-aksiomaa, esimerkiksi $\neg(|x| \leq \omega); \omega < |x|; \omega_1 \leq |x|$ tai $(\exists f)(f : x \rightarrow \omega_1)$.

Jokaisesta näistä seuraa hieman erilainen käsitys standardimallista. Jokaisessa tapauksessa oletetaan, että jos (A4) pätee kaikissa standardimalleissa, niin lemma 2.21 pätee siinä.

Seuraavaksi tulee todistaa, että kielen $L(\mathcal{Q})$ syntaksi toimii vaadittavalla tavalla.

2.6 Kielen $L(\mathcal{Q})$ syntaksi

Seuraava lemma, joka vastaa Keislerin lemmaa 1.6, esittää deduktio-ominaisuutta vastaavan tuloksen. Se osoittaa, että Modus Ponens toimii implikaation syntaksin mukaisesti.

Lemma 2.23 (Deduktiolemma).¹⁶ Olkoon Σ joukko kielen $L(\mathcal{Q})$ lauseita ja φ kielen $L(\mathcal{Q})$ yksi lause. Tällöin $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ jos ja vain jos $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.

Todistus. Toinen suunta on triviaali (MP). Todistetaan induktiolla todistuksen pituuden n suhteen.¹⁷

1. Perustapaus on, että joko ψ on aksioma tai $\psi \in \Sigma$, joten automaattisesti $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Tällöin $\varphi \rightarrow \psi$ on johdettavissa propositiologiikan tautologiasta (P1) $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, ja näin $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.
2. Induktioaskel on, että päätelmä on joko Modus Ponens tai generalisaatio.
 - (a) Modus Ponens etenee siten, että $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \theta$ ja $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash (\theta \rightarrow \psi)$ antavat $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Induktio-oletuksen kautta $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \theta$ ja $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \psi)$. Propositiologiikan tautologiasta (P2)

$$\Sigma \vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)).$$

seuraa (valitsemalla $\phi := \varphi, \psi := \theta, \chi := \psi$) ilmaisu

$$\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$$

¹⁶Englanniksi *Deduction theorem*.

¹⁷Metatodistus suoritetaan siis objektikielen todistuksen pituuden n suhteen.

jonka kautta taas käyttämällä Modus Ponensia kahdesti saadaan $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

- (b) Generalisaation tapauksessa $\psi = (\forall x)\theta$, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \theta$, ja generalisaatiolla saadaan, että $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash (\forall x)\theta = \psi$. Induktio-oletuksesta seuraa, että $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \theta$. Edelleen generalisaatiolla saadaan, että $\Sigma \vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow \theta)$. Generalisaation oletuksena on, että x ei ole vapaana missään joukon $\Sigma \cup \{\varphi\}$ kaavassa, joten se ei ole vapaana kaavassa φ . Nyt aksiooman (F2) avulla $\vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\theta)$, ja Modus Ponens antaa $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\forall x)\theta$.

Näin kaikki mahdolliset päättelyketjut säilyttävät deduktiio-minaisuuden. \square

Määritelmä 2.24 (Ristiriidaton lausejoukko). Ristiriidaton lausejoukko on sellainen lausejoukko Σ josta ei voi johtaa ristiriitaa, eli jolle ei päde $\Sigma \vdash \perp$.

Määritelmä 2.25 (Maksimaalisesti ristiriidaton lausejoukko). Maksimaalisesti ristiriidaton lausejoukko on sellainen ristiriidaton lausejoukko Σ mihin sisältyy jokainen universumin lause A tai sen negaatio, eli mille pätee kaikille universumin lauseille A joko $A \in \Sigma$ tai $\neg A \in \Sigma$.

Seuraava lemma kuvailee maksimaalisen ristiriidattoman joukon käyttäytymistä ja ominaisuuksia, joita tarvitaan myöhemmin.

Lemma 2.26. Jos Σ on maksimaalinen ristiriidaton joukko kielen $L(\mathcal{Q})$ lauseita, niin kaikille lauseille φ ja ψ kielessä $L(\mathcal{Q})$ pätee

$$(\neg\varphi) \in \Sigma \text{ jos ja vain jos } (\varphi \notin \Sigma)$$

ja

$$(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma \text{ jos ja vain jos } ((\varphi \in \Sigma) \text{ ja } (\psi \in \Sigma)).$$

Todistus. Todistetaan väite kahdessa osassa.

1. $(\neg\varphi) \in \Sigma$ jos ja vain jos $(\varphi \notin \Sigma)$: Jos molemmat sisältyisivät, ristiriidattomuus ei pitäisi. Jos taas $\neg\varphi$ ei sisälly, niin maksimaalisuus ei toteutuisi, koska joko φ tai $\neg\varphi$ voitaisiin lisätä rikkomatta ristiriidattomuutta.
2. $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$ jos ja vain jos $((\varphi \in \Sigma) \text{ ja } (\psi \in \Sigma))$: Koska kaava $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ on propositiologiikan tautologia, se on täten johdettavissa aksioomista (P1)-(P3), ja näin se joukon Σ maksimaalisuuden vuoksi kuuluu joukkoon Σ . Jos myös $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$, niin Modus Ponensilla $\Sigma \vdash \varphi$. Symmetrisesti voidaan

todistaa myös $\Sigma \vdash \psi$. Jos taas $(\varphi \wedge \psi)$ ei sisältyisi, maksimaalisuus ei toteutuisi, koska se tai sen negaatio voitaisiin lisätä rikkomatta ristiriidattomuutta. Jos $\neg(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)) = (\varphi \rightarrow \neg\psi) \in \Sigma$, tällöin Modus Ponensilla saadaan, että $\Sigma \vdash \neg\psi$, mikä on ristiriita ristiriidattomuuden kanssa.

□

Seuraava lemma, joka vastaa Keislerin lemmaa 1.8, varmistaa, että kieleen voidaan lisätä mielivaltainen vakiojoukko vaikuttamatta ristiriidattomuuteen.

Lemma 2.27. Olkoon L' kielen L laajennus, joka on muodostettu lisäämällä mielivaltainen vakiojoukko kieleen L . Tällöin mille tahansa kielen $L(\mathcal{Q})$ lausejoukolle Σ pätee, että Σ on ristiriidaton kielessä $L(\mathcal{Q})$ jos ja vain jos Σ on ristiriidaton kielessä $L'(\mathcal{Q})$.

Todistus. Käydään ensin tilanne jossa Σ on ristiriidaton kielessä $L(\mathcal{Q})$, eli $\Sigma \not\vdash \perp$. Vastaoletuksena siis Σ on ristiriitainen kielessä $L'(\mathcal{Q})$. Todistuksen π pituus n on aina äärellinen, ja täten käyttää vain äärellistä määrää vakioita c_1, \dots, c_m kielessä $L'(\mathcal{Q})$. Ne voidaan korvata $L(\mathcal{Q})$ sisällä olevien muuttujien kanssa niin, että kielessä $L(\mathcal{Q})$ voidaan johtaa $\Sigma \vdash \varphi$ ja $\Sigma \vdash \neg\varphi$ jollekin kaavalle φ . Tämä on ristiriita.

Jos taas Σ on ristiriidaton kielessä $L'(\mathcal{Q})$, ja tehdään vastaoletus, että Σ on ristiriitainen kielessä $L(\mathcal{Q})$, voidaan huomioida, että $L(\mathcal{Q}) \subseteq L'(\mathcal{Q})$, joten se olisi ristiriitainen myös kielessä $L'(\mathcal{Q})$. Tämä on ristiriita. □

Huomautus 2.28. Edellinen lause voidaan tulkita niin, että vakioiden lisääminen ei tee ristiriidattomasta teoriasta ristiriitaista, sillä uudet vakiot ovat toisistaan ja aikaisemmista elementeistä riippumattomia. Niillä ei ole tässä semanttista sisältöä tai erityisiä yhteyksiä aksioomiin, ja täten korvaus on mahdollista.

Lemma 2.29. Olkoon Γ teoria kielessä $L(\mathcal{Q})$ ja t termi. Jos $\Gamma \vdash \sigma(x) \rightarrow \theta(x)$, niin $\Gamma \vdash \sigma(t) \rightarrow \theta(t)$.

Todistus. Koska teoriassa T ei ole vapaita muuttujia, voidaan käyttää päättelysääntöä (R1) ja saadaan $\Gamma \vdash (\forall x)(\sigma(x) \rightarrow \theta(x))$ ja aksioomaa (F1) käyttämällä saadaan $\vdash (\forall x)(\sigma(x) \rightarrow \theta(x)) \rightarrow (\sigma(t) \rightarrow \theta(t))$. Väite seuraa näistä. □

2.7 Kvanttorin \mathcal{Q} toiminta

Tärkein asia tässä osiossa, jo määritelmästä alkaen, on selvittää, miten kvanttori \mathcal{Q} toimii malliteoreettisesti ja päättelysääntöjen suhteen. Tätä tarvitaan siihen, että voidaan osoittaa, että kun \mathcal{Q} lisätään kieleen L ja muodostuu $L(\mathcal{Q})$, kvanttori ei

tuota ristiriitaisia tuloksia. Keislerin lemma 1.9. kertoo kvanttorin \mathcal{Q} toiminnasta. Esitetään se tässä hajotettuna viiteen osaan.

Keislerin lemmän 1.9. osa (i) osoittaa, että jos jotain on ylinumeroituva määrä, sitä on oltava ainakin yksi. Tämä on selkeästi oltava totta jos järjestelmän on oltava toimiva. Tätä varten esitetään ensin pieni aputuloks.

Lemma 2.30. $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta))$

Todistus. Aloitetaan oletusjoukolla $\{\neg\gamma, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha\}$. Objektitason johto on:

1. α
(oletus)
2. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
(oletus)
3. $(\beta \rightarrow \gamma)$
(MP 1,2)
4. $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg\beta)$
(P3 valinnoilla $\varphi := \beta, \psi := \gamma$)
5. $\neg\gamma \rightarrow \neg\beta$
(MP 3,4)
6. $\neg\gamma$
(oletus)
7. $\neg\beta$
(MP 5,6)

Näin siis $\{\neg\gamma, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha\} \vdash \neg\beta$. Deduktiolemman käyttämisellä kolme kertaa oletusjoukosta (järjestyksessä $\alpha, \neg\gamma, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$) antaa tuloksen. \square

Tämän aputuloksen avulla voidaan siirtyä Keislerin 1.9. (i) lemmaa vastaavaan todistukseen.

Lemma 2.31. Olkoon φ kielen $L(\mathcal{Q})$ kaava. Tällöin $\vdash (\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$.

Todistus. Oletetaan, että y ja z eivät esiinny kaavassa φ , ja että $(\neg(\exists x)\varphi)$. Tautologiana $\vdash \neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$, joten valinnoille $P := \varphi$ ja $Q := \theta(x)$ pätee $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta(x))$, ja valitaan $\theta(x) := ((x = y) \vee (x = z))$. Näin seuraa $T(x)$, eli

$$\vdash (\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow ((x = y) \vee (x = z))))).$$

Tiedetään, että kvanttorien duaalisuus pätee, eli $\vdash (\forall x)\psi(x) \leftrightarrow \neg(\exists x)\neg\psi(x)$. Kun valitaan $\psi(x) := \neg\varphi$ ja otetaan vain toinen suunta duaalisuudesta, seuraa $\vdash \neg(\exists x)\varphi \rightarrow (\forall x)\neg\varphi$. Generalisaatiosta kaavalle $T(x)$ saadaan

$$\vdash (\forall x)(\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow ((x = y) \vee (x = z))))).$$

Oletuksista $\vdash (\forall x)A(x)$ ja $\vdash (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ voidaan johtaa aksioomien (F1) ja (F2) avulla $\vdash (\forall x)B(x)$. Sijoituksista $A(x) := \neg\varphi$, $B(x) := (\varphi \rightarrow ((x = y) \vee (x = z)))$, ja duaalisuudesta saadun $\neg(\exists x)\varphi \vdash (\forall x)\neg\varphi$ nojalla seuraa C , eli $\neg(\exists x)\varphi \vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow ((x = y) \vee (x = z)))$. Edellisistä saadaan deduktiolauseella johdettua D , eli $\vdash \neg(\exists x)\varphi \rightarrow C$. (A2) on muotoa $\vdash (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi(x) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\psi(x))$. Sijoitetaan siihen $\psi(x) := ((x = y) \vee (x = z))$, jolloin

$$\vdash (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow ((x = y) \vee (x = z))) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)((x = y) \vee (x = z))).$$

1. $\neg(\exists x)\varphi$ (oletus)
2. $(\neg\exists x)\varphi \rightarrow (\forall x)(\varphi \rightarrow ((x = y) \vee (x = z)))$ (D)
3. $(\forall x)(\varphi \rightarrow ((x = y) \vee (x = z)))$ (MP 1,2) (C)
4. $(\forall x)(\varphi \rightarrow ((x = y) \vee (x = z))) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)((x = y) \vee (x = z)))$ ((A2) valinnoilla $\varphi(x) := \varphi^{18}$ ja $\psi(x) := ((x = y) \vee (x = z))$)
5. $(\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)((x = y) \vee (x = z))$ (MP 3,4)

Deduktiolemman 2.23 avulla $\vdash (\neg\exists x)\varphi \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)((x = y) \vee (x = z)))$. (A1) $\vdash \neg(\mathcal{Q}x)((x = y) \vee (x = z))$ ja aputuloksella 2.30 oletuksesta $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ seuraa $\neg(\gamma) \vdash (\alpha \rightarrow \neg\beta)$, johon sijoitetaan $\alpha := \neg(\exists x)\varphi$, $\beta := (\mathcal{Q}x)\varphi$, $\gamma := (\mathcal{Q}x)((x = y) \vee (x = z))$. Täten $\vdash \neg(\exists x)\varphi \rightarrow \neg(\mathcal{Q}x)\varphi$, josta kontrapositiolla saadaan $\vdash (\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$. \square

Lemma 2.32. Jos $\vdash (\forall x)(\alpha(x) \rightarrow \beta)$ ja x ei ole vapaana kaavassa β , niin $\vdash (\exists x)\alpha(x) \rightarrow \beta$.

Todistus.

1. $\vdash \alpha(x) \rightarrow \beta$
($(\forall x)(\alpha(x) \rightarrow \beta)$, (F1), MP)
2. $\vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha(x)$
(propositio-kontraposio)

¹⁸eli valitaan kaava joka ei riipu muuttujasta x

3. $\vdash (\forall x)(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha(x))$
(x ei ole vapaana kaavassa $\neg\beta$, (R2))
4. $\vdash \neg\beta \rightarrow (\forall x)\neg\alpha(x)$
((F2), MP)
5. $\vdash (\forall x)\neg\alpha(x) \leftrightarrow \neg(\exists x)\alpha(x)$
((F3) valinnalla $\phi := \neg\alpha(x)$, kaksoisnegaatio)
6. $\vdash \neg\beta \rightarrow \neg(\exists x)\alpha(x)$
(Propositionaalinen päättely 4,5)
7. $\vdash (\exists x)\alpha(x) \rightarrow \beta$
((P3) käyttö)

□

Seuraavaksi käsitellään lemma joka vastaa Keislerin lemman 1.9. kohtaa (ii). Jos siis on olemassa yksittäinen x jolle säie $\{y \mid \varphi(x, y)\}$ on ylinumeroituva, niin on olemassa ylinumeroituva määrä alkioita y joille $\{x \mid \varphi(x, y)\}$ on epätyhjä.

