ARITMEETTINEN JA FORMAALISTI ESITETTY LUKUJONO LUKION MATEMATIIKASSA

Pauliina Hämäläinen

Pro gradu -tutkielma
Helmikuu 2016

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HÄMÄLÄINEN, PAULIINA: Aritmeettinen ja formaalisti esitetty lukujono lukion matematiikassa

Pro gradu -tutkielma, 56 s., 9 liites.
Matematiikka
Helmikuu 2016

Tämä tutkielma liittyy Turun yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen projektiin. Projektin tarkoituksena on tuottaa sähköinen matematiikan oppikirja uuden opetussuunnitelman 2015 mukaisesti. Projektilla on kaksi ohjaajaa yliopistosta.

Opetusmateriaali on tarkoitettu lukion matematiikan ensimmäiselle kurssille, jonka koodi on MAY1. Uuden kurssin aihealueena on luvut ja lukujonot. Valmis oppikirja on tarkoitus julkaista verkkosivulla http://www.avoinoppikirja.fi, kun kaikki sen osat ovat valmiita.

Tässä tutkielmassa käsitellään osa lukujonoista; aritmeettinen lukujono ja summa, lukujonot, jotka eivät ole aritmeettisia tai geometrisia, sekä rekursiivisesti määritelty lukujono. Luvut ja toinen osa lukujonoista käsitellään muiden projektiin osallistuneiden kirjoittamissa tutkielmissa.

Uusi kurssi on jatkossa kaikille lukion opiskelijoille yhteinen. Valinta pitkän ja lyhyen matematiikan oppimäärän välillä on tarkoitus tehdä vasta ensimmäisen kurssin jälkeen, koska opetushallitus haluaa antaa opiskelijoille mahdollisuuden tehdä harkitumman valinnan matematiikan oppimäärän suhteen.

Opetusmateriaalia suunnitellessani otin huomioon uudessa opetussuunnitelmassa mainitut matematiikan opiskelun oppimistavoitteet sekä kyseiselle kurssille annetut opetussisällöt. Tutkin myös olemassa olevia lukion matematiikan oppikirjoja lukujonojen osalta, sekä tutustuin matematiikan opettamiseen, oppimiseen ja oppimisvaikeuksiin liittyvään kirjallisuuteen.

Tekemäni opetusmateriaali tehtävineen on osa tätä tutkielmaa. Opettajan oppaassa esittelen lyhyesti kappaleiden sisällöt ja pohdintojen käsittelyn. Sähköinen oppikirja on tarkoitettu opiskelijalle, mutta myös tiennäyttäjäksi opettajalle uudenlaisen kurssisisällön aiheiden käsittelyyn annetun tuntimäärän puitteissa.

Asiasanat: matematiikka, oppikirjat, lukio, lukujonot

UNIVERSITY OF TURKU
Department of Mathematics and Statistics

HÄMÄLÄINEN, PAULIINA: Arithmetic and Formal Sequences in High School Mathematics

Master's Thesis, 56 p., 9 app. p.
Mathematics
February 2016

This thesis is related to a project of the Department of Mathematics and Statistics in the University of Turku. The project is about creating an electric mathematics book according to the new curriculum 2015 in Finland. The project is conducted by two supervisors from the university.

The book is for the first course of mathematics in high school and it is coded as MAY1 in the curriculum. The new course covers the topics of numbers and their sequences. The electric book is to be published on website http://www.avoinoppikirja.fi, when all of its parts are ready.

This thesis covers part of the sequences; arithmetic sequences and their sums, sequences that are not arithmetic or geometric, and also recursively defined sequences. Numbers and the other part of sequences are covered in the theses of the other participants of the project.

In the future, the first course is common to all high school students. The Finnish National Board of Education wants to give the students a possibility to choose more carefully which syllabus they will follow in the future, standard or higher, and thus the choice is to be made after the first course.

When producing the education material I took into consideration the goals for learning mathematics and the contents of the course, which were mentioned in the new curriculum. I also explored the existing high school mathematics textbooks and other literature related to the topic, the mathematics learning in general and the learning disabilities in mathematics.

The education material with the exercises is a part of this thesis. I also give a short description of the contents and the introduction exercises in the section called teacher's guide. The book is meant for the student, but also as a trailblazer for the teacher in handling the new combination of topics of the new course in the given timeframe.

Keywords: mathematics, textbooks, high school, sequences

Sisältö

1 Esipuhe

Ajatus oppikirjan tekemisestä on aina kiehtonut minua, joten koin olevani onnekas päästessäni mukaan matematiikan oppikirjaprojektiin Turun yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella. Toivon tästä tutkielmasta olevan hyötyä opettajille, jotka aloittavat uuden opetussuunnitelman mukaisen opetuksen vuoden 2016 syksyllä.

Haluan esittää kiitokseni tutkielmani ohjaajille ja projektin vetäjille, professori Peter Hästölle Oulun ja Turun yliopistosta ja tutkijatohtori Riku Klénille Turun yliopistosta. Haluan kiittää myös koko kirjaprojektiryhmää hyvästä yhteistyöstä. Erityiset kiitokset haluan esittää Taru Nolville, jonka kanssa tein lukujonojen osuutta kirjassa.

Tämä tutkielma on esitetty myös Pro gradu -seminaarissa. Kiitos opponentilleni Tuula Ruuskaselle hyvistä kommenteista ja ideoista. Matematiikan ja tilastotieteen laitos ansaitsee myös kiitokseni kaikesta mielenkiintoisesta opetuksesta, joka on lopulta johtanut tämän tutkielman kirjoittamiseen. Lopuksi haluan kiittää Markku Salmista arvokkaasta henkilökohtaisesta tuesta.

2 Johdanto

Tämä tutkielma liittyy Turun yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen projektiin, jonka tarkoituksena on tuottaa sähköinen oppikirja lukion matematiikan ensimmäiselle kurssille. Kurssi perustuu 27.10.2015 julkaistuun uuteen opetussuunnitelmaan [32], joka otetaan käyttöön viimeistään 1.8.2016. Projektilla on kaksi ohjaajaa yliopistosta.

Uuden kurssin (MAY1) aihealueena on luvut ja lukujonot. Kurssilla kerrataan ja täydennetään opiskelijoiden tietoja aiheista lukualueet, peruslaskutoimitukset, prosenttilaskenta, funktion käsite, lukujonon käsite, rekursiivisesti määritelty lukujono, lukujonon summa, aritmeettinen ja geometrinen lukujono ja niistä muodostettu summa sekä kuvaajan piirto ja tulkinta teknisiä apuvälineitä käyttäen.

Tässä tutkielmassa käsitellään aritmeettinen lukujono ja summa, muut kuin aritmeettiset ja geometriset lukujonot sekä rekursiivisesti määritelty lukujono. Muut aiheet ja loput lukujonojen osuudesta käsitellään muiden projektiin osallistuneiden opiskelijoiden kirjoittamissa tutkielmissa. Valmis oppikirja [34] on tarkoitus julkaista sähköisessä muodossa.

Uusi kurssi on kaikille opiskelijoille yhteinen, joten sen tulee tarjota sopiva opetuskokonaisuus sekä pitkän että lyhyen matematiikan valitseville opiskelijoille. Opiskelijat tekevät valinnan vasta yhteisen kurssin jälkeen. Opetushallitus haluaa näin antaa opiskelijoille mahdollisuuden tehdä harkitumman valinnan oppimäärän suhteen. Opetushallitus toivoo uuden yhteisen kurssin myös lisäävän pitkän matematiikan valitsevien määrää [30].

Matematiikan yhteisen opintokokonaisuuden yhtenä tehtävänä on herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan. Matematiikka tulisi nähdä hyödyllisenä oppiaineena. Opiskelija saa yhteisen ensimmäisen kurssin myötä myös mahdollisuuden vahvistaa pohjaa tuleville matematiikan opinnoilleen. Samalla on kuitenkin huomioitava myös ne opiskelijat, jotka tarvitsevat eriyttämistä ylöspäin.

Opetusmateriaalia suunnitellessani otin huomioon uudessa opetussuunnitelmassa mainitut matematiikan opiskelun oppimistavoitteet sekä kyseiselle kurssille annetut opetussisällöt. Tutustuin myös olemassa oleviin lukion matematiikan oppikirjoihin, joissa vastaavat lukujonoihin liittyvät asiat on käsitelty pitkän matematiikan yhdeksännessä kurssissa ”trigonometriset funktiot ja lukujonot” ja lyhyen matematiikan kuudennessa kurssissa ”matemaattisia malleja II”.

Tutustuin lisäksi aiheeseen liittyvään kirjallisuuteen. Lukemani artikkelit ja muu kirjallisuus käsittelivät matematiikan oppimisvaikeuksia, lukujonoja ja matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyviä asioita yleisesti. Tutkielmani ohjaajat ovat myös vaikuttaneet omalta osaltaan opetusmateriaalini sisältöön.

Ohjaajat valitsivat neljä artikkelia, jotka toimivat hyvänä lähtökohtana opetusmateriaalin suunnittelussa. Artikkelit ovat: ”Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula” [4], ”Identifying a Framework for Graphing Formulas from Expert Strategies” [24], ”The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics” [36] ja ”Use of Indirect Addition in Adult's Mental Subtraction in the Number Domain up to 1,000” [38].

Kurssia varten tekemäni opetusmateriaali tehtävineen on osa tätä tutkielmaa ja se löytyy luvusta 5. Opettajan oppaassa (luku 6) esittelen lyhyesti kappaleiden sisällöt, opetuksen tavoitteet ja pohdintojen käsittelyn. Sähköinen oppikirja on tarkoitettu varsinaisesti opiskelijalle, mutta myös tiennäyttäjäksi opettajalle uudenlaisen kurssisisällön aiheiden käsittelyyn annetun tuntimäärän puitteissa.

Uuden opetussuunnitelman mukaan matematiikan opetuksen tavoitteissa (ks. liite B) korostetaan matematiikan ymmärtämistä ja hyödyntämistä, sekä matemaattisesti esitetyn tiedon tuottamista. Merkittäväksi nousee myös syvällisempi perehtyminen opetettaviin aihealueisiin, luovien ratkaisujen löytäminen ja ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen.

Lisäksi opiskelijaa tulisi kannustaa kokeiluihin ja tiedonhankintaan. Opetuksen lähtökohdat tulisi valita opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista. Matemaattiset käsitteet tulisi liittää osaksi suurempaa kokonaisuutta. Työtapojen tulisi olla vaihtelevia ja opetuksen apuna tulisi käyttää tietokoneohjelmistoja. [32]

Tekemässäni opetusmateriaalissa painottuu ymmärtäminen. Kaikkein laajimman ymmärryksen saa mielestäni opiskelija, joka tutkii erilaisia tapauksia, ja löytää teorian itse sitä kautta. Korostan päättelyn merkitystä matematiikassa, sillä se on matematiikan syvin olemus.

Tärkeää on myös vastauksen järkevyyden pohtiminen, kriittinen ajatteleminen ja todellisten ongelmien tutkiminen aina kun se on mahdollista. Matematiikka on loogisen päättelyn väline. Opetusmateriaalissa tekstin ja matemaattisten lausekkeiden formalismi on pyritty pitämään matalana.

Lukujono on melko irrallinen käsite lukion oppimäärässä. Aritmeettisen lukujonon käsittelyä tarvitaan mm. talousmatematiikassa, kun kuukausittaisille talletuksille lasketaan vuotuista korkoa. Opiskelijalle voi kuitenkin korostaa juuri matemaattisen ajattelun opettelemista ja lukujonojen roolia ikään kuin työkalupakin työkaluna.

3 Opetusmateriaalin sisältöön vaikuttaneet asiat

3.1 Johdanto

Tässä luvussa pohditaan matematiikan opetusta ja oppimista opetussuunnitelman tavoitteiden saavuttamisen kannalta. Lähtökohtana on opiskelija ja hänen tavoitteensa, sekä opettajan mielessä pyörivät ajatukset mahdollisesti haastavaakin uutta opetustapaa käytettäessä. Uusia taitoja voi onneksi opetella yksi kerrallaan.

Matematiikan opiskelu vaatii opiskelijalta monia taitoja ja sinnikkyyttä. Matematiikan oppimisvaikeudet ja motivaatio vaikuttavat oppimistuloksiin. Toisaalta myös opetustavalla ja tehtävätyypeillä on merkittävä vaikutus opiskelijan matemaattisen identiteetin rakentumiseen ja sitä kautta oppimiseen.

Uudessa opetussuunnitelmassa korostetaan luovien ratkaisujen löytämistä ja ongelmanratkaisua. Käsittelen näiden lisäksi matemaattisen ajatteluketjun muodostamista. Opiskelijan tulisi oppia käyttämään asiantuntijoiden käyttämiä menetelmiä ja ajattelemaan matemaattisesti. Asiantuntijan käyttämät metodit eroavat noviisin käyttämistä, joskin asiantuntijuuden määritelmää on pohdittu ja tarkennettu vuosien saatossa.

Ongelmanratkaisutehtävän käsitteleminen luokassa voi olla haastavaa ja vaatia paljon opettajalta. Miten tehtävä tulisi ohjeistaa? Miten saadaan koottua yksittäisten vastausten anti kaikkia hyödyttävään muotoon ja miten se tulisi käydä yhdessä läpi? Miten toimia väärien vastausten kanssa?

Matemaattinen todistaminen on myös olennainen osa matematiikan ymmärtämistä ja ilmaisua. Miten sitä voisi harjoitella luokassa ja mitä opettaja voi tehdä auttaakseen opiskelijoita pääsemään eteenpäin? Käyn vielä lopuksi läpi erilaisia tehtävätyyppejä ja niiden hyödyntämistä tekemäni opetusmateriaalin suunnittelussa.

3.2 Opetussuunnitelma

Uudessa opetussuunnitelmassa [32] matematiikan opetuksen tavoitteissa korostetaan käytännöllistä lähestymistapaa ja matemaattisessa muodossa olevan tiedon käsittelyä. Seuraavassa on otteita tavoitteista.

> ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan pe-

rusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja.

Opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista. Opetuksessa käytetään vaihtelevia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät yksin ja yhdessä. Opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. (...)

Opiskelijaa kannustetaan kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin. Opetuksessa tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä sekä tietoisesti käytetään eteen tulevia mahdollisuuksia opiskelijan persoonallisuuden kehittämiseen, mikä tarkoittaa muun muassa hänen kiinnostuksensa ohjaamista, kokeiluihin kannustamista sekä tiedonhankintaprosessien kehittämistä." [32]

Matematiikan pitkän oppimäärän tavoitteissa mainitaan ammatillisten ja korkeakouluopintojen edellyttämät matemaattiset valmiudet ja matemaattinen yleissivistys. Lyhyen oppimäärän tavoitteissa painottuvat valmiudet hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa. [32]

Opetushallitus haluaa lisätä pitkän oppimäärän opiskelijoiden määrää [30]. Valinnalla on vaikutusta jatko-opintoihin pääsemiseen. Yhteinen ensimmäinen kurssi antaa opiskelijalle mahdollisuuden tehdä tämän tärkeän päätöksensä paremmalta pohjalta.

Edellisessä vuoden 2003 opetussuunnitelmassa [31], joka otettiin käyttöön 1.8.2005, matematiikan opetuksen tavoitteissa painotettiin myös ongelman ratkaisemisen taitoja. Opetustilanteet piti järjestää siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Opiskelijaa tuli kannustaa kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin. Nämä tavoitteet ovat siis säilyneet samoina myös uudessa opetussuunnitelmassa.

3.3 Matematiikkaan liittyvät oppimisvaikeudet

Oppimisvaikeus-sivustolla [26] todetaan, että matematiikan oppimisvaikeuksia on monenlaisia, koska matematiikassa tarvitaan monenlaisia taitoja.

> ”Kielelliset vaikeudet aiheuttavat matemaattisten käsitteiden ja symbolien ymmärtämiseen ja muistamiseen liittyviä ongelmia. Hahmottamiseen liittyvät pulmat vaikeuttavat matematiikkaan liittyvän visuaalisen eli näönvaraisen tiedon käsittelyä, kuten käyrien, graafisten esitysten tai geometrian ymmärtämistä.
>
> Matematiikka edellyttää visuospatiaalisen eli avaruudellisen hahmottamisen kykyä, jota tarvitaan muun muassa numeroiden ja matemaattisten symbolien hahmottamisessa. Havaintopohjaiset ja tarkkaavaisuuteen liittyvät vaikeudet puolestaan saattavat aiheuttaa virheitä numeroiden ja laskumerkkien havaitsemisessa ja lukemisessa sekä lukujen sijoittamisessa kaavoihin.
>
> Muistiongelmat hankaloittavat laskusääntöjen, kertotaulun ja peruslaskutoimitusten tulosten ulkoa oppimista. Matemaattisten ongelmien ratkaisu tapahtuu puolestaan työmuistissa, jolloin työmuistin heikentynyt kapasiteetti asettaa omat rajoituksensa.
>
> Matematiikan hallitseminen edellyttää toiminnan ohjauksen taitoja, eli kykyä tarkkailla ja säädellä omaa toimintaa ja esimerkiksi muuttaa tarvittaessa laskutapaa. Luonnollisesti vaikeudet loogisen päättelyn taidoissa asettavat omat rajoituksensa matemaattisten periaatteiden ymmärtämiseen ja soveltamiseen.
>
> Lisäksi on olemassa erityisesti matemaattisiin taitoihin liittyviä vaikeuksia, kuten vaikeuksia ymmärtää ja muodostaa lukujonoja ja siten ymmärtää suuruuskäsitteitä ja lukujen välisiä suhteita.” [26]

Matemaattisten merkintöjen ymmärtäminen on matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa välttämätöntä. Opiskelijan täytyy ymmärtää, mitä mikäkin merkki tarkoittaa ja miten se täytyy huomioida laskua laskettaessa. [19, s. 7] Laskun voi yrittää pilkkoa helpommin käsiteltäviin osiin [25]. Esim. vähennyslaskun voi usein muokata helpommin käsiteltävämpään muotoon [38].

”Lapsen voi olla hankala ymmärtää, mitä sanallisessa tehtävässä kysytään. Lisäksi lapselle saattaa olla haastavaa erottaa ongelman ratkaisemisen kannalta olennainen tieto epäolennaisesta. Joskus tehtävissä eteneminen voi olla vaikeaa: lapsi ei tiedä, miten edetä vaiheittain monivaiheisessa tehtävässä tai mikä laskutapa sopii tietynlaisten ongelmien ratkaisemiseen.”

[19, s. 8]

Laskun välivaiheet kannattaa kirjoittaa ylös mahdollisimman tarkasti, sillä se selkeyttää omia ajatuksia, ja tehtävä on myös helpompi selittää toisille. Kynän ja paperin käyttäminen vähentää myös työmuistin kuormitusta. [25]

Hahmotusvaikeudet voivat ilmetä myös aikajatkumoiden ja syy-seuraussuhteiden mieltämisen vaikeutena, sekä kokonaisuuksien jäsentämisen vaikeutena. Ne voivat haitata myös sosiaalisen viestinnän tulkintaa, sillä ihmisten välisestä vuorovaikutuksesta suuri osa perustuu ei-kielelliseen ilmaisuun. [26]

Muistiongelmiin voi auttaa hälyn ja keskeytysten rajoittaminen, tiedon jäsentely ja merkitysten liittäminen opittavaan asiaan [20]. Palautteen antaminen voi myös kehittää opiskelutaitoja, sillä omat kokemukset eivät aina anna riittävää palautetta siitä, oliko käytetty työskentelytapa tai -aika oikea suhteessa tavoitteisiin ja oppimisen tuloksiin. [25]

Lukujonotaidot tarkoittavat kykyä luetella lukuja eteen- ja taaksepäin, sekä taitoa luetella lukuja hyppien joidenkin lukujen yli, esim. 2, 4, 6, 8, ... On myös osattava yhdistää tietty luku sitä vastaavaan lukumäärään, esim. lukusana kolme ja kolme palloa. Nämä taidot kehittyvät usein jo ennen koulun alkua. [19, s. 6]

Opettaja voi ottaa mahdolliset oppimisvaikeudet huomioon monella tavalla, esim. esittämällä vaihtoehtoisia ratkaisutapoja, käyttämällä kuvia, johdattelemalla eteenpäin ja painottamalla olennaisia asioita. Kaikille on hyödyllistä, mikäli luokassa on hyvä työrauha, mutta erityisesti siitä hyötyvät keskittymisvaikeuksista kärsivät opiskelijat.

Oppimisvaikeuksien ymmärtäminen on mielestäni tärkeää ja vaikuttaa omalta osaltaan myös opetusmateriaalin laatimiseen. Olen pyrkinyt käyttämään mahdollisimman hyvää suomenkieltä ja selkeitä tehtäviä. Olen jättänyt mallitehtävistä pois asiasisällön kannalta epäolennaiset turhat vaikeudet. Myös eritasoisissa tehtävissä on pyritty keskittymään olennaisen opiskeluun.

Opettaja oppii vähitellen näkemään, missä opiskelijoilla on useimmiten vaikeuksia ja voi hyödyntää tätä tietoa opetuksessaan. Selkeä opetusmateriaali tukee omalta osaltaan laadukasta opetusta.

3.4 Matemaattisen identiteetin kehittäminen

Artikkelissa *Being a Mathematics Learner: Four Faces of Identity* [3] tutkitaan lukio-opiskelijoiden matemaattisen identiteetin kehittymistä ja merkitystä matematiikan oppimisessa. Matemaattinen identiteetti muodostuu kanssakäymisessä muiden kanssa ja se vaikuttaa opiskelijan suhtautumiseen matematiikan opiskeluun. He kysyvät itseltään, ”olenko minä matematiikan opiskelija?”. [3, s. 7-8]

Identiteetin luominen alkaa jo kotiympäristössä, pohjautuen sen asenteisiin ja elinpiirissä tarjolla oleviin ammatteihin. Myöhemmin luokkahuoneessa tapahtuvalla kanssakäymisellä opettajan ja opiskelutovereiden kanssa on suuri merkitys opiskelijan käsitykseen itsestään matematiikan opiskelijana. [3, s. 8-10]

Matemaattisen identiteetin kehittymisen kannalta olisi tärkeää, että opiskelija kokisi olevansa osa matematiikkaa opiskelevien yhteisöä. Hänen tulisi nähdä itsensä arvokkaana osana sitä ja kokea, että muutkin näkevät hänet samoin. Matematiikan opiskelu ei ole siis pelkästään käsitteiden opettelemista ja taitojen hiomista, vaan myös identiteetin rakentamista. [3, s. 8-9, s. 12]

Perinteisessä opetustyylissä opiskelijat työskentelevät itsenäisesti ratkoen lyhyitä ja yksinkertaisia tehtäviä, joihin on vain yksi oikea vastaus. Tässä opetustyylissä matematiikka näyttäytyy yksioikoisena ja kaavamaisena. Opiskelija saattaa ajatella olevansa huono matematiikassa, jos hän ei ole yhtä nopea ratkaisemaan tehtäviä kuin muut. [3, s. 8-9, s. 12]

Opiskelija tekee jatkuvasti huomioita omasta menestymisestään ja luo näin identiteettiään opiskelijana. Hänellä saattaa kuitenkin olla muita matemaattisia taitoja, esim. ongelmanratkaisussa, jotka voivat jäävät löytymättä. Taiteellinen opiskelija puolestaan saattaa kaivata lisää luovuuden käyttämistä myös matematiikassa. [3, s. 9]

Kun opiskelijat pääsevät itse tekemään, pohtimaan ja luomaan omia ratkaisujaan matemaattisiin ongelmatehtäviin, se saattaa auttaa heitä sitoutumaan matematiikan opiskeluun. Lisäksi se voi tukea heidän matemaattista identiteettiään. Luokkaympäristön voi myös järjestää siten, että se tukee keskusteluita, ajatustenvaihtoa ja yhteistyötä. [3, s. 12].

Opettaja voi liittää matematiikan opetuksen ympäröivään yhteiskuntaan kutsumalla asiantuntijoita vieraiksi. Hän voi myös antaa opiskelijoille tehtäväksi tarkkailla ja kirjoittaa ylös missä kaikessa he itse törmäävät matematiikkaan arjessa. Tehtävä voi tarjota hyvän pohjan keskusteluille koulussa opetettavan matematiikan yhteydestä luokan ulkopuoliseen elämään. [3, s. 12]

Lukion opiskelijat näkevät matematiikan usein portinvartijana jatkokoulutuksiin hakiessa, jolloin matematiikka nähdään kenties vain välttämättömänä pahana. Jotkut tiedostavat lisäksi tarvitsevansa matematiikkaa myös tulevassa ammatissaan, mikä motivoi jo hieman enemmän. Osalla ei ole matematiikalle näköpiirissä mitään käyttöä jatko-opintojen suhteen. [3, s. 9]

Opiskelijan motivaatio opiskella matematiikkaa onkin pitkälti sidonnainen hänen henkilökohtaisiin tavoitteisiinsa, mielikuviinsa ja käsitykseen tulevasta tarpeesta [3, s. 9]. Motivoitaessa häntä valitsemaan matematiikan opintoja, ne tulisi esitellä hänelle mielenkiintoisena tutkimuskenttänä, ei jatko-opintojen portinvartijana [3, s. 12].

Opettaja voi huomioida erilaiset matemaattiset identiteetit luokassa, mutta odotukset tulisi silti pitää korkealla. Positiivinen ilmapiiri luokassa, opiskelijoiden ponnistelujen ja heidän esittämiensä ajatusten arvostaminen, sekä heidän ottamisensa mukaan keskusteluun vievät kaikki oikeaan suuntaan. [3, s. 13]

Tehtävätyypeillä ja opetustavalla on merkittävä vaikutus identiteetin rakentumiseen ja sitä kautta oppimiseen [3, s. 9]. Käytän opetusmateriaalissani mahdollisimman monipuolisesti erilaisia tehtävänantoja. Tehtävätyyppejä ja varsinkin ongelmanratkaisutehtävään liittyviä asioita käydään läpi kappaleessa 3.8.

3.5 Matemaattinen ajatteluketju ja ongelmanratkaisu

Seuraavan lukiosta valmistuvan sukupolven tarpeita on vaikea ennustaa, joten mitä heille siis tulisi nyt opettaa? Artikkelin *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* mukaan kysymyksen asettelu on väärä. Opetussuunnitelmaa ei tulisi suunnitella tiettyjen asioiden ympärille, vaan keskittyä opiskelijoiden ongelmanratkaisukyvyn kehittämiseen. [4, s. 375-376]

Kuten artikkelissa todetaan, tulevaisuuden ennustaminen on riskialtista. Kun tämän päivän ekaluokkalaiset valmistuvat korkeakoulusta, he tulevat luultavimmin ratkomaan sellaisia ongelmia, joita ei ole vielä olemassakaan. [4, s. 375]

Opiskelijoiden tulisi oppia löytämään niitä ajatusketjuja, joiden avulla jokin matemaattinen tulos on syntynyt [4, s. 376]. Tekemässäni opetusmateriaalissa jokainen osio alkaa pohdintatehtävällä. Opiskelijan on tarkoitus miettiä pohdintatehtävää itse ja samalla löytää matemaattinen ajatteluketju tehtävän takana.

Opetuksen tavoitteena tulisi olla auttaa opiskelijaa ymmärtämään ja sisäistämään joitakin niistä tavoista, joita matemaatikot käyttävät ratkaistessaan ongelmia. Tämä olisi tärkeämpää kuin suurten massojen kouluttaminen yliopistokelpoisiksi ja tiedollisesti osaaviksi, mutta samoja vanhoja metodeita käyttäviksi. [4, s. 375-376]

Kun opiskelijoille opetetaan keinoja ja työkalujen käyttöä tiedon jakamisen sijaan, he saattavat luoda sellaista matematiikkaa, jota ei vielä ole olemassa. Näyttämällä opiskelijoille, miten matematiikkaa tehdään, he eivät näe pelkästään kiillotettua lopputulosta, vaan oppivat myös tekemään itse ja luomaan uutta. [4, s. 376]

Opetusmateriaalissani pyrin antamaan vain ideoita siitä, miten jonkin matemaattisen ongelman voisi ratkaista. Varsinainen idean soveltaminen käytäntöön on jätetty oppilaan tehtäväksi. Esim. kappaleessa "Aritmeettinen lukujono ja summa" on ensin annettu lause todistuksineen jonkin jäsenen selvittämiseksi, kun tunnetaan ensimmäinen jäsen ja differenssi.

Ensimmäisessä mallitehtävässä esitetään miten voidaan määrittää differenssi, kun tunnetaan lukujonon jotkin kaksi jäsentä. Tämä toimii johdatuksena seuraavaksi annettavaan lauseeseen. Toisessa mallitehtävässä tutkitaan, kuuluuko tietty luku annettuun aritmeettiseen lukujonoon eli korostetaan indeksin olevan kokonaisluku. Kaikki muut luvussa esiteltyihin lauseisiin liittyvät soveltavammat tehtävät on jätetty tehtäviksi.

"Habits of mind"-opetussuunnitelmassa kannustetaan opiskelijoita kokeilemaan itse, tekemään virheitä ja korjaamaan niitä, tutkimaan erikoistapauksia ja laskemaan. Samalla opetellaan tiivistämään löydettyjä asioita lemmoiksi, joita tarkistetaan myöhemmin aina uusia tuloksia vastaan. [4, s. 376]

Ajatusmalleja käytetään yleensä alitajuisesti. Esim. kokenut automekaanikko tietää heti missä vika on. Artikkelin kirjoittajat haluavat opiskelijoiden ajattelevan matemaattisesti, niin kuin matemaatikot ajattelevat, ja heidän kokemuksensa mukaan opiskelijat pystyvät siihen. [4, s. 377]

Opiskelijoiden ei toki tarvitse ymmärtää matemaatikkojen tutkimia aiheita, mutta heidän tulisi tottua käyttämään oikeiden matemaatikkojen käyttämiä metodeja; tutkimustekniikat, konjektuurien kehittäminen ja havaintoa tukevien todisteiden esittäminen. [4, s. 377-378] *Konjektuuri* on matemaattinen väite, jonka arvellaan olevan tosi, mutta jota kukaan ei ole vielä todistanut todeksi tai epätodeksi.

Artikkelin kirjoittajat pelkäävät, että opiskelijoiden aidon ongelmanratkaisutaidon kehittämisen sijaan kehitetään "viisi askelta ongelmien ratkaisemiseksi". Opettajilla on lisäksi haasteena miettiä, miten ja milloin mitäkin taitoa kehitetään. [4, s. 378]

Opiskelijalta toivotaan monenlaisia taitoja. Hänen tulisi havaita tietyn mallin toistuminen ja tehdä siitä johtopäätöksiä. Hänen tulisi kokeilla millainen lopputulos saadaan erilaisilla arvoilla ja alkuasetelmilla. Ongelmalla tulisi ikään kuin pelailla. Myös päättelyyn ilman paperia ja kynää voidaan kannustaa. [4, s. 378-379]

Opiskelijan tulisi tarkastella tuloksia kriittisesti ja tiedostaa kokeellisten metodien rajallisuus, sillä matematiikassa ne eivät aina riitä. Hänen tulisi osata esittää tuloksensa sanallisesti ja matemaattisilla merkinnöillä. Prosessin vaiheiden selostaminen toisille auttaa ymmärtämään sen paremmin myös itse. Merkintöjen keksiminen itse auttaa näkemään formalismin merkityksen matematiikassa. [4, s. 379]

Opetusmateriaalissani kappale "Aritmeettinen lukujono ja summa" alkaa pohdintatehtävällä, jonka ensimmäiset kohdat voidaan helposti päätellä. Seuraavien kohtien tarkoituksena on herättää opiskelijassa tarve jonkin systeemin kehittämiselle kuviojonon indeksin kasvaessa ja tehtävien hankaloituessa.

Opiskelija voi tässä vaiheessa vielä keksiä itse, miten hän merkitsee asioita paperille; kirjoittaako hän tulokset sanallisesti vai joillakin itse keksimillään merkinnöillä. Aritmeettisen lukujonon määritelmän jälkeen annetaan kirjassa käytettävät merkinnät ja pyydetään opiskelijaa merkitsemään ensimmäisessä pohdintatehtävässä saamansa tulokset käyttäen annettua merkintätapaa.

Opiskelijan toivotaan käyttävän myös luovaa ongelmanratkaisua ja muodostavan uudenlaisia ongelmia yhdistelemällä ideoita. Hänen tulisi suhtautua tutkivasti virheisiin ja esittää kysymyksiä. Lisäksi häneltä toivotaan kekseliäisyyttä. [4, s. 379-380]

Keksinnöt voivat olla jonkin pelin säännöt, algoritmi jonkin asian suorittamiseen, jonkin toiminnan selvittäminen tai jopa matemaattisia aksioomia. [4, s. 380] *Aksiooma* on jonkin matemaattisen peruskäsitteen määritelmä, jota käytetään muiden tulosten todistamiseen.

Opiskelijan toivotaan pystyvän kuvittelemaan asioita visuaalisesti mielessään eli luomaan visuaalisen mallin. Hänen tulisi myös tehdä konjektuureja, tutkimalla esim. ohjelmakoodia. Hän voi syöttää ohjelman parametreiksi erilaisia arvoja ja luoda konjektuurin käyttämällä saatua todistusaineistoa, aiempaa kokemustaan aiheesta ja tietoja itse algoritmista. Myös arvaaminen on loistava tieteellinen strategia oikein käytettynä. [4, s. 381-384]

Artikkelissa on annettu myös konkreettisia esimerkkejä matemaatikoiden käyttämistä ajatusmalleista [4, s. 384-401]. Kaiken kaikkiaan matemaattisen päättelyn korostaminen antaa mahdollisuuden myös yhteisen kurssin suunnittelemiseen, vaikka opiskelijoilla olisikin erilaisia jatko-opiskelutavoitteita. [4, s. 401]

Päättelyä tarvitaan yhtä lailla kaikilla aloilla, kuten tutkivassa journalismissa, sairaiden diagnosoimisessa tai autonkorjaamisessa. Matemaattisten ajatusmallien ja sitä kautta mielen mallien (”habits of mind”) syntyminen tapahtuu pitkällä aikavälillä aktiivisen harjoituksen seurauksena. [4, s. 401]

Miten asiantuntijan käyttämät ajatusmallit eroavat noviisin käyttämistä? Viimeisten neljänkymmenen vuoden aikana asiantuntijuutta on selitetty eri tavoin. Aiemmin ajateltiin asiantuntijalla olevan erinomaiset hakustrategiat, joiden avulla hän löytää ratkaisun tiettyyn ongelmaan. [24, s. 123-124]

Tuolloin asiantuntijuutta testattiin ongelmilla, joissa tarvitaan lähinnä yleisiä ongelmanratkaisustrategioita. Myöhemmin huomattiin, että asiantuntija etsii ensin polkua ongelma-avaruudessa yhdistääkseen ongelman ja ratkaisun. Asiantuntijuus nähtiin pystymisenä tehokkaaseen hakuun. Ajateltiin, että ongelman joko tunnistaa tai ei tunnista. [24, s. 124]

Sittemmin hyvin jäsennetyn tiedon ajateltiin olevan ratkaiseva tekijä hakustrategian päättämisessä. Ajateltiin, että asiantuntijoilla ei välttämättä ole erinomaisia hakustrategioita, mutta heidän tietonsa on tehokkaammin jäsentynyttä, kuten kognitiiviset skeemat pitkäaikaisessa muistissa. *Kognitiivinen skeema* voidaan nähdä hierarkkisesti rakentuneena käsitteiden, proseduurien ja strategioiden verkkona. [24, s. 124]

Viime aikoina ongelman tunnistamista on alettu pitämään tärkeimpänä tekijänä asiantuntijuudessa: tehokkaasti jäsentynyt tietämys ohjaa tunnistamista, joka sanelee hakustrategiat. Asiantuntija ja noviisi keskittyvät ongelman eri elementteihin. Asiantuntija miettii ilmiön taustalla olevia periaatteita, kun taas noviisi tarkastelee pinnallisempia havaintoja. Asiantuntija käyttää skeemojaan ongelman tunnistamiseen. [24, s. 124]

3.6 Matemaattinen todistaminen

Matemaattinen todistaminen on olennainen osa matematiikan ymmärtämistä ja ilmaisua [36, s. 1]. Opetusmateriaalissani käydään läpi todistukset lauseille 5.2.5 ja 5.2.7. Todistuksissa käytetään hyväksi annettua määritelmää. Lauseen 5.2.10 todistaminen on jätetty tehtäväksi (tehtävä 11).

Mallitehtävää 5.4.3 seuraavassa "Lisätietoa"-kohdassa todistetaan, että mallitehtävässä löydetty lukujonon yleisen jäsenen lauseke pätee myös silloin, kun $n > 4$. Tehtävä 7 on todistustehtävä.

Todistamista tulisi harjoitella systemaattisesti jo alakoulusta alkaen, jotta se opitaan oikein ja siitä tulee luonteva osa matemaattista ajatteluketjua [36, s. 1-2]. Opettajalla on tärkeä rooli todistamiseen liittyvien periaatteiden ja käytäntöjen tuomisessa lähemmäs matemaattisen yhteisön hyväksymiä todistustapoja. [36, s. 13, s. 16]

Todistusketju pohjautuu yleensä joihinkin yhteisössä yleisesti hyväksyttyihin määritelmiin. Todistuksen pätevyyttä voidaan tarkastella sen pohjalla olevien määritelmien ja aksioomien lisäksi sen muodostamistavan mukaan. Käytetäänkö todistuksessa esim. loogista päättelyä tai onko tulos saatu yleistämällä erityistapauksia? [36, s. 2-3]

Myös todistuksen esitystapaa voidaan tarkastella. Käytetäänkö puhekieltä, algebrallista ilmaisua tms.? Miten hyvin todistus otetaan vastaan siinä ympäristössä, jossa se on kehitetty? Ovatko todistuksessa käytetyt metodit yhteisön – tässä tapauksessa oppilaiden ja opettajan yhdessä – hyväksymiä? [36, s. 2-3, s. 12-13, s. 17]

Empiiriset eli kokemusperäiset todistukset eivät ole matemaattisia todistuksia, vaikka kokeilemalla voidaankin saada tietoa tutkittavasta asiasta. Sen sijaan matematiikan tunnilla tapahtuva todistaminen voi nojautua *deduktiiviseen päättelyyn*, jossa tosista premisseistä seuraa välttämättä tosi johtopäätös. [36, s. 4]

Matemaattista todistamista voidaan harjoitella luokassa esimerkiksi huolellisesti valittujen matemaattisten ongelmanratkaisutehtävien avulla. Opiskelijat voivat ensin miettiä ongelmaa yksin tai pareittain, sitten pienemmissä ryhmissä ja lopulta koko luokan kanssa yhdessä. [36, s. 4-5] Opettaja ohjaa keskustelua kyselemällä ja jakamalla puheenvuoroja. [36, s. 6]

Lopuksi opettajan tulisi vetää yhteen käsitellyt asiat. Mikäli jonkun opiskelijan esittämä todistus oli pätevä, mutta se ei saanut yleistä hyväksyntää luokassa, opettajan tulisi esittää näkökulmia, joiden avulla opiskelijat ymmärtäisivät todistuksen, ja voisivat täten lisätä kyseisen todistustavan luokassa yleisesti hyväksyttyjen tapojen listaan. [36, s. 13-16]

3.7 Keskustelu opetusmetodina

Luokassa käytäviin opettajajohtoisiin keskusteluihin keskitytään artikkelissa *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell* [35]. On haastavaa saada aikaan koko luokan oppimista edistävä keskustelu, jossa hyödynnetään yksittäisten opiskelijoiden vastauksia. [35, s. 314, s. 320, s. 332]

Opiskelijoille annettava tehtävä tulisi ensin ohjeistaa hyvin. Heille tulee painottaa ratkaisun kirjoittamista ylös perusteluineen, sillä ne on tarkoitus käsitellä yhdessä työskentelyn lopuksi. Tehtävien tulisi edistää käsitteiden ymmärtämistä, sekä ajattelun, järkeilyn ja ongelmanratkaisun taitoja. [35, s. 315] Seuraavaksi esiteltävät vinkit sopivat hyvin opetusmateriaalissani olevien ongelmanratkaisutehtävien tai pohdintojen käsittelyyn.

Opiskelijoiden työskennellessä tehtävän parissa, opettaja voi kiertää luokassa ja tehdä huomioita niistä tavoista, joilla he yrittävät ratkaista tehtävää. Hän voi jo siinä vaiheessa valita, mitkä ratkaisut olisi hyödyllistä näyttää lopuksi koko luokalle ja missä järjestyksessä ne kannattaisi esittää. Hänen tulisi myös miettiä, mitä matemaattisia periaatteita opiskelijoiden ratkaisujen taustalla on. [35, s. 326]

Opettajan ei tulisi puuttua liikaa opiskelijoiden työskentelyyn tai vastauksiin, mutta hän voi ohjata oppilasta oikeaan suuntaan. Kierrellessään luokassa hän voi kuuntelemalla ja kyselemällä yrittää selvittää, mikä virheellinen ajatus jonkin väärän vastauksen takana voisi olla, ja onko sama virhekäsitys kenties muillakin. [35, s. 326]

Lopuksi opettaja voi pyytää valitsemiaan opiskelijoita esittämään ja selittämään ratkaisunsa, joista sitten keskustellaan yhdessä luokan kanssa. Myös virheellisiä ratkaisuja on joskus hyödyllistä käydä läpi. Tällöin opettajan tulisi tiedostaa, miten opiskelijan virhekäsitys on syntynyt, ja pyrkiä oikaisemaan se. Opettaja voi pyytää opiskelijoita miettimään, mitä yhteisiä piirteitä tai eroavaisuuksia eri ratkaisuilla on. [35, s. 327-328, s. 331]

Jonkun toisen opiskelijan ratkaisu voi saada opiskelijan ymmärtämään oman ratkaisunsa mahdottomuuden. [35, s. 331] Opettaja voi esittää myös jonkin sellaisen tavan, jota kukaan luokassa ei käyttänyt. Eräs tapa lisätä ratkaisutapojen määrää keskustelussa, on antaa ohjeita jo työskentelyvaiheessa sellaiselle opiskelijalle, joka tarvitsee vain hieman apua löytääkseen uuden ja tärkeän ratkaisutavan. [35, s. 328]

Opettajan tulisi pyrkiä rakentamaan erilaisten ratkaisujen avulla opiskelijalle polku ymmärtää ratkaisutavan taustalla olevat matemaattiset periaatteet. Ei siis riitä, että joitakin opiskelijoita pyydetään esittämään ratkaisujaan muille, vaan on tärkeää, että opettaja selventää matemaattiset periaatteet opiskelijoille eri ratkaisujen takana. [35, s. 329-331, s. 333]

Matemaattinen tehtävä voidaan usein ratkaista useilla eri tavoilla. Kaikki tavat eivät ole yhtä hyviä, joten ratkaisutapojen tarkasteleminen käyttämällä niitä erilaisissa tilanteissa hyödyttää opiskelijaa. Opettaja voi esimerkiksi antaa seuraavalla tunnilla samanlaisen, mutta vaikeamman tehtävän. [35, s. 331]

Tällöin opiskelijat saavat tilaisuuden miettiä aiemmin keksimänsä ratkaisun etuja ja haittoja verrattuna muiden keksimiin ratkaisuihin. Lopulta opettaja voi esittää vielä kysymyksiä, jotka vaativat enemmän kekseliäisyyttä ja osaamisen soveltamista. [35, s. 331]

Ratkaisutavat voidaan järjestää monella tavalla. Jos monella on sama ratkaisutapa, voidaan käydä se ensin läpi ja sen jälkeen harvinaisemmat ratkaisutavat. Tai eri tavoista voidaan muodostaa ikään kuin ajatusketju, jossa siirrytään konkreettisesta abstraktimpaan, eli helpommin ymmärrettävästä monimutkaisempaan. Tai voidaan ensin käsitellä jokin monella opiskelijalla esiintynyt virhekäsitys. [35, s. 329-330]

Jos keskustelussa käsitellään vain oikeita ratkaisutapoja tai jos opettaja osoittaa työskentelyn aikana jonkin ratkaisutavan olevan väärin, opiskelijat ajattelevat opettajan arvostavan vain oikeaa ratkaisua, eikä opiskelijan matemaattista päättelyketjua. Opettajan tulisi välttää myös arvottamasta ratkaisutapoja paremmuusjärjestykseen ja jättää se opiskelijoiden itsensä tehtäväksi. [35, s. 333]

Artikkelissa annetaan neuvoja opettajalle keskustelun hallintaan. Opiskelijoiden vastaukset saattavat olla joskus hyvinkin yllättäviä ja niitä voi olla vaikea ymmärtää. Opettajan kannattaa jo etukäteen miettiä minkälaisia – oikeita tai vääriä – ratkaisutapoja opiskelijat voisivat keksiä. [35, s. 321-323]

Opiskelijoiden tyypillisiä ratkaisutapoja tiettyissä tehtävissä, sekä tietoa käsitteiden ymmärtämisestä voi etsiä myös aiheeseen liittyvistä tutkimuksista. [35, s. 323, s. 326] Mikäli opiskelija esittää ratkaisutavan, jota opettaja pitää tärkeänä, mutta jonka taustalla olevaa matemaattista periaatetta hän ei heti keksi, hän voi lykätä sen käsittelemisen seuraavalle tunnille. [35, s. 328]

Arvaamattomien tilanteiden käsittely vaatii improvisointitaitoja, laajaa ymmärrystä käsiteltävästä asiasta ja pedagogisia taitoja. Opiskelijoiden tunteminen auttaa myös keskustelun ohjaamisessa. Opettajan tulisi yhtä aikaa huomioida opiskelijat, heidän työskentelynsä, ratkaisunsa ja tunnin päämäärä eli opetettavan asian oppiminen. [35, s. 320]

Opettaja voi kehittää taitojaan kerta toisensa jälkeen. Hän voi esim. asettaa itselleen välitavoitteita. Ensimmäisellä opetuskerralla hän voi pyrkiä saamaan selville, minkä tyyppisiä opiskelijoiden vastaukset yleensä ovat. Seuraavalla kerralla hän voi pyrkiä kehittämään taitojaan oppilaiden valitsemisessa taululle. Ja myöhemmin hän voi kehittää tapoja järjestää vastaukset ja yhdistää niiden taustalla olevat periaatteet. [35, s. 334]

Opiskelijoiden työskentelyaika kannattaa käyttää hyödyksi tarkkailemalla heidän keskustelujaan ja käsitteiden käyttämistä. Samalla voi valita sopivia ratkaisutapoja keskustelua varten ja miettiä sopivaa järjestystä niiden esittämiseen. Muistiinpanojen tekeminen työskentelyn aikana saattaa helpottaa keskustelun ohjaamista. [35, s. 321, s. 326]

3.8 Tehtävätyypit

Uuden opetussuunnitelman [32] mukaan tehtävien tulisi kytkeytyä arkielämään ja niiden tulisi olla aihepiiriltään opiskelijoiden elämään liittyviä. Uusi asia pitäisi kytkeä aiemmin opittuun sekä laajempaan kokonaisuuteen. Tehtävien avulla tulisi myös kehittää opiskelijan ongelmanratkaisutaitoja.

Opetusmateriaalissani olevat harjoitukset on pyritty valitsemaan siten, että ne olisivat mielenkiintoisia ja liittyisivät johonkin luonnolliseen arkielämän tilanteeseen. Esim. talletusten laskemiseen (tehtävä 1), istumapaikkojen laskemiseen amfiteatterissa (tehtävä 9) tai kloonautuvien vihollisten laskemiseen pelissä (pohdinta 5.3.1).

Ongelmanratkaisutehtäviä löytyy myös opetusmateriaalistani. Esim. tehtävässä 9 annetaan tietoja, joiden perusteella opiskelijan on ensin pääteltävä amfiteatterin ensimmäiselle riville mahtuvien ihmisten lukumäärä ja tämän jälkeen yhdistettävä tehtävä aritmeettisen summan laskemiseen. Tehtävä on annettu muodossa ”Arvioi kuinka monta lippua teatteriin voi myydä.”.

Pohdinnassa 5.2.11 tehtävänä on laskea annettu aritmeettinen summa mahdollisimman monella eri tavalla ja lopuksi vertailla, mikä tavoista on nopein. Vihjeeksi on annettu myös kuva.

Tehtävä voi olla myös puhtaasti matemaattinen lähtökohdaltaan. Jos esimerkit ovat kovin vaikeita, saattaa opetettava asia jäädä muiden yksityiskohtien jalkoihin. Olen pyrkinyt jättämään soveltavat tehtävät harjoitustehtäviksi, ja käsittelemään mallitehtävissä selkeämpiä tapauksia.

Tehtävä voi olla myös perinteinen suora kysymys. Sanallisissa tehtävissä kieli tuo omat haasteensa. Tehtävä voi olla avoin tai suljettu. Avoimessa tehtävässä voi olla useita eri vastausvaihtoehtoja ja ratkaisutapoja [15]. Suljettuun tehtävään on vain yksi oikea vastaus, mutta siihen voidaan päätyä monella eri tavalla.

Olen pyrkinyt välttämään turhia kompastuskiviä sanallisissa tehtävissa, mutta esim. tehtävässä 9 annetaan henkilöiden lukumäärä muodossa "teatterinjohtaja ja 17 näyttelijää". Kyseessä on tahallinen kielellinen kompa, joka opiskelijan tulisi huomata.

Opiskelijalle voidaan antaa useampi valmis ratkaisu ja pyytää kuvaamaan, miten niihin on päädytty ja mikä tavoista on paras. Vastaavasti voidaan antaa oikea ja väärä ratkaisutapa. Tällöin voidaan pyytää häntä valitsemaan niistä toinen ja selittämään, miksi juuri se on oikea ratkaisu. Esim. pohdinnassa 5.3.3 on annettu kaksi vastausta ja kysytään kumpi niistä on oikein.

Pohdintatehtävän avulla voidaan johdatella opiskelijan ajatuksia virittymään käsiteltävään asiaan, ja hän saa tilaisuuden oivaltaa asioita itse. Opetusmateriaalini jokaisessa luvussa on pohdintatehtäviä. Lisäksi kappaleessa "Aritmeettinen summa" kerrotaan tarina Gaussista ja kysytään, miten hän mahtoi ratkaista saamansa tehtävän niin nopeasti.

Tehtävät voivat sisältää myös hämäystietoja, jolloin opiskelijan täytyy valita annetuista tiedoista tehtävän kannalta olennaiset. Opiskelijalle voidaan myös antaa tehtävässä tarvittavat tiedot ja pyytää häntä keksimään niistä oma tehtävä. Tai häntä voidaan pyytää keksimään tehtävä kokonaan itsenäisesti. Tämän jälkeen tehtäviä voidaan vaihtaa parin kanssa. Tehtävä voi olla myös vanha ylioppilastehtävä.

Luokassa voidaan työskennellä myös seuraavalla tavalla. Jaetaan ensin opiskelijat pienryhmiin ja annetaan jokaiselle ryhmälle tietty aihe opiskeltavaksi. Kun he ovat opiskelleet aiheen pienryhmässä, pienryhmät jaetaan uudelleen siten, että jokaiseen ryhmään tulee yksi opiskelija alkuperäisistä pienryhmistä. Ryhmän jäsenet opettavat sitten aiheet toisilleen.

Ongelmanratkaisutehtävän antamisessa ja ohjeistuksessa opettajalla on tärkeä rooli. Artikkelissa *Erilaisia tapoja johdatella ongelmanratkaisutehtävään* tarkastellaan ongelmanratkaisutehtävän käyttämistä matematiikan opetuksessa ja opettajan toiminnan merkitystä tehtävänantovaiheessa sekä opiskelijoiden kyvykkyyttä ratkaista epätavanomaista tehtävää [29, s. 82].

Käsiteltäessä ongelmanratkaisutehtäviä on keskeistä matematiikan oppimisen kannalta opiskelijoiden ongelmanratkaisusitkeyden kehittäminen. Tällä tarkoitetaan opiskelijoiden kykyä yrittää ratkaisemista, vaikka he eivät heti keksisikään oikeaa ratkaisumenetelmää. Tähän tähtääviä opettajan toimenpiteitä ovat esim. myönteisen ilmapiirin luominen, opiskelijoiden luovuuden ja tiedollisten valmiuksien kehittäminen sekä ongelmanratkaisuasenteiden parantaminen. [29, s. 84]

Opettajan tulisi antaa opiskelijoille tilaisuuksia ajattelunsa kehittämiseen ja ajatustensa ilmaisemiseen. Ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen on myös oppimisprosessi. [29, s. 97] Opiskelijoita voi aluksi johdattaa aiheeseen käymällä yhdessä esimerkin läpi. Johdatteleva esimerkki voi olla hieman helpompi versio varsinaisesta tehtävästä, esim. artikkelissa on käytetty aritmagon-tehtävää, jonka avulla johdatellaan ensin kaavion rakenteen ymmärtämiseen. [29, s. 85-86]

Tehtävää voi jäsentää ja opiskelijoita voi auttaa eteenpäin täsmällisten kysymysten avulla: "Mistä sä aloitit?", "Mitä sä teit tässä?", "Mitä huomaat noista...", "Löydätkö samoja...?". [29, s. 95] Mikäli opettaja huomaa, että opiskelijat eivät tee oikeita asioita, voi työskentelyn keskeyttää ja miettiä tehtävää yhdessä. [29, s. 94]

On ymmärrettävää, että jos opettaja ei korosta ratkaisustrategian kirjoittamista, opiskelijat mielellään ohittavat tämän vaiheen [29, s. 96]. "Kuinka moni huomasi, että...?" "Miksi jotkut luvut eivät toimi?" Opiskelijat voivat pohtia tehtävää yksin tai kaverin kanssa ääneen. [29, s. 91]

Tehtävässä epäonnistunut opiskelija pitäisi siis saada yrittämään jotakin toista tapaa. Pitäisi välttää tilanteita, joissa opiskelijalle jää sellainen olo, että hän on huono matematiikassa, eikä "tästä tule yhtään mitään". Opiskelijan tulisi kohdistaa itsekritiikki tehtävän ratkaisuun, ei itseensä. Lisäksi jokaisen opiskelijan tulisi saada oman tasonsa mukaisia haasteellisia tehtäviä.

Opettajalla on molempien tavoitteiden saavuttamisessa tärkeä rooli. Hän voi ohjata opiskelijaa tarkastelemaan tehtävää uudelleen. Toisaalta hän voi tarvittaessa antaa helpompia tai haastavampia tehtävänantoja tietyille opiskelijoille, eli eriyttää alas- tai ylöspäin.

Opiskelijan onnistumisen tunteet ruokkivat itseään ja kannustavat häntä yrittämään seuraavallakin kerralla. Myös itseohjautuvat opiskelijat tarvitsevat työskentelynsä ohjausta, jäsentämistä ja palautetta.

4 Nykyiset oppikirjat

4.1 Kappalejako ja sisältö

Lukujonoihin liittyen käsittelen aiheet aritmeettinen lukujono ja summa, muut kuin aritmeettiset ja geometriset lukujonot sekä rekursiivisesti määritelty lukujono. Tutustuin sisällön suunnittelua varten mahdollisimman moneen pitkän ja lyhyen matematiikan oppikirjaan.

Pitkän oppimäärän mukaisia kirjoja ovat *Laudatur* [10], *Lukion Calculus* [18], *Matematiikan taito* [6], *Pitkä matematiikka* [21], *Pitkä sigma* [2] ja *Pyramidi* [16, 23, 17]. Lyhyen oppimäärän mukaisia kirjoja ovat *Kertoma* [33], *Lyhyt matikka* [1], *Sigma* [14], *Summa* [5] ja *Variaabeli* [8, 9].

Kokosin eri kirjoissa käsiteltyjä asioita yhteen ja valitsin niistä mielestäni sopivan kokonaisuuden yhteiselle kurssille. Yhteistä materiaalia varten tein kompromisseja sisällön suhteen, sillä pitkässä ja lyhyessä matematiikassa lukujonojen käsittely poikkesi melkoisesti toisistaan. Eri asioiden painotuksissa oli myös selviä eroja kirjojen välillä. Valitsin käsitteistä mielestäni kuvaavimmat ja käytän niitä yhdenmukaisesti opetusmateriaalissa.

Alla olevassa listassa on lueteltu lukion oppikirjoissa käsiteltäviä asioita ja tyypillisiä esimerkkitehtäviä lukujonoihin liittyen. Listasta puuttuu lukujonojen käsitteleminen funktiona ja geometrinen lukujono ja summa, koska niitä ei käsitellä tässä tutkielmassa.

Yleinen lukujono ja summa:

- päättyvä ja päättymätön lukujono ja niiden merkintätapa
- lukujonon jäsenet voidaan valita jonkin säännön mukaan tai satunnaisesti
- jäsenten merkitseminen kirjaimen a ja indeksin n avulla
- yleisen jäsenen lausekkeen määrittäminen
- kun tunnetaan yleisen jäsenen lauseke, voidaan määrittää
  - mikä tahansa lukujonon jäsenistä
  - kuuluuko jokin tietty luku lukujonoon
- indeksoinnin vaikutus yleisen jäsenen lausekkeeseen

- lukujonon jäsenten summa

Rekursiivinen lukujono:

- rekursiivisesti määritelty lukujono, alkuehdot ja rekursiosääntö
- jäsenten määrittäminen, kun tunnetaan 1. jäsen ja rekursiosääntö
- yleisen jäsenen lausekkeen etsiminen, kun tunnetaan 1. jäsen ja rekursiosääntö
- lausekkeen todistaminen yleisen jäsenen lausekkeeksi

Aritmeettinen lukujono:

- päättyvä ja päättymätön aritmeettinen lukujono, differenssi d
- funktion kuvaaja muodostuu suoralla olevista pisteistä
- differenssin, yleisen jäsenen lausekkeen ja tietyn jäsenen määrittäminen, kun tunnetaan aritmeettinen lukujono
- kun tunnetaan 1. jäsen ja differenssi, voidaan määrittää
  - yleisen jäsenen lauseke ja siten mikä tahansa lukujonon jäsenistä
  - positiivisten tai negatiivisten jäsenten lukumäärä
- yleisen jäsenen lausekkeen määrittäminen, kun aritmeettinen lukujono on annettu rekursiivisessa muodossa
- differenssin määrittäminen, kun tunnetaan jotkin kaksi jäsentä ja niiden indeksit
- 1. jäsenen määrittäminen, kun tunnetaan differenssi ja jokin jäsen
- kuuluuko jokin tietty luku lukujonoon
- lukujonon todistaminen aritmeettiseksi, kun tunnetaan yleisen jäsenen lauseke

Aritmeettinen summa:

- aritmeettisen lukujonon jäsenten summa

Kaikissa edellä mainituissa oppikirjoissa yleinen lukujono käsitellään ennen aritmeettista ja geometrista lukujonoa ja niiden summia. Lukujonon rekursiivinen määritelmä on useissa kirjoissa yhdistetty yleisen lukujonon käsittelyyn, mutta joissakin se käsitellään omana kokonaisuutenaan luvun lopussa (esim. *Lyhyt matikka*, *Matematiikan taito*, *Sigma* ja *Summa*) tai aritmeettisen ja geometrisen lukujonon jälkeen, mutta ennen niiden summia (esim. *Pitkä matematiikka*).

Useimmissa lyhyen matematiikan oppikirjoissa (*Kertoma*, *Lyhyt matikka*, *Sigma* ja *Summa*), sekä *Matematiikan taito* -kirjassa, käsitellään aritmeettinen lukujono ja summa ennen geometristä lukujonoa ja summaa, kun taas oppikirjoissa *Calculus*, *Laudatur*, *Pitkä matematiikka*, *Pitkä sigma*, *Pyramidi* ja *Variaabeli* käydään ensin läpi aritmeettinen ja geometrinen lukujono ja sitten vasta näiden summat.

Useissa kirjoissa on lisäksi soveltava osuus, jossa käsitellään lainalaskentaa, säästämistä tai muita soveltavia tehtäviä. Joissakin kirjoissa on myös aiheeseen liittyviä tietoiskuja tai historiaa.

Alla olevassa listassa on esitelty sähköiseen oppikirjaan tulevien kappaleiden sisällöt. Kirjan kolmas osio alkaa lukujonon piirtämisellä koordinaatistoon. Aritmeettinen lukujono ja summa käsitellään yhtenä kokonaisuutena ennen geometrista lukujonoa ja summaa.

Yleinen lukujono ja summa käsitellään yleisestä järjestyksestä poiketen vasta näiden jälkeen, sillä siihen liittyvät asiat ovat astetta teoreettisempia. Kappaleen nimeksi päätettiin antaa ”muut lukujonot”, sillä siinä käsitellään muita kuin aritmeettisia tai geometrisia lukujonoja.

Lopuksi käsitellään rekursiivinen lukujono. Kappale on nimetty rekursiivisesti määritellyksi lukujonoksi, sillä rekursiivinen tapa on vain yksi tapa merkitä jokin lukujono. Opetusmateriaalissa ei käsitellä päättymättömiä lukujonoja.

Aritmeettinen lukujono ja summa:

- pohdintatehtävä kuviojonon avulla
- aritmeettisen lukujonon määritelmä
- yleinen jäsen ja sen lauseke, differenssi
- n. jäsenen kaavan soveltaminen ja annettujen lauseiden todistaminen
- tietyn luvun kuuluminen lukujonoon eli löytyykö kokonaislukuindeksi

- lukujonon jäsenten summa ja erilaisia tapoja laskea se

Muut lukujonot:

- pohdintatehtävä Fibonaccin lukujonoon liittyen
- yleisen jäsenen lausekkeen etsiminen
- indeksoinnin vaikutus yleisen jäsenen lausekkeeseen
- indeksin merkitseminen alaviitteeksi
- lukujonon jäsenten summan merkitseminen

Rekursiivisesti määritelty lukujono:

- pohdintatehtävänä merkitä sanallisesti annettu lukujono $a(1), a(n-1)$ ja $a(n)$ avulla
- rekursiivinen merkintätapa: alkuehdot ja rekursiosääntö
- jäsenten määrittäminen ja yleisen jäsenen lausekkeen etsiminen
- lausekkeen todistaminen yleisen jäsenen lausekkeeksi induktiota käyttäen (lisätietoa)

Sisällysluettelo löytyy kokonaisuudessaan liitteestä A. Siitä näkyy miten kyseiset aihealueet sijoittuvat sisältökokonaisuuteen. Aritmeettisen lukujonon ja summan käsittelyyn on suunniteltu käytettäväksi noin kaksi oppituntia, muiden kuin aritmeettisten ja geometristen lukujonojen käsittelyyn yksi oppitunti ja rekursiivisesti määritellyn lukujonon käsittelyyn yksi oppitunti.

4.2 Käsitteet ja aiheen käsittely

Eri oppikirjoissa käytetään erilaisia nimityksiä lukujonoihin liittyville käsitteille. Lukujonon rajallisuudesta käytetään sanoja *päättyvä* ja *päättymätön* tai *äärellinen* ja *ääretön*. Lukujonon lukuja kutsutaan joko *jäseniksi* tai *termeiksi*. *Järjestyslukua* kutsutaan joissakin kirjoissa *indeksiksi*.

Aritmeettisen lukujonon kahden peräkkäisen luvun erotusta kutsutaan *erotusluvuksi*, *erotusvakioksi* tai *differenssiksi*. Lauseketta, jolla kaikki lukujonon luvut voidaan muodostaa, kutsutaan joissakin oppikirjoissa *analyyttiseksi lukujonoksi* ja toisissa *yleisen jäsenen lausekkeeksi*.

Käytän opetusmateriaalissa seuraavia käsitteitä: lukujono, jäsen, päättyvä ja päättymätön lukujono, indeksi n, indeksointi, yleinen jäsen $a(n)$, yleisen jäsenen lauseke (esim. $a(n) = 5n + 1$), rekursiivisesti määritelty lukujono, alkuehdot, rekursiosääntö, summa, differenssi d, aritmeettinen lukujono ja aritmeettinen summa. Käytän lukujonon jäsenten merkitsemiseen funktioista tuttua tapaa eli merkintää $a(n)$ merkinnän a_n sijaan.

Pitkässä ja lyhyessä matematiikassa käsitellään samoja asioita, mutta lähestymistapa on erilainen. Lyhyen matematiikan kirjoissa on enemmän tekstiä ja esimerkkitehtävissä painottuu tekemällä oppiminen. Tehtävänä on esim. selvittää jonkin luvun kuuluminen lukujonoon tai tietyn jäsenen määrittäminen, kun yleisen jäsenen lauseke on annettu.

Pitkän matematiikan esimerkkitehtävät ovat teoreettisempia ja teksti on niukempaa. Esim. todistamistehtävät ja positiivisten tai negatiivisten jäsenten lukumäärän selvittäminen liittyvät pitkään matematiikkaan. Pitkän matematiikan tehtävissä on useammin käytetty jotakin ylimääräistä muuttujaa tehtävän vaikeuttamiseksi, esim. ”Määritä x ja lukujonon 4. termi, kun lukujono $(2, x, 6x, ...)$ on aritmeettinen.”.

Joissakin matematiikan oppikirjoissa lähestytään uutta aihetta luettelemalla ensin käsitteet ja määrittelyt, jonka jälkeen käydään läpi melko monimutkaisiakin esimerkkitapauksia. Tämä tapa tuntuu melko raskaalta ja vaatii opiskelijalta hyvää sisäistämisen taitoa.

Joissakin oppikirjoissa annetaan aluksi opiskelijalle pohdintatehtäviä, joiden avulla hänellä on mahdollisuus itse oivaltaa tarvittavat asiat, ennen kuin niille annetaan viralliset nimet ja täsmälliset määritelmät. Näin opiskelijalle muodostuu ensin käsitys siitä, mihin hän kyseisiä käsitteitä ja määrittelyjä tarvitsee.

Opetusmateriaalissani pyrin ensin herättelemään opiskelijan mielenkiinnon aiheeseen pohdintatehtävän avulla, kuten esim. *Sigma*-sarjassa. Tekstin ja matemaattisten lausekkeiden formalismi on pyritty pitämään matalana ja päättelyn osuutta on korostettu.

Tekstiosuus pyrkii haastamaan opiskelijan pohtimaan ja päättelemään itse asioita. Mallitehtävien ja esimerkkitehtävien määrä on pyritty pitämään kohtuullisena, mutta riittävän kattavana. Samalla niistä on pyritty karsimaan turha vaikeus pois, jotta kokonaisuudesta tulisi selkeä ja helposti sulateltava.

4.3 Tehtävät

Vertailin lukion matematiikan oppikirjoja myös tehtävien osalta. Käytin joitakin kirjojen tehtävistä myös omassa materiaalissani, usein kuitenkin muokattuina tavalla tai toisella. Tällä hetkellä käytössä olevissa kirjoissa ei kuitenkaan löytynyt tietyn tyyppisiä tehtäviä, joten laadin niitä itse. Ohjaajiltani sain myös hyviä vinkkejä tehtävien malleiksi.

Etsin lisäksi ylioppilaskokeiden tehtäviä lukujonoihin ja summiin liittyen. Uudemmat kokeet löytyvät verkosta [39, 40, 22]. Vanhempia ylioppilaskokeita löytyy sekä verkosta [37] että kirjoista [28, 7, 27]. Kirjoissa *Abi pitkä matematiikka* [11, 12] ja *Abi lyhyt matematiikka* [13] on koottu ylioppilaskokeiden tehtäviä aihealueittain vuosilta 1990 - 2011.

4.4 Kuvat

Lukion matematiikan oppikirjoissa on yleisesti ottaen melko vähän kuvia. Kuvat ovat useimmiten taulukoita tai kuvaajia. Joistakin oppikirjoista löytyy myös satunnaisia affektiivisia kuvia, jotka kuitenkin liittyvät jollakin tavalla aihealueeseen, esim. päivänkakkara tai simpukka.

Päivänkakkaran kuva liittyy Fibonaccin lukujonoon siten, että kyseisen kukan terälehtien määrä vastaa jotakin Fibonaccin lukujonon lukua. Simpukan rakenne puolestaan noudattaa kultaista leikkausta. Fibonaccin lukujonon peräkkäisten lukujen suhde lähestyy kultaisen leikkauksen lukua $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180...$

Joissakin tehtävissä kuva on aivan välttämätön, sillä esim. jonkin geometrisen kuvion selittäminen sanallisesti olisi melko mahdotonta. Kuvien tulisi tukea oppimista. Kuvat myös keventävät raskasta matemaattista tekstiä.

Opiskelijoiden, joiden äidinkieli on muu kuin suomi, on helpompi ymmärtää kuvallinen tehtävä. Mielenkiintoinen kuva voi saada mielikuvituksen lentoon ihan toisella tavalla kuin pelkkä kuiva teksti. Monilla opiskelijoilla on vaikeuksia sanallisten tehtävien ymmärtämisessä, ja kuvan avulla voidaan selkeyttää tehtävänantoa.

5 Opetusmateriaali: lukujonot

5.1 Johdanto

Tämä luku koostuu tekemästäni opetusmateriaalista. Siinä käsitellään aritmeettiseen lukujonoon ja summaan liittyvät asiat sekä lukujono formaalisti. Alustava sisällysluettelo löytyy kokonaisuudessaan liitteestä A, jonne on merkitty myös suunnitellut tuntimäärät. Oppikirjan kolmas osio "Lukujono ja summa" sisältää kolme lukua, joiden käsittelemiseen menee noin yhdeksän oppituntia.

III Lukujono ja summa (9 h)

7. Lukujono koordinaatistossa (2 h)

8. Aritmeettinen ja geometrinen lukujono (5 h)
   8.1 Aritmeettinen lukujono ja summa
   8.2 Geometrinen lukujono ja summa

9. Lukujono formaalisti (2 h)
   9.1 Muut lukujonot
   9.2 Rekursiivisesti määritelty lukujono

Vastaukset opetusmateriaalin tehtäviin löytyvät liitteestä C. Opetusmateriaalin jälkeisestä hakemistosta löytyy sähköiseen oppikirjaan tulevat käsitteet sivunumeroineen. Hakemistossa mainitut sivunumerot viittaavat tällä hetkellä tämän tutkielman sivuille.

Osa lukujonojen käsittelystä kuuluu toiseen Pro gradu -tutkielmaan. Lukujonon jäsenten merkitsemistapa kirjaimen a avulla, esim. $a(1)$, käsitellään jo osion ensimmäisessä luvussa "lukujono koordinaatistossa".

Opetusmateriaalin lopullinen ulkoasu tulee olemaan erilainen kuin tässä tutkielmassa esitetty, sillä ulkoasua muokataan myöhemmin sähköiseen kirjaan sopivaksi. Olen käyttänyt laatikoita ja tekstin tummennusta tehostuskeinoina, mutta nekin saattavat muuttua kirjan lopullisessa versiossa.

Samoin tehtävien numeroinnit muuttuvat. Tein tarvittavat ympäristöt LaTeX-ladontaohjelmaa varten jokaiselle tekstin osiolle erikseen (mallitehtävä, lause, harjoitustehtävä jne.). Ympäristöjen avulla kirjan ulkoasun muokkaaminen sujuu helpommin.

Mikäli kyseessä on ylioppilaskokeen tehtävä, kokeen vuosiluku ja tehtävän numero on merkitty näkyviin. Pieni kirjain [k tai s] tarkoittaa lyhyen ja iso kirjain [K tai S] pitkän matematiikan tehtävää. Esim. [K15, 8] tarkoittaa kevään 2015 pitkän matematiikan tehtävää 8.

Opetusmateriaaliin liittyy opettajan opas, joka löytyy luvusta 6. Siinä esitellään lyhyesti kappaleiden sisällöt ja käydään läpi pohdintatehtävien käsittelyä.

5.2 Aritmeettinen lukujono ja summa

5.2.1 Aritmeettinen lukujono

Pohdinta 5.2.1 Alla on muodostettu kuvioita napeista.

a) Mikä on kuviojonon neljäs kuvio?

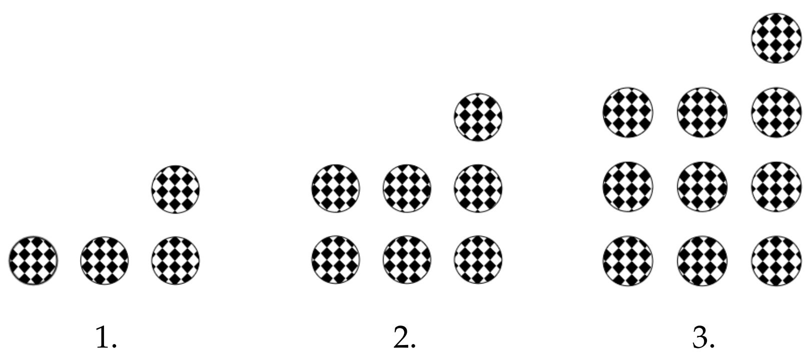
b) Mitkä ovat kuuden ensimmäisen kuvion nappien lukumäärät?

c) Montako nappia on 14. kuviossa?

d) Miten saat laskettua minkä tahansa jäsenen lukujonossa?

e) Kuinka monennessa kuviossa on 97 nappia?

f) Jos kuviossa on 117 nappia, voiko se kuulua tähän kuviojonoon?



Tiettyyn järjestykseen laitettuja lukuja, kuten pohdintatehtävän nappien lukumääriä, kutsutaan *lukujonoksi*. Lukujonon jäsenet merkitään sulkeiden sisään ja ne erotetaan toisistaan pilkulla.

Esimerkki 5.2.2 Lukujonossa (4) on yksi jäsen.
Lukujonossa $(4, 7, 10)$ on kolme jäsentä.

Määritelmä: Lukujono on aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen jäsenen erotus on jokin tietty luku eli vakio.

Esimerkki 5.2.3 Lukujono (1,5,9,13,17) on aritmeettinen.
Lukujono (1,5,13,9,5) ei ole aritmeettinen.

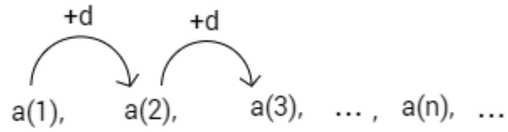
Aritmeettisen lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina vakio, jota kutsutaan **differenssiksi** d.

Järjestysnumeroa voidaan merkitä kirjaimella n, jolloin n. jäsen merkitään $a(n)$. Järjestysnumeroa kutsutaan myös **indeksiksi**.

Lauseketta, jonka avulla voidaan selvittää mikä tahansa lukujonon jäsenistä, kutsutaan **yleisen jäsenen lausekkeeksi**. Aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen lauseke voidaan selvittää lukujonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

Pohdinta 5.2.4 Esitä pohdintatehtävässä 5.2.1 esiin tulleet asiat formaalisti eli käyttäen matemaattisia merkintöjä. Esitä lukujono, ensimmäinen jäsen, 14. jäsen, differenssi ja yleisen jäsenen lauseke. Kuvio, jossa on 97 nappia, voidaan esittää muodossa $a(\quad) = 97$.

Lause 5.2.5 Aritmeettisen lukujonon jäsen $a(n) = a(1) + (n-1)d$, missä $a(1)$ on lukujonon ensimmäinen jäsen ja d kahden peräkkäisen jäsenen erotus.



Lause 5.2.5 voidaan todistaa esimerkiksi seuraavalla tavalla. Tarkastellaan ensin aritmeettista lukujonoa $(a(1), a(2), a(3))$. Muodostetaan lausekkeet jäsenten $a(3)$ ja $a(2)$, sekä jäsenten $a(2)$ ja $a(1)$ välisestä erotuksesta. Indeksin arvo on kolme eli $n = 3$.

Lausekkeet voidaan laskea allekkain yhteen. Kun lasketaan kahden lausekkeen vasemmat puolet yhteen ja oikeat puolet yhteen, saadun lausekkeen yhtäsuuruus säilyy.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & & & & a(3) & - & a(2) & = & d \\
+ & & & & a(2) & - & a(1) & = & d \\
\hline
 & a(3) & - & a(2) + & a(2) & - & a(1) & = & 2d \\
 & a(3) & & & & - & a(1) & = & 2d \\
 & a(3) & & & & & & = & a(1) + 2d
\end{array}
$$

Yhteenlaskettavien lausekkeiden lukumäärä eli luvun d kerroin saadaan viimeisen ja ensimmäisen jäsenen indeksien vähennyksenä eli $(3 - 1)$. Lausekkeeksi saadaan siis $a(3) = a(1) + (3 - 1)d$.

Samalla tavalla voidaan todistaa lause $a(n) = a(1)+(n-1)d$. Tällöin tarvitaan $(n - 1)$ kappaletta lausekkeita.

$$
\begin{array}{llcll}
 & a(n) & - & a(n-1) & = d \\
+ & a(n-1) & - & a(n-2) & = d \\
\cdots & & & & \cdots \\
+ & a(2) & - & a(1) & = d \\
\hline
a(n) - a(n-1) + a(n-1) - ...+ & a(2) & - & a(1) & = (n-1)d \\
a(n) & & - & a(1) & = (n-1)d \\
a(n) & & & & = a(1) + (n-1)d
\end{array}
$$

Tämä päättely todistaa lauseen 5.2.5.

Mallitehtävä 5.2.6 Määrittele aritmeettisen lukujonon differenssi, kun sen 20. jäsen on 107 ja 23. jäsen on 122.

Ratkaisu: Tiedetään lukujonon kaksi jäsentä $a(20) = 107$ ja $a(23) = 122$, joten niiden avulla voidaan päätellä differenssin suuruus. Kun 20.

lukuun lisätään kolme kertaa differenssi d, saadaan 23. luku.

$$\begin{aligned}
a(23) &= a(20) + (23-20)d \\
122 &= 107 + 3d \\
3d &= 15 \qquad\qquad | : 3 \\
d &= 5
\end{aligned}$$

Vastaus: Differenssi $d = 5$.

Lause 5.2.7 Aritmeettisen lukujonon jäsen $a(n) = a(k) + (n-k)d$, missä $a(k)$ on lukujonon jokin jäsen ja d kahden peräkkäisen jäsenen erotus.

Lause 5.2.7 voidaan todistaa kuten edellä. Muodostetaan lausekkeet jäsenten välisistä erotuksista ja lasketaan ne yhteen. Tällöin tarvitaan $(n-k)$ kappaletta lausekkeita.

$$\begin{array}{llcll}
 & a(n) & - & a(n-1) & = d \\
+ & a(n-1) & - & a(n-2) & = d \\
\cdots & & & & \cdots \\
+ & a(k+1) & - & a(k) & = d \\
\hline
a(n) - a(n-1) + a(n-1) - \ldots + & a(k+1) & - & a(k) & = (n-k)d \\
a(n) & & - & a(k) & = (n-k)d \\
a(n) & & & & = a(k) - (n-k)d
\end{array}$$

Tämä päättely todistaa lauseen 5.2.7.

Yleisen jäsenen lausekkeen avulla voidaan testata kuuluuko jokin luku tarkasteltavaan lukujonoon.

Mallitehtävä 5.2.8 Kuuluuko luku 172 aritmeettiseen lukujonoon (11, 15, 19, ..., 355)?

Ratkaisu: Selvitetään ensin differenssi $d = 15 - 11 = 4$ ja yleisen jäsenen lauseke.

$$a(n) = a(1) + (n-1)d = 11 + (n-1) \cdot 4 = 11 + 4n - 4 = 4n + 7$$

Jos luku 172 on lukujonon jäsen, on oltava olemassa kokonaislukuarvo indeksille n siten, että $a(n) = 172$.

$$\begin{aligned} 4n + 7 &= 172 \\ 4n &= 165 \quad \mid : 4 \\ n &= 41{,}25 \end{aligned}$$

Luku 172 ei siis ole annetun lukujonon jäsen, koska indeksiksi kelpaavaa kokonaislukua ei löytynyt.

Vastaus: Ei kuulu.

5.2.2 Aritmeettinen summa

Kun aritmeettisen lukujonon jäseniä lasketaan yhteen, puhutaan **aritmeettisesta summasta** $S(n)$.

Matematiikko Gauss kävi koulua 1700-luvulla. Tarinan mukaan hän oli yhdeksänvuotias, kun opettaja antoi hänelle lisätehtäväksi laskea sadan ensimmäisen luonnollisen luvun summan, koska hän oli tehtävissä muita edellä.

Gauss löysi ratkaisun melko nopeasti, ja ilmoitti summan olevan 5050. Pystytkö keksimään, miten hän ratkaisi tehtävän?

Mallitehtävä 5.2.9 Mikä on aritmeettisen lukujonon (1,2,3,...,100) jäsenten summa?

Ratkaisu: Summa on $1+2+3+...+100$. Eräs tapa laskea summa on lisätä siihen ensin sama summalauseke, mutta päinvastaiseen järjestykseen käännettynä.

$$\begin{array}{rcrcrcrcccrcrcr} S(100) & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ +S(100) & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & ... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S(100) & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

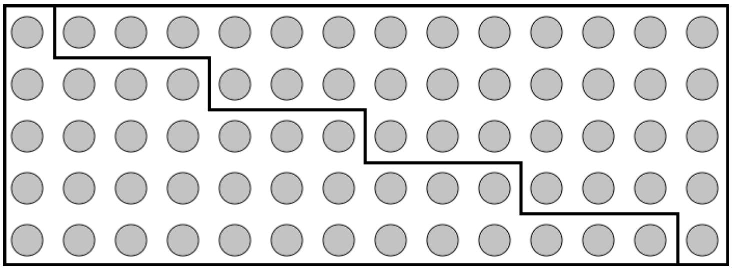
Näin saadaan kaksinkertainen summa, joka on siis $100 \cdot 101 = 10100$. Eli kerrotaan luku 101 jäsenten lukumäärällä. Alkuperäinen summa on puolet tästä eli $\frac{10100}{2} = 5050$.

Vastaus: Lukujonon jäsenten summa on 5050.

Lause 5.2.10 Aritmeettisen lukujonon jäsenten summa on $S(n) = n \cdot \frac{a(1)+a(n)}{2}$, missä $a(1)$ on ensimmäinen jäsen, $a(n)$ on viimeinen jäsen ja n on jäsenten lukumäärä.

Lauseen 5.2.10 voi todistaa kuten mallitehtävässä. Tämä jätetään tehtäväksi (tehtävä 11).

Pohdinta 5.2.11 Kuinka monta erilaista tapaa keksit summan $1+4+7+10+13$ laskemiseksi? Mikä niistä on nopein tapa laskea? (Vihje: katso kuva.)



Tehtävät

Aritmeettinen lukujono

1. Liisa päättää tallettaa 50 euroa säästötililleen jokaisen kuukauden alussa vuoden ajan. Tilin kuukausittaiset saldot muodostavat lukujonon $(50, 100, ..., 600)$. Mikä on lukujonon yleisen jäsenen $a(n)$ lauseke?

2. Harrilla on 120 euroa tilillään vuoden alussa. Hän päättää tallettaa tililleen 20 euroa helmikuun alussa ja sen jälkeen aina kuukauden välein. Muodosta lukujono tilin saldoista ensimmäisen vuoden aikana.

a) Mikä on lukujonon yleisen jäsenen $a(n)$ lauseke?

b) Mitä arvoja indeksi n saa?

c) Paljonko tilillä on rahaa vuoden kuluttua?

3. Taideteokseen on aseteltu erilaisia lasipulloja riveihin. Etummaisessa rivissä on 16 pulloa. Seuraavissa riveissä on aina 2 pulloa enemmän kuin edellisessä.

a) Kuinka monta pulloa on viimeisessä eli 24. rivissä?

b) Kuinka monta pulloa on n. rivissä?

c) Mitä arvoja n saa?

4. Mikä on aritmeettisen lukujonon $(80, 97, ..., 13476)$ 531. jäsen?

5. Kuuluuko luku a) 18 b) 23 lukujonoon, jonka yleinen jäsen $a(n) = 4n - 6, n = 1, 2, 3, ..., 100$?

6. Määrittele aritmeettisen lukujonon $(6, 2x, x, ...)$ muuttuja x, kolme ensimmäistä jäsentä ja yleisen jäsenen lauseke.

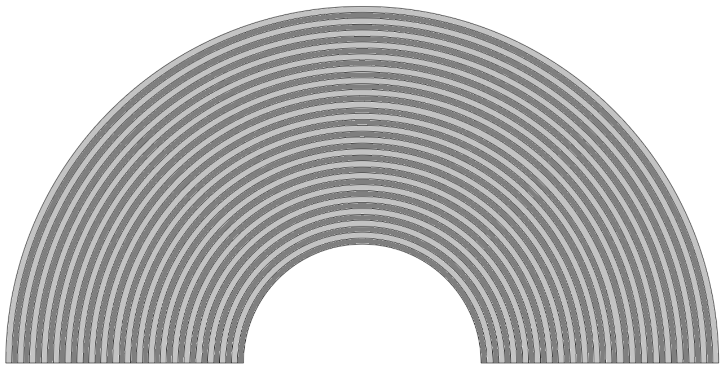
7. Todista, että lukujono on aritmeettinen, kun sen yleinen jäsen $a(n) = 5n - 2, n = 1, 2, 3, ...$

8. Onko lukujono a) $a(n) = 7n - 1$ b) $b(n) = n^2 + 2$ aritmeettinen?

Aritmeettinen summa

9. Puoliympyrän muotoisessa amfiteatterissa järjestetään näytelmä. Teatterin johtaja ja 17 näyttelijää kokeilevat istua katsomon ensimmäisellä rivillä, jolloin siitä jää noin $\frac{2}{3}$ tyhjäksi.

Rivejä on yhteensä 20. Seuraavalle riville mahtuu aina 4 ihmistä enemmän kuin edelliselle. Arvioi kuinka monta lippua teatteriin voi myydä.



10. Laske seuraavien lukujonojen summa kahdella eri tavalla.

a) $-7 + (-4) + (-1) + ... + 8$

b) $-8 + (-5) + (-2) + ... + 7$

c) $-7,5 + (-4,5) + (-1,5) + ... + 7,5$

11. Johda kaava $S(n) = n \cdot \frac{a(1)+a(n)}{2}$.

12. [k06, 11] Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on $\frac{3}{2}$, toinen on 7 ja viimeinen 117. Laske jonon summa.

13. [K14, 13a] Tarkastellaan positiivisia kokonaislukuja n ja k, joille

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + k) = 1007.$$

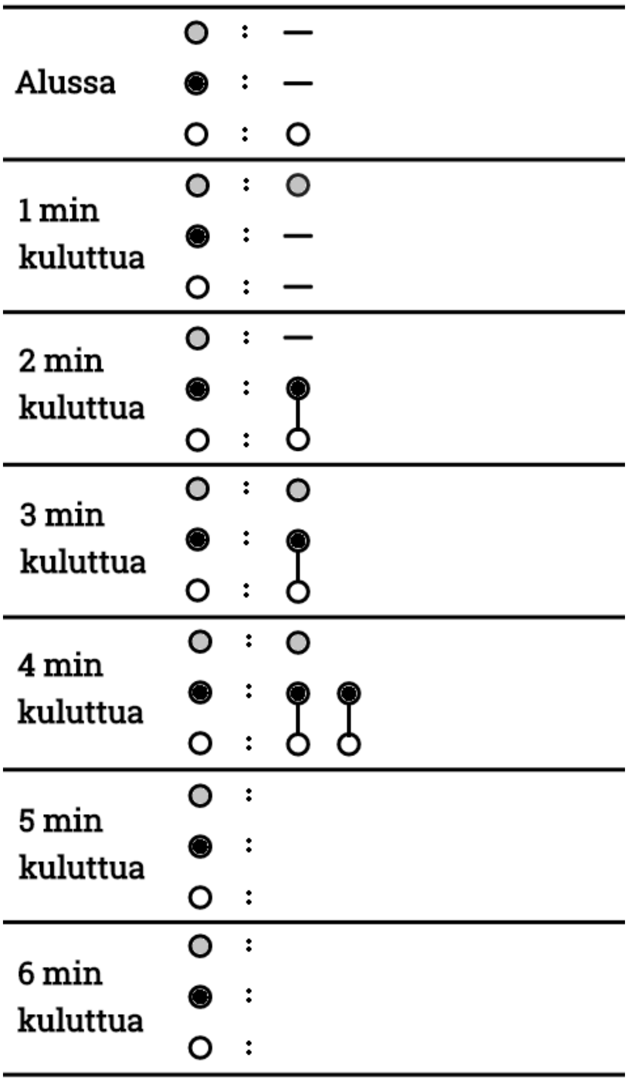
Osoita, että tällaiset luvut n ja k toteuttavat yhtälön $(k + 1)(2n + k) = 2014$.

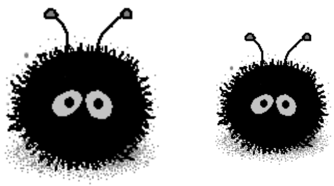
14. [s05, 13] Luonnollisille luvuille 2 ja 3 pätee $2^2 = 1 + 3$ ja $3^2 = 1 + 3 + 5$. Esitä vastaava yhtälö luvulle 4. Yleistä tämä koskemaan minkä tahansa luonnollisen luvun n neliötä n^2 ja osoita esittämäsi kaava oikeaksi.

5.3 Muut lukujonot

Pohdinta 5.3.1 Tietokonepelissä on aluksi yksi vihollinen. Jokainen vihollinen luo kloonin itsestään kahden minuutin kuluttua syntymästään, mutta sen jälkeen aina minuutin välein. Montako vihollista on kuuden minuutin kuluttua?

Jatka kuviojonoa (valkoinen ympyrä = vastasyntynyt, harmaa = minuutin ikäinen ja musta = kahden minuutin ikäinen tai vanhempi).





Tiettyyn järjestykseen asetetut reaaliluvut muodostavat **lukujonon**. Lukujonon lukuja kutsutaan **jäseniksi** tai **termeiksi**.

Pohdintatehtävässä vihollisten lukumäärät muodostavat Fibonaccin lukujonon $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$, jossa kolmannesta luvusta alkaen luku saadaan kahden edellisen luvun summana. Tämä lukujono ei siis ole aritmeettinen eikä geometrinen.

Huomautus: Jos lukujono merkitään tiettyjen jäsenten avulla, esim. $(3, 5, 7, ...)$, se voisi jatkua periaatteessa miten vain, vaikkapa $(3, 5, 7, 3, 5, 7, ...)$.

Mallitehtävä 5.3.2 Kuution muotoisen laatikon särmän pituus on 3 cm. Särmän pituutta kasvatetaan 1 cm kerrallaan, kunnes se on 6 cm pitkä.

Laatikon tilavuuksista muodostuu lukujono $(3^3, 4^3, 5^3, 6^3)$ eli $(27, 64, 125, 216)$. Yksikköä (cm^3) ei merkitä näkyviin, mutta lukujonon jäsenillä on yhteinen yksikkö. Mikä on lukujonon yleisen jäsenen lauseke?

Ratkaisu: Yleisen jäsenen lauseke voidaan kirjoittaa laatikon särmän kuution avulla eli $a(n) = n^3$. Tällöin n saa arvot 3, 4, 5 ja 6.

Vastaus: $a(n) = n^3, \quad n = 3, 4, 5, 6.$

Ratkaisu: Toinen vaihtoehtoinen esitystapa yleisen jäsenen lausekkeelle voidaan löytää muokkaamalla lukujono muotoon $((\mathbf{1}+2)^3, (\mathbf{2}+2)^3, (\mathbf{3}+2)^3, (\mathbf{4}+2)^3)$. Tästä muodosta nähdään, että jokainen jäsen voidaan ilmaista indeksin n avulla, kun se saa arvot 1, 2, 3 ja 4.

$$a(n) = (n + 2)^3, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

Vastaus: $a(n) = (n + 2)^3, \quad n = 1, 2, 3, 4.$

Kaikille lukujonoille ei voida määritellä yleisen jäsenen lauseketta.

Lukujono voidaan indeksoida alkamaan jostakin muustakin luvusta kuin luvusta yksi. Esim. jos $n = 0, 1, 2, ...$, lukujonon ensimmäinen jäsen on $a(0)$, toinen jäsen on $a(1)$ jne.

Pohdinta 5.3.3 Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a(n) = n^2 - 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, ..., 25$. Mikä on lukujonon 20. jäsen?

Ville ja Pekka ovat kumpikin ratkaisseet tehtävän. Kumpi vastauksista on oikein?

Villen ratkaisu on

$$a(20) = 20^2 - 2 \cdot 20 + 1 = 361.$$

Pekan ratkaisu on

$$a(19) = 19^2 - 2 \cdot 19 + 1 = 324.$$

Lisätietoa: Lukujonon jäsenet voidaan merkitä myös alaviitteen avulla. Tällöin esim. merkintä $a(1), a(2), ..., a(n), ..., a(k)$ korvataan merkinnällä $a_1, a_2, ..., a_n, ..., a_k$, kun $n = 1, 2, ..., k$. Päättyvän lukujonon jäsenten **summa** voidaan merkitä myös

$$\sum_{i=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... + a_k.$$

Summassa käytetään indeksinä kirjainta i. Indeksi saa kokonaislukuarvot väliltä $1, ..., k$, koska lukujonossa $(a_1, a_2, ..., a_n, ..., a_k)$ on k kappaletta yhteenlaskettavia jäseniä.

Tehtävät

15. Mikä voisi olla lukujonon seuraava jäsen? Merkitse b)- ja c)-kohdat yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

a) $(1, 212, 12121, ...)$

b) $(2, 4, 8, 16, 32, ...)$

c) $(-3, 4, -5, 6, -7, ...)$

16. Mikä on yleisen jäsenen lauseke, kun lukujonon muodostavat 50 ensimmäistä positiivista a) parillista b) paritonta kokonaislukua?

17. Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a(n) = 1500 - 40n \cdot (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, ..., 30$. Mikä on lukujonon 18. jäsen?

5.4 Rekursiivisesti määritelty lukujono

Pohdinta 5.4.1 Lukujonon ensimmäinen jäsen on 10. Lukujonon seuraava jäsen saadaan, kun edellinen jäsen kerrotaan viidellä ja lisätään tuloon kaksi.

Miten voisit merkitä nämä säännöt käyttämällä merkintöjä $a(1)$, $a(n-1)$ ja $a(n)$?

Jotkin lukujonot voidaan määritellä myös **rekursiivisesti**. Tällöin annetaan yksi tai useampi jäsen jonon alusta eli **alkuehdot**, sekä **rekursiosääntö**, jonka avulla voidaan laskea lukujonon seuraavat jäsenet edellisten jäsenten avulla.

Rekursiosäännössä viitataan jäsentä $a(n)$ edeltäviin jäseniin merkinnöillä $a(n-1), a(n-2), \ldots$ Aritmeettinen ja geometrinen lukujono voidaan myös määritellä rekursiivisesti. (Katso tehtävä 23.) Myös esimerkiksi pohdinnassa 5.3.1 muodostuva Fibonaccin lukujono voidaan merkitä rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{cases} a(1) = 1 \\ a(2) = 1 \\ a(n) = a(n-2) + a(n-1), \quad n = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

Mallitehtävä 5.4.2 Mitkä ovat seuraavan rekursiivisesti määritellyn lukujonon jäsenet?

$$\begin{cases} a(1) = 10 \\ a(2) = 2 \\ a(n) = a(n-2) - a(n-1), \quad n = 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

Ratkaisu: Rekursiosäännön mukaan lukujonon 3. jäsen saadaan vähentämällä sen ensimmäisestä jäsenestä toinen jäsen, jne.

$$\begin{array}{lclclcl} a(3) & = & a(1) - a(2) & = & 10 - 2 & = & 8 \\ a(4) & = & a(2) - a(3) & = & 2 - 8 & = & -6 \\ a(5) & = & a(3) - a(4) & = & 8 - (-6) & = & 14 \\ a(6) & = & a(4) - a(5) & = & -6 - 14 & = & -20 \end{array}$$

Vastaus: $a(1) = 10, a(2) = 2, a(3) = 8, a(4) = -6, a(5) = 14, a(6) = -20$

Jos edellisen esimerkin lukujonolle on olemassa yleisen jäsenen lauseke, se on vaikea suoraan päätellä. Joskus lauseke voidaan kuitenkin saada selville joko päättelemällä tai arvaamalla ja todistamalla arvaus oikeaksi.

Mallitehtävä 5.4.3 Olkoon $(a(n))$ rekursiivisesti määritelty lukujono, jolle on voimassa

$$\begin{cases} a(1) = 1 \\ a(n) = \frac{n-1}{n} \cdot a(n-1), \quad n = 2, 3, 4, \end{cases}$$

Määritä lukujonon yleisen jäsenen lauseke.

Ratkaisu: Lasketaan ensin lukujonon ensimmäisiä jäseniä.

$$\begin{array}{lllllll} a(1) & = & 1 & & & & \\ a(2) & = & \frac{2-1}{2} \cdot 1 & = & \frac{1}{2} & & \\ a(3) & = & \frac{3-1}{3} \cdot \frac{1}{2} & = & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\ a(4) & = & \frac{4-1}{4} \cdot \frac{1}{3} & = & \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} & = & \frac{1}{4} \end{array}$$

Kun $n = 1, 2, 3, 4$, niin lukujonon yleinen jäsen on $a(n) = \frac{1}{n}$.

Vastaus: $a(n) = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4$

Lisätietoa: Onko edellisessä tehtävässä löydetty lauseke $a(n) = \frac{1}{n}$ yleisen jäsenen lauseke myös silloin, kun n on suurempi kuin neljä?

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että lauseke $a(n) = \frac{1}{n}$ pätee ensimmäiselle jäsenelle eli alkuehdolle. Sijoitetaan siis lausekkeeseen $n = 1$.

$$a(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Näin pitikin olla, joten alkuehto on kunnossa.

Osoitetaan sitten, että lauseke $a(n) = \frac{1}{n}$ pätee kaikilla muillakin indekseillä. Sijoitetaan rekursiosääntöön jäsenen $a(n-1)$ paikalle oletuksen mukainen yleisen jäsenen lauseke $(n-1)$. jäsenelle eli $\frac{1}{n-1}$.

$$a(n) = \frac{n-1}{n} \cdot a(n-1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

Päädyttiin siis samaan lausekkeeseen $a(n) = \frac{1}{n}$, joten tämä on lukujonon yleisen jäsenen lauseke.

Vastaus: On, eli $a(n) = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Tehtävät

18. Lukujonon ensimmäinen jäsen on 54. Seuraava jäsen saadaan, kun lukuun 20 lisätään kolme kertaa edellinen jäsen. Merkitse lukujono rekursiivisesti.

19. Mitkä ovat annetun lukujonon kuusi ensimmäistä jäsentä?

a) $\begin{cases} a(1) = 1 \\ a(n) = a(n-1) + n, \quad n \geq 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b(1) = 1 \\ b(k+1) = b(k) + k + 1, \quad k \geq 1 \end{cases}$

20. Määritä lukujonon jäsenet, kun

$$\begin{cases} a(1) = 3 \\ a(2) = 5 \\ a(n) = a(n-1) - a(n-2) + n^2 - 10, \quad n = 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

21. Etsi lukujonon muodostamissääntö ja merkitse lukujono rekursiivisesti.

a) $(2, 4, 8, 16, 32, ...)$

b) $(1, 2, 3, 5, 8, ...)$

c) $(2, 4, 16, 256, ...)$

d) $(3, 4, 6, 9, 13, ...)$

22. Keksi jokin sääntö ja 1. jäsen. Muodosta niiden avulla lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Anna lukujono kaverillesi ja pyydä häntä keksimään lukujonon sääntö.

23. Määrittele rekursiivisesti lukujono, joka on a) aritmeettinen b) geometrinen.

24. Bakteerien lukumäärä on aluksi b ja se kasvaa 20 % joka tunti. Esitä lukumääristä muodostuva lukujono

a) rekursiivisesti

b) yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

25. Ravintolaan ostetaan joka kuukausi 25 uutta lasia korvaamaan rikki menneitä sekä vastaamaan asiakasmäärän kasvuun. Joka kuukausi 2 % laseista menee rikki. Esitä lasien kuukausittaiset lukumäärät rekursiivisesti. Laseja on alussa 1000. Kuinka monta lasia ravintolassa on neljän kuukauden kuluttua?

26. Olkoon $(a(n))$ rekursiivisesti määritelty lukujono, jolle on voimassa

$$\begin{cases} a(1) = 7 \\ a(n) = \frac{a(n-1)}{n}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

a) Määritä lukujonon yleisen jäsenen lauseke.

b) Todista, että kyseinen lauseke pätee kaikilla indeksin n arvoilla.

Opetusmateriaalin hakemisto

6 Opettajan opas

6.1 Johdanto

Tässä luvussa esittelen lyhyesti tekemäni opetusmateriaalin kappaleiden sisällöt ja pohdintatehtävien käsittelyn. Lisää vinkkejä opetuksen toteutukseen löytyy luvusta 3. Matematiikan oppimisen lisäksi tärkeitä opittavia taitoja ovat mm. keskustelutaidot, vastausten perusteleminen, luovien ratkaisuiden löytäminen ja ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen.

Pohdintatehtävien ja ongelmanratkaisutehtävien käsittelyssa voidaan käyttää menetelmää, jota on käsitelty luvussa 3.7. Matemaattisten todistustehtävien käsittelyä on käyty läpi luvussa 3.6. Erilaisia tehtävätyyppejä ja opettajan roolia ohjaajana on esitelty luvussa 3.8.

6.2 Aritmeettinen lukujono ja summa (2 h)

Sisältö

Kappale alkaa pohdintatehtävällä, jossa johdatellaan opiskelijaa ymmärtämään aritmeettisia lukujonoja. Tehtävää on tarkoitus pohtia itsenäisesti tai ryhmissä jonkin aikaa. Tämän jälkeen tehtävä käydään yhdessä läpi. Löydetyt tulokset voidaan kirjoittaa vaikkapa sanallisesti.

Seuraavaksi annetaan aritmeettisen lukujonon määritelmä, sekä esimerkki aritmeettisesta ja ei-aritmeettisesta lukujonosta. Esitellään formaalimpi esitystapa ja kaava yleisen jäsenen lausekkeelle, kun tiedetään ensimmäinen jäsen ja differenssi. Esitellään käsite differenssi. Lauseille esitetään myös todistukset.

Pohdintaa jatketaan vielä pyytämällä opiskelijaa kirjaamaan pohdinnassa esiin tulleet asiat formaalisti.

Seuraavat kaksi mallitehtävää sekä lause lukujonon lausekkeesta, kun tiedetään jokin jäsen ja differenssi, voidaan jättää opiskelijan itsenäisesti luettavaksi tunnilla tai kotitehtävänä.

Artimeettisen summan kappale alkaa tarinalla Gaussista. Opiskelija haastetaan miettimään, miten hän olisi ratkaissut sadan ensimmäisen luonnollisen luvun summan.

Gauss ratkaisi tehtävän jakamalla lukujonon kahteen osaan, kääntämällä toisen päinvastaiseen järjestykseen ja laskemalla lukujonot yhteen. Jos lukuja olisi ollut pariton määrä, pitäisi keskimmäinen luku laittaa muistiin ja lisätä loppusummaan.

Tehtävä käydään läpi seuraavassa mallitehtävässä. Menetelmänä käytetään kaksinkertaista summaa, jota voidaan käyttää myös parittomille määrille lukuja.

Seuraavaksi annetaan aritmeettisen summan kaava, jonka todistaminen jätetään tehtäväksi. Pohdintatehtävässä pyydetään opiskelijaa keksimään erilaisia tapoja laskea annettu summa.

Pohdinnat

Pohdinta 5.2.1.

Ratkaisu: a) Neljännessä kuviossa on neljä kolmen napin kerrosta ja niiden päällä yksi nappi.

b) 4, 7, 10, 13, 16 ja 19

c) Nappien lukumäärä on aina kolme suurempi kuin edellinen, joten ensimmäiseen lukuun 4 täytyy lisätä 13 kertaa luku kolme, että saadaan 14. luku. Se on siis $4 + 13 \cdot 3 = 43$.

d) Edellisestä kohdasta saadaan yleisempi tulos: ensimmäiseen lukuun täytyy lisätä luku kolme yhden kerran vähemmän kuin kysytyn luvun järjestysluku.

e) Nyt tiedetään haluttu luku, joten se on muodostunut ensimmäisen luvun ja tietyn määrän kolmosia summana. Voidaan siis päätellä, että vähentämällä luvusta ensin ensimmäinen luku eli neljä ja jakamalla se sitten kolmella, saadaan tietää haluttu järjestysnumero. Lasketaan $\frac{97-4}{3} = 31$, eli 31. kuviossa on 97 nappia. Tulos voidaan tarkistaa vielä laskemalla $4 + 31 \cdot 3 = 97$.

f) Kuviojonoon kuuluvat ne luvut, jotka saadaan edellisen päättelyn avulla järjestysluvuilla, jotka ovat kokonaislukuja. Tehtäväksi jää siis selvittää, monennessako kuviossa on 117 nappia, ja saadaanko tällä tavalla kokonaislukuarvo, kuten edellisessä kohdassa. Lasketaan $\frac{117-4}{3} = 37,66...$, ja voidaan todeta, että kyseinen kuvio ei kuulu tähän kuviojonoon.

Pohdinta 5.2.4.

Ratkaisu: Lukujono on $(4, 7, 10, 13, 16, 19)$.
Ensimmäinen jäsen $a(1) = 4$.
14. jäsen $a(14) = 43$.
97 napin kuvio $a(31) = 97$.
Differenssi $d = 3$.
Yleisen jäsenen lauseke $a(n) = a(1)+(n-1)d = 4+(n-1)3 = 4+3n-3 = 3n+1$.

Pohdinta 5.2.11.

Ratkaisu: Summan voi laskea helposti laskimella tai päässälaskuna. Summa voidaan laskea myös kaksinkertaisena summana eli 14+14+14+14+14 ja jakaa se kahdella. Tai Gaussin tapaa mukaillen 14+14+7.

Summa voidaan laskea myös katsomalla tehtävän alla olevaa kuvaa, jossa on viisi riviä ja 14 saraketta palloja. Pallojen lukumäärä saadaan laskettua kertomalla $5 * 14$. Summa on puolet tästä.

Tietysti voidaan laskea vielä monella muullakin tavalla, esim. $1 + 7 = 8, 8 + 10 = 18, 18 + 4 = 22, 22 + 13 = 35$.

6.3 Muut lukujonot (1 h)

Sisältö

Kappale alkaa pohdintatehtävällä, joka perustuu Fibonaccin lukujonoon. Perinteisen kaniparin jälkeläisten sijaan tehtävässä lasketaan vihollisten klooneja tietokonepelissä. Opiskelijaa pyydetään jatkamaan kuviojonoa. Kuvioiden on tarkoitus helpottaa tehtävänantoa ja nopeuttaa asiaan perehtymistä.

Pohdinnan jälkeen kerrotaan, että pohdintatehtävässä muodostuva lukujono on Fibonaccin lukujono, jonka luvut saadaan laskettua tietyn säännön mukaan. Tämä ei siis ole aritmeettinen eikä geometrinen lukujono. Mainitaan lukujonon merkintätavan epätäsmällisyys.

Mallitehtävässä etsitään yleisen jäsenen lauseketta, joka voidaan merkitä ainakin kahdella tavalla.

Lukujonojen indeksointia pohditaan tehtävän avulla, jossa on annettu kaksi mahdollista ratkaisua, joista pitää valita toinen.

Lopuksi annetaan vaihtoehtoinen merkintätapa lukujonon jäsenille alaviitteen avulla, sekä summalle ison sigman $\sum_{i=1}^{n}$ avulla.

Pohdinnat

Pohdinta 5.3.1.

Ratkaisu: Kellon siirtyessä minuutin eteenpäin, jokainen valkoinen pallo muuttuu harmaaksi ja harmaa pallo mustaksi. Lisäksi jokainen musta pallo luo uuden kloonin itsestään, eli kuvaan täytyy piirtää uusi valkoinen pallo. Viiden minuutin kuluttua vihollisia on kahdeksan ja kuuden minuutin kuluttua 13. Lukumääristä muodostuu Fibonaccin lukujono.

Pohdinta 5.3.3.

Ratkaisu: Tehtävää voidaan lähteä purkamaan siten, että lasketaan lukujonon ensimmäisiä jäseniä.

$$\begin{array}{ll} \text{1. jäsen} & a(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ \text{2. jäsen} & a(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \end{array}$$

Täten n. jäsen on oltava $a(19)$ eli Pekan ratkaisu on oikein.

6.4 Rekursiivisesti määritelty lukujono (1 h)

Sisältö

Kappale alkaa pohdintatehtävällä, jossa pyydetään opiskelijaa merkitsemään annetut säännöt käytämällä merkintöjä $a(1)$, $a(n-1)$ ja $a(n)$.

Seuraavaksi esitellään rekursiivinen tapa merkitä lukujonoja. Käydään läpi alkuehdot ja rekursiosääntö. Todetaan, että myös aritmeettinen ja geometrinen lukujono voidaan merkitä rekursiivisesti.

Mallitehtävän avulla näytetään, miten jäsenet saadaan selville, kun käytetään edellisille jäsenille merkintöjä $a(n-1)$ ja $a(n-2)$.

Seuraavassa mallitehtävässä etsitään yleisen jäsenen lauseketta. Lisätietona kerrotaan, miten saadun lausekkeen voi osoittaa yleisen jäsenen lausekkeeksi induktiota käyttäen.

Pohdinnat

Pohdinta 5.4.1.

Ratkaisu: Ensimmäinen jäsen voidaan merkitä $a(1) = 10$, kuten aiemmissa kappaleissa on jo totuttu tekemään. Seuraavaksi voidaan tarkastella jäsentä $a(2)$, joka on siis $5 \cdot a(1) + 2$. Ja tästä voidaan huomata, että $a(n) = 5 \cdot a(n-1) + 2$, kun $n \geq 2$.

7 Yhteenveto

Tutkielmassani tutustutaan ensin uudessa opetussuunnitelmassa [32] asetettuihin matematiikan opetuksen tavoitteisiin, joiden mukaisesti laadin opetusmateriaalia lukujonoihin liittyen. Käyn opetuksen tavoitteita läpi didaktisen tutkimuskirjallisuuden avulla pohtien samalla millaisia opetustapoja käyttäen saavutettaisiin asetetut tavoitteet parhaiten lukioopetuksessa.

Ennen opetusmateriaalin laatimista kävin läpi nykyisiä lukion matematiikan oppikirjoja lukujonojen osalta, sekä selvitin minkälaisia tehtäviä lukujonoista on tehty ylioppilaskokeisiin vuosien varrella. Vertailin oppikirjoja käsitteiden, tehtävien, asiasisällön ja käsittelyjärjestyksen suhteen. Tämän analysoinnin pohjalta valitsin opetusmateriaalissa käytettävät käsitteet. Sain oppikirjoista myös ideoita sisällön ja tehtävien suunnitteluun.

Opetusmateriaalin suunnittelun kantava idea on peräisin artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [4]. Siinä painotetaan ongelmanratkaisutaitojen kehittämisen lisäksi sitä, että opiskelijan tulisi oppia ajattelemaan kuten matemaatikko, vaikka tutkittavat aihealueet olisivatkin arkisempia ja koulun oppimäärään sopivampia kuin matemaatikoiden tutkimusaiheet.

Pyrin käyttämään opetusmateriaalissa vaihtelevia tehtävätyyppejä ja kannustamaan opiskelijoita kehittämään ongelmanratkaisutaitojaan. Opettaja voi kehittää heidän ongelmanratkaisusitkeyttään esim. esittämällä täsmällisiä kysymyksiä. Tehtävien haastavuustason voi suhteuttaa kunkin opiskelijan omien tavoitteiden mukaiseksi.

Luokkahuonetyöskentelyn aikana ja ongelmanratkaisutehtävän jälkeen käytävillä keskusteluilla on merkitystä opiskelijan kannalta. Opiskelijoiden tulisi esittää omia ratkaisujaan muille, jolloin he oppivat ilmaisemaan ajatuksiaan ja ratkaisun taustalla oleva ajatteluketju tulee näkyväksi sekä muille opiskelijoille että opettajalle.

Opettajan johdolla opiskelijoille tulisi selvitä erilaisten ratkaisujen taustalla olevat erot ja yhtäläisyydet, sekä mitä matemaattisia periaatteita ratkaisujen taustalla on. Matemaattinen todistaminen on myös tärkeä osa matematiikkaa. Matemaattiset skeemat auttavat ongelmien ratkaisemisessa, mutta niiden syntyminen vaatii harjoittelua.

Opiskelijalle kehittyvällä matemaattisella identiteetillä on tärkeä merkitys oppimisessa. Henkilökohtaiset tavoitteet myös määrittelevät motivaatiota opiskella matematiikkaa. Opettaja voi painottaa matematiikan merkitystä mielenkiintoisena tutkimusaiheena, eikä niinkään portinvartijana jatko-opintoihin hakeuduttaessa. Tehtävätyypeillä ja opetustavalla on merkitystä identiteetin kehittymisessä.

Viitteet

[1] Aalto, A., Kangasaho, J., Kylliäinen, O., Metiäinen, A., Mäkinen, J. ja Tahvanainen, J. (2012) *Lyhyt matikka 6. Matemaattisia malleja II.* Lukion lyhyen matematiikan oppikirja. Sanoma Pro. 1.-4. painos.

[2] Alatupa, S., Hassinen, S., Hemmo, K. ja Leikas, M. (2012) *Pitkä sigma 9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Lukion pitkä matematiikka. Sanoma Pro. 1.-2. painos.

[3] Anderson, Rick (2007) *Being a Mathematics Learner: Four Faces of Identity.* The Mathematics Educator. Vol. 17, No. 1, ss. 7-14. MESA.

[4] Cuoco, A., Goldenberg, E. P. ja Mark, J. (1996) *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula.* The Journal of Mathematical Behavior 15, ss. 375-402. Elsevier.

[5] Etelämäki, H., Hellsten, A., Hirvonen, K., Nieminen, J. ja Pösö, J. (2010) *Summa 6. Matemaattisia malleja II.* Lukion lyhyen matematiikan oppikirja. Edita.

[6] Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski, J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen, T., Laurinolli, T., Sankilampi, T., Viilo, M-L. ja Väänänen, K. (2007) *Matematiikan taito 9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Lukion pitkän matematiikan oppikirja. WSOY. 1. painos.

[7] Hartikka, T., Partanen, J., Salonen, C. ja Toivanen, P. (2000) *Pitkän matematiikan yo-tehtäviä. 90-luvun tehtäviä ratkaisuineen.* 1994 - 2000. Tammi. 1. painos.

[8] Hautajärvi, T., Ottelin, J. ja Wallin-Jaakkola, L. (2001) *Variaabeli 6. Matemaattisia malleja II.* Lukion lyhyen matematiikan oppikirja. Otava. 1. painos.

[9] Hautajärvi, T., Ottelin, J. ja Wallin-Jaakkola, L. (2005) *Variaabeli 6. Matemaattisia malleja II.* Lukion lyhyen matematiikan oppikirja. Otava. 1. painos.

[10] Hautajärvi, T., Ottelin, J. ja Wallin-Jaakkola, L. (2006) *Laudatur 9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Otava. 1. painos.

[11] Hautajärvi, T., Ottelin, J. ja Wallin-Jaakkola, L. (2011) *Abi pitkä matematiikka. 1990 - 2011.* Harjoittelumateriaali ylioppilaskirjoituksia varten. Otava. 1.-2. painos.

[12] Hautajärvi, T., Ottelin, J. ja Wallin-Jaakkola, L. (2011) *Abi pitkä matematiikka. 1990 - 2010.* Tehtävien ratkaisut. Otava. 1. painos.

[13] Heinonen, Martti ja Tikka, Tommi (2010) *Abi lyhyt matematiikka.* Harjoittelumateriaali ylioppilaskirjoituksia varten. Otava. 1. painos.

[14] Hemmo, K., Vahviainen, S., Taskinen, T. ja Ekonen, M. (2008) *Sigma 6. Matemaattisia malleja II.* Lukion lyhyen matematiikan oppikirja. Tammi. 1.-4. painos.

[15] Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H. ja Viholainen, A. (2012) *Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä.* Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja; Ainedidaktisia tutkimuksia 2., ss. 29-44. Krzywachi, H., Juuti, K. ja Lampiselkä, J. (toim.). `https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/37755/ad_tutkimuksia_2_JULKAISU_VERKKOVERSIO.pdf`

[16] Härkönen, R., Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K., Ronkainen, A. ja Savolainen, S. (2011) *Pyramidi 9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Lukion pitkän matematiikan oppikirja. Tammi. 1. painos.

[17] Härkönen, R., Kontkanen, P., Lehtonen, J., Ronkainen, A. ja Savolainen, S. (2014) *Pyramidi. Kertauskirjan tehtävien ratkaisut.* Lukion pitkä matematiikka. Sanoma Pro. 1.-8. painos.

[18] Jäppinen, P., Kupiainen, A. ja Räsänen, M. (2009) *Lukion Calculus 5. Trigonometriset funktiot ja lukujonot. Integraalilaskenta.* Lukion pitkä matematiikka. Otava. 1.-3. painos.

[19] Järviluoma, E., Paananen, M., Kaila, S., Mäntylä, M., Määttä, S. ja Aro, T. (2014) *Opas matematiikan oppimisvaikeuksista lasten vanhemmille.* Omis-hanke. `http://www.nmi.fi/fi/julkaisut/ilmaiset-materiaalit/copy_of_OMIS_Opasmatematiikkalastenvanhemmille_web.pdf`

[20] Kalakoski, Virpi (2009) *Pieni kirja muistista.* Työterveyslaitos.

[21] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M. ja Tahvanainen, J. (2007) *Pitkä matematiikka 9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Lukion pitkän matematiikan oppikirja. WSOY. 1. painos.

[22] Kivelä, Simo K. *Matematiikan ylioppilastehtävät.* http://matta.hut.fi/matta/yoteht/index.html

[23] Kontkanen, P., Lehtonen, J., Liira, R., Ronkainen, A. ja Savolainen, S. (2011) *Pyramidi. Kertauskirja.* Lukion pitkä matematiikka. Tammi. 1.-3. painos.

[24] Kop, P. M. G. M., Janssen, F. J. J. M., Drijvers, P. H. M., Veenman, M. V. J. and van Driel, J. H. (2015) *Identifying a Framework for Graphing Formulas from Expert Strategies.* The Journal of Mathematical Behavior 39, ss. 121-134. Elsevier.

[25] Kuntoutussäätiö. *Tietoa ja tukea oppimisvaikeuksiin - nuorille, aikuisille ja ammattilaisille.* http://www.oppimisvaikeus.fi/oppimisen-tueksi/opiskelutaidot

[26] Kuntoutussäätiö. *Tietoa ja tukea oppimisvaikeuksiin - nuorille, aikuisille ja ammattilaisille.* http://www.oppimisvaikeus.fi/tietoa-oppimisvaikeuksista

[27] Lahtinen, Aatos (2012) *Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuineen 2003 - 2012.* Pitkä oppimäärä. MFKA-kustannus. 22. painos.

[28] Myrberg, Lauri (1999) *Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuineen.* Pitkä oppimäärä. 1987 - 1999. MFKA-kustannus. 10. painos.

[29] Näveri, L., Ahtee, M., Laine, A., Pehkonen, E. ja Hannula, M. (2012) *Erilaisia tapoja johdatella ongelmanratkaisutehtävään - esimerkkinä aritmagon-tehtävän ratkaiseminen alakoulun kolmannella luokalla.* Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja; Ainedidaktisia tutkimuksia 2., ss. 81-98. Krzywachi, H., Juuti, K. ja Lampiselkä, J. (toim.). https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/37755/ad_tutkimuksia_2_JULKAISU_VERKKOVERSIO.pdf

[30] Opetushallitus (13.11.2014) *Lukion uusi tuntijako hyväksyttiin - lukiokoulutukselle oma kehittämishanke.* http://www.oph.fi/ajankohtaista/verkkouutiset/101/0/lukion_uusi_tuntijako_hyvaksyttiin_-_lukiokoulutukselle_oma_kehittamishanke

[31] Opetushallitus (2003) *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf.

[32] Opetushallitus (2015) *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf.

[33] Parmanen, K., Portaankorva-Koivisto, P. ja Sirviö, S. (2010) *Kertoma 6! Matemaattisia malleja II.* Lukion lyhyen matematiikan oppikirja. Otava. 1. painos.

[34] Projektissa luotu avoin oppikirja löytyy tulevaisuudessa osoitteesta http://www.avoinoppikirja.fi/.

[35] Stein, M. K.,Engle, R. A., Smith, M. S. and Hughes, E. K. (2008) *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell.* Mathematical Thinking and Learning 10, ss. 313-340. Routledge.

[36] Stylianides, Andreas J. (2006) *The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics.* Educational Studies in Mathematics (2007) 65, ss. 1-20. Springer.

[37] Suomen matemaattinen yhdistys ry. *Vanhoja matematiikan ylioppilastehtäviä.* http://matemaattinenyhdistys.fi/yo/

[38] Torbeyns, J., De Smedt, B., Peters, G., Ghesquière, P. and Verschaffel, L. (2011) *Use of Indirect Addition in Adult's Mental Subtraction in the Number Domain up to 1,000.* British Journal of Psychology (2011), 102, ss. 585-597. The British Psychological Society.

[39] *Yle abitreenit. Pitkän matematiikan yo-kokeet.* http://oppiminen.yle.fi/abitreenit/matematiikka-pitka/yo-kokeet.

[40] *Yle abitreenit. Lyhyen matematiikan yo-kokeet.* http://oppiminen.yle.fi/abitreenit/matematiikka-lyhyt/yo-kokeet.

A Avoimen oppikirjan alustava sisällysluettelo (10.12.2015)

MAY1 Luvut ja lukujonot (1 h = 45 min)

I Luvut (14 h)

1. Lukujoukot (5 h)

2. Peruslaskutoimitukset (5 h)

3. Potenssi (4 h)

II Funktiot (15 h)

4. Kuvaajan tulkinta ja muodostaminen (5 h)

5. Funktioiden transformaatiot (5 h)

6. Funktion kuvaajan piirto (5 h)

III Lukujono ja summa (9 h)

7. Lukujono koordinaatistossa (2 h)

8. Aritmeettinen ja geometrinen lukujono (5 h)
8.1 Aritmeettinen lukujono ja summa
8.2 Geometrinen lukujono ja summa

9. Lukujono formaalisti (2 h)
9.1 Muut lukujonot
9.2 Rekursiivisesti määritelty lukujono

B Ote lukion opetussuunnitelmasta

Tämä on ote 27.10.2015 julkaistusta uudesta opetussuunnitelmasta. Ote on luvusta 5.6 Matematiikka, jossa kerrotaan yleisesti matematiikan opetuksen tavoitteista, arvioinnista ja kaikille yhteisen MAY1-kurssin sisällöstä, sekä pitkän ja lyhyen matematiikan opetuksen tavoitteista. Arviointi, oppimäärän vaihtaminen ja muiden kuin MAY1-kurssien kuvaukset on jätetty tästä otteesta pois, koska niitä ei käsitellä tässä tutkielmassa.

5.6 Matematiikka

Matematiikan asema aikamme kulttuurissa edellyttää valmiutta ymmärtää, hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa. Sillä on merkittävä tai ratkaiseva rooli muun muassa tieteissä, teknologiassa, taloudessa, yrittäjyydessä, terveydenhuollossa ja turvallisuudessa. Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja.

Opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista. Opetuksessa käytetään vaihtelevia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät yksin ja yhdessä. Opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin. Opiskelijaa rohkaistaan myös käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen.

Opiskelijaa kannustetaan kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin. Opetuksessa tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä sekä tietoisesti käytetään eteen tulevia mahdollisuuksia opiskelijan persoonallisuuden kehittämiseen, mikä tarkoittaa muun muassa hänen kiinnostuksensa ohjaamista, kokeiluihin kannustamista sekä tiedonhankintaprosessien kehittämistä.

Opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä. Matematiikan opiskelussa hyödynnetään muun muassa dynaamisen matematiikan ohjelmistoja, symbolisen laskennan ohjelmistoja, tilastoohjelmistoja, taulukkolaskentaa, tekstinkäsittelyä sekä mahdollisuuksien mukaan digitaalisia tiedonlähteitä. Tärkeää on myös arvioida apuvälineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta. Edellä mainituista apuvälineistä käytetään jatkossa nimitystä tekniset apuvälineet.

5.6.1 Matematiikan yhteinen opintokokonaisuus

Matematiikan yhteisen opintokokonaisuuden tehtävänä on herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan muun muassa tutustuttamalla hänet matematiikan moninaiseen merkitykseen ihmiselle ja yhteiskunnalle sekä sen ainutlaatuiseen ja kiehtovaan olemukseen tieteenalana. Tässä opintokokonaisuudessa opiskelijalla on tilaisuus vahvistaa pohjaa matematiikan opinnoilleen ja nähdä matematiikka hyödyllisenä ja käyttökelpoisena selitettäessä ja hallittaessa muun muassa yhteiskunnan, talouden ja luonnon tapahtumia ja tilanteita.

Pakollinen kurssi

1. Luvut ja lukujonot (MAY1)

Tavoitteet
Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- pohtii matematiikan merkitystä yksilön ja yhteiskunnan näkökulmasta
- kertaa ja täydentää lukualueet, kertaa peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskennan periaatteet
- vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä
- ymmärtää lukujonon käsitteen
- osaa määrittää lukujonoja, kun annetaan alkuehdot ja tapa, jolla seuraavat termit muodostetaan
- saa havainnollisen käsityksen lukujonon summan määrittämisestä
- osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kuvaajan ja lukujonojen tutkimisessa sekä lukujonoihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

Keskeiset sisällöt

- reaaliluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta
- funktio, kuvaajan piirto ja tulkinta
- lukujono
- rekursiivinen lukujono
- aritmeettinen jono ja summa
- logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys
- muotoa $a^x = b$, $x \in \mathbb{N}$ olevien yhtälöiden ratkaiseminen
- geometrinen jono ja summa

5.6.2 Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle ammatillisten ja korkeakouluopintojen edellyttämät matemaattiset valmiudet sekä matemaattinen yleissivistys. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- saa myönteisiä oppimiskokemuksia ja tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn sekä oppii niiden kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä

- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

5.6.3 Matematiikan lyhyt oppimäärä

Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tehtävänä on tarjota valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä ja monissa eri tieteissä.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä
- saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään, oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa ja rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen
- hankkii sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille
- sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä

- kehittää käsitystään matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta
- harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota ja arvioimaan sen luotettavuutta
- tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä
- osaa käyttää kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

C Vastaukset opetusmateriaalin tehtäviin

C.1 Aritmeettinen lukujono ja summa

Aritmeettinen lukujono

1. $a(n) = 50n, \quad n = 1, 2, 3, ..., 12$

2. $20n + 120, \quad n = 0, 1, 2, ..., 11, \quad 340$ euroa

3. $a(24) = 62, \quad a(n) = 2n + 14, \quad n = 1, 2, 3, ..., 24$

4. 9090

5.

a) kuuluu

b) ei kuulu

6. $a(1) = 6, \quad a(2) = 4, \quad a(3) = 2, \quad a(n) = -2n + 8, \quad n = 1, 2, 3, ...$

7. -

8.

a) on

b) ei ole

Aritmeettinen summa

9. n. 1840 lippua

10.

a) $S(6) = 3$

b) $S(6) = -3$

c) $S(6) = 0$

11. -

12. $1303\frac{1}{2}$

13. -

14. -

C.2 Muut lukujonot

15.

a) 2121212

b) 64, $a(n) = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) 8, $a(n) = (-1)^{n+1}(n+1)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

16.

a) $a(n) = 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots, 50$

b) $a(n) = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 49$

17. 18. jäsen $a(17) = 2180$

C.3 Rekursiivisesti määritelty lukujono

18. $\begin{cases} a(1) = 54 \\ a(n) = 20 + 3a(n-1), \quad n \geq 2 \end{cases}$

19.

a) 1,3,6,10,15 ja 21

b) 1,3,6,10,15 ja 21

Huom! b-kohdan tehtävä saadaan sijoittamalla a-kohtaan n=k+1.

20. 3,5,1,2,16 ja 40

21.

a) $\begin{cases} a(1) = 2 \\ a(n) = 2 \cdot a(n-1), \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$

b) $\begin{cases} a(1) = 1 \\ a(n) = a(n-2) + a(n-1), \quad n = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$

c) $\begin{cases} a(1) = 2 \\ a(n) = (a(n-1))^2, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$

d) $\begin{cases} a(1) = 3 \\ a(n) = a(n-1) + (n-1), \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$

22. -

23.

a) $\begin{cases} a(1) = A, \quad A \in \mathbb{R} \\ a(n) = a(1) + (n-1)d, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \quad d = a(n+1) - a(n) \end{cases}$

b) $\begin{cases} b(1) = B, \quad B \in \mathbb{R} \\ b(n) = b(1)q^{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \quad q = \frac{a(n+1)}{a(n)} \end{cases}$

24.

a) $\begin{cases} a(1) = b \\ a(n) = 1,2 \cdot a(n-1), \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$

b) $a(n) = 1,2^{n-1}b, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

25. $\begin{cases} a(1) = 1000 \\ a(n) = 0,98 \cdot a(n-1) + 25, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$

Neljän kuukauden kuluttua laseja on jäljellä n. 1015 kpl.

26. $a(n) = \frac{7}{n!}, \quad n \geq 1$