Gravitaatioteorioiden Palatini-formalismi

Pro gradu -tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan laitos
Teoreettinen fysiikka
2007
Fil. yo. Jaakko Vainio
Tarkastajat:
Lehtori Iiro Vilja
Dosentti Tuomas Multamäki

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Yleistettyjen gravitaatioteorioiden motivointi **5**

2.1 Kokeelliset syyt 5

2.2 Teoreettiset syyt 6

3 Palatini-formalismi **8**

3.1 Palatini-formalismin taustaa 8

3.2 Palatini-formalismi f(R)-teorian tapauksessa 11

3.2.1 Vertailu puhtaasti metrisen variaatioperiaatteen tuloksiin 15

3.2.2 Konnektion lisätarkasteluja 17

3.2.3 Erikoistapaus, lisätermi 1/R 19

3.3 Einsteinin ja Jordanin puite 21

3.4 Yleinen tulos f(R)-vaikutusten tapauksessa 23

4 Palatini-formalismin ongelmat **25**

4.1 Pintatermit 25

4.2 Korkeamman kertaluvun vaikutukset 26

4.3 Moniston valinta 26

4.4 Materiatermit 27

4.5 Kaksiulotteinen tapaus 28

5 Torsiollinen konnektio ja materia **30**

5.1 Riemannin tensorista 31

5.2 Einstein–Straus-teoriat 32

5.3 Symmetrinen metriikka ja torsiollinen konnektio 32

5.3.1 Gravitaation vaikutus 32

5.3.2 Materian vaikutus 33

5.3.3 Kenttäyhtälöt 34

5.3.4 Lagrangen kertojien menetelmä 35
5.3.5 Hypermomentti häviää 37
5.3.6 Symmetrinen hypermomentti 37
5.3.7 Antisymmetrinen hypermomentti 38
5.3.8 Lagrangen tiheyden muodostaminen 39
5.4 Materian Lagrangen tiheydet 40
5.4.1 Diracin vaikutus 40

6 Symmetriset avaruudet **44**
6.1 Affiinit vektorikentät aika-avaruudessa 44
6.2 Muotoinvarianssi ja Killingin yhtälö 45
6.3 Homogeenisuus ja isotrooppisuus 47
6.3.1 Konnektion komponentit homogeenisessa ja isotrooppisessa avaruudessa 48
6.3.2 Riccin tensori ja skalaari 52
6.4 Pallosymmetrinen tapaus 53
6.4.1 Konnektion komponentit 53
6.4.2 Riccin tensori ja skalaari 56

7 Yhteenveto **59**

Viitteet **61**

A Määritelmiä ja merkintöjä **69**

B Yhtälöiden johtoja **72**
B.1 Kovarianttia integrointitekniikkaa 72
B.2 Christoffelin symbolin variaatio 73
B.3 Konnektio esitettynä torsion ja ei-metrisyystensorin avulla 74

C Tetradiformalismi **76**

D Diracin matriiseista ja spinoreista **81**

E Lien derivaatta **84**

F Tensorien muotoinvarianssi **86**

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan laitos

VAINIO, JAAKKO: Gravitaatioteorioiden Palatini-formalismi

Pro gradu -tutkielma, 68 s., 21 liites.
Teoreettinen fysiikka
Marraskuu 2007

Viime vuosisadan lopulla tehtiin tärkeä havainto supernovista: galaksit näyttävät loittenevan kiihtyvällä vauhdilla. Näiden havaintojen jälkeen yleistetyt gravitaatioteoriat ovat nousseet huomattavan kiinnostuksen kohteiksi. Näillä uusilla teorioilla voidaan mahdollisesti selittää maailmankaikkeuden kiihtyvä laajeneminen ilman pimeää energiaa. Tässä tutkielmassa on perehdytty yhteen mahdolliseen yleistykseen: Palatini-formalismiin $f(R)$-teorioissa. Yleisessä suhteellisuusteoriassa aika-avaruuden ominaisuudet seuraavat metriikasta. Tämä on erikoistapaus Palatini-formalismissa, jossa yhdensuuntaissiirtoon liittyvä konnektio on metriikasta riippumaton. Palatini-formalismi selviää samoista testeistä kuin erikoistapauksensa, yleinen suhteellisuusteoria. Käsitellyt Lagrangen tiheydet ovat $f(R)$-muotoa eli kaarevuuden funktioita.

Tutkielmassa on aluksi perehdytty menetelmän historiaan. Taustojen selvittelyn jälkeen käsitellään Palatini-formalismia yksinkertaisessa tapauksessa, jossa konnektio on symmetrinen. Erikoistapauksena käsitellään eräs Lagrangen tiheys, jolla voidaan selittää maailmankaikkeuden kiihtyvä laajeneminen. Palatini-formalismiin kohdistunutta kritiikkiä on myös tarkasteltu – mikään ei kuitenkaan sulje menetelmää pois laskuista. Vaikka Palatini-formalismia tarkastellaan tavallisesti symmetrisen konnektion tapauksessa, on yksi tutkielman luku omistettu yleisemmälle tapaukselle. Osoittautuu, että monet symmetriseen konnektioon liitetyt ominaisuudet seuraavat yleisemmästäkin tapauksesta, mutta ilman tarvetta lisäoletuksiin. Samassa luvussa on myös tarkasteltu materian osuutta Lagrangen tiheydessä.

Tutkielman lopussa on tarkasteltu mahdollisuuksia hyödyntää symmetriaa konnektion määräämisessä. Tätä mahdollisuutta ei ole juurikaan tutkittu aiemmin. Havainnot ovat osoittaneet, että maailmankaikkeudessa esiintyy symmetriaa. Tensorien muotoinvarianssia hyödynnetään konnektion komponenttien laskemiseen. Yleisessä tapauksessa konnektiolla on 64 komponenttia, jotka voivat riippua ajasta ja paikasta. Homogeenisessa ja isotrooppisessa tapauksessa vapausasteet saadaan rajoitettua neljään vain ajasta riippuvaan funktioon. Pallosymmetrisessä tapauksessa vapausasteita jää 14 ajasta ja säteestä riippuvaa funktiota. Näitä tuloksia ei tiettävästi ole laskettu muualla. Tässä laskettuja tuloksia voidaan hyödyntää sijoittamalla huomattavasti rajatut konnektion komponentit kenttäyhtälöihin. Näin saadut yhtälöt ovat huomattavasti yksinkertaisempia. Käyttömahdollisuudet eivät rajoitu pelkästään Palatini-formalismiin, vaan kirjoittamalla Lagrangen tiheys tietyllä tavalla, voidaan tuloksia käyttää myös puhtaasti metrisessä formalismissa.

Avainsanat: Palatini-formalismi, metris-affiini formalismi, torsio, maksimaalinen symmetria, f(R)-teoriat, yleistetyt gravitaatioteoriat.

Alkusanat

Kun pikkupoikana pelailin *Master of Orionia*, kohtaloni selvisi. Minusta tulisi fyysikko. Tuossa pelissä minulle oli aina tärkeintä panostaa tieteeseen. En juuri ymmärtänyt silloin vielä englantia, mutta kovasti hienoilta kaikki tulokset kuulostivat. Eikä sillä niin väliä ollutkaan, kaikki vei kauemmas tähtiin. Jossakin määrittelemättömässä vaiheessa sitten aloin kiinnostua gravitaatiosta. En oikeastaan osaa sanoa, mistä tämä kiinnostus on peräisin. Jotenkin se vain aina tuntui tärkeimmältä ja jännittävimmältä vuorovaikutukselta. Eikä sen kokemiseen tarvita mitään välineitä! Lopulta yliopistolla sitten tein enemmälti tuttavuutta kosmologian kanssa. Siinä viehättivät filosofiaa muistuttavat suuret kysymykset. Filosofia on minua aina etäisesti kiinnostanut juuri näiden kysymysten johdosta, mutta toisaalta en ole pitänyt sen menetelmistä.