Lemma 2.33. $\vdash (\exists x)(\mathcal{Q}y)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi$

Todistus. Eksistenssi-introduktio kohdasta 1.1.5:

$$\vdash \varphi(x, y, \dots) \rightarrow (\exists x)\varphi(x, y, \dots),$$

ja taas yleistämällä johto kaavalle P :

$$\vdash (\forall y)(\varphi(x, y, \dots) \rightarrow (\exists x)(\varphi(x, y, \dots))).$$

(A2) on muotoa

$$\vdash (\forall y)(\alpha(y) \rightarrow \beta(y)) \rightarrow ((\mathcal{Q}y)\alpha(y) \rightarrow (\mathcal{Q}y)\beta(y)),$$

jossa valitaan

$$\alpha(y) := \varphi(x, y, \dots), \beta(y) := (\exists x)\varphi(x, y, \dots),$$

ja tämä antaa johdon kaavalle Q

$$\begin{aligned} \vdash (\forall y)(\varphi(x, y, \dots) \rightarrow (\exists x)\varphi(x, y, \dots)) \\ \rightarrow ((\mathcal{Q}y)\varphi(x, y, \dots) \rightarrow (\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi(x, y, \dots)). \end{aligned}$$

Käyttämällä Modus Ponensia kaavoihin P ja Q seuraa johto kaavalle R

$$\vdash ((\mathcal{Q}y)\varphi(x, y, \dots) \rightarrow (\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi(x, y, \dots)).$$

Tästä generalisaatiolla saadaan johto

$$\vdash (\forall x)((\mathcal{Q}y)\varphi(x, y, \dots) \rightarrow (\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi(x, y, \dots)).$$

Lemma 2.32: Jos $\vdash (\forall x)(\alpha(x) \rightarrow \beta)$ ja x ei ole vapaana kaavassa β , niin

$$\vdash (\exists x)\alpha(x) \rightarrow \beta.$$

Sovelletaan tätä kaavaan R kun $\alpha(x) := (\mathcal{Q}y)\varphi(x, y, \dots)$, $\beta := (\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi(x, y, \dots)$,

$$(\exists x)(\mathcal{Q}y)\varphi(x, y, \dots) \rightarrow (\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi(x, y, \dots).$$

Tämä on lemmän väite. □

Huomautus 2.34. Edellisessä lemmassa on tärkeää huomioida, että se ei ole kommutatiivisuustulos, sillä väite pätee vain yhteen suuntaan. Jos on olemassa ylinumeroituva määrä epätyhjiä $\{x \mid \varphi(x, y)\}$, ei tiedetä, että on olemassa säie x , jossa on ylinumeroituva määrä alkioita y , joille $\varphi(x, y)$ pätee.

Nyt esitellään lemma 2.35, joka kertoo, että mikäli ylinumeroituvuuskvanttorin mainitsema muuttuja ei ilmene vapaana kaavassa konjunktion toisessa kaavassa, voidaan sen vaikutus pitää merkityksellisenä vain jäljelläolevassa kaavassa. Tämä vastaa Keislerin lemmän 1.9. kohtaa (iii).

Lemma 2.35. Jos x ei esiinny vapaana kaavassa φ , niin

$$\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \wedge (\mathcal{Q}x)\psi).$$

Todistus.

1. $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
(propositiologiikan tautologia)
2. $\vdash (\forall x)((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi)$
(generalisaatio, 1)
3. $\vdash (\forall x)((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\varphi$
((A2) $(\forall x)(\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\alpha(x) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\beta(x))$ valinnoilla $\alpha(x) := (\varphi \wedge \psi)$ ja $\beta(x) := \varphi$)
4. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\varphi$
(Modus Ponens 2,3)
5. $\vdash (\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$
(lemma 2.31)
6. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x)\varphi$
(Väitteistä $\vdash (A \rightarrow B)$ ja $\vdash (B \rightarrow C)$ voidaan päätellä $\vdash (A \rightarrow C)$, sovelletaan kohtiin 4 ja 5.)

7. $\vdash (\exists x)\varphi \rightarrow \varphi$
(x ei ilmenny vapaana kaavassa φ)
8. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
(Väitteistä $\vdash (A \rightarrow B)$ ja $\vdash (B \rightarrow C)$ voidaan päätellä $\vdash (A \rightarrow C)$, sovelletaan kohtiin 6 ja 7)
9. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\psi$
(Symmetrisellä argumentilla kohta 4)
10. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \wedge (\mathcal{Q}x)\psi)$.
(Väitteistä $\vdash A \rightarrow B$ ja $\vdash A \rightarrow C$ voidaan päätellä $\vdash A \rightarrow (B \wedge C)$, sovelletaan kohtiin 8 ja 9.)

□

Seuraava lemma 2.46 vastaa ilmaisua, että kahden numeroituvan joukon unioni on numeroituva, ja se vastaa Keislerin lemman 1.9. kohtaa (iv). Hajotetaan se osatuloksiin.

Lemma 2.36. $\vdash ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi) \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi)$.

Todistus.

1. $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$
(tautologia)
2. $\vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$
(generalisaatio, 1)
3. $\vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi))$
($(A2) (\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\alpha \rightarrow (\mathcal{Q}x)\beta)$
valinnoilla $\alpha := \varphi, \beta := (\varphi \vee \psi)$)
4. $\vdash (\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi)$
(Modus Ponens, 2,3)
5. $\vdash (\mathcal{Q}x)\psi \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi)$
(symmetrinen argumentaatio ψ suhteen, 4)
6. $\vdash (\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi)$
($(A \rightarrow C)$ ja $(B \rightarrow C)$ antavat yhdessä $(A \vee B) \rightarrow C$, sovelletaan kohtiin 4 ja 5)

□

Lemma 2.37. Olkoon a, b ja c erillisiä muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa $\varphi \vee \psi$, ja olkoon $\theta(a) := ((a = b) \wedge \varphi) \vee ((a = c) \wedge \psi)$. Tällöin $\vdash \varphi \rightarrow \exists(b)\theta(b)$.

Todistus.

1. $\vdash (b = b)$
(aksiooma (F4a))
2. $\vdash \varphi \rightarrow ((b = b) \rightarrow ((b = b) \wedge \varphi))$
(tautologia $(A \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge A)))$ valinnoilla $A := \varphi, B := (b = b)$)
3. $\varphi \vdash (b = b) \rightarrow ((b = b) \wedge \varphi)$
(Modus Ponens kohdasta 2 ja oletuksesta φ , todistuvuuden monotonisuus)
4. $\{\varphi\} \vdash (b = b) \wedge \varphi$
(Modus Ponens 1,3)
5. $\varphi \vdash ((b = b) \wedge \varphi) \rightarrow (((b = b) \wedge \varphi) \vee ((b = c) \wedge \psi))$
(tautologia $A \rightarrow (A \vee B)$
valinnoilla $A := ((b = b) \wedge \varphi), B := ((b = c) \wedge \psi)$)
6. $\varphi \vdash ((b = b) \wedge \varphi) \vee ((b = c) \wedge \psi)$ eli $\theta(b)$
(Modus Ponens 4,5)
7. $\varphi \vdash \exists(b)\theta(b)$
(F3), (F1), (P3), 6, eksistenssi-introduktio 1.1.5)
8. $\vdash \varphi \rightarrow \exists(b)\theta(b)$
(deduktiolemma, 7)

□

Huomautus 2.38. Huomaa, että ilmaisussa $\theta(x) := ((x = b) \wedge \varphi) \vee ((x = c) \wedge \psi)$ juuri x on muuttuja, ja näin tilanteessa $\theta(b)$ voi ilmentyä sekaannusta jos ei ole tarkkana, sillä jälkimmäinen b ei ole muuttuja mutta ensimmäinen on.

Lemma 2.39. Olkoon a, b ja c erillisiä muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa $\varphi(x) \vee \psi(x)$, ja olkoon $\theta(x, a) = (((a = b) \wedge \varphi(x)) \vee ((a = c) \wedge \psi(x)))$. Tällöin $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)$.

Todistus.

1. $\vdash \varphi \rightarrow \exists(a)\theta(x, a)$
(Lemma 2.37)
2. $\vdash \psi \rightarrow \exists(a)\theta(x, a)$
(Lemma 2.37, symmetrinen argumentti kohdan 1 kanssa)
3. $\vdash (\varphi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)) \rightarrow ((\psi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)) \wedge (\psi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a))))$
(tautologia $X \rightarrow (Y \rightarrow (X \wedge Y))$)
valinnoilla $X := (\varphi \rightarrow \chi)$ ja $Y := (\psi \rightarrow \chi)$ ja $\chi := (\exists a)\theta(x, a)$
4. $\vdash (\psi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)) \wedge (\psi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)))$
(MP 1,3)
5. $\vdash (\varphi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)) \wedge (\psi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a))$
(MP 2,4)
6. $\vdash (\varphi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)) \wedge (\psi \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow (\exists a)\theta(x, a))$
(tautologia $((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)$)
valinnalla $\chi := (\exists a)\theta(x, a)$
7. $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\exists a)\theta(x, a)$
(MP 5,6)

□

Lemma 2.40. Olkoon a, b ja c erillisiä muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa $\varphi(x) \vee \psi(x)$, ja olkoon $\theta(x, a) = (((a = b) \wedge \varphi(x)) \vee ((a = c) \wedge \psi(x)))$. Tällöin $\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y)$.

Todistus.

1. $\vdash (\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\exists y)\theta(x, y)$
(lemma 2.39)
2. $\vdash (\forall x)((\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\exists y)\theta(x, y))$
(generalisaatio)
3. $\vdash (\forall x)((\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\exists y)\theta(x, y))$
 $\rightarrow ((\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y))$
(A2) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)\psi)$
valinnoilla $\varphi := (\varphi(x) \vee \psi(x))$ ja $\psi := (\exists y)\theta(x, y)$

$$4. \vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y)$$

(MP 2,3)

□

Lemma 2.41. Olkoon a, b ja c erillisiä muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa $\varphi(x) \vee \psi(x)$, ja olkoon $\theta(x, a) = (((a = b) \wedge \varphi(x)) \vee ((a = c) \wedge \psi(x)))$. Tällöin $\vdash \neg(\mathcal{Q}y)(\exists x)\theta(x, y)$.

Todistus.

1. $\vdash \theta(x, y) \rightarrow ((y = b) \vee (y = c))$
(disjunktion eliminaatio -tautologia $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R))$ valinnoilla $P := (y = b) \wedge \varphi(x)$, $Q := (y = c) \wedge \psi(x)$, $R := (y = b) \vee (y = c)$ ja hyödyntämällä konjunktioautologiaa muotoa $(P \wedge Q) \rightarrow P$)
2. $\vdash (\forall y)((\exists x)\theta(x, y) \rightarrow ((y = b) \vee (y = c)))$
(eksistenssi-introduktio kohdasta 1.1.5, generalisaatio)
3. $\vdash (\forall y)((\exists x)\theta(x, y) \rightarrow ((y = b) \vee (y = c)))$
 $\rightarrow ((\mathcal{Q}y)(\exists x)\theta(x, y) \rightarrow (\mathcal{Q}y)((y = b) \vee (y = c)))$
(A2) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)\psi)$
valinnoilla $\varphi := (\exists x)\theta(x, y)$ ja $\psi := ((y = b) \vee (y = c))$)
4. $\vdash (\mathcal{Q}y)(\exists x)\theta(x, y) \rightarrow \mathcal{Q}y((y = b) \vee (y = c))$
(Modus Ponens 2,3)
5. $\vdash \neg(\mathcal{Q}y)((y = b) \vee (y = c))$
(A1) valinnoilla $x := y$, $y := b$ ja $z := c$)
6. $\vdash \neg(\mathcal{Q}y)((y = b) \vee (y = c)) \rightarrow \neg(\mathcal{Q}y)(\exists x)\theta(x, y)$
(kontrapositio 4)
7. $\vdash \neg(\mathcal{Q}y)(\exists x)\theta(x, y)$
(MP 5,6)

□

Lemma 2.42. Olkoon a, b ja c erillisiä muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa $\varphi(x) \vee \psi(x)$, ja olkoon $\theta(x, a) = (((a = b) \wedge \varphi(x)) \vee ((a = c) \wedge \psi(x)))$. Tällöin $\vdash (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y) \rightarrow (\exists y)(\mathcal{Q}x)\theta(x, y)$.

Todistus.

1. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y) \rightarrow ((\exists y)(\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \vee (\mathcal{Q}y)(\exists x)\theta(x, y)).$
 $((A4) \vdash (\mathcal{Q}x)(\exists y)\varphi \rightarrow ((\exists y)(\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}y)(\exists x)\varphi)$
 valinnalla $\varphi := \theta(x, y)$
2. $\vdash \neg(\mathcal{Q}y)(\exists x)\theta(x, y)$
 (lemma 2.41)
3. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y) \rightarrow (\exists y)(\mathcal{Q}x)\theta(x, y)$
 (Jos $P \rightarrow (A \vee B)$ ja $\neg B$, voidaan päätellä $P \rightarrow A$, valinnoilla $P :=$
 $(\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y)$, $A := (\exists y)(\mathcal{Q}x)\theta(x, y)$, $B := (\mathcal{Q}y)(\exists x)\theta(x, y)$)

□

Tämä tulos osoittaa, että jos kaikki muuttujat universumissa ovat yksi ja sama, $(\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$ ei päde.

Lemma 2.43. Olkoon v_1 ja v_2 erillisiä muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa $\varphi(x) \vee \psi(x)$. Tällöin $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash \neg(\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$.

Todistus.

1. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash (\forall x)(x = v_1)$
 (instanssi oletuskaavasta)
2. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash (\forall x)((x = v_1) \rightarrow ((x = v_1) \vee (x = v_2)))$
 (tautologian $A \rightarrow (A \vee B)$, instanssi sitten (R2))
3. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash (\forall x)((x = v_1) \vee (x = v_2))$
 (MP 1,2)
4. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash (\forall x)((\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow ((x = v_1) \vee (x = v_2)))$
 (tautologia $(C \rightarrow (D \rightarrow C))$ valinnoilla $C := ((x = v_1) \vee (x = v_2))$,
 $D := (\varphi(x) \vee \psi(x))$, Käytetään kohdan 3 kanssa (F1) ja sitten MP, (R2))
5. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash (\forall x)((\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow ((x = v_1) \vee (x = v_2)))$
 $\rightarrow ((\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\mathcal{Q}x)((x = v_1) \vee (x = v_2)))$
 ((A2) valinnoilla $\alpha := (\varphi(x) \vee \psi(x))$, $\beta := ((x = v_1) \vee (x = v_2))$)
6. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\mathcal{Q}x)((x = v_1) \vee (x = v_2))$
 (MP 4,5)
7. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash \neg(\mathcal{Q}x)((x = v_1) \vee (x = v_2)) \rightarrow \neg(\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$
 (Kontrapositio 6)

8. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash \neg(\mathcal{Q}x)((x = v_1) \vee (x = v_2))$
 ((A1) perusmuoto)

9. $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash \neg(\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$
 (MP 7,8)

□

Lemma 2.44. Olkoon a , b ja c erillisiä muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa $\varphi(x) \vee \psi(x)$, ja olkoon $\theta(x, a) = (((a = b) \wedge \varphi(x)) \vee ((a = c) \wedge \psi(x)))$. Tällöin $\neg(b = c) \vdash ((\mathcal{Q}x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x)))$.

Todistus. Uudelleennimetään $a = y$. Toinen suunta (taaksepäin) seuraa lemmasta 2.36. Todistetaan jäljelle jäävä suunta, eli $(\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi)$.

Osa 1:

1. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi)$
 (Oletus)

2. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y)$
 (Lemma 2.40 ja oletusten monotonisuus)

3. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y)$
 (Modus Ponens 1,2)

4. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)(\exists y)\theta(x, y) \rightarrow (\exists y)(\mathcal{Q}x)\theta(x, y)$
 (Lemma 2.42)

5. $\neg(b = c) \vdash (\exists y)(\mathcal{Q}x)\theta(x, y)$
 (Modus Ponens 3,4)

6. $\neg(b = c) \vdash \theta(x, y) \rightarrow ((y = b) \vee (y = c))$
 (θ määritelmästä)

7. $\neg(b = c) \vdash (\forall x)(\theta(x, y) \rightarrow ((y = b) \vee (y = c)))$
 (Generalisaatio, 6)

8. $\neg(b = c) \vdash (\forall x)(\theta(x, y) \rightarrow ((y = b) \vee (y = c)))$
 $\rightarrow ((\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow (\mathcal{Q}x)((y = b) \vee (y = c)))$
 ((A2) valinnoilla $\alpha(x) := \theta(x, y)$ ja $\beta(x) := ((y = b) \vee (y = c))$)

9. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow (\mathcal{Q}x)((y = b) \vee (y = c))$
 (Modus Ponens 7,8)

10. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)((y = b) \vee (y = c)) \rightarrow ((y = b) \vee (y = c))$
(Lemma 2.31 huomioiden että x ei ole vapaana kaavassa $((y = b) \vee (y = c))$)

11. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow ((y = b) \vee (y = c))$
($\vdash A \rightarrow B$ ja $\vdash B \rightarrow C$ mahdollistavat $\vdash A \rightarrow C$, 9,10)

Nyt joko $y = b$ tai $y = c$. Jos $y = b$, niin $(\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\varphi$.

Osa 2:

1. $\neg(b = c), y = b \vdash \theta(x, y) \rightarrow \theta(x, b)$
(F4b, MP)

2. $\neg(b = c), y = b \vdash \theta(x, y) \rightarrow ((b = b) \wedge \varphi(x)) \vee ((b = c) \wedge \psi(x))$
($\theta(x, b)$ määritelmä, 1, kompositio)

3. $\neg(b = c), y = b \vdash (((b = b) \wedge \varphi(x)) \vee ((b = c) \wedge \psi(x))) \rightarrow \varphi(x)$
(F4a, $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q) \rightarrow R)$ valinnoilla $P := ((b = b) \wedge \varphi)$,
 $Q := ((b = c) \wedge \psi)$, $R := \varphi$, $\neg(b = c)$ mahdollistaa $((b = c) \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ päättelyn
 $\vdash \neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ kautta kun $P := (b = c)$ ja $Q := \varphi(x)$)

4. $\neg(b = c), y = b \vdash \theta(x, y) \rightarrow \varphi(x)$
($\vdash A \rightarrow B$ ja $\vdash B \rightarrow C$ mahdollistavat $\vdash A \rightarrow C$, 2,3)

5. $\neg(b = c), y = b \vdash (\forall x)(\theta(x, y) \rightarrow \varphi(x))$
(Generalisaatio, 4)

6. $\neg(b = c), y = b \vdash ((\forall x)(\theta(x, y) \rightarrow \varphi(x))) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\varphi(x))$
((A2) valinnoilla $\alpha := \theta(x, y)$, $\beta := \varphi(x)$)

7. $\neg(b = c), y = b \vdash (\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\varphi(x)$
(Modus Ponens, 5,6)

8. $\neg(b = c), y = b \vdash (\mathcal{Q}x)\varphi(x) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x))$
($U \rightarrow (U \vee V)$ valinnoilla $U := (\mathcal{Q}x)\varphi(x)$, $V := (\mathcal{Q}x)\psi(x)$, johdon monotoni-
suus)

9. $\neg(b = c), y = b \vdash (\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee ((\mathcal{Q}x)\psi(x)))$
($\vdash A \rightarrow B$ ja $\vdash B \rightarrow C$ mahdollistavat $\vdash A \rightarrow C$, 7,8)

10. $\neg(b = c) \vdash (y = b) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x)))$
(Deduktiolemma oletukselle $y = b$, 9)

Tapaus $y = c$, josta seuraa $(\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow (\mathcal{Q}x)\psi(x)$, on symmetrinen, ja sitä ei johdeta erikseen. Seuraavaksi yhdistetään tapaukset. $T := (\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x))$.

Osa 3:

1. $\vdash ((y = b) \rightarrow T) \rightarrow (((y = c) \rightarrow T) \rightarrow (((y = b) \vee (y = c)) \rightarrow T))$
(Tautologia $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q) \rightarrow R)$
valinnoilla $P := (y = b)$, $Q := (y = c)$, $R := T$)
2. $\neg(b = c) \vdash (y = b) \rightarrow T$
(Aikaisempi symmetrinen päättely)
3. $\neg(b = c) \vdash ((y = b) \rightarrow T) \rightarrow (((y = c) \rightarrow T) \rightarrow (((y = b) \vee (y = c)) \rightarrow T))$
(Johdon monotonisuus, 1)
4. $\neg(b = c) \vdash ((y = c) \rightarrow T) \rightarrow (((y = b) \vee (y = c)) \rightarrow T)$ (Modus Ponens, 2,3)
5. $\neg(b = c) \vdash ((y = c) \rightarrow T)$
(Aikaisempi symmetrinen päättely, analogisesti saadaan tämä tulos.)
6. $\neg(b = c) \vdash (((y = b) \vee (y = c)) \rightarrow T)$
(Modus Ponens, 4,5)
7. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow T$
(Rivi 6 ja aikaisempi rivi 11)
8. $\neg(b = c) \vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
(tautologia; valinnoilla $A := (\mathcal{Q}x)\theta(x, y)$ ja $B := (\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x)$, Johdon monotonisuus)
9. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x))$
(Modus Ponens, 7 ja 8)
10. $\neg(b = c) \vdash (\exists y)(\mathcal{Q}x)\theta(x, y) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x))$
(Jos y ei ole vapaana kaavassa B ja $\vdash A(y) \rightarrow B$, niin $\vdash (\exists y)A(y) \rightarrow B$
valinnoilla $A(y) := (\mathcal{Q}x)\theta(x, y)$ ja $B := (\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x)$, 9)
11. $\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)\varphi(x) \vee (\mathcal{Q}x)\psi(x)$
(Modus Ponens, 5 (ensimmäisestä numeroinnista),10)

□

Lemma 2.45. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi)$.

Todistus. Lemman 2.43 mukaan $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2) \vdash \neg(\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi)$. Tilanne $(\forall v_1)(\forall v_2)(v_1 = v_2)$ vastaa siis $(b = c)$. $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ antaa (valinnoilla $P := (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi)$ ja $Q := ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi)$)

$$(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi).$$

Lemma 2.44 antaa tapauksen

$$\neg(b = c) \vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi).$$

Käytetään tautologiaa $(R \rightarrow T) \rightarrow ((\neg R \rightarrow T) \rightarrow T)$ valinnoilla $R := (b = c)$ ja $T := (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi)$ jotta saadaan

$$\vdash ((b = c) \rightarrow T) \rightarrow ((\neg(b = c) \rightarrow T) \rightarrow T).$$

Edellisten johtojen perusteella ja saaduista tapauksista erikseen deduktiiolemman 2.23 nojalla $\vdash (b = c) \rightarrow T$ ja $\vdash \neg(b = c) \rightarrow T$. Käytetään Modus Ponensia kaksi kertaa jotta saadaan $\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi)$. \square

Näiden aputulosten myötä voimme vihdoin esitellä Keislerin lemmaa 1.9. (iv) vastaavan tuloksen, joka on ekvivalentti ilmaisulle, että kahden numeroituvan joukon unioni on numeroituva.

Lemma 2.46.

$$\vdash (\mathcal{Q}x)(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \vee (\mathcal{Q}x)\psi).$$

Todistus. Lemmat 2.36 ja 2.45 antavat tuloksen. \square

On myös järkevää, että kun ylinumeroituvasta joukosta (esimerkiksi reaalityyppistä \mathbb{R}) poistetaan numeroituva joukko (esimerkiksi rationaaliluvut \mathbb{Q}), jäljelle jäävä joukko on edelleen ylinumeroituva (esimerkiksi irrationaaliluvut $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Seuraava lemma, joka vastaa Keislerin lemmän 1.9. kohtaa (v), sisältää tämän tuloksen.

Lemma 2.47.

$$\vdash ((\mathcal{Q}x)\varphi \wedge \neg(\mathcal{Q}x)\psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \neg\psi)).$$

Todistus.

1. $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge \neg\psi))$.
(propositiologiikan tautologia)
2. $\vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge \neg\psi)))$
(generalisaatio kohtaan 1)

3. $\vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge \neg\psi))) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\psi \vee (\varphi \wedge \neg\psi)))$
 ((A2) valinnoilla $\alpha := \varphi$ ja $\beta := (\psi \vee (\varphi \wedge \neg\psi))$)
4. $\vdash (\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)(\psi \vee (\varphi \wedge \neg\psi))$
 (Modus Ponens 2,3)
5. $\vdash (\mathcal{Q}x)(\psi \vee (\varphi \wedge \neg\psi)) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\psi \vee (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \neg\psi))$
 (lemma 2.46, suunta \rightarrow , valinnoilla $\alpha := \psi$, $\beta := (\varphi \wedge \neg\psi)$)
6. $\vdash ((\mathcal{Q}x)\varphi \wedge \neg(\mathcal{Q}x)\psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \neg\psi))$
 (Tautologia $((A \rightarrow (B \vee C)) \wedge A \wedge \neg B) \rightarrow C$
 valinnoilla $A := (\mathcal{Q}x)\varphi$, $B := (\mathcal{Q}x)\psi$, $C := (\mathcal{Q}x)(\varphi \wedge \neg\psi)$ kohtiin 4,5, oletuksesta $(A \wedge \neg B)$ saadaan A ja $\neg B$)

□

Huomautus 2.48. Näistä lemmoista jo nähdään, että \mathcal{Q} käyttäytyy kun tietynlainen eksistenssikvanttori.

3 Täydellisyystodistus

Tässä luvussa todistetaan logiikan $L(\mathcal{Q})$ täydellisyyslause seuraavassa muodossa:

Olkoon Σ joukko lauseita kielessä $L(\mathcal{Q})$. Tällöin joukolle Σ on olemassa standardimalli jos ja vain jos Σ on ristiriidaton kielessä $L(\mathcal{Q})$.

Väitteen toinen suunta seuraa lemmasta 2.21. Jäljellä oleva suunta on vaikeampi. Pitää siis osoittaa, että jos Σ on ristiriidaton kielessä $L(\mathcal{Q})$, niin lausejoukolla Σ on olemassa standardimalli. Todistus etenee kahdessa vaiheessa Keislerin esityksen mukaisesti. Ensimmäisessä vaiheessa todistetaan kolme lemmaa 3.2-3.14 hyödyntämällä Henkinin metodia¹⁹ (ks. [S11]) sellaisten heikkojen mallien rakentamisessa, joista tietyt tyypit välistäjetetään. Toisessa vaiheessa rakennetaan lausejoukolla Σ standardimalli tällaisista heikoista malleista. Tässä vaiheessa Keislerin esitystä hyödynnetään Tarski-Vaught-metodeja [S30] ja aikaisempaa julkaisua [S16]. Aksiomia 1 ja 4 tarvitaan vain toisessa vaiheessa.

3.1 Henkin-Orey-konstruktio

Määritelmä 3.1 (Joukko todistajia (Henkin [S11])). Olkoon Γ joukko lauseita kielessä $L(\mathcal{Q})$ ja C joukko vakioita kielessä L . Sanotaan, että C on *joukko todistajia* joukolle Γ jos ja vain jos jokaiselle muotoa $(\exists x)\varphi(x)$ olevalle lauseelle on olemassa $c \in C$ jolle

$$\Gamma \vdash (\exists x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(c).$$

Jotta voidaan varmistaa, että mille tahansa kielen $L(\mathcal{Q})$ ristiriidattomalle lausejoukolle Σ on olemassa standardimalli, tulee rakentaa ensin numeroituva heikko malli joka toteuttaa kaikki $L(\mathcal{Q})$ -aksiomat. Vasta tämän jälkeen voidaan edetä vaiheeseen, jossa osoitetaan vaaditun standardimallin olemassaolo. Seuraava lemma osoittaa juuri tämän vaaditun välivaiheen.

Lemma 3.2. Olkoon Γ maksimaalinen ristiriidaton joukko kielen $L(\mathcal{Q})$ lauseita, ja olkoon C joukko todistajia joukolle Γ . Tällöin joukolla Γ on heikko malli (\mathcal{M}, q) missä jokainen universumin A alkio on jonkin $c \in C$ tulkinta.

Todistus. Olkoon Γ_0 kaikkien kielen L lauseiden joukko, jotka sisältyvät joukkoon Γ , jolloin lemmasta 2.26 välittömästi seuraa, että Γ_0 on maksimaalinen ja ristiriidaton kielessä L . Lisäksi olkoon C joukko todistajia joukolle Γ_0 kielessä L . Henkinin [S11]

¹⁹Koska työssä käsitellään matematiikan kehityshistoriassa ilmeneviä termejä, tulee huomioida, että ne saivat vakiintuneen nimen vasta ensi-ilmentymisensä jälkeen.

mukaan tällöin joukolle Γ_0 on olemassa malli \mathcal{M} , jossa jokainen universumin A alkio on tulkinta jollekin $c \in C$. Olkoon \bar{c} tulkinta alkioille $c \in C$, jolloin $A = \{\bar{c} : c \in C\}$. Näin siis oletetaan Henkinin esityksen mukaisesti, että joukossa ei ole funktiosymboleja.

Seuraavaksi lähtökohtana olevasta mallista \mathcal{M} on saatava rakennettua joukon Γ heikko malli (\mathcal{M}, q) . Pelkkä \mathcal{M} on ensimmäisen kertaluvun Henkin-malli, joka toteuttaa kaikki L -lauseet joukossa Γ , mutta ei pysty käsittelemään \mathcal{Q} -kvanttorian. (\mathcal{M}, q) taas pystyy käsittelemään kokoelman q avulla lauseita $(\mathcal{Q}x)\varphi(x) \in \Gamma$.

Jokaiselle kielen $L(\mathcal{Q})$ kaavalle φ , jolla on vain yksi vapaa muuttuja, olkoon sen toteutumajoukko mallissa \mathcal{M}

$$S_\varphi := \{\bar{c} : c \in C \text{ ja } \Gamma \vdash \varphi(c)\}.$$

Seuraavaksi määritellään

$$q = \{S_\varphi : \text{kaavalla } \varphi \text{ on vain yksi vapaa muuttuja, esimerkiksi } x, \text{ ja } \Gamma \vdash (\mathcal{Q}x)\varphi\}.$$

Täten q on joukko universumin A osajoukkoja. Osoitetaan rakenteellisella induktiolla kaavan φ suhteen, että kaikille lauseille φ kielessä $L(\mathcal{Q})$

$$(1) (\mathcal{M}, q) \models \varphi \text{ jos ja vain jos } \Gamma \vdash \varphi.$$

Jos φ on atomilause, niin (1) pätee, sillä φ sisältyy kieleen L . Oletetaan $\Gamma \vdash (\exists x)\psi(x)$. Valitaan todistaja $c \in C$ jolle pätee $\Gamma \vdash (\exists x)\psi(x) \rightarrow \psi(c)$. Modus Ponensia käyttämällä saadaan $\Gamma \vdash \psi(c)$. Jos oletetaan $(\mathcal{M}, q) \models (\exists x)\psi(x)$, niin on olemassa $a \in A$ jolla toteutuu $(\mathcal{M}, q) \models \psi[a]$. Valitaan $c \in C$ jolle $\bar{c} = a$. Tästä seuraa, että $(\mathcal{M}, q) \models \psi(c)$. Induktio-oletuksesta seuraa, että $\Gamma \vdash \psi(c)$, ja näin $\Gamma \vdash (\exists x)\psi(x)$.

Olkoon $\varphi = (\mathcal{Q}x)\psi(x)$ ja oletetaan, että (1) pätee kaikille lauseille $\psi(c)$, $c \in C$. Tällöin induktio-oletuksen mukaan joukko S_ψ voidaan ilmaista aikaisemman *syntaktisen* määritelmän lisäksi *semanttisesti* eri muodoissa näin:

$$(2) S_\psi = \{\bar{c} : \Gamma \vdash \psi(c)\} = \{\bar{c} : (\mathcal{M}, q) \models \psi(c)\} = \{\bar{c} : (\mathcal{M}, q) \models \psi[\bar{c}]\},$$

lemman 2.8 mukaan. Jos $\Gamma \vdash (\mathcal{Q}x)\psi$, niin $S_\psi \in q$ pätee joukon q määritelmän mukaan, joten $(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}x)\psi$ kohdan (2) mukaan.

Oletetaan, että $(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}x)\psi$. Silloin $S_\psi \in q$ kohdan (2) mukaan. Joukon q määritelmän mukaan on olemassa $\theta(y)$ missä $S_\psi = S_\theta$ ja $\Gamma \vdash (\mathcal{Q}y)\theta(y)$. Kohdan (2) ja Lemman 2.8 mukaan kaikille $c \in C$

$$\text{Jos } \bar{c} \in S_\psi, \text{ niin } \Gamma \vdash \psi(c),$$

ja sama pätee kaavalle θ . Näin ollen

$$\Gamma \vdash \psi(c) \text{ jos ja vain jos } \Gamma \vdash \theta(c) \text{ kaikille } c \in C.$$

Täten lemmän 2.26 antaman päättelyn sulkeuman, propositiologiikan tautologioiden $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$, joka määrittelee ekvivalenssin, ja Modus Ponensin mahdollistavan $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$ avulla

$$\Gamma \vdash \psi(c) \leftrightarrow \theta(c) \text{ kaikilla } c \in C.$$

Olkoon u muuttuja, joka ei esiinny kaavoissa ψ ja θ . Koska C on joukko todistajia joukolle Γ , saadaan generalisaation avulla, että

$$\Gamma \vdash (\forall u)(\psi(u) \leftrightarrow \theta(u)).$$

(A2) on muotoa $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\varphi \rightarrow (\mathcal{Q}x)\psi)$. Sen avulla ekvivalenssin molemmat suunnat saadaan Modus Ponensin ja edellä mainittujen tautologioiden myötä muotoon

$$\Gamma \vdash \mathcal{Q}(u)\psi(u) \leftrightarrow (\mathcal{Q}u)\theta(u).$$

(A3) on muotoa $(\mathcal{Q}x)\varphi(x) \leftrightarrow (\mathcal{Q}y)\varphi(y)$. Sitä hyödyntämällä voidaan päätellä

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash (\mathcal{Q}x)\psi(x) &\leftrightarrow (\mathcal{Q}u)\psi(u), \\ \Gamma \vdash (\mathcal{Q}y)\theta(y) &\leftrightarrow (\mathcal{Q}u)\theta(u). \end{aligned}$$

Näistä tiedoista, propositiologiikan tautologiasta

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow D) \rightarrow ((A \leftrightarrow C) \leftrightarrow (B \leftrightarrow D))$$

valinnoilla $A := (\mathcal{Q}x)\psi(x)$, $B := (\mathcal{Q}u)\psi(u)$, $C := (\mathcal{Q}u)\theta(u)$ ja $D := (\mathcal{Q}y)\theta(y)$ ja MP käyttämisestä seuraa

$$\Gamma \vdash (\mathcal{Q}x)\psi(x) \leftrightarrow (\mathcal{Q}y)\theta(y).$$

Koska $\Gamma \vdash (\mathcal{Q}y)\theta(y)$, seuraa $\Gamma \vdash (\mathcal{Q}x)\psi(x)$. Tämä osoittaa, että $(\mathcal{Q}x)\psi(x) = \varphi$ toteuttaa ehdon (1), mistä taas seuraa, että (\mathcal{M}, q) on malli joukolle Γ . \square

Varsinaisen standardimallilla toimivan täydellisyyslauseen todistus vaatii heikolla mallilla toimivan heikon täydellisyyslauseen todistusta, sillä ilman sitä ei voida luoda Tarski-Vaught ketjua, jota tarvitaan myöhemmin siihen, että päästään heikosta mallista standardimalliin. Esitetään tämä tulos seuraavaksi.

Lemma 3.3 (Heikko täydellisyyslause). Olkoon Σ joukko kielen $L(\mathcal{Q})$ lauseita. Silloin Σ on ristiriidaton jos ja vain jos joukolle Σ on olemassa numeroituva heikko malli, jossa kaikki $L(\mathcal{Q})$ aksioomat pätevät.

Todistus. Todistus on käytännössä sama kuin Henkinin todistus täydellisyyslauseelle ensimmäisen kertaluvun logiikalle.²⁰ Ensin oletetaan, että Σ on ristiriidaton, jonka

²⁰Siinä missä Gödelin alkuperäinen todistus toimi numeroituville kielille, Henkinin todistus toimii ylinumeroituville kielille. [O8]

jälkeen laajennetaan kielestä L kieleen L^* lisäämällä numeroituva joukko C erillisiä vakioita eli todistajia. Lemman 2.27 myötä Σ on edelleen ristiriidaton kielessä $L(\mathcal{Q})$. Henkinin metodista (ja sen maksimaalisen laajennuksen konstruktioista) seuraa, että Σ voidaan laajentaa maksimaaliseksi ristiriidattomaksi joukoksi Γ . Täten Lemmasta 3.2 seuraa, että joukolla Γ on heikko malli (\mathcal{M}^*, q) jossa jokainen alkio on tulkinta jostain $c \in C$, ja koska C on numeroituva, \mathcal{M}^* on numeroituva. Koska Γ on maksimaalisen ristiriidaton kielessä $L^*(\mathcal{Q})$, kaikki kielen $L^*(\mathcal{Q})$ aksioomat kuuluvat joukkoon Γ , ja täten pätevät mallissa (\mathcal{M}^*, q) . Näin \mathcal{M} on \mathcal{M}^* reduktio kielelle L . Seuraa, että (\mathcal{M}, q) on vaadittu numeroituva joukon Σ heikko malli, joka toteuttaa kaikki $L(\mathcal{Q})$ aksioomat. Tulos toiseen suuntaan ilmenee lemmasta 2.20. \square

Huomautus 3.4. Lemman 3.3 tulos pätee myös ylinumeroituvalle L jos tehdään vaaditut muutokset sanojen "numeroituva" ja "ylinumeroituva" suhteen.

Seuraava lemma on luonnollinen rakenteellinen analogia vastaavalle tulokselle ensimmäisen kertaluvun logiikassa. Määritellään ensin hyödyllinen konsepti, joka on Kurt Gödelin ω -ristiriidattomuuden [O9]²¹ yleistys.

Määritelmä 3.5 (C -ristiriidattomuus, Henkin [S12]). Olkoon $C = \{v_i \in \text{Con} \mid i \in \mathbb{N}\}$ jokin kielen vakioiden joukko. Teoria T on C -ristiriidaton, jos ei ole olemassa kaavaa $\varphi(x)$, jolle kaikilla $i \in \mathbb{N}$, $T \vdash \varphi(v_i)$ ja $T \vdash (\exists x)\neg\varphi(x)$.

Määritelmä 3.6 (C -toteutuvuus, Henkin [S12]). Sanotaan, että malli \mathcal{M} C -toteuttaa teorian T , jos $\mathcal{M} \models T$ ja kaikille $c, d \in C$ ja $c \neq d$, $c^{\mathcal{M}} \neq d^{\mathcal{M}}$, eli mallissa \mathcal{M} kaikki joukon C vakiot saavat eri alkion arvokseen.

Oreyn [S26] ja Henkinin [S11] konstruktioit yhdistämällä saadaan seuraava lemma.

Lemma 3.7. Olkoon Σ ristiriidaton kaavajoukko kielessä $L(\mathcal{Q})$, ja C kieleen lisättyjen vakioiden joukko. Tällöin on olemassa C -toteutuva ja C -ristiriidaton heikko malli (\mathcal{M}, q) , joka on joukon Σ malli.

Todistus. Esitetään seuraavaksi mallin (\mathcal{M}, q) konstruktion idea, tarkat yksityiskohdat ohitetaan. Aivan kuten edellä, lisätään kieleen numeroituva joukko uusia vakiosymboleja Henkinin tyyliin

$$C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\},$$

ja muodostetaan laajennettu kieli $L^* = L \cup C$. Huomaa, että konstruoitavassa mallissa alkiojoukko on

²¹Gödel ei formaalisti määritellyt konseptia, vaan määritelmä on retrospektiivinen. Varsinainen määritelmä on helpompi ymmärtää Henkinin työstä.

$$A = \{c_j^M \mid j \in \mathbb{N}\},$$

eli jokainen mallin alkio on jonkin vakion tulkinta.

Konstruktio (Henkin + Orey). Kuten lemموjen 3.2 ja 3.3 todistuksissa, konstruoidaan jono

$$\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \dots$$

ristiriidattomia lausejoukkoja kielessä $L^*(\mathcal{Q})$ ja asetetaan lopuksi $\Sigma^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\Sigma_k)$.

Käytetään seuraavia merkintöjä:

- kaikkien suljettujen $L^*(\mathcal{Q})$ -lauseiden jono on $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$,
- kaikkien yhden vapaan muuttujan $L^*(\mathcal{Q})$ -kaavojen jono on $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$

Joukko Σ_{k+1} määritellään joukosta Σ_k seuraavasti:

1. Maksimaalisuusaskel. Lisätään joko θ_k tai $\neg\theta_k$ teoriaan, eli $\Sigma'_k = \Sigma_k \cup \{\theta_k\}$ jos se on ristiriidaton, muuten $\Sigma'_k = \Sigma_k \cup \{\neg\theta_k\}$.
2. Henkin-askel. Jos $(\exists x)\psi_l(x) \in \Sigma'_k$ jollekin $l \leq k$, valitaan uusi Henkin-vakio $d_{l,k} \in C$ (sellainen, jota ei ole aiemmin käytetty kyseisen eksistentiaalisen todistajana), ja lisätään lause

$$(\exists x)\psi_l(x) \rightarrow \psi_l(d_{l,k}),$$

sekä myös $\psi_l(d_{l,k})$ joukkoon Σ'_k .

3. Orey-ehto. Jos jossakin edellisistä lisäyksistä (θ_k tai $\psi_l(d_{l,k})$) syntyisi lause $c_r = c_s$ missä $r \neq s$, jätetään lause $c_r = c_s$ lisäämättä ja sen sijaan, jos joukko $\Sigma'_k \cup \{\neg(c_t = c_s)\}$ on ristiriidaton, niin lisätään $\neg(c_t = c_s)$ joukkoon Σ'_k . Näin varmistetaan, että C -toteutuvuuden injektiivisyysehto säilyy.

Asetetaan lopuksi $\Sigma_{k+1} = \Sigma'_k$.

Selvästi Σ^* on ristiriidaton teoria, ja maksimaalinen poislukien kaavat $(c_s = c_r)$, missä $r \neq s$, koska näiden liittäminen joukkoon Σ_k on estetty Orey-ehdolla. Itse asiassa, voidaan osoittaa, että lopullisessa joukossa Σ^* on mukana kaikki kaavat $\neg(c_r = c_s)$, missä $r \neq s$ (ks. [S26]). Lisäksi tiedetään, että jos $(\exists x)\psi(x) \in \Sigma^*$, niin on olemassa $c \in C$, jolle $\psi(c) \in \Sigma^*$.

Nyt lemموjen 3.2 ja 3.3 tapaan maksimaalinen teoria Σ^* antaa heikon mallin (\mathcal{M}, q) , ja Orey-ehdon mukaan sen universumi on

$$A = \{c^M \mid c \in C\},$$

ja funktio- ja relaatio-symbolit tulkitaan tavalliseen Henkin-tyyliin. Kuten lemmän 3.2 todistuksessa, nyt on voimassa ehto

$$(**) (\mathcal{M}, q) \models \psi(t) \Leftrightarrow \Sigma^* \vdash \psi(t),$$

kaikilla suljetuilla termeillä t . Tämä malli on ns. heikko Henkin-Orey malli. Koska $(\mathcal{M}, q) \models \Sigma^*$ ja $\Sigma \subset \Sigma^*$, niin $(\mathcal{M}, q) \models \Sigma$. \square

Määritelmä 3.8 (Tyyppi ([O11])). Tyyppi $p(x_1, \dots, x_n)$ teoriassa T on joukko kaavoja $\{\varphi_i(x_1, \dots, x_n)\}_{i \in I}$ joka on ristiriidaton T kanssa.

Määritelmä 3.9 (Tyypin toteutuminen). Olkoon T teoria ja $p(x_1, \dots, x_n)$ tyyppi. Sanotaan, että tyyppi p toteutuu teoriassa T , jos on olemassa malli $\mathcal{M} \models T$, ja n -tupla $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$, missä A on mallin universumi, jolle

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ kaikilla } \varphi \in p.$$

Lisäksi sanotaan, että tyyppi p toteutuu mallissa \mathcal{M} .

Huomaa, että jos edellisen määritelmän mukaista n -tuplaa ei ole teorian T mallissa \mathcal{M} , niin \mathcal{M} välistäjäyttää tyypin p kohdan 2.11 mukaisesti.

Määritelmä 3.10 (Eristäminen). Olkoon $p(x)$ tyyppi teoriassa T , jonka kaavoissa on vain yksi vapaa muuttuja (eli ns. 1-tyyppi). Sanotaan, että kaava $\sigma(x)$ eristää tyypin p (teoriassa T), jos

$$T \vdash \sigma(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ kaikilla } \varphi \in p,$$

ja lisäksi $T \cup \{(\exists x)\sigma(x)\}$ on ristiriidaton.

Eristetty tyyppi on siis kokonaan yhden kaavan $\sigma(x)$ määrittämä: jokainen tyypin kaava seuraa tästä eristäjästä.

Lemma 3.11. Olkoon T teoria kielessä $L(\mathcal{Q})$ ja $p(x)$ 1-tyyppi teoriassa T . Oletetaan, että $p(x)$ on eristetty kaavalla $\sigma(x)$. Tällöin $p(x)$ ei ole välistäjäytettävä missään joukon T heikossa Henkin-Orey-mallissa.

Todistus. Koska $p(x)$ on eristetty kaavalla $\sigma(x)$, oletuksen mukaan

$$T \vdash \sigma(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ kaikilla } \varphi \in p,$$

ja lisäksi $T \cup \{(\exists x)\sigma(x)\}$ on ristiriidaton.

Olkoon T^* Henkin-Orey-menetelmällä lemmän 3.7 todistuksessa konstruoitu maksimaalinen ristiriidaton ja C -toteutuva teoria, jolle $T \subseteq T^*$. Koska $(\exists x)\sigma(x)$ on ristiriidaton joukon T kanssa ja T^* on maksimaalinen, pätee

$$(1^*) (\exists x)\sigma(x) \in T^*.$$

Henkin-laajennukseen kuuluvien todistajien takia on olemassa termi t (esimerkiksi Henkin-vakio c_σ), jolle

$$\sigma(t) \in T^*.$$

Olkoon (\mathcal{M}^*, q) lemmän 3.7 mukainen malli, johon kohdan $(**)$ mukaan

$$(\mathcal{M}^*, q) \models \alpha(s) \Leftrightarrow \alpha(s) \in T^*$$

lauseille α kielessä $L(\mathcal{Q})$.

Erityisesti tästä saadaan

$$(\mathcal{M}^*, q) \models \sigma(t^{M^*}).$$

Koska $T \vdash \sigma(x) \rightarrow \varphi(x)$ kaikilla $\varphi \in p$, niin lemmän 2.29 mukaan myös

$$T^* \vdash \sigma(t) \rightarrow \varphi(t) \text{ kaikilla } \varphi \in p.$$

Koska $\sigma(t) \in T^*$, Modus Ponensilla ja ehdon (1^*) perusteella seuraa, että

$$(\mathcal{M}^*, q) \models \varphi(t^{M^*}) \text{ kaikilla } \varphi \in p.$$

Näin ollen termi t^{M^*} toimii alkiona, jonka avulla tyyppi $p(x)$ toteutuu mallissa (\mathcal{M}^*, q) . Edellisen perusteella tyyppi $p(x)$ toteutuu kaikissa Henkin-Orey heikoissa malleissa, eli sitä ei väliinjätetä mistään kyseisistä malleista. \square

Eristetyt tyypit siis toteutuvat kaikissa teorian malleissa, eikä niitä voida jättää välistä. Esitetään seuraavaksi Keislerin lemma 2.4 hieman muunnellussa muodossa.

Lemma 3.12. Olkoon L numeroituva kieli, Γ teoria kielessä $L(\mathcal{Q})$ ja olkoon $(\Sigma_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jono yhden vapaan muuttujan $L(\mathcal{Q})$ -tyyppejä, jotka eivät ole eristettävissä teoriassa Γ . Tällöin on olemassa heikko $L(\mathcal{Q})$ -malli (\mathcal{M}, q) siten, että $(\mathcal{M}, q) \models \Gamma$ ja (\mathcal{M}, q) jättää välistä jokaisen tyyppin Σ_n , eli kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $a \in A$

$$(\mathcal{M}, q) \models \varphi(a) \text{ ei ole voimassa kaikilla } \varphi(x) \in \Sigma_n.$$

Todistus. Oletuksen mukaan tyypit Σ_n eivät ole eristettävissä teoriassa Γ , eli ei ole olemassa kaavaa $\theta(x)$, jolle

$$\Gamma \cup \{(\exists x)\theta(x)\} \text{ on ristiriidaton ja } \Gamma \vdash \theta(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ kaikilla } \varphi \in \Sigma_n.$$

Heikko malli (\mathcal{M}, q) konstruoidaan käyttämällä lemmän 3.7 ideaa, mutta Orey-hdon jälkeen lisätään ns. anti-eristysaskel. Lisätään siis kieleen numeroituva joukko uusia vakiosymboleja Henkinin tyyliin $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ ja muodostetaan laajennettu kieli $L^* = L \cup C$.

Koska tyyppi $\Sigma_n(x)$ on numeroituva kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin voidaan indeksoida tyyppien kaavat niin, että

$$\Sigma_n = \{\sigma_{n,i}(x) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Konstruktiossa käydään jokaisella kierroksella k läpi yksi kaava $\sigma_{n,i}(x) \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\Sigma_m)$ ja yksi muuttuja $c_j \in C$. Koska joukko \mathbb{N}^3 on numeroituva, on olemassa bijektio $e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$, jolle $e(k) = (n(k), i(k), j(k))$, ja kierroksella k kun konstruoidaan Γ_{k+1} käsitellään

$$\text{kaavaa } \sigma_{n(k),i(k)}(x) \in \Sigma_{n(k)} \text{ ja muuttujaa } c_{j(k)} \in C.$$

Kun k käy läpi kaikki luonnolliset luvut, niin konstruktiossa käydään läpi kaikkien tyyppien kaikki kaavat kaikilla muuttujilla.

Nyt, kuten lemmän 3.7 todistuksessa, konstruoidaan jono

$$\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots$$

ristiriidattomia lausejoukkoja kielessä $L^*(\mathcal{Q})$, missä Γ_k on määritelty ehtojen 1.-4. mukaisesti, ja ehto 4. on:

4. Anti-eristysaskel (kolmikolle $(n, i, j) = e(k)$). Asetetaan $(n, i, j) = e(k)$ ja tarkastellaan kaavaa $\sigma_{n,i}(x) \in \Sigma_n$ sekä vakiota $c_j \in C$. Jos $\Gamma'_k \cup \{\neg\sigma_{n,i}(c_j)\}$ on ristiriidaton, lisätään lause $\neg\sigma_{n,i}(c_j)$ teoriaan Γ'_k . Jos kyseinen joukko ei ole ristiriidaton, ei lisätä mitään.

Askeleissa 1.-4. on määritelty $\Gamma'_k = \Gamma_{k+1}$ ja asetetaan lopuksi $\Gamma^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\Gamma_k)$.

Selvästi Γ^* on maksimaalinen ristiriidaton teoria, missä on mukana kaikki kaavat $\neg(c_r = c_s)$ missä $r \neq s$ (ks. [S26]). Lisäksi tiedetään, että jos $(\exists x)\psi(x) \in \Gamma^*$, niin on olemassa $c \in C$, jolle $\psi(c) \in \Gamma^*$.

Kuten lemmän 3.7 todistuksessa, nyt on voimassa ehto

$$(**) (\mathcal{M}, q) \models \psi(t) \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash \psi(t),$$

kaikilla suljetuilla termeillä t . Tämä malli on heikko Henkin-Orey-malli, joka toteuttaa teorian Γ .

Osoitetaan vielä, että (\mathcal{M}, q) välistäjättää kaikki tyypit $\Sigma_n(x)$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja tarkastellaan tyyppiä $\Sigma_n(x)$. Heikko malli (\mathcal{M}, q) välistäjättää tyyppin Σ_n , jos ei ole alkioita $a \in A$, jolle $(\mathcal{M}, q) \models \varphi(a)$ kaikilla $\varphi \in \Sigma_n$. Tiedetään, että $a = c_j^{\mathcal{M}}$ kaikille $a \in A$. Osoitetaan, että kaikilla vakiolle c_j on olemassa i niin, että

$$\Gamma^* \vdash \neg\sigma_{n,i}(c_j).$$

Tehdään vastaoletus: on olemassa vakio c_j , jolle

$$\Gamma \not\vdash \neg\sigma_{n,i}(c_j)$$

kaikille i . Koska Γ^* on maksimaalinen ristiriidaton teoria, on siis kaikille i

$$(\text{Ehto } \Delta) \Gamma^* \vdash \sigma_{n,i}(c_j)$$

(jolloin ehdon (**)) mukaan $(\mathcal{M}, q) \models \sigma_{n,i}(c_j)$ kaikilla i , eli (\mathcal{M}, q) toteuttaa tyyppin $\Sigma_n(x)$). Osoitetaan, että nyt kaava $\theta(x) = (x = c_j)$ eristää tyyppin $\Sigma_n(x)$, mikä on ristiriita.

Ensinnäkin, joukko $\Gamma^* \vdash (\exists x)(x = c_j)$. Tämä seuraa ehdosta (**), koska $t = c_j^{\mathcal{M}}$ on mallin alkio, joka toteuttaa lauseen. Täten joukko $\Gamma^* \cup \{(\exists x)(x = c_j)\}$ on välttämättä ristiriidaton.

Jos substituutio-aksiomassa (F4b) korvataan lemmän 2.29 mukaisesti muuttuja y termillä c_j , saadaan, että kaikille i

$$(\text{Ehto } \epsilon) \vdash (x = c_j) \rightarrow (\sigma_{n,i}(x) \rightarrow \sigma_{n,i}(c_j)).$$

Propositiologiikan aksiomatiikassa on voimassa sääntö

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), C \vdash A \rightarrow C,$$

jonka avulla edellä saaduista ehdoista Δ ja ϵ saadaan, että

$$\Gamma^* \vdash (x = c_j) \rightarrow \sigma_{n,i}(c_j)$$

kaikilla i , eli kaava $(x = c_j)$ todella eristää tyyppin $\Sigma_n(x)$, joten päädyimme ristiriitaan.

Näin ollen heikko malli (\mathcal{M}, q) jättää välistä jokaisen tyyppin Σ_n . □

Keislerin täydellisyystodistuksen keskeinen ongelma liittyy lisättyyn kvanttoriin \mathcal{Q} . Jos maksimaaliseen C -ristiriidattomaan ja C -toteutuvaan Henkin-Orey-laaajennukseen T^* sisältyy lause

$$\neg(\mathcal{Q}x)\varphi(x),$$

niin jokaisesta teoriasta rakennettavassa mallissa tulee olla vain numeroituva määrä termejä, joille φ toteutuu. Tavanomainen kielen L mukainen Henkinin konstruktio voi kuitenkin tuottaa vahingossa uusia vakioita, jotka toteuttavat φ , ja näitä voi syntyä ylinumeroituvasti. Tämän vaaran välttämiseksi Keisler määrittelee *kriittiset tyypit*, jotka ovat muotoa

$$p_\varphi(x) = \{\varphi(x)\} \cup \{\neg(x = c_n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Jos kriittinen tyyppi toteutuu heikossa mallissa, niin mallissa voi olla ylinumeroituva määrä alkioita, jolle φ toteutuu. Siksi tarvitaan tietoa, että $\neg(\mathcal{Q}x)\varphi(x)$ sisältyy teoriaan T^* , niin kyseinen tyyppi voidaan jättää välistä.

Lemma 3.13. Olkoon Γ ristiriidaton teoria ja $p(x)$ tyyppi, jonka kaavoissa on yksi vapaa muuttuja. Jokaiselle kaavalle $\varphi(x)$, jos $\Gamma \cup \{(\exists x)\varphi(x)\}$ on ristiriidaton, niin on olemassa kaava $\sigma(x) \in p(x)$ jolla pätee, että

$$\Gamma \cup \{(\exists x)(\varphi(x) \wedge \neg\sigma(x))\}$$

on ristiriidaton.

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että $p(x)$ on eristetty kaavalla $\theta(x)$. Tällöin $\Gamma \cup \{(\exists x)\theta(x)\}$ on ristiriidaton, voidaan soveltaa väitteen ehtoa sille: on siis olemassa kaava $\sigma(x) \in p(x)$, jolle

$$\Gamma \cup \{(\exists x)(\theta(x) \wedge \neg\sigma(x))\}$$

on ristiriidaton. Nyt

$$\Gamma \vdash \theta(x) \rightarrow \sigma(x),$$

joten säännöllä (R2) saadaan

$$\Gamma \vdash (\forall x)(\theta(x) \rightarrow \sigma(x)),$$

ja koska propositiologiikassa on voimassa $P \vdash \neg\neg P$, niin

$$\Gamma \vdash \neg\neg(\forall x)(\theta(x) \rightarrow \sigma(x)),$$

joten aksioomalla (F3) saadaan

$$\Gamma \vdash \neg(\exists x)\neg(\theta(x) \rightarrow \sigma(x)).$$

Kun huomataan, että $(\exists x)(\theta(x) \wedge (\neg\sigma(x))) \equiv (\exists x)\neg(\theta(x) \rightarrow \sigma(x))$, niin huomataan, että joukko

$$\Gamma \cup \{(\exists x)(\theta(x) \wedge \neg\sigma(x))\}$$

ei voi olla ristiriidaton. Näin ollen $p(x)$ ei voi olla eristetty. \square

Esitetään seuraavaksi Keislerin lemma 2.4 alkuperäisessä muodossaan.

Lemma 3.14 (Tyyppien välistäjättämislause). Olkoon Σ teoria kielessä $L(\mathcal{Q})$, ja jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ olkoon $\Sigma_n(x_n)$ teoria kielessä $L(\mathcal{Q})$ (jossa vain x_n on vapaa). Olkoon Γ Henkin-konstruktion tuottama teoria joukolle Σ kielessä $L^*(\mathcal{Q})$. Oletetaan, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, ja jokaiselle kaavalle $\varphi(x_n)$ kielessä $L(\mathcal{Q})$ pätee, että jos $(\exists x_n)\varphi$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa, on olemassa $\sigma \in \Sigma_n$ missä $(\exists x_n)(\varphi \wedge \neg\sigma)$ on

ristiriidaton joukon Γ kanssa. Tällöin joukolle Γ on numeroituva heikko malli (\mathcal{M}, q) , joka välistäjättää jokaisen Σ_n .

Todistus. Seuraa lemmoista 3.12 ja 3.13. □

3.2 Alkeisketjut

Nyt kun lemموjen 3.2-3.14 toiminta ja heikkojen mallien rakentaminen ovat selkeää, voidaan edetä standardimallien rakentamiseen. Seuraava Keislerin käyttämä määritelmä on alun perin lähteestä [S30]. Esitetään se kolmessa osassa.

Määritelmä 3.15 (Alkeislaajennus). (\mathcal{B}, r) sanotaan olevan mallin (\mathcal{M}, q) *alkeislaajennus*, merkitään $(\mathcal{M}, q) \prec (\mathcal{B}, r)$, jos ja vain jos näiden mallien universumit A ja B ovat sisäkkäiset, eli $A \subseteq B$, ja kaikille kielen $L(\mathcal{Q})$ kaavoille $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ja kaikille $a_1, \dots, a_n \in A$ pätee, että $(\mathcal{M}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ jos ja vain jos $(\mathcal{B}, r) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Määritelmä 3.16 (Alkeisketju). Jonoa $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha)$, $\alpha < \gamma$ heikkoja malleja kutsutaan *alkeisketjeksi* jos ja vain jos $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha) \prec (\mathcal{M}_\beta, q_\beta)$ kaikille $\alpha < \beta < \gamma$.

Määritelmä 3.17 (Alkeisketjun unioni). *Alkeisketjun* $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha)$, $\alpha < \gamma$ *unioni* on heikko malli $(\mathcal{M}, q) = \cup_{\alpha < \gamma} (\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha)$ missä $\mathcal{M} = \cup_{\alpha < \gamma} (\mathcal{M}_\alpha)$ ja

$$q = \{S \subseteq A : \text{on olemassa sellainen } \beta < \gamma, \text{ että kaikilla } \alpha, \text{ joilla pätee} \\ \beta \leq \alpha < \gamma, \text{ pätee myös } (S \cap A_\alpha) \in q_\alpha\},$$

toisin sanoen q on se joukko kaikista unionin universumin A osajoukoista $S \subseteq A$, jolle pätee, että $S \cap A_\alpha$ on lopulta joukossa q_α .

Tässä kohdassa on luonnollista pohtia, mikä aikaisemmin kohdattu matemaattinen asia voisi antaa intuition alkeislaajennuksille, alkeisketjuille ja niiden unioneille. Joukko-opissa tietenkin on helppo ajatella sisältyvyysketjua $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$, mutta taas lineaarialgebrasta on hyvä muistaa, että esimerkiksi avaruuden S_1 ja aliavaruuden S_0 konseptissa ei riitä, että joukot sisältyvät toisiinsa $S_0 \subseteq S_1$, vaan on myös vaadittava, että sisältyvä joukko on oltava myös rakenteeltaan avaruus. Logiikassa alkeisketjujen vaatima lisäominaisuus on alkeislaajennuksen määritelmän toteutuminen, eli totuusarvon on säilyttävä alkeisketjussa alkeislaajennuksesta toiseen.

Seuraava lemma varmistaa, että alkeisketjujen unionit toimivat vaatimusten mukaisesti. Tämä lemma myös yleistää kielelle $L(\mathcal{Q})$ Tarski-Vaught alkeisketjutuloksen [S30, Theorem 1.10.] jossa todetaan, että jos $(M_i)_{i < \gamma}$ on alkeisketju, niin $\cup_{i < \gamma} (M_i)$ on jokaisen M_i alkeislaajennus.

3.3 Standardimallin rakentaminen

Lemma 3.18. Olkoon $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha)$, $\alpha < \gamma$, alkeisketju ja olkoon malli (\mathcal{M}, q) niiden unioni. Tällöin kaikille $\alpha < \gamma$ pätee $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha) \prec (\mathcal{M}, q)$.

Todistus. Todistus etenee rakenteellisella induktiolla kaavan $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ suhteen. Induktio perustuu seuraavaan väitteeseen:

- (1) Kaikille $\alpha < \gamma$ ja kaikille $a_1, \dots, a_n \in A_\alpha$,
 $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ jos ja vain jos $(\mathcal{M}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Induktioaskeleet atomikaavoille, konnektiiveille ja kvanttoreille kielessä L noudattavat lähteessä [S30] esitettyä todistusta. Yksityiskohdat esitetään ainoastaan sille tapaukselle, jolle φ on muotoa $(\mathcal{Q}x)\psi$ olettaen, että (1) pätee kaavalle ψ . Oletetaan, että $\alpha < \gamma$ ja $a_1, \dots, a_n \in A_\alpha$, ja olkoon

$$S = \{a \in A : (\mathcal{M}, q) \models \psi[a, a_1, \dots, a_n]\}.$$

Olkoon

$$(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}x)\psi[a_1, \dots, a_n].$$

Siten heikon mallin määritelmän mukaisesti $S \in q$, jolloin on olemassa β jolle $\alpha \leq \beta < \gamma$ ja $S \cap A_\beta \in q_\beta$, eli kyseisen ketjun heikon mallin $(\mathcal{M}_\beta, q_\beta)$ universumin A_β osajoukon $S \subseteq A$ vastaavaa osaa $S \cap A_\beta$ pidetään ylinumeroituvana. Koska (1) pätee kaavalle ψ ,

$$S \cap A_\beta = \{a \in A_\beta : (\mathcal{M}_\beta, q_\beta) \models \psi[a, a_1, \dots, a_n]\}.$$

Toisin sanoen, sijoitetaan induktio-oletuksen (1) antama ekvivalenssiehto joukon määritelmään. Kvanttorin \mathcal{Q} toteutumisrelaation määritelmästä ja tiedosta $S \cap A_\beta \in q_\beta$ voidaan päätellä, että

$$(\mathcal{M}_\beta, q_\beta) \models (\mathcal{Q}x)\psi[a_1, \dots, a_n], \text{ saadaan, että}$$

ja koska $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha) \prec (\mathcal{M}_\beta, q_\beta)$,

$$(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha) \models (\mathcal{Q}x)\psi[a_1, \dots, a_n].$$

Oletetaan, että $(\mathcal{M}, q) \models \neg(\mathcal{Q}x)\psi[a_1, \dots, a_n]$. Tällöin heikon mallin määritelmän mukaan edellä määritelty joukko $S \notin q$, joten on olemassa β , jolle $\alpha \leq \beta < \gamma$ ja $S \cap A_\beta \notin q_\beta$. Aikaisemman päättelyn mukaisesti seuraa

$$(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha) \models \neg(\mathcal{Q}x)\psi[a_1, \dots, a_n].$$

Täten (1) pätee myös tilanteessa $\varphi = (\mathcal{Q}x)\psi$. □

Huomautus 3.19. Kun käsitellään alkeislaajennuksia, mallia laajennetaan usein lisäämällä vakio kieleen L jokaista alkioita kohden. Kun malli \mathcal{M} on annettuna kielelle L , merkitään \mathcal{M}^* sitä mallia, joka saadaan lisäämällä vakio c_a kieleen L jokaista $a \in A$ kohden ja tulkiten c_a mallissa \mathcal{M}^* alkiona a . Lemmasta 2.8 seuraa välittömästi, että jos $(\mathcal{M}, q) \prec (\mathcal{B}, r)$ ja \mathcal{B}' saadaan alkuperäisestä \mathcal{B} lisäämällä vakio jokaista $a \in A$ kohden, niin $(\mathcal{M}^*, q) \prec (\mathcal{B}', r)$. Lisäksi, jos (\mathcal{B}', r) on jonkin täydellisen teorian (\mathcal{M}^*, q) malli, jonka malli myös (\mathcal{M}^*, q) on, ja jokaisella vakiolla on sama tulkinta mallissa \mathcal{B}' ja \mathcal{M}^* , niin (\mathcal{B}', r) on mallin (\mathcal{M}^*, q) alkeislaajennus.

Seuraava lemma osoittaa, että kun kieli L mallilla (\mathcal{M}, q) laajennetaan kieleksi L^* , jolla on malli (\mathcal{M}^*, q) lisäämällä uusi vakio c_a jokaista mallin \mathcal{M} alkioita a kohti, mikään aksioma ei lakkaa toteutumasta.

Lemma 3.20. Olkoon (\mathcal{M}, q) heikko malli kielelle $L(\mathcal{Q})$ ja olkoon kielen L laajennus vakioilla, eli L^* , mallin \mathcal{M}^* kieli. Jos (\mathcal{M}, q) toteuttaa kaikki $L(\mathcal{Q})$ aksioomat, niin (\mathcal{M}^*, q) toteuttaa kaikki kielen $L^*(\mathcal{Q})$ aksioomat.

Todistus. Olkoon φ mikä tahansa kielen $L^*(\mathcal{Q})$ aksioma. Olkoon c_{a_1}, \dots, c_{a_n} kaikki joukon $L^* \setminus L = L^* \cap \mathfrak{C}(L)$ vakiot, jotka esiintyvät kaavassa φ . Valitaan muuttujat v_1, \dots, v_n , jotka eivät esiinny kaavassa φ , ja muodostetaan ψ korvaamalla jokainen c_{a_m} esiintymä kaavassa φ muuttujalla v_m ($1 \leq m \leq n$). Muodostuu siis kaava

$$\psi(v_1, \dots, v_n) = \varphi[c_{a_1}/v_1, \dots, c_{a_n}/v_n].$$

Nähdään, että muodostunut kaava ψ on myös kielen $L(\mathcal{Q})$ aksioma, ja näin pätee mallissa (\mathcal{M}, q) , joten $\forall(v_1, \dots, v_n)\psi$ pätee mallissa (\mathcal{M}, q) . Koska rakenteellisia muutoksia ei ole tapahtunut, ja kieli L^* on vain laajennus vakioiden suhteen, seuraa, että

$$(\mathcal{M}^*, q) \models \psi[a_1, \dots, a_n],$$

ja lemmasta 2.8 seuraa, että φ toteutuu mallissa (\mathcal{M}^*, q) . □

Huomautus 3.21 (Aksiomista 1 ja 4). Seuraava lemma on ensimmäinen kohta, jossa käytetään aksiomia (A1) ja (A4) (tai kohtia 2.31-2.47)

Lemma 3.23 on Keislerin päälemma (engl. *main lemma*). Karkeasti selitettynä sen mukaan jokainen numeroituva heikko malli voidaan laajentaa niin, että haluttuun kaavalla määriteltyyn joukkoon joukossa q lisätään alkioita sillä ehdolla, että kaavalla määritellyt joukot, jotka eivät kuulu joukkoon q pysyvät samana. Näin saadaan kaavoille $(\mathcal{Q}x)\varphi(x)$ ylinumeroituvat joukot alkioita, jotka toteuttavat kaavan $\varphi(x)$.

Huomautus 3.22. Tässä kohtaa tulee havaita, että Keisler käyttää *implisiittisesti* monta eri toisiinsa liittyvää määritelmää työssään, vaikka niitä ei *eksplisiittisesti* määritellä eri asioiksi. Palautetaan mieleen aikaisempi kohta 2.5, jossa määritellään

$$(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}x)\varphi(x) \text{ jos ja vain jos } \{a \in A : (\mathcal{M}, q) \models \varphi[a]\} \in q.$$

On oltava tarkkana siitä, että kolme eri dikotomiaa ovat toiminnassa.

1. Ylinumeroituva vs. numeroituva (määritelty kohdassa 1.1.5).

Tämä on *joukko-opillinen ajatus*.

2. Standardimallissa kvanttorin \mathcal{Q} tulkinnan suhteen aidosti ylinumeroituvien osajoukkojen joukko on q vs. standardimallissa aidosti numeroituvat joukot jäävät q ulkopuolelle. Tämä on *metateoreettinen ajatus*.

3. \mathcal{Q} -suuri $((\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}x)\varphi(x))$ vs.

\mathcal{Q} -pieni $((\mathcal{M}, q) \models \neg(\mathcal{Q}x)\varphi(x))$.

Tämä on Keislerin *objektikielen semanttinen käsite*.

Lemma 3.23 (Päällema). Jokaisella numeroituvalla kaikkien $L(\mathcal{Q})$ aksioomat toteuttavalla heikolla mallilla on alkeislaajennus, jossa annettu \mathcal{Q} -suureksi luettu joukko saa uusia alkioita, ja annetut \mathcal{Q} -pieniksi lukeutuvat joukot eivät saa uusia alkioita. Ilmaistuna toisin, olkoon (\mathcal{M}, q) numeroituva heikko malli, jossa kaikki $L(\mathcal{Q})$ aksioomat pitävät, olkoon L^* mallin \mathcal{M}^* kieli, ja olkoon $\varphi(x)$ kielen $L^*(\mathcal{Q})$ kaava mille pätee

$$(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}x)\varphi(x).$$

Tällöin on olemassa numeroituva alkeislaajennus (\mathcal{B}, r) mallille (\mathcal{M}, q) missä:

1. Joillekin $b \in B \setminus A$ pätee $(\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b]$.

2. Jokaiselle kaavalle $\psi(y)$ kielessä $L^*(\mathcal{Q})$ jolle pätee $(\mathcal{M}^*, q) \models \neg(\mathcal{Q}y)\psi(y)$, toteutuu

$$\{a \in B : (\mathcal{B}^*, r) \models \psi[a]\} \subseteq A.$$

Todistus. Laajennetaan L^* kielesi L' lisäämällä uusi vakio c . Olkoon Γ seuraava lausejoukko kielessä $L'(\mathcal{Q})$:

(a) Kaikki $L^*(\mathcal{Q})$ lauseet ovat tosia mallissa (\mathcal{M}^*, q) ,

(b) $\varphi(c)$

(c) $\neg\psi(c)$, jokaisella $\psi(y)$ kielessä $L^*(\mathcal{Q})$ mille pätee $(\mathcal{M}^*, q) \models \neg(\mathcal{Q}y)\psi(y)$.

Näiden ehtojen tarkoitus on mahdollistaa se, että alkioista c tulee myöhemmin uusi alkio $b \in B \setminus A$ tulevassa laajennuksessa. Γ varmistaa, että kaikki sen mallit ovat alkeislaajennuksen suhteen sopivia, pakottaa vakiota c vastaavan alkion haluttuun \mathcal{Q} -suureen joukkoon, ja estää sitä toteuttamasta \mathcal{Q} -pieniksi luettuja kaavoja.

Tarkastellaan aluksi kielen $L'(\mathcal{Q})$ lauseen ristiriidattomuutta joukon Γ kanssa. Olkoon $\theta(y)$ kielen L^* kaava ja oletetaan, että muuttuja u ei esiinny kaavoissa $\theta(y)$ ja $\varphi(y)$.

Tehdään apuväite (1): lause $\theta(c)$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa, jos ja vain jos $(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}u)(\theta(u) \wedge \varphi(u))$. Oletetaan ensin, että $\theta(c)$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa ja tehdään vastaoletus, että

$$\neg(\mathcal{Q}u)(\theta(u) \wedge \varphi(u))$$

toteutuu mallissa (\mathcal{M}^*, q) . Tällöin $\neg(\theta(c) \wedge \varphi(c))$ on (rakenteensa vuoksi) tyyppiä (c) ja kuuluu täten joukkoon Γ . Koska $\neg(\theta(c) \wedge \varphi(c)) \equiv \neg\theta(c) \vee \neg\varphi(c) \equiv \varphi(c) \rightarrow \neg\theta(c)$, saadaan propositiologiikan täydellisyyslauseella, että

$$\neg(\theta(c) \wedge \varphi(c)) \vdash (\varphi(c) \rightarrow \neg\theta(c)).$$

Nyt $\neg(\theta(c) \wedge \varphi(c)) \in \Gamma$, ja myös $\varphi(c) \in \Gamma$, joten MP antaa näin ollen $\Gamma \vdash \neg\theta(c)$, joten $\theta(c)$ ei ole ristiriidaton joukon Γ kanssa. Päädyttiin siis ristiriitaan oletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä. Tämä todistaa ensimmäisen implikaation.

Seuraavaksi oletetaan, että $\theta(c)$ ei ole ristiriidaton joukon Γ kanssa. Deduktiiolemmasta 2.23 seuraa, että

$$\Gamma \vdash \neg\theta(c),$$

koska $\Gamma \vdash \theta(c) \rightarrow \perp = \neg\theta(c)$. Tällöin on olemassa äärellinen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, mille pätee

$$\Gamma_0 \vdash \neg\theta(c).$$

Olkoon Γ_1 kaikkien tyyppin (a) lauseiden joukko, ja olkoon $\neg\psi_1(c), \dots, \neg\psi_m(c)$ kaikki tyyppin (c) lauseet jotka sisältyvät joukkoon Γ_0 . Voidaan olettaa $m > 0$. Tällöin

$$\Gamma_1 \cup \{\varphi(c), \neg\psi_1(c), \dots, \neg\psi_m(c)\} \vdash \neg\theta(c).$$

Nyt deduktiiolemman mukaan

$$\Gamma_1 \vdash \varphi(c) \rightarrow (\neg\psi_1(c) \rightarrow (\dots \rightarrow (\neg(\psi_m(c) \rightarrow \neg\theta(c)) \dots)))$$

ja propositiologiikan mukaan

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \vdash \varphi(c) \rightarrow (\neg\psi_1(c) \rightarrow (\dots \rightarrow (\neg(\psi_m(c) \rightarrow \neg\theta(c)) \dots))) &\equiv \\ \neg\varphi(c) \vee \neg\theta(c) \vee \psi_1(c) \vee \dots \vee \psi_m(c) &\equiv \varphi(c) \wedge (\theta(c) \rightarrow (\psi_1(c) \vee \dots \vee \psi_m(c))), \end{aligned}$$

joten

$$\Gamma_1 \vdash (\varphi(c) \wedge \theta(c) \rightarrow (\psi_1(c) \vee \dots \vee \psi_m(c))).$$

Valitaan muuttuja u , joka ei esiinny oikealla olevassa lauseessa. Koska c ei esiinny joukossa Γ_1 , käyttämällä lemmaa 2.8,

$$\Gamma_1 \vdash (\varphi(u) \wedge \theta(u)) \rightarrow (\psi_1(u) \vee \dots \vee \psi_m(u)).$$

Täten

$$\Gamma_1 \vdash (\forall u)((\varphi(u) \wedge \theta(u)) \rightarrow (\psi_1(u) \vee \dots \vee \psi_m(u))).$$

Aksioomasta (A2) $((\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\alpha \rightarrow (\mathcal{Q}x)\beta))$ valinnoilla $\alpha := (\varphi(x) \wedge \theta(x))$, $\beta := (\psi_1(x) \vee \dots \vee \psi_m(x))$, $x := u$ ja MP seuraa

$$\Gamma_1 \vdash (\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge \theta(u)) \rightarrow (\mathcal{Q}u)(\psi_1(u) \vee \dots \vee \psi_m(u)).$$

Nyt aksiooman (A3) (muuttujan vaihto) mukaan, koska lauseet $\psi_i(c)$ ovat tyyppiä (c), ja Γ_1 määritelmästä seuraa, että

$$\Gamma_1 \vdash \neg(\mathcal{Q}u)(\psi_1(u)), 1 \leq i \leq m.$$

Käyttäen lemmaa 2.46 $(\mathcal{Q}x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \rightarrow ((\mathcal{Q}x)\alpha(x) \vee (\mathcal{Q}x)\beta(x)))$ iteroidusti ja aksioomaa (P3), saadaan, että

$$\Gamma_1 \vdash \neg(\mathcal{Q}u)(\psi_1(u) \vee \dots \vee \psi_m(u)).$$

Täten käyttäen aksioomaa (P3),

$$\Gamma_1 \vdash \neg(\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge \theta(u)).$$

(\mathcal{M}^*, q) on joukon Γ_1 malli joukon Γ_1 määritelmän mukaan. Lisäksi, lemman 3.20 mukaan, (\mathcal{M}^*, q) toteuttaa kaikki kielen $L^*(\mathcal{Q})$ aksioomat, ja täten lemman 2.20 mukaan

$$(\mathcal{M}^*, q) \models \neg(\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge \theta(u)).$$

Tämä todistaa väitteen (1).

Osoitetaan apuväitteen (1) avulla, että Γ on ristiriidaton. Tarkastellaan triviaalia validia kaavaa $\theta(c) := (c = c)$. Oletuksesta saadaan $(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}x)\varphi(x)$, ja täten aksioomasta (A3) (muuttujien vaihto)

$$(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}u)(\varphi(u)).$$

Tiedetään, että kaava $(\forall u)\varphi(u) \rightarrow (\varphi(u) \wedge (u = u))$ on validi ensimmäisen kertaluvun kaava, joten se toteutuu mallissa (\mathcal{M}, q) . Nyt käyttämällä aksioomaa (A2) muodossa $(\forall u)(\varphi(u) \rightarrow (\varphi(u) \wedge (u = u))) \rightarrow ((\mathcal{Q}u)\varphi(u) \rightarrow (\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge (u = u)))$ saadaan, että $(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}u)\varphi(u) \rightarrow (\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge (u = u))$, joten tiedon $(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}u)\varphi(u)$ avulla, voidaan päätellä, että

$$(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge (u = u)).$$

Apuväitteestä (1) seuraa, että lause $c = c$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa, ja täten Γ on itsessään ristiriidaton.

Seuraavaksi täytyy valmistella lemmän 3.14 käyttö. Koska joukko A on numeroituva, mallin (\mathcal{M}^*, q) kielessä on vain numeroituvan monta kaavaa. Järjestetään kaikki kaavat $\psi(y)$ kielessä $L^*(\mathcal{Q})$ joille $(\mathcal{M}^*, q) \models \neg(\mathcal{Q}y)\psi(y)$ ovat numeroituvassa listassa $\psi_0(y_0), \psi_1(y_1), \dots$ (Nämä ovat tarkalleen ne kaavat $\psi(y)$, joille $\psi(c)$ kuuluu joukkoon Γ ehdon (c) mukaan.) Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, olkoon Σ_n kaavajoukko

$$\Sigma_n = \{\psi_n(y_n)\} \cup \{\neg y_n = c_a : a \in A\}$$

kielelle $L^*(\mathcal{Q})$. Varmistetaan lemmän 3.14 oletusten lausejoukolle Γ ja kaavajoukoille $\Sigma_n, n \in \mathbb{N}$. On jo osoitettu, että Γ on ristiriidaton. Oletetaan, että $\theta(y_n, c)$ on kielen $L^*(\mathcal{Q})$ kaava jolle pätee, että $(\exists y_n)\theta(y_n, c)$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa.

Tulee osoittaa ehto (3): On olemassa $\sigma \in \Sigma_n$ mille $(\exists y_n)(\theta \wedge \neg\sigma)$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa. Apuväitteen (1) mukaan saadaan $(\mathcal{M}^*, q) \models \theta(\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge (\exists y_n)\theta(y_n, u))$.

Olkoon

$$X(u) := (\varphi(u) \wedge (\exists y_n)(\theta(y_n, u) \wedge \psi_n(y_n))) \text{ ja}$$

$$Y(u) := (\varphi(u) \wedge (\exists y_n)(\theta(y_n, u) \wedge \neg\psi_n(y_n))).$$

Lemmasta 2.46 ja aksioomasta (A2) (kun $x := u$, $\alpha(u) := (\varphi(u) \wedge (\exists y_n)\theta(y_n, u))$, $\beta := X(u) \vee Y(u)$) seuraa joko

$$(4) (\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}u)X(u) \text{ tai}$$

$$(5) (\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}u)Y(u).$$

Jos (5) on tosi, niin aputuloksesta (1) seuraa, että $(\exists y_n)(\theta(y_n, c) \wedge \neg\psi_n(y_n))$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa, ja koska $\psi_n(y_n) \in \Sigma_n$, (3) pitää paikkansa. Oletetaan sitten, että (4) pitää paikkansa. Muuttuja y_n ei ilmene vapaana kaavassa $\varphi(u)$. Merkitään $B(y_n, u) := (\theta(y_n, u) \wedge \psi_n(y_n))$, ja käytetään predikaattilogiikan validia kaavaa

$$(\forall(u))(\varphi(u) \wedge \exists(y_n)B(y_n, u)) \rightarrow (\exists y_n)(\varphi(u) \wedge B(y_n, u)).$$

Käytetään aksioomaa (A2) valinnoilla $x := u$, $\alpha(u) := (\varphi(u) \wedge \exists(y_n)B(y_n, u))$ ja $\beta(u) := (\exists y_n)(\varphi(u) \wedge B(y_n, u))$. MP edellisen kaavan, ja sen jälkeen kohdan (4) kanssa, antaa

$$(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}u)(\exists y_n)(\varphi(u) \wedge \theta(y_n, u) \wedge \psi_n(y_n)).$$

Nyt aksioomasta (A4) $((\mathcal{Q}x)(\exists y)\alpha \rightarrow (\exists y)(\mathcal{Q}x)\alpha \vee (\mathcal{Q}y)(\exists x)\alpha)$ valinnoilla $x := u$, $y := y_n$ ja $\alpha := (\varphi(u) \wedge \theta(y_n, u) \wedge \psi_n(y_n))$, seuraa joko

$$(6) (\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}y_n)(\exists u)(\varphi(u) \wedge \theta(y_n, u) \wedge \psi_n(y_n)), \text{ tai}$$

$$(7) (\mathcal{M}^*, q) \models (\exists y_n)(\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge \theta(y_n, u) \wedge \psi_n(y_n)).$$

Mutta

$$(\mathcal{M}^*, q) \models \neg(\mathcal{Q}y_n)\psi_n(y_n),$$

ja täten aksiomasta (A2) ja kontrapositiosta (P3 soveltaen jälkimmäiseen osaan) valinnoilla $x := y_n$, $\alpha(y_n) := (\varphi(u) \wedge \theta(y_n, u) \wedge \psi_n(y_n))$ ja $\beta(y_n) := \psi_n(y_n)$ seuraa, että (6) on mahdoton. Täten (7) pätee. Näin ollen joillekin $a \in A$

$$(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}u)(\varphi(u) \wedge \theta(c_a, u) \wedge \psi_n(c_a)).$$

Nyt aputuloksesta (1) seuraa, että $\theta(c_a, c) \wedge \psi_n(c_a)$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa, joten $\theta(c_a, c)$ on ristiriidaton joukon Γ kanssa. Saadaan, että

$$(\exists y_n)(\theta(y_n c) \wedge \neg(\neg(y_n = c_a)))$$

on ristiriidaton joukon Γ kanssa, ja koska $\neg(y_n = c_a) \in \Sigma_n$, ehto (3) on voimassa.

Ehto (3) on nyt varmistettu molemmissa tapauksissa, ja voidaan käyttää lemmaa 3.14 ja saada numeroituvaa heikko malli (\mathcal{B}', r) joukolle Γ , joka välistäjättää jokaisen tyyppin Σ_n , $n \in \mathbb{N}$. Kaikki mallissa (\mathcal{M}^*, q) toteutuvat lauseet kuuluvat joukkoon Γ , ja täten voidaan valita (\mathcal{B}', r) siten, että jokaisen vakion c_a tulkinta on alkio a . Voi siis olettaa yleisesti, että jokaiselle $a \in A$ vakio c_a tulkitaan joukossa \mathcal{B}' alkioksi a . Olkoon \mathcal{B} joukon \mathcal{B}' reduktio kielelle L . Koska (\mathcal{B}', r) toteuttaa kaikki lauseet, jotka ovat totta mallissa (\mathcal{M}^*, q) , saadaan $(\mathcal{M}, q) \prec (\mathcal{B}, r)$.

Jos b on vakion c tulkinta joukossa \mathcal{B}' , ja koska (\mathcal{B}', r) toteuttaa kaavan φ ,

$$(\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b].$$

Lisäksi aksiomasta (A1) ($y := c_a, z := c_a$) saadaan kaikille $a \in A$

$$(\mathcal{M}^*, q) \models \neg(\mathcal{Q}x)(x = c_a \vee x = c_a),$$

joten lause $\neg(c = c_a \vee c = c_a)$ on tyyppiä (c) ja kuuluu joukkoon Γ ja täten toteutuu mallissa (\mathcal{B}', r) . Näin ollen $b \neq a$ kaikille $a \in A$, joten $b \in B \setminus A$. Tämä osoittaa, että (\mathcal{B}, r) toteuttaa väitteen kohdan (i).

Osoitetaan vielä kohta (ii), olkoon $\psi(y)$ mikä tahansa kielen $L^*(\mathcal{Q})$ kaava, jolle on voimassa

$$(\mathcal{M}^*, q) \models \neg(\mathcal{Q}x)\psi(y).$$

Siten $\psi(y)$ on $\psi_n(y_n)$ jollekin $n \in \mathbb{N}$. Kohta (ii) seuraa nyt siitä, että (\mathcal{B}', r) välistäjättää Σ_n . □

Seuraava lemma iteroi päälemman 3.23 tulosta numeroituvan monta kertaa osoittaakseen, että ylinumeroituvuus mallintuu aksiomien toteuttavien numeroituvien heikkojen mallien alkeisketjujen unioneille. Aina kun heikko malli määrittää joukon ylinumeroituvaksi, laajennus lisää vain uuden alkion todistamaan tätä faktaa.

Lemma 3.24. Olkoon (\mathcal{M}, q) numeroituva heikko malli, jossa kaikki $L(\mathcal{Q})$ aksioomat pitävät, ja olkoon L^* mallin \mathcal{M}^* kieli. Tällöin mallilla (\mathcal{M}, q) on numeroituva alkeislaajennus (\mathcal{B}, r) missä kaikille kielen $L^*(\mathcal{Q})$ kaavoille $\varphi(x)$ pätee

$$(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}x)\varphi(x) \text{ jos ja vain jos on olemassa } b \in B \setminus A, \text{ jolle } (\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b].$$

Todistus. Käydään ensin triviaali tapaus, jossa $(\mathcal{M}^*, q) \models \neg(\mathcal{Q}x)(x = x)$, eli alkoiden x määrä on mallin mukaan numeroituva. Tässä tapauksessa ei ole kaavoja $\varphi(x)$, joille $(\mathcal{M}^*, q) \models (\mathcal{Q}x)\varphi(x)$ johtuen aksiooman (A2) antamasta monotonisuudesta, josta seuraisi, että jos $(\mathcal{Q}x)\varphi(x)$, niin $(\mathcal{Q}x)(x = x)$. Voidaan siis valita $(\mathcal{B}, r) = (\mathcal{M}, q)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $(\mathcal{M}, q) \models (\mathcal{Q}x)(x = x)$. Koska joukko A on numeroituva, voimme järjestää kaikki kaavat $\varphi(x)$ kielelle $L^*(\mathcal{Q})$, mille $(\mathcal{Q}x)\varphi(x)$ pitää mallissa (\mathcal{M}^*, q) , numeroituvassa listassa $\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \dots$. Käyttämällä lemmaa 3.23 numeroituvan monta kertaa saadaan ω -pituisen alkeisketju

$$(\mathcal{M}_0, q_0) \prec (\mathcal{M}_1, q_1) \prec (\mathcal{M}_2, q_2) \prec \dots$$

mille pätee:

1. $(\mathcal{M}_0, q_0) = (\mathcal{M}, q)$, eli ketju alkaa halutusta mallista,
2. On olemassa $b_n \in A_{n+1} \setminus A_n$ mille $(\mathcal{M}_{n+1}^*, q_{n+1}) \models \varphi_n[b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ pätee, eli lemmän 3.23 ehto,
3. Kaikille kaavoille $\psi(y)$ kielessä $L^*(\mathcal{Q})$ mille $(\mathcal{M}_n^*, q_n) \models \neg(\mathcal{Q}y)\psi(y)$, ja kaikille $n \in \mathbb{N}$, $\{a \in A_{n+1} : (\mathcal{M}_{n+1}^*, q_{n+1}) \models \psi[a]\} \subseteq A_n$, eli joukot jotka malli lukee numeroituvana eivät saa uusia todistajia joukosta $A_{n+1} \setminus A_n$.

Olkoon $(\mathcal{B}, r) = \cup_{n < \omega} (\mathcal{M}_n, q_n)$. Lemman 3.18 avulla tiedetään, että (\mathcal{B}, r) on jokaisen (\mathcal{M}_n, q_n) alkeislaajennus, ja erityisesti $(\mathcal{M}, q) = (\mathcal{M}_0, q_0)$ alkeislaajennus. Tästä ja kohdista (1)-(3) seuraa, että (\mathcal{B}, r) toteuttaa lemmän väitteen. \square

Nyt kaikki tarvittava on valmiina täydellisyyslauseen todistamiseen. Käytetään alla standardimerkintää ω_1 ensimmäiselle ylinumeroituvalla ordinaaliluvulle.

Lause 3.25 (Täydellisyyslause). Olkoon Σ joukko lauseita kielessä $L(\mathcal{Q})$. Tällöin joukolle Σ on olemassa standardimalli jos ja vain jos Σ on ristiriidaton kielessä $L(\mathcal{Q})$.

Todistus. Toinen suunta todistuksesta, eli terveys, on 2.21. Todistetaan siis nyt jäljelle jäävä suunta. Oletetaan, että Σ on ristiriidaton lausejoukko kielessä $L(\mathcal{Q})$. Heikon täydellisyyslauseen 3.3 kautta tiedetään, että joukolla Σ on numeroituva heikko malli (\mathcal{M}_0, q_0) , jossa kaikki $L(\mathcal{Q})$ aksioomat ovat voimassa. Nyt iteroimalla lemmaa 3.24 ω_1 kertaa, ja käyttäen lemmaa 3.18 rajavaiheissa, saadaan alkeisketju

$$(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha), \alpha < \omega_1,$$

numeroituvia heikkoja malleja, joilla seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) Jos α on rajaordinaali²², $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha) = \cup_{\beta < \alpha} (\mathcal{M}_\beta, q_\beta)$.

(2) Kaikille seuraajaordinaaleille $\alpha < \omega_1$ ja kaikille kaavoille φ mallin $(\mathcal{M}_\alpha^*, q_\alpha)$ kielelle on voimassa, että

$$(\mathcal{M}_\alpha^*, q_\alpha) \models (\mathcal{Q}x)\varphi(x) \text{ jos ja vain jos jollekin } a \in A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha, (\mathcal{M}_{\alpha+1}^*, q_{\alpha+1}) \models \varphi[a].$$

Olkoon $\mathcal{B} = \cup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{M}_\alpha$ alkeisketjujen \mathcal{M}_α unioni. Osoitetaan, että \mathcal{B} on joukon Σ standardimalli. Tarkastellaan aluksi heikkoa mallia $(\mathcal{B}, r) = \cup_{\alpha < \omega_1} (\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha)$. Lemmasta 3.18 saadaan $(\mathcal{M}_\beta, q_\beta) \prec (\mathcal{B}, r)$ kaikille $\beta < \omega_1$, missä (\mathcal{B}, r) on joukon Σ heikko malli. Nyt siis heikko malli (\mathcal{B}, r)

1. on kielen $L^*(\mathcal{Q})$ struktuuri,
2. toteuttaa kaikki kielen $L(\mathcal{Q})$ aksioomat,
3. toteuttaa kaikki joukon Σ lauseet,
4. on suljettu alkeisketjun laajennuksien suhteen,
5. sisältää kaikki todistajat joiden tulee sisältyä struktuurin universumiin jos $(\mathcal{Q}x)\varphi(x)$ luettiin todeksi jossain välivaiheessa.

Näin siis riittää todistaa, että kaikille kielen $L(\mathcal{Q})$ kaavoille $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ja kaikille $b_1, \dots, b_n \in B$ pätee $(\mathcal{B}, r) \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$ jos ja vain jos $\mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$.

Edellinen väite todistetaan φ rakenteellisella induktiolla. Väite pätee triviaalisti atomikaavoille φ . Jos väite on voimassa kaavoille ψ ja θ , niin on voimassa $(\neg\psi)$, $\psi \wedge \theta$, ja $(\exists x)\psi$, koska vastaavat osat toteutumisen määritelmässä ovat samat tapauksille \mathcal{B} ja (\mathcal{B}, r) . Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kaavalle $\psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ja olkoon $\varphi = (\mathcal{Q}x_0)\psi$, ja $b_1, \dots, b_n \in B$. Tällöin jollakin $\alpha < \omega_1$, $b_1, \dots, b_n \in A_\alpha$. Näin siis jokainen \mathcal{B} alkio tulee mukaan jostakin numeroituvasta vaiheesta alkeisketjua. Oletetaan, että

$$(\mathcal{B}, r) \models (\mathcal{Q}x_0)\psi[b_1, \dots, b_n].$$

Nyt $(\mathcal{M}_\beta, q_\beta) \prec (\mathcal{B}, r)$ kaikille $\beta < \omega_1$, joten alkeisketjujen ominaisuuksien nojalla

$$(\mathcal{M}_\beta, q_\beta) \models (\mathcal{Q}x_0)\psi[b_1, \dots, b_n], \text{ kun } \alpha \leq \beta < \omega_1.$$

ominaisuuden (2) mukaan aina kun $\alpha \leq \beta < \omega_1$, on olemassa $a_\beta \in A_{\beta+1} \setminus A_\beta$, mille pätee $(\mathcal{M}_{\beta+1}, q_{\beta+1}) \models \psi[a_\beta, b_1, \dots, b_n]$, ja, koska tiedetään että $a_\beta \in A_{\beta+1} \subseteq B$ ja $(\mathcal{M}_{\beta+1}, q_{\beta+1}) \prec (\mathcal{B}, r)$, seuraa

²²eli ordinaali $\lambda \neq 0$ jolle pätee $\neg(\exists \beta \in Ord)(\lambda = \beta + 1)$

$$(\mathcal{B}, r) \models \psi[a_\beta, b_1, \dots, b_n].$$

Kaikki a_β ovat erillisiä (jos $a_\gamma = a_\beta$, seuraa $a_\gamma \in A_{\beta+1} \subseteq A_\gamma$, mutta tämä ei ole mahdollista koska $a_\gamma \in A_{\gamma+1} \setminus A_\gamma$ ja täten $a_\gamma \notin A_\gamma$) ja niitä on ω_1 kappaletta, joten joukon $S = \{b_0 \in B : (\mathcal{B}, r) \models \psi[b_0, b_1, \dots, b_n]\}$ kardinaliteetti on vähintään ω_1 . Toisaalta, koska ψ toteuttaa väitteen, joukko S on sama kuin $\{b_0 \in B : \mathcal{B} \models \psi[b_0, b_1, \dots, b_n]\}$, ja täten $\mathcal{B} \models (\mathcal{Q}x_0)\psi[b_1, \dots, b_n]$.

Jäljellä on tapaus $(\mathcal{B}, r) \models \neg(\mathcal{Q}x_0)\psi[b_1, \dots, b_n]$. Tällöin,

$$(\mathcal{M}_\beta, q_\beta) \models \neg(\mathcal{Q}x_0)\psi[b_1, \dots, b_n], \text{ kun } \alpha \leq \beta < \omega_1.$$

Ehdoista (1) ja (2), ja lemmän 3.24 tuloksesta uusien todistajien puutteen suhteen, seuraa, että $S = \{b_0 \in B : (\mathcal{B}, r) \models \psi[b_0, b_1, \dots, b_n]\} \subseteq A_\alpha$. Joukko A_α on numeroituva, joten joukko S on numeroituva. Induktio-oletuksen mukaan väite on voimassa kaavalle ψ , joten voidaan päätellä, että

$$\mathcal{B} \models \neg(\mathcal{Q}x)\psi[b_1, \dots, b_n].$$

Tämä todistaa väitteen. □

Huomautus 3.26. Huomaa, että tapauksessa

$$\Sigma \vdash \neg(\mathcal{Q}x)(x = x)$$

kaikki heikot mallit $(\mathcal{M}_\alpha, q_\alpha)$ ja (\mathcal{B}, r) kohtaavat, ja \mathcal{B} tulee olemaan joukon Σ numeroituva malli. Seuraava korollaari reformuloi täydellisyyslauseen kielelle $L(\mathcal{Q})$ lisäaksioomalla $(\mathcal{Q}x)(x = x)$ ja ylinumeroituvilla standardimalleilla.

Seuraus 3.27. Olkoon Σ joukko lauseita kielessä $L(\mathcal{Q})$. Silloin $\Sigma' := \Sigma \cup \{(\mathcal{Q}x)(x = x)\}$ on ristiriidaton kielessä $L(\mathcal{Q})$ jos ja vain jos lausejoukolla Σ on standardimalli, joka on kardinaliteettia ω_1 .

Todistus. Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa lausejoukko Σ' on ristiriidaton. Täydellisyyslauseesta seuraa, että on olemassa standardimalli \mathcal{B} tälle lausejoukolle Σ' , ja se koostuu heikkojen mallien ketjun unionista täydellisyyslauseen todistuksen rakenteen mukaisesti. Unionin jokainen välivaihe on numeroituva, ja ketjun itsensä koko on ω_1 . Koska unioni \mathcal{B} on näin siis otettu ω_1 alkioista, sen on oltava yhtä suuri tai pienempi kuin ω_1 , eli $|\mathcal{B}| \leq \omega_1$. Σ' määritelmästä taas seuraa, että $\mathcal{B} \models (\mathcal{Q}x)(x = x)$, eli standardimallissa $|\mathcal{B}| \geq \aleph_1$. Näin siis $\aleph_1 \leq |\mathcal{B}| \leq \omega_1$, täten $|\mathcal{B}| = \omega_1$. Koska $\mathcal{B} \models \Sigma'$, ja $\Sigma' \supset \Sigma$, $\mathcal{B} \models \Sigma$.

Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa lausejoukolla Σ on standardimalli M joka on kardinaliteettia ω_1 . Kaikissa standardimalleissa $(\mathcal{Q}x)(x = x)$ on tosi jos ja vain jos universumi on ylinumeroituva, koska vain tällöin löytyy tarpeeksi x joille kaava voi toteutua. Näin siis koska $|M| = \omega_1$, $M \models (\mathcal{Q}x)(x = x)$. Tiedetään myös, että

$M \models \Sigma$, joten $M \models \Sigma \cup \{(\mathcal{Q}x)(x = x)\}$, eli $M \models \Sigma'$. Terveydestä 2.21 seuraa, että Σ' on ristiriidaton kielessä $L(\mathcal{Q})$. \square

Määritelmä 3.28 (Validi). Lause φ kielessä $L(\mathcal{Q})$ on validi jos ja vain jos φ toteutuu kaikissa standardimalleissa.

Näin siis seuraava korollaari kertoo, että vain lause, joka on tosi kaikissa standardimalleissa, on todistuva. Tämän tuloksen ensimmäinen osa vastaa ajattelua joka ilmenee numeroituvassa Löwenheim-Skolem ehdossa [O7, Määritelmä 8.2.6.].

Seuraus 3.29. Tässä korollaarissa on kaksi osaa,

1. Lause φ kielessä $L(\mathcal{Q})$ on todistuva jos ja vain jos se on validi.
2. Kaikkien kielen $L(\mathcal{Q})$ validien lauseiden joukko on rekursiivisesti numeroituva L symbolijoukossa.

Todistus. Käydään kohta kerrallaan.

1. (a) Jos todistuva niin validi: Aksiomat ovat validit, ja säännöt (R1) ja (R2) säilyttävät validiuden. Tehdään induktio todistuksen pituuden $n \in \mathbb{N}$ suhteen. Jokainen todistuksen kaava on validi, koska aksiomat ja sääntöjen tuottamat kaavat ovat valideja.
- (b) Jos validi niin todistuva: Tarkastellaan tilannetta $\Sigma := \{\neg\varphi\}$. Koska φ on validi, mikään standardimalli ei voi toteuttaa $\neg\varphi$, ja täten joukolla Σ ei voi olla standardimallia. Täydellisyyden 3.25 perusteella joukolla kielen $L(\mathcal{Q})$ lauseita on standardimalli jos ja vain jos se on syntaktisesti ristiriidaton. Näin joukon Σ on oltava ristiriitainen. Nyt deduktiolauseesta 2.23 seuraa, että $\vdash \neg\varphi \rightarrow \perp$, ja $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi$ on tautologia, joten seuraa $\vdash \varphi$. Väite seuraa tästä.
2. $L(\mathcal{Q})$ -aksiomat muodostavat rekursiivisesti numeroituvan joukon, ja todistukset ja todistuvat lauseet ovat rekursiivisesti numeroituvia. Koska ensimmäisen osan mukaan φ on todistuva jos ja vain jos se on validi, validit lauseet ovat rekursiivisesti numeroituvia.

\square

Kompaktisuus on ollut ensimmäisen kertaluvun logiikan historiallisessa kontekstissa vahva vihje suuntaan, että täydellisyys toteutuu, sillä se rajoittaa järjestelmän kokovaatimuksia. Kompaktisuudesta (sen vahvuudesta riippumatta) ei aina seuraa täydellisyyttä, mutta täydellisyydestä seuraa ensimmäisen kertaluvun logiikassa kompaktisuus. Keislerin $L(\mathcal{Q})$ -järjestelmässä toteutuu myös seuraus, että täydellisyys johtaa kompaktisuuteen.

Seuraus 3.30 (Kompaktisuuslause). Olkoon Σ lausejoukko kielessä $L(\mathcal{Q})$. Jos joukon Σ jokaisella äärellisellä osajoukolla on standardimallin, joukolla Σ on standardimalli.

Todistus. Jos lausejoukko Σ on ristiriidaton todistusjärjestelmässä, sillä on standardimalli täydellisyyslauseen 3.25 mukaan. Terveyslemma 2.21 osoittaa, että kaikki mikä on todistuvaa on validia kaikissa standardimalleissa. Oletetaan sitten, että kaikilla äärellisillä $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ on standardimalli. Tällöin mikään äärellinen osa ei voi olla ristiriitainen todistusjärjestelmässä, ja täten koko Σ on ristiriidaton, muulloin äärellinen ristiriita olisi johdettavissa. \square

Huomautus 3.31. Korollaarin 3.29 loppuosan ja korollaarin 3.30 osoittivat ensin muilla tavoin Vaught [S31] ja Fuhrken [S6], tässä järjestyksessä.

Huomautus 3.32 (Ylinumeroituva määrä vakioita). On helppo nähdä, että täydellisyys- ja kompaktisuuslauseet kielelle $L(\mathcal{Q})$ eivät päde, jos kielessä L on ylinumeroituva määrä vakioita. Riittää tarkastella joukkoa:

$$\Sigma = \{\neg(\mathcal{Q}x)P(x)\} \cup \{P(c_\alpha) : \alpha < \omega_1\} \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha < \beta < \omega_1\}.$$

Tunnustukset ja lisähuomiot

Kiitän FM Elina Lassia siitä, että hän muistutti minua äidinkielellisistä säännöistä ja auttoi minua kieliasun selkeyden kanssa. Kiitos myös jokaiselle opettajalle ja ystävälle, joka on matematiikkaa opettaessaan joutunut olemaan kärsivällinen kanssani, tämä lista ei ole lyhyt.

S-viitteet ovat alkuperäisestä pääteoksesta, O-viitteet tämän teoksen tekijän lisäämiä. Olen yrittänyt antaa joko alkuperäisen toimivan linkin tai joissain kohdissa lisätä sellaisen jos sitä ei alun perin ole annettu. Muokkaamattoman alkuperäisen lähdeluettelon näkee tietenkin Keislerin työstä itsestään.

Viitteet

- [S0] H. Jerome Keisler, Logic with the quantifier "there exist uncountably many", *Annals of Mathematical Logic* - North-Holland, Amsterdam (1970). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003484370800055>
- [S1] J. Barwise, Infinitary logic and admissible sets, Doctoral dissertation, Stanford University (1967). <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-symbolic-logic/article/abs/infinitary-logic-and-admissible-sets1/FAC4BF67BB29B7C9E8D4EE914BDD6055>
- [S2] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic* (Princeton University Press, Princeton, 1956).
- [S3] W. Craig, Relative characterizability and generalized existential quantifiers, *Notices Am. Math. Soc.* 9 (1962) 153 (abstract).
- [S4] H. D. Ebbinghaus, On the logic with the added quantifier Q (there are uncountably many), *Notices Am. Math. Soc.* 15 (1968) 547 (abstract).
- [S5] A. Ehrenfeucht and A. Mostowski, Models of axiomatic theories admitting automorphisms, *Fund. Math.* 43 (1956) 50-68.
- [S6] G. Fuhrken, Skolem-type normal forms for first order languages with a generalized quantifier, *Fund. Math.* 54 (1964) 291-302.
- [S7] G. Fuhrken, Languages with the added quantifier "there exist at least \aleph_a ", in: *The Theory of Models*, eds. J.W.Addison, L.Henkin and A.Tarski (North-Holland, Amsterdam, 1965) pp. 121-131.

- [S8] H. Gaifman, Uniform extension operators for models and their applications, in: Sets, Models and Recursion Theory, ed. J. Crossley (North-Holland, Amsterdam, 1967) pp. 122-155.
- [S9] K. Gödel, The Consistency of the Continuum Hypothesis (Princeton University Press, Princeton, 1940).
- [S10] A. Grzegorzcyk, A. Mostowski and C. Ryll-Nardzewski, Definability of sets in models of axiomatic theories, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 9 (1961) 163-167.
- [S11] L. Henkin, The completeness of the first-order functional calculus. J. Symb. Logic 14 (1949) 159-166
- [S12] L. Henkin, A generalization of the concept of ω -consistency, J. Symb. Logic 19 (1954) 183-196.
- [S13] C. Karp, Languages with Expressions of Infinite Length (Amsterdam, 1954)
- [S14] H. J. Keisler, Limit ultraproducts, J. Symb. Logic 30 (1965) 212-234.
- [S15] H. J. Keisler, First order properties of pairs of cardinals, Bull. Am. Math. Soc. 72 (1966) 141-144
- [S16] H. J. Keisler, Some model-theoretic results for ω -logic, Israel J. Math. 4 (1966) 249-261
- [S17] H. J. Keisler, Models with orderings. Logic, Methodol. Phil. Sci. III (Amsterdam, 1968) 35-62.
- [S18] H. J. Keisler, On the quantifier "there exist uncountably many", Notices Am. Math. Soc. 15 (1968) 654 (abstract).
- [S19] H. J. Keisler and M. Morley, Elementary extensions of models of set theory, Israel J. Math. 6 (1968) 49-65.
- [S20] J. D. Halpern and A. Levy, The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice.
- [S21] A. R. D. Mathias, The order-extension principle, in: Proceedings of the A.M.S. Conference in Set Theory held at U.C.L.A. in 1967, to appear.
- [S22] M. Morley, Omitting classes of elements, in: The Theory of Models (Amsterdam, 1965) pp. 265-273.

- [S23] A. Mostowski, On a generalization of quantifiers, *Fund. Math.* 44 (1957) 12-36.
- [S24] J. Mycielski, On the axiom of determinateness, *Fund. Math.* 53 (1964) 205-224; II, *Fund. Math.* 59 (1966) 203-212.
- [S25] J. Mycielski and S. Sciwerczkowski, On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness, *Fund. Math.* 54 (1964) 67-71.
- [S26] S. Orey, On ω -consistency and related problems, *J. Symb. Logic* 21 (1956) 246-252.
<https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-symbolic-logic/article/abs/on-consistency-and-related-properties/A615C64921B6FE771A78E1F5369C860A>
- [S27] A. Slomson, Some problems in mathematical logic, D. Phil. Thesis, Oxford (1967).
- [S28] R. Solovay. See A. R. D. Mathias. Surrealist landscape with figures. A survey of recent results in set theory. Proceedings of the A.M.S. Conf. in Set Theory held at U.C.L.A. in 1967.
<https://link.springer.com/article/10.1007/BF02025889>
- [S29] A. Tarski, Some model-theoretic results concerning weak second order logic, *Am. Math. Soc. Notices* 5 (1958) 673 (abstract).
<https://www.ams.org/journals/notices/195811/195811FullIssue.pdf>
- [S30] A. Tarski and R. Vaught, Arithmetical extensions of relational systems, *Comp. Math.* 13 (1957) 81-102.
https://www.numdam.org/item/CM_1956-1958__13__81_0.pdf
- [S31] R. Vaught, The completeness of logic with the added quantifier "there are uncountably many", *Fund. Math.* 54 (1964) 303-304.
<https://eudml.org/doc/213765>
- [S32] R. Vaught, Denumerable models of complete theories, in: *Infinistic Methods* (Warsaw, 1959) pp. 303-321.
<https://homepages.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/vaught59.pdf>
- [S33] R. Vaught, The Lowenheim-Skolem theorem, in: *Logic, Methodology, and Philosophy of Science* (Amsterdam, 1965) pp. 81-89.
<https://dlmcs.org/media/pdfs/CLMPSXV/clmps15.book.small.pdf>

- [S34] M. Yasuhara, Syntactical and semantical properties of generalized quantifiers, *J. Symb. Logic* 31 (1966) 617-632.
<https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-symbolic-logic/article/abs/syntactical-and-semantical-properties-of-generalized-quantifiers/6EA22F0D72386F5AC2A2BA3FF8535C8F>
- [S35] M. Yasuhara, An axiomatic system for first order languages with an equicardinality quantifier, *J. Symb. Logic* 31 (1966) 633-640
<https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-symbolic-logic/article/abs/an-axiomatic-system-for-the-first-order-language-with-an-equicardinality-quantifier/2FE8DB02B27302EE130DE359A0B7AA82>
- [O1] Alfred Tarski, Robert L. Vaught; Arithmetical extensions of relational systems, *Compositio Mathematica*, tome 13 (1956-1958), p. 81-102
http://www.numdam.org/item/?id=CM_1956-1958__13__81_0
- [O2] Cohen, Paul (2002):
<https://projecteuclid.org/journals/rocky-mountain-journal-of-mathematics/volume-32/issue-4/The-Discovery-of-Forcing/10.1216/rmjm/1181070010.full>
- [O3] Miettinen, Seppo K., 1944- 1993; 2. uudistettu painos, *Logiikan Peruskurssi*
- [O4] Soininen, Aarne, 1938- kirjoittaja.; Soininen, Lauri, 1945- kirjoittaja. 1973 *Jokamiehen Joukko-oppi: uutta matematiikkaa aikuisille*
<https://www.finna.fi/Record/vaarakirjastot.62577>
- [O5] Smith, Peter. *Beginning Mathematical Logic: A Study Guide*, 2022
<https://www.logicmatters.net/resources/pdfs/LogicStudyGuide.pdf>
- [O6] Enderton, Herbert B. Burlington: Elsevier Science, 1977.
Elements of Set Theory
 (Raakalinkki ei toimi \LaTeX issa.)
- [O7] Halava, V., & Harju, T. (2022). *Logiikka: Peruskurssi*. Turun yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos.
- [O8] Baldwin, John T. (2020). *Henkin's Completeness Proof*. Preprint, University of Illinois at Chicago.
<https://homepages.math.uic.edu/~jrbaldwin/pub/chietihenkfeb20.pdf>

- [O9] Gödel, Kurt. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198.
- [O10] Shelah, S. & Steinhorn, C. (1986) On the nonaxiomatizability of some logics by finitely many schemas. *Journal of Symbolic Logic* 51(2) 413-421.
- [O11] Chang, C.C.; Keisler, H. Jerome (1989). *Model Theory* (3rd ed.). Elsevier. ISBN 0-7204-0692-7