Vaikka en enää aikuisena ihmisenä uskokaan sokeasti tieteen pelastavan maailman, koen tieteen yhdeksi tärkeimmistä itseisarvoista. Kieltämättä tiede tuottaa sovelluksia, jotka mahdollistavat paremman huomisen, mutta se merkitsee muutakin. Välillä maailman tapahtumien seuraaminen saa kysymään: Mikä oikeasti erottaa meidät muista eläimistä? Oikeastaan en enää osaa vastata tähän muuta kuin, että tieto nostaa meidät muun luonnon yläpuolelle. Ja toisaalta se sälyttää meille valtavan vastuun.

Haluan kiittää kaikkia, jotka ovat auttaneet tämän tutkielman valmistumisessa. Matkan varrelta kiitän erityisesti lehtori Iiro Viljaa, joka ohjaili projektin kohti mielenkiintoista omaa tutkimusta sekä dosentti Tuomas Multamäkeä, joka opastuksen lisäksi järjesti Suomen Akatemian rahoitusta työlleni. Loppuvaiheesta kiitän vielä oikolukemisesta Jani Sainiota, Pekka Silanterää ja Jyrki Vainiota, varsinkin kun kahdelle kolmesta tutkielma ei ollut lainkaan omaa alaa.

> *„To gaze up from the ruins of the oppressive present towards the stars is to recognise the indestructible world of laws, to strengthen faith in reason, to realise the 'harmonia mundi' that transfuses all phenomena, and that never has been, nor will be, disturbed."*
>
> Hermann Weyl

Turussa 25.11.2007,
Jaakko Vainio

1 Johdanto

Kosmologia tulee Kreikan sanasta $\kappa o\sigma\mu o\lambda o\gamma \acute{\iota}\alpha$ ($\kappa o\sigma\mu o\varsigma$,kosmos+$\lambda o\gamma o\sigma$,logos). Varsinaisesti antiikin kreikkalaiset eivät vielä tutkineet kosmologiaa, vaan tätä sanaa alettiin käyttää 1700-luvulla. Tällä tieteenalalla on kuitenkin pitkät perinteet. Tarkasti ottaen tässä pro gradu -tutkielmassa käsitellään fysikaalista kosmologiaa erotuksena uskonnollisesta ja metafyysisestä kosmologiasta. Luonnollisesti ensimmäinen näistä on ainoa, joka käyttää luonnontieteen menetelmiä. Tieteen ja fysiikan historiasta on kirjoitettu useita kirjoja, mutta nimenomaan kosmologiaan keskittyviä teoksia on niukasti. Pieni katsaus tieteenalan historiaan on kuitenkin paikallaan [1], [2], [3].

Kosmologian suuret kysymykset, kuten minkälainen maailmankaikkeus on, miten se on syntynyt ja minne se on menossa, ovat aina kiinnostaneet ihmisiä. Jossakin mielessä jo primitiivisten kansojen yritykset selittää maailmaansa sisälsivät kosmologiaa. Varhaisissa kulttuureissa, kuten Egyptissä ja Babyloniassa, ainoa yhteiskuntaluokka, jolla oli mahdollisuuksia perehtyä tieteisiin, oli papisto. Ei siis ole mitenkään yllättävää, että historialliset käsitykset maailmasta ovat kulloisenkin ajan valtauskonnon värittämiä - uskonnollista kosmologiaa. Enimmäkseen ajatukset maailmankaikkeudesta olivat tietenkin hyvin kaukana nykyisistä käsityksistä, mutta yllättävänkin hyviä päätelmiä löytyy paikoittain.

Antiikin Kreikan filosofit pohtivat monia taivaan ilmiöitä ja saivat aikaan hyviäkin tuloksia. Ymmärrettävistä syistä ajatukset pyörivät enimmäkseen planeettojen ja tähtien ympärillä. Kuitenkin asialistalla oli myös todellisia kosmologian kysymyksiä: Onko maailmankaikkeus ääretön? Onko materiaa rajattomasti? Atomistit olivat ajatuksissaan tuhansia vuosia edellä aikaansa. He olivat valmiita uskomaan äärettömään maailmankaikkeuteen, jossa on ääretön määrä ainetta. Aristoteles taas kannatti perinteisempää ajatusta, että molemmat ovat äärellisiä. Valitettavasti antiikista keskiajalle siirtyneet ajatukset eivät aina olleet oikeimpia ja tiede kaikilla aloilla lukkiutui väärille urille tuhanneksi vuodeksi.

Renessanssin ja ennen kaikkea Isaac Newtonin myötä alkoi fysiikan todellinen kukoistus. Vaikka kosmologia tukeutuu voimakkaasti suhteellisuusteoriaan, toimii Newtonin mekaniikka pitkälle galaksien ja tähtienkin tapauksessa [4]. Kopernikuksen ajatus, että maan päällä toimivat samat lait kuin taivaalla oli myös tärkeä käsitteellinen havainto, sillä ilman sitä olisi hyvin vaikea edetä Einsteinin postulaatteihin.

1800-luvulla tutkittiin paljon termodynamiikkaa ja tätä kautta johduttiin myös kosmologian pohdintoihin. Esimerkiksi Rudolf Clausiuksen mukaan maailmankaikkeudessa energia on vakio, ja entropia pyrkii kohti maksimia. Lopputilasta puhuttiin lämpökuolemana, elottomana maailmankaikkeutena. Tämä oli kuitenkin hankala ajatus siinä mielessä, että mikäli maailmankaikkeus olisi ollut aina olemassa, olisi se nyt äärettömän ajan kuluttua tuossa lopputilassa. Toisaalta ajatus, että maailmankaikkeus olisi syntynyt jonain tiettynä hetkenä, herätti ennakkoluuloja, koska se väitteenä herätti uskonnollisia mielleyhtymiä.

Nykyinen kosmologia on tieteenä nuori; se on kehittynyt 1900-luvun aikana. Vielä nuoremmaksi sen tekee, että sen rooli muuttui merkittävästi vuosisadan viimeisellä vuosikymmenellä. Juuret ovat kieltämättä syvällä historiassa, mutta varsinaisesti kosmologian katsotaan saaneen alkunsa Einsteinin töissä 1910-luvulla [5], [6]. Siihen saakka päätelmät olivat lähestulkoon perusteetonta pohdintaa. Einsteinin työt antoivat pohjan, josta voitiin matemaattisesti johtaa kosmologian tuloksia. Myös tähtitieteen havaintomahdollisuudet kasvoivat suuresti 1900-luvun aikana, joten kyse ei enää ollut mystisestä metafysiikasta, vaan laskelmia voitiin verrata havaintoihin.

Einsteinin alkuperäisessä mallissa maailmankaikkeus oli ajallisesti ääretön, mutta avaruudellisesti rajoitettu. Pohjan mallille antoivat hänen yhtälönsä vuodelta 1915, mutta nyt niihin ilmestyi uusi termi, kosmologinen vakio. Sen tarkoitus oli pitää malli staattisena. Einstein uskoi ensin, että tämä olisi ainoa yleiseen suhteellisuusteoriaan sopiva ratkaisu. Näin ei kuitenkaan ollut, vaan Willem de Sitterin ratkaisu, kosmologisen vakion dominoima maailmankaikkeus, osoittautui myös mahdolliseksi ja hyvin erilaiseksi.

Samoihin aikoihin havaintojen puolella tapahtui paljon. Vuonna 1917 Vesto Slipher havaitsi spiraaligalaksien punasiirtymiä. Seitsemän vuotta myöhemmin puolalainen Ludwik Silberstein esitti punasiirtymien olevan verrannollisia etäisyyteen. Hänen todistuksensa olivat kuitenkin virheellisiä, eikä ajatus ottanut vielä tuulta alleen. Samaan aikaan käytiin myös keskustelua muiden galaksien olemassaolosta. Jo Immanuel Kant oli esittänyt ajatuksen maailman saarekkeista (*Weltinsel*) avaruudessa, mutta vasta vuonna 1923, kun Edwin Hubble mittasi kefeidien avulla etäisyyden Andromedan galaksiin, tuli galakseista yleisesti hyväksyttyjä. Itse asiassa Hubble oli luonteeltaan varovainen, joten siinä vaiheessa, kun hän julkisti löydöksensä 1925, olivat ne yleisesti tunnettuja ja jopa hyväksyttyjä.

Vuonna 1929 Hubble tuli samaan tulokseen kuin Silberstein aiemmin; punasiirtymä on suoraan verrannollinen etäisyyteen. Toisin kuin yleensä väitetään, hän ei kuitenkaan julkisesti yhdistänyt tätä maailmankaikkeuden laajenemiseen. Samalla vuosikymmenellä Alexander Friedmann tutki Einsteinin kenttäyhtälöitä ja totesi Einsteinin ja de Sitterin ratkaisujen olevan erikoistapauksia yleisestä ratkaisusta. Friedmann tutki asiaa puhtaan matemaattisesti eikä siis pyrkinyt liittämään tuloksiaan havaintoihin. Lemaître tutki viittä vuotta myöhemmin samoja yhtälöitä ja päätyi samoihin tuloksiin. Hän yhdisti tuloksensa havaittuihin punasiirtymiin ja johti Hubblen lain. Nämä tulokset eivät kuitenkaan tulleet laajemmalti tunnetuiksi kuin vasta 1930-luvulla.

Friedmann pohti töissään myös äärellisen ikäistä maailmankaikkeutta, mutta lähinnä matematiikasta nousevana mahdollisuutena – ei siis varsinaisena todellisuutena. Vuonna 1931 Lemaître alkoi kampanjoida alkuräjähdysteorian puolesta. Monille tämä kuitenkin toi mieleen filosofisen ongelman maailman luomisesta. Voisiko maailmankaikkeus syntyä tyhjästä tai jos sen on jokin luonut, mistä tämä luoja tulee? Alkuräjähdysteoria sai uutta pontta Gamowin ja Alpherin töistä, joissa mukaan liitettiin ydinfysiikkaa. Tuolloin ennustettiin kosminen taustasäteily, mutta sitä ei löydetty vielä pitkään aikaan.

Samaan aikaan englantilaiset Bondi, Gold ja Hoyle esittelivät oman kilpailevan teoriansa. Heidän *steady state* -maailmankaikkeutensa laajeni, mutta oli stationäärinen. Tämä kuitenkin vaati, että uutta materiaa syntyi jatkuvasti. Tämän teorian etuna oli, että sen avulla pystyttiin selittämään galaksien synty paremmin kuin alkuräjähdyksen avulla. Steady state -teoria oli suosittu erityisesti Englannissa.

Kiista kahden kilpailevan teorian välillä ratkesi 1960-luvulla. Tuolloin saatiin todisteita alkuräjähdyksen puolesta moneltakin suunnalta. Ensimmäisenä saatiin radioastronomian puolelta havaintoja avaruuden geometriasta, jotka eivät sopineet steady state -malliin. Lisää todisteita tarjosivat kvasaarit ja heliumin osuus maailmankaikkeudessa. Vuonna 1965 löytyi aiemmin ennustettu kosminen taustasäteily. Löydön takana olivat Penzias ja Wilson, jotka eivät kuitenkaan osanneet selittää havaintojaan. Löydön merkitys paljastui, kun kosmologiaa tutkinut Robert Dicke sai tietää tuloksista.

1970- ja 1980-luvuilla kosmologian siteet ydin- ja hiukkasfysiikkaan vahvistuivat. Uudet hiukkaskiihdyttimet tarjosivat tietoa myös kosmologeille. Hiukkasfysiikan puolelta tuli myös Alan Guthin inflaatioteoria, jonka mukaan varhainen maailmankaikkeus laajeni ja kylmeni hyvin nopeasti [7], [8], [9]. Inflaatioteoria täytti joitakin perinteiseen alkuräjähdysteoriaan jääneitä aukkoja. Tätä uutta teoriaa pidettiin aluksi kovin metafyysisenä, mutta se hyväksyttiin, kun sitä tukevaa havaintoaineistoa alkoi kertyä enemmän.

1990-luvulla havaintomenetelmät alkoivat olla siinä määrin kehittyneitä, että kosmologian kultakausi saattoi alkaa. Hyödyllisiä olivat erityisesti satelliittihavainnot. Esimerkiksi taustasäteilyä tarkkailleet WMAP- ja COBE-luotaimet nostivat havainnot uudelle tasolle. Testejä mahdollisille kosmologian teorioille löytyi kosmisesta taustasäteilystä, suuren skaalan rakenteista ja supernovista. Vuonna 1998 tehtiin kosmologian kannalta tärkein löytö: supernovahavainnot tukevat ajatusta kiihtyvästi laajenevasta maailmankaikkeudesta [10], [11].

Perinteinen yleinen suhteellisuusteoria vaatii tämän selittääkseen kosmologisen vakion. Kosmologiseen vakioon taas liittyy useita ongelmia ja näin syntyykin kysyntä yleistetyille gravitaatioteorioille, joita on ehdotettu montaa eri tyyppiä.

Yksi mahdollinen yleistys on Palatini-formalismi. Yleisessä suhteellisuusteoriassa aika-avaruuden luonteen määrää metriikka – geometrian kannalta yhdensuuntaissiirtoon liittyvä konnektio määräytyy myös metriikan avulla. Palatini-formalismissa tai metris-affiinissa formalismissa konnektio on *a priori* metriikasta riippumaton. Eräällä Lagrangen tiheyden valinnalla metris-affiini formalismi tuottaa samat kenttäyhtälöt kuin yleinen suhteellisuusteoria – erikoistapauksena. Merkittävää on, että metris-affiini formalismi voi selittää maailmankaikkeuden kiihtyvän laajenemisen ilman pimeää energiaa.

2 Yleistettyjen gravitaatioteorioiden motivointi

2.1 Kokeelliset syyt

Einsteinin yhtälöihin tulee Lagrangen tiheyden potentiaalitermistä *kosmologinen vakio*. Einstein otti sen alun perin mukaan saadakseen tulokseksi stationäärisen maailmankaikkeuden. Kun myöhemmin Hubblen tulokset osoittivat, että maailmankaikkeus ei ollutkaan stationäärinen, Einsteinin kutsui kosmologista vakiota elämänsä suurimmaksi munaukseksi. Einsteinin epäonnistumisetkin saattavat olla kiinnostavia, sillä uudet havainnot laajenevasta maailmankaikkeudesta ovat tehneet kosmologisesta vakiosta jälleen mielenkiinnon kohteen.

Tyypin Ia supernovat (SNIa) ovat yksi tärkeimmistä apuvälineistä mitatessa tähtitieteellisiä etäisyyksiä. Supernovina räjähtävät tähdet ovat lyhytikäisiä ja sen vuoksi niitä voidaan havaita myös hyvin nuoressa maailmankaikkeudessa. Lisäksi supernovan fysiikka tunnetaan melko hyvin ja 1990-luvun puoliväliin mennessä niiden valokäyrät[1] tunnettiin varsin hyvin. Vähän aikaa supernova loistaa emogalaksiaan kirkkaammin. Havaittujen supernovien kirkkautta mittaamalla voidaan laskea galaksin punasiirtymä ja etäisyys. Tässä tutkielmassa ei paneuduta supernovien fysiikkaan, johon voi perehtyä lähes kaikkien tähtitieteen oppikirjojen avulla, esim. [12], [13].

Jo paljaan silmän havainnot osoittavat, että maailmankaikkeudessa on huomattava määrä tavallista ainetta. Kaikkea maailmankaikkeuden liikettä ei kuitenkaan pystytä selittämään pelkästään näkyvän materian avulla. Vaihtoehtoja on kaksi. Joko gravitaatioteoria vaatii korjausta tai maailmankaikkeudessa on runsaasti jotakin eksoottisessa muodossa olevaa energiaa.

Aiemmin mainittu Einsteinin kosmologinen vakio, jolla on negatiivinen paine, on yksi selitysehdotus. Tämä negatiivinen paine selittäisi kiihtyvän laajenemisen. Ratkaisu voi ol-

[1] en. *light curve*, valon intensiteetti ajan funktiona.

la muunkin luonteinen. Esimerkiksi Palatini-formalismi lähtee liikkeelle jostakin Lagrangen tiheydestä kuten Einsteinin teoriakin, mutta kenttäyhtälöt johdetaan eri tavalla. Toisaalta teoria saattaa kaivata syvällisempää muokkausta, lähtien niinkin itsestään selvältä tuntuvan asian kuin ulottuvuuksien määrän muuttamisesta. Tällöin painovoimaa voisi hukkua ylimääräisiin ulottuvuuksiin ja siten avaruuden laajenemiselle olisi vähemmän vastusta [14].

2.2 Teoreettiset syyt

Teoreettiseen fysiikkaan kuuluu perinteisten teorioiden kyseenalaistaminen ja toisaalta uusien kehittely. Jo siitä syystä tutkitaan yleistettyjä gravitaatioteorioita. Vaikka Einsteinin teoria on yksinkertaisin ja siksi kaunis, ei se välttämättä ole koko totuus. Newtonin gravitaatiokin oli riittävän tarkka useaksi sadaksi vuodeksi, mutta silti se on vain raja-arvo laajemmasta teoriasta.

Einstein–Hilbert-vaikutus ei nouse esiin mistään teoriasta. On siis syytä epäillä, että taustalla on olemassa jokin syvällisempi periaate, jota ei vain vielä tunneta. Mikään ei estä vaikutusta sisältämästä epälineaarista riippuvuutta kaarevuudesta tai jonkinlaista muuta lisäystä. Osoittautuukin, kuten historian saatossa on tapahtunut aiemminkin, että nykyiset teoriat ovat monissa tilanteissa tyydyttäviä, mutta eivät kuitenkaan koko totuus.

Kenttäyhtälöiden ratkaisemisessa on kyse Cauchyn tehtävästä. Tämä on ongelma, jota on tutkittu varsin paljon. Eräs kohtuullisen laaja katsaus asiaan löytyy viitteestä [15]. Keskustelua on käyty pitkään, mutta lopullista tulosta ei ole vielä saatu [16]. Erityisen kiinnostava on kysymys siitä, onko Cauchyn tehtävä hyvin asetettu sekä metrisessä että metris-affiinissa formalismissa – vai vain toisessa [17].

Yleensäkin tieteessä ja erityisesti fysiikassa pyritään kohti mahdollisimman yksinkertaisia ja kattavia teorioita [18]. Sähköinen ja magneettinen vuorovaikutus saatiin yhdistettyä jo sata vuotta sitten. Kun sähkömagnetismi ja heikko vuorovaikutus saatiin myöhemmin yhdistettyä, syntyi usko mahdollisuuteen löytää kaikki perusvuorovaikutukset yhdistävä teoria. Nykyään pystytään esittämään sekä sähköheikko- että vahvavuorovaikutus renormalisoituvina kvanttikenttinä. Kaikkien vuorovaikutusten yhdistäminen yhden teorian alle on kuitenkin osoittautunut erityisesti gravitaation osalta hankalaksi. Einsteinin gravitaatiota ei pystytä kvantisoimaan, toisin kuin muita vuorovaikutuksia. Monia kilpailevia teorioita, esimerkiksi säieteoria, on ehdotettu, mutta tyydyttävää ratkaisua ei ole löytynyt.

Hankala kysymys on myös maailmankaikkeuden synty. Mitä tapahtui hetkellä nolla? Einsteinin gravitaatio ei ole riittävä selittämään tätä mielenkiintoista kysymystä. Vaikuttaa siltä, että näiden äärimmäisten olosuhteiden kuvauksessa vaaditaan toimivaa kvanttigravitaation teoriaa. Hyvä yleistetty gravitaatioteoria voisi tarjota nykyistä paremman approksimaation hankaluuksia tuottavasta kvanttigravitaatiosta.

Einsteinin gravitaatio tuottaa luonnostaan singulariteettiratkaisuja, joita pidetään kiusallisina. Nämä on mahdollista välttää joissakin teorioissa [19]. Suurilla etäisyyksillä yleinen suhteellisuusteoria tuottaa hyviä tuloksia, mutta erittäin lyhyet etäisyydet, joilla kvanttivaikutukset tulevat merkittäviksi, vaaditaan jotakin uutta. Säieteoria tarjoaisi mahdollisuuksia, mutta teorian keskeneräisyys on ongelma. Monia teorian piirteitä saadaan kuitenkin mukaan käyttämällä efektiivistä voimaa, johon on tehty säieteorian mukaiset korjaukset.

Otettaessa käyttöön kvanttikorjauksia, joudutaan gravitaatiokenttien yhtälöihin lisäämään termejä. Eräitä mahdollisia yleistettyjä gravitaatioteorioita ovat skalaaritensoriteoriat ja moniulotteiset Kaluza–Klein-teoriat [20]. Molemmat näistä liittyvät Brans–Dicke-teoriaan, jota on käytetty monien yleistettyjen gravitaatioteorioiden pohjana.

Yksi tärkeä syy tämän teorian kehittämiseen oli luoda Machin periaatteen[21] sisältävä teoria. Se ei täysin sisälly yleiseen suhteellisuusteoriaan, vaikka Einstein piti tätä yhtenä johtotähtenään suhteellisuusteoriaa luodessaan. Machin periaate on ongelmallinen siinä mielessä, että sen kantava ajatus – massa täällä vaikuttaa inertiaan tuolla – on varsin epämääräinen. Tämän vuoksi Machin periaatteeksi on esitetty erilaisia väitteitä. Viitteessä [22] on lueteltu kymmenen erilaista tulkintaa Machin periaatteesta.

Brans–Dicke-teoriassa esiintyy parametri ω vaikutuksessa [20][2]

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d\Omega \sqrt{-g} \big[\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \big] + S_M, \tag{2.1}$$

ja rajalla $\omega \to \infty$ tulokset ovat useimmissa tapauksissa samat kuin yleisellä suhteellisuusteorialla. Skalaaritensoriteorioiden vaikutus muistuttaa Brans–Dicke-teorian vastaavaa vaikutusta. Merkittävä ero on, että tässä parametri $\omega = \omega(\phi)$ riippuu skalaarikentästä. Kaluza–Klein-teoriasta puolestaan voidaan johtaa Brans–Dicke-teoria.

Einstein–Hilbert-vaikutukselle on monia vaihtoehtoja. Suosittuja tutkimuskohteita ovat niin sanotut $f(R)$-teoriat, joissa vaikutus on muotoa

$$S_{f(R)} = \int d\Omega \sqrt{-g} f(R). \tag{2.2}$$

Tämä on siinä mielessä yksinkertainen muutos, että se ei tuo mukanaan uusia kenttiä. Eniten tutkittuja ovat paitsi perinteinen R, lisätermit R^2 ja $\frac{1}{R}$ (esim. [23], [24]). Ongelmana on kuitenkin, että mikäli käytetään edelleen puhtaasti metristä variaatioperiaatetta[3], tulokset eivät saa oikeaa newtonilaista rajaa [25], [26], [23] eivätkä selviä Aurinkokunnan testeistä [23], [27].

[2] Tutkielmassa käytetään liitteen A mukaista merkintää $\int d^4x \equiv \int_U d\Omega$.

[3] Seuraavassa luvussa on käsitelty kolmea erilaista variaatioperiaatetta.

3 Palatini-formalismi

3.1 Palatini-formalismin taustaa

Ennen varsinaista tarkastelua on hyvä ensin perehtyä menetelmän historiaan. Palatini-formalismin kehityksestä viime vuosisadan alussa kertoo erityisesti viite [28]. Lähdettäessä johtamaan Einsteinin kenttäyhtälöitä (tai mahdollisesti jonkin yleistetyn gravitaatioteorian) käytetään yleensä sopivaa variaatioperiaatetta. Vaihtoehtoja on kuitenkin enemmän kuin yksi, eivätkä vaihtoehtoiset tavat välttämättä johda samaan tulokseen.

Yksi vaihtoehto on *metris-affiini variaatioperiaate*, jossa riippumattomia kenttiä ovat metriikka g ja konnektio Γ. Mukaan voidaan liittää myös materian kenttiä ϕ. Metris-affiinia teoriaa rakennettaessa tehdään oletus, että metriikka ja konnektio sisältävät kaiken oleellisen informaation käsiteltävästä monistosta. Metriikka määrää kronologisen rakenteen ja konnektio affiinin rakenteen. Otetaan käyttöön Lagrangen tiheys $\mathcal{L}_{MA}$, jonka kentät ovat $g, \partial g, \Gamma, \partial\Gamma, \phi$ ja $\partial\phi$. Kenttäyhtälöt saadaan varioimalla vaikutusta eli

$$\delta_u\Big(\int_U d\Omega\mathcal{L}_{MA}(u,\partial u)\Big) = 0, \tag{3.1}$$

jossa variaatio käy läpi kaikki riippumattomat kentät $u = (g, \Gamma, \phi)$. Tätä metriikan ja konnektioiden tulkitsemista riippumattomiksi kentiksi kutsutaan *Palatinin variaatiomenetelmäksi* tai sanotaan, että kenttäyhtälöt saadaan *Palatinin formalismissa.* On tosin kyseenalaista, kuuluuko tässä asiassa kunnia Palatinille. Kolmas käytetty nimitys on *ensimmäisen kertaluvun formalismi*[1]. Tämän viimeisen nimityksen merkitys näkyy vaikutuksessa (3.1), joka on funktio kentistä ja näiden ensimmäisistä derivaatoista. Saadaan siis ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.

Koska tässä metriikkaa ja konnektioita varioidaan erikseen, ei etukäteen voida olettaa minkäänlaista riippuvuutta näiden kahden välille. Jos esimerkiksi oletetaan, että Γ on Levi-Civita-konnektio – jolloin komponentit ovat Christoffelin symboleita – päädytään erilaiseen

[1] Tätä suomenkielistä nimitystä käytetään harvoin, mutta englanninkielistä termiä *first order formalism* näkee artikkeleissa.

variaatioperiaatteeseen. Tällöin on $\Gamma = \Gamma(g, \partial g)$, joten Lagrangen tiheys voidaan kirjoittaa muodossa $\mathcal{L}_M(g, \partial g, \partial^2 g, \phi, \partial\phi)$. Kenttäyhtälöitä haetaan siis yhtälöstä

$$\delta_v\Big(\int_U d\Omega \mathcal{L}_{MA}(v, \partial v, \partial^2 v)\Big) = 0, \tag{3.2}$$

jossa tällä kertaa variaatio käy läpi kaksi riippumatonta kenttää $v = (g, \phi)$. Koska variaatiota ei suoriteta affiineiden konnektioiden suhteen, tätä vaihtoa kutsutaan *puhtaasti metriseksi* (tai Hilbertin) variaatioperiaatteeksi. Joskus tässä yhteydessä käytetään Lagrangen kertoimia. Tällöin konnektion metrisyys tulee mukaan side-ehtona. Tämä menetelmä on ekvivalentti puhtaasti metrisen variaatioperiaatteen kanssa [29]. Palatini käytti vuoden 1919 artikkelissaan [30] tätä puhtaasti metristä variaatioperiaatetta, mutta lähestyen hieman eri suunnasta [28]. Hän aloitti käsittelemällä yleistä konnektiota, mutta puolitiessä valitsi kuitenkin Levi-Civita-konnektion. Artikkelissa johdettu Palatinin yhtälö on kuitenkin voimassa yleisellä konnektiolla.

Kolmas vaihtoehtoinen variaatioperiaate [31], [32] on *puhtaasti affiini* variaatioperiaate [28]. Tässä tapauksessa kenttäyhtälöitä haetaan muodossa

$$\delta_w\Big(\int_U d\Omega \mathcal{L}_A(w, \partial w, \partial^2 w)\Big) = 0, \tag{3.3}$$

jossa varioidaan kahden kentän Γ ja ϕ suhteen. Tässä siis konnektio on perimmäinen kenttä ja se vastaa siten koordinaatteja relativistisessa mekaniikassa [33]. Tätä analogiaa voi jatkaa rinnastamalla kaarevuuden nelinopeuteen ja metriikan yleistettyihin momentteihin. Tämä analogia toimii siinäkin mielessä, että konnektio ja koordinaatit eivät ole tensoreita, mutta niiden variaatiot ovat (koordinaattien variaatiot ovat vektoreita). Metrinen tensori syntyy konnektiosta riippuvan Lagrangen tiheyden Hamiltonin derivaatoista [34].

Kun Einstein esitteli alustavat ja epätäydelliset yhtälönsä marraskuussa 1915, hän käytti puhtaasti metristä variaatiomenetelmää. Tällöin hän kuitenkin teki oletuksen, että $\sqrt{-g} = 1$ eikä Lagrangen tiheys ollut yleisesti kovariantti. Myöhemmin samassa kuussa, kun hän esitteli lopulliset yhtälönsä, ei artikkelissa ollut käytetty mitään variaatioperiaatetta. Samoihin aikoihin David Hilbert johti Einsteinin yhtälöt metrisellä variaatioperiaatteella käyttäen Lagrangen tiheytenä

$$\mathcal{L} = R\sqrt{-g}, \tag{3.4}$$

joka on kovariantti.

Einstein julkaisi seuraavana vuonna yleisen suhteellisuusteorian perusteet [35][2], jossa kuitenkin on edelleen ongelmana, että variaatioperiaate ei ole kovariantti. Samana vuonna Lorentz perehtyi Einsteinin tuloksiin käyttäen samaa Lagrangen tiheyttä kuin Hilbert.

[2]käännös [36]

Lisäksi Lorentz tutki monia erilaisia materiatermejä. Oletettavasti hänen töidensä vaikutuksesta Einstein palasikin tähän ongelmaan artikkelissaan [37]. Tällä kertaa käytössä ei ollut ongelmallista rajoitusta metriikalle. Lisäksi hän asettaa tässä artikkelissa materialle huomattavasti aiempaa vähemmän oletuksia. Metrisen formalismin voi katsoa tässä vaiheessa päässeen eroon lastentaudeistaan, vaikkakin Klein kehitteli sitä edelleen Emmy Noetherin ajatusten pohjalta.

Palatini julkaisi oman artikkelinsa [30][3] vuonna 1919. Hänen tarkoituksensa oli kehitellä eteenpäin Hilbertin päättelyä ja säilyttää kaikissa yhtälöissä tensoriluonne. Artikkeli sisältääkin arvokkaita tuloksia: Palatinin yhtälö ja tieto Christoffelin symbolin variaation tensoriluonteesta. Erityisesti Palatinin yhtälö on riippumaton symmetrisen konnektion valinnasta eikä siis vaadi näiden olevan Christoffelin symboleita.

Palatini ei kuitenkaan käyttänyt mielivaltaisia konnektioita, vaan rajoittui yksinomaan metriseen tapaukseen. Näin siitäkin huolimatta, että hän esitteli yleisen konnektion käyttämisen mahdollistavia työkaluja. Palatinin artikkeli ei kuitenkaan tullut tuolloin laajalti tunnetuksi. Samaan aikaan Weyl pohdiskeli samansuuntaisia asioita [39] todennäköisesti tuntematta Palatinin töitä.

Weylin työt tulivat paremmin tunnetuiksi ja niiden perusteella ryhdyttiin pohtimaan puhtaasti affiineja gravitaatioteorioita. Ensimmäisten joukossa oli Eddington, joka pääsi lähelle kohdettaan, mutta hän määritteli metriikan siten, että se lukitsi konnektion. Lopputulos oli siis pohjimmiltaan edelleen puhtaasti metrinen. Hieman myöhemmin, 1923, Einstein kehitteli tätä ajatusta edelleen. Suurena ajatuksena oli yhdistää sähkömagnetismi ja gravitaatio yhden teorian alle geometriselta pohjalta. Hän esitti, että Lagrangen tiheyden tulisi riippua pelkästään konnektiosta ja sitä tulisi myös varioida konnektion suhteen. Metriikka saataisiin oheistuotteena.

Einstein palasi asiaan vielä uudelleen vuonna 1925, koska yhdistetty kenttäteoria tuotti ongelmia. Yhdistettyä kenttäteoriaa ei vieläkään syntynyt, mutta hänen artikkelinsa oli ensimmäinen, jossa nykyisin tunnettu Palatinin menetelmä esiintyi. Hän siis hylkäsi puhtaasti affiinin variaatioperiaatteen ja palasi käyttämään metris-affiinia variaatioperiaatetta. Tässä esityksessä hän ei olettanut edes konnektion symmetrisyyttä. Tämä käytiin kuitenkin läpi erikoistapauksena. Einstein ei viittaa artikkelissaan Palatinin töihin.

Myöhemmin Einstein kyllä viittasi Palatiniin, joten on todennäköistä, että Einstein ei tässä vaiheessa tuntenut Palatinin töitä. Ensimmäistä kertaa Einstein viittasi Palatiniin 1941. Hän nimitti tätä metris-affiinia variaatioperiaatetta Palatinin menetelmäksi ja tämä nimitys on pysynyt, vaikkakin kunnia kuulunee etupäässä Einsteinille.

Koska tämäkään menettely ei tuottanut tulosta yhdistetyn kenttäteorian saralla, metris-

[3] Käännös [38]

affiini variaatio menetti suuren osan merkityksestään, sillä Einstein–Hilbert-vaikutuksen tapauksessa metrinen ja metris-affiini variaatio tuottavat ekvivalentit tulokset. Palatinin formalismi koki kuitenkin uuden nousun 1950-luvulla, kun menetelmää käytettiin kaarevuustensorin suhteen kvadraattisten Lagrangen tiheyksien yhteydessä. Jälleen kerran motivaationa oli yhdistetty kenttäteoria. Erityisesti Buchdahl kuitenkin puhui Palatinin formalismia vastaan ja ehdotti sen hylkäämistä [40], [24].

1970- ja 1980-luvun tutkimuksissa on havaittavissa tiettyä ennakkoluuloisuutta suhteellisuusteorian kilpailijoita kohtaan. Tuolloin havainnot eivät olleet osoittaneet vielä mitään syitä poiketa yleisestä suhteellisuusteoriasta. Koska metris-affiini variaatioperiaate tarjosi vain toisen tavan johtaa Einsteinin yhtälöt, koettiin se lähinnä taakaksi [29]. Sama päti muihinkin muutoksiin yleiseen suhteellisuusteoriaan.

Viime aikoina Palatinin formalismi on jälleen kerännyt huomiota. Tällä kertaa kiinnostus ei johdu niinkään yhdistetystä kenttäteoriasta, vaan mahdollisuudesta selittää pimeän energian ongelma. Näin maailmankaikkeude kiihtyvää laajenemista ei tarvitsisi selittää mystisellä pimeällä energialla, vaan kyseinen käytös nousisi suoraan teoriasta.

Toinen käyttökohde on kvanttigravitaation ongelma. Ashtekar kehitteli 1980-luvulla uutta formalismia, johon voidaan soveltaa kvantisointia mittakenttäteorioista [41],[42]. Ongelmallista tässä on, että kentät ovat kompleksisia ja seurauksena on hankaluuksia reaalisuusehdoista.

Myöhemmin Barberon [43] ja Holstin [44] töissä Ashtekarin formalismia on kehitetty edelleen ja mukaan on tullut Palatinin formalismi. Nykyään usein kvantisoinnissa käytetään Palatinin vaikutusta, jota varioidaan kahden kentän tetradin [1] ja konnektion suhteen [46], [47].

3.2 Palatini-formalismi f(R)-teorian tapauksessa

Tässä ja jatkossa otetaan käyttöön liitteessä A esitellyt merkinnät. Enimmäkseen nämä ovat laajalti tunnettuja, mutta tensoritiheyksien merkitseminen fraktuuralla on hieman harvinaisempi tapa.

Tässä luvussa tarkastellaan $f(R)$-tyyppisiä Lagrangen tiheyksiä metris-affiinin variaatioperiaatteen valossa. Torsion oletetaan häviävän *a priori* tämän luvun tarkasteluissa. Perinteisesti tätä on pidetty luonnollisena oletuksena, sillä torsiota ei ole pystytty kokeellisesti havaitsemaan. Tätä kiertyvän aika-avaruuden tapausta tarkastellaan seuraavassa luvussa.

[1] Tämä liittyy metriikkaan, sillä $g_{\mu\nu} = e^{\alpha}_{\mu} e^{\beta}_{\nu} \eta_{\alpha\beta}$ [45]. Tetradeista kerrotaan laajemmin liitteessä C.

Riippumatta variaatioperiaatteesta, lähtötilanne on

$$\delta \int_U d\Omega \mathfrak{L} = \int_U d\Omega (\mathfrak{A}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \mathfrak{B}^{\mu\nu}_{\alpha} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}). \tag{3.5}$$

Tässä $\mathfrak{L}$ on Lagrangen tiheys kerrottuna metriikasta saatavalla $\sqrt{-g}$. Oikealla puolella esiintyvät $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat joitakin tensoritiheyksiä. Metris-affiinin variaation tapauksessa tästä saadaan yhtälöiksi

$$\mathfrak{A}^{\mu\nu} = 0, \quad \mathfrak{B}^{\mu\nu}_{\alpha} = 0. \tag{3.6}$$

Metrisen variaation tapauksessa kirjoitetaan $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ riippuu metriikasta, jolloin saadaan

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.7}$$

Toisin sanoen Einsteinin tensoritiheyden tulee hävitä. Lähdetään nyt tarkastelemaan vaikutusta

$$S(g, \partial g, \Gamma, \partial\Gamma) = -\frac{1}{2\kappa} \int_U d\Omega \sqrt{-g} f(R) + S_M, \tag{3.8}$$

jossa κ on jokin vakio. Jo tässä vaiheessa huomataan yksi etu Palatinin formalismissa: vaikutuksessa on vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoja kentistä. Ensinnäkin tätä voidaan varioida metriikan $g^{\mu\nu}$ suhteen

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa} \int_U d\Omega \delta\big[\sqrt{-g} f(R)\big] + \delta S_M = -\frac{1}{2\kappa} \int_U d\Omega \big[f(R)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} f'(R)\delta R\big] + \delta S_M. \tag{3.9}$$

Nyt tarvitaan tietoa

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathfrak{g}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{3.10}$$

Lisäksi $\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, koska Riccin kaarevuusskalaari on funktio affiineista konnektioista, jotka eivät siis metris-affiinissa tapauksessa riipu metriikasta. Näiden kahden avulla saadaan (3.9) muotoon

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa} \int_U d\Omega \big[-\frac{1}{2} \mathfrak{g}_{\mu\nu} f(R) \delta g^{\mu\nu} + f'(R) \mathfrak{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}\big] + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \tag{3.11}$$

Koska variaation pitää hävitä, saadaan

$$\frac{1}{2\kappa} \big[f'(R) \mathfrak{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{g}_{\mu\nu} f(R)\big] = \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{3.12}$$

joka voidaan kirjoittaa

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) = \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \equiv -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{3.13}$$

Ennen kuin vaikutusta voidaan varioida konnektion suhteen, tarvitaan työkaluja. Erityisesti tarvitaan Palatinin identiteettiä (tulos tunnetaan myös Palatinin yhtälön nimellä), joka oli esillä jo aiemmin:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}. \tag{3.14}$$

Jotta kyseinen tulos saadaan johdettua, on ensin syytä tarkastella hetki konnektiota $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sekä sen variaatiota $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Konnektiot $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ eivät käyttäydy muunnoksissa kuten tensorit (eivät edes Christoffelin symbolit) [48]. Yksi tapa saada tämä tulos olisi tarkastella vaikkapa kontravariantin vektorin kovarianttia derivaattaa $\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} A^\alpha$ ja vaatia sen olevan (1,1)-tensori. Tämä tuottaa $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$:lle muunnoskaavan, joka ei yleisessä tapauksessa ole tensorin muunnoskaava. On tietenkin luonnollista, että näin on, koska konnektiot ovat korjaamassa tensorin derivoinnissa syntyvän ylimääräisen osan.

Toisin kuin $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, on $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ tensori [49], jolla on kovariantit derivaatat. Kuten aiemmin todettua, tämä tulos on peräisin Palatinin artikkelista [30] – tosin metrisen konnektion tapauksessa. Liitteessä B.2 on perehdytty Palatinin tapaan johtaa tämä tulos. Toinen ja lyhyempi tapa saada tämä tulos on tarkastella konnektion $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ pientä muutosta

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \to \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \tag{3.15}$$

joten siis

$$\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \tag{3.16}$$

Kahden konnektion $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ erotukset ovat tensoreita, koska muunnoksen epähomogeeniset osat kumoavat toisensa. Tässä menetelmässä on myös se etu, ettei tarvitse olettaa konnektion metrisyyttä tai edes torsiottomuutta. Palatinin yhtälön johtaminen kuitenkin vaatii torsiottomuutta. Torsiollinen tapaus käsitellään myöhemmin luvussa 5. Nyt Palatinin yhtälö saadaan käyttäen määritelmiä (A.4) ja (A.5)

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\alpha_{\mu\alpha\nu} &= \delta(\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} + \Gamma^\alpha_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\kappa\alpha}\Gamma^\kappa_{\nu\mu}) \qquad (3.17)\\
&= \partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\\
&= \left(\partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\right) - \left(\partial_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right). \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Ensimmäisistä sulkeista saadaan kolmannen asteen sekatensorin kovariantti derivaatta. Samoin toisten sulkujen termien avulla saadaan kovariantin vektorin kovariantti derivaatta. Saadaan siis tulos (3.14). Tämä tulos voidaan johtaa muillakin tavoilla, joista yhden esitti Palatini artikkelissaan [30]. Nyt on esitelty tarvittavat työkalut vaikutuksen (3.8) varioimiseksi konnektion suhteen:

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\delta\big[\sqrt{-g}f(R)\big] + \delta S_M = -\frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\sqrt{-g}f'(R)\delta R \\ &= -\frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{3.19}$$

jossa materian osuus S_M ei riipu konnektioista. Tässä voidaan selvästikin käyttää edellä käsiteltyä Palatinin yhtälöä (3.14), jonka avulla saadaan [50]

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}(\nabla_\nu\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}). \tag{3.20}$$

Tässä kohdin voidaan käyttää Gaussin lausetta [51]. Koska variaatio häviää pinnalla, on

$$\int_U d\Omega f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = -\int_U d\Omega\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\nabla_\nu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}). \tag{3.21}$$

Tässä on syytä huomata, että vasemmalla kovariantin vektorin kovariantti derivaatta, kun taas oikealla puolella on toisen asteen kontravariantin tensoritiheyden kovariantti derivaatta. Tätä asiaa on tarkasteltu liitteessä B.1. Toimimalla vastaavasti toisen termin suhteen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[\nabla_\nu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu})\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu})\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\big] \\ &= -\frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[\delta^\nu_\alpha\nabla_\beta(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\beta}) - \nabla_\alpha(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu})\big]\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Koska vaikutuksen varioinnin tulee hävitä mielivaltaisessa tilavuudessa, jonka yli integroidaan, täytyy olla

$$\big[\delta^\nu_\alpha\nabla_\beta(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\beta}) - \nabla_\alpha(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu})\big]\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0 \tag{3.23}$$

Koska tässä kappaleessa tarkastellaan symmetrisen konnektion tapausta, jossa *Cartanin torsiotensori* häviää [52], [53] eli ${S_{\mu\nu}}^\alpha = \frac{1}{2}\big(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\big) = 0$ pitää edellisessä symmetrisen osan hävitä sulkujen sisältä eli

$$\frac{1}{2}\delta^\nu_\alpha\nabla_\beta\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\beta}\big) + \frac{1}{2}\delta^\mu_\alpha\nabla_\beta\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\nu\beta}\big) - \nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big) = 0. \tag{3.24}$$

Tämä tulos voidaan saattaa vielä siistimpään muotoon. Kontraktoidaan α ja μ,

$$\begin{aligned}&\nabla_\mu\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big) - \frac{1}{2}\nabla_\beta\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\beta\mu}\big)\delta^\nu_\mu - \frac{1}{2}\nabla_\beta\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\beta\nu}\big)\delta^\mu_\mu = 0 \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{2}\nabla_\beta(f'(R)\mathfrak{g}^{\beta\mu})\delta^\nu_\mu + 2\nabla_\beta(f'(R)\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = \nabla_\mu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}) \\ \Rightarrow\ &\frac{5}{2}\nabla_\mu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}) = \nabla_\mu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}) \\ \Rightarrow\ &\nabla_\mu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}) = 0.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Tämänkaltainen toimenpide voidaan suorittaa aina, jos $n \geq 2$. Sijoitetaan tämä tulos takaisin yhtälöön (3.24), jolloin ainoastaan viimeinen termi jää jäljelle. Kenttäyhtälöt ovat siis

$$\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big) = 0, \tag{3.26a}$$

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{3.26b}$$

3.2.1 Vertailu puhtaasti metrisen variaatioperiaatteen tuloksiin

Nyt voidaan metris-affiinin variaatioperiaatteen tuloksia verrata vain metriikkaa varioimalla saatuun tulokseen Einstein–Hilbert-vaikutuksen tapauksessa, jossa siis $f(R) = R - 2\Lambda$ ja $\kappa = \frac{1}{2}$. Tällöin kenttäyhtälöt (3.26) saadaan muotoon

$$\nabla_\alpha(\mathfrak{g}^{\mu\nu}) = 0, \tag{3.27a}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu}. \tag{3.27b}$$

Jälkimmäinen on juuri sama, metrisellä variaatioperiaatteella saatu tulos ja sitä kutsutaan *Einsteinin (gravitaatio)yhtälöksi*. Ylempi yhtälö on uusi. Se ei kuitenkaan tuo uutta informaatiota, sillä se vastaa metrisyysehtoa eli kertoo konnektion komponenttien $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ olevan Christoffelin symboleita. Vaatimus, että konnektio on Levi-Civita-konnektio sisältää tarkalleen ottaen kaksi erillistä vaatimusta, metrisyysehdon ja torsiottomuuden. Torsiottomuus on kuitenkin ollut tässä käsittelyssä koko ajan oletettuna.

Seuraavalla tavalla voidaan osoittaa, että (3.27a) kertoo komponenttien $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ olevan Christoffelin symboleita (torsiottomassa tapauksessa). Ensinnäkin tarvitaan kovariantti derivaatta $\nabla_\alpha\sqrt{-g}$, joka on määritelty [54]

$$\nabla_\alpha\sqrt{-g} = \partial_\alpha\sqrt{-g} - \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\sqrt{-g}. \tag{3.28}$$

Tästä saadaan käyttäen tunnettuja metriikan determinantin g derivointiominaisuuksia

$$\nabla_\alpha\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\sqrt{-g}. \tag{3.29}$$

Lähdetään tarkastelemaan seuraavanlaista rakennetta:

$$\nabla_\alpha(\mathfrak{g}^{\mu\nu}g_{\nu\beta}) = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\nabla_\alpha g_{\nu\beta} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\alpha g_{\nu\beta}. \tag{3.30}$$

Toisaalta on voimassa myös

$$\nabla_\alpha(\mathfrak{g}^{\mu\nu}g_{\nu\beta}) = \nabla_\alpha(\sqrt{-g}\delta^\mu_\beta) = \delta^\mu_\beta\nabla_\alpha\sqrt{-g}. \tag{3.31}$$

Voidaan siis kirjoittaa (3.29) avulla

$$\delta^\mu_\beta \nabla_\alpha \sqrt{-g} = \delta^\mu_\beta (\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\nu} \partial_\alpha g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha g_{\nu\beta}. \tag{3.32}$$

Kontraktoidaan nyt μ ja β, jolloin

$$2\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - 4\sqrt{-g}\Gamma^\mu_{\mu\alpha} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} g_{\nu\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} g_{\beta\nu}). \tag{3.33}$$

Oikea puoli sievenee kontraktiot laskemalla ja saadaan

$$2\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - 4\sqrt{-g}\Gamma^\mu_{\mu\alpha} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - 2\sqrt{-g}\Gamma^\mu_{\mu\alpha} \tag{3.34}$$

eli

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - 2\Gamma^\mu_{\mu\alpha} = 2\nabla_\alpha \sqrt{-g} = 0. \tag{3.35}$$

Sijoitetaan tämä tulos yhtälöön (3.32), jolloin nähdään, että

$$0 = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha g_{\nu\beta}. \tag{3.36}$$

Tästä seuraa, että

$$\nabla_\alpha g_{\nu\beta} = 0. \tag{3.37}$$

Tuloksena saatiin siis Riccin identiteetti eli metrisyysehto. Käytännössä tämä tarkoittaa, että yhdensuuntaissiirrossa pituus säilyy. Tätä ominaisuutta kutsutaan metrisyydeksi. Riccin identiteetin avulla voidaan kirjoittaa Christoffelin symbolin määritelmässä (A.2):ssa esiintyvät kolme derivaattaa seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu g_{\beta\nu} &= \partial_\mu g_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} = 0 \\
\Rightarrow \partial_\mu g_{\beta\nu} &= \Gamma^\alpha_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}, \\
\partial_\nu g_{\beta\mu} &= \Gamma^\alpha_{\nu\beta} g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} g_{\alpha\beta}, \\
-\partial_\beta g_{\mu\nu} &= -\Gamma^\alpha_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} g_{\alpha\mu}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Summataan kolme viimeistä yhtälöä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu} &= \Gamma^\alpha_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} \\
&= \Gamma^\alpha_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} = 2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} g_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

kun muistetaan, että tarkastellaan torsiotonta tapausta. Tulos alkaa jo olla selvästi nähtävillä, mutta kerrotaan vielä puolittain yhdistelmällä $\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}$, jotta saadaan

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \tag{3.40}$$

joka on Christoffelin symbolin määritelmä (A.2). Tämän käsittelyn tuloksena siis todetaan, että yksinkertaisessa tapauksessa, jossa varioidaan Einstein–Hilbert-vaikutusta, saadaan samat yhtälöt varioimalla pelkästään metriikan suhteen tai varioimalla sekä metriikan että konnektioiden suhteen. Yleinen suhteellisuusteoria siis saadaan metris-affiinin $f(R)$-teorian erikoistapauksena.

Selvää on myös, että tulokset eivät yleisesti ole samat, sillä konnektioiden suhteen variointi tuottaa yhtälön, joka ei välttämättä ole pelkkä metrisyysehto. Tämä tulos voidaan tietenkin johtaa Palatinin menetelmällä suoraan Einstein–Hilbert-vaikutuksesta käyttämättä aluksi yleisempää $f(R)$-teoriaa [54].

3.2.2 Konnektion lisätarkasteluja

Konnektion variaatiolla saatu kenttäyhtälö (3.26a) on mahdollista ratkaista suoraan konnektion suhteen kirjoittamalla auki kovariantti derivaatta. Vaihtoehtoisesti voidaan määritellä uusi metriikka

$$\hat{g}_{\mu\nu} = f'(R) g_{\mu\nu}, \tag{3.41}$$

jolloin yhtälö on

$$\nabla_\alpha \hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu} = 0. \tag{3.42}$$

Tämä puolestaan on edellisen osion tarkastelun mukaan yhtäpitävä sen kanssa, että konnektio $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ on Christoffelin symboli uuden metriikan $\hat{g}_{\mu\nu}$ suhteen. Sanotaan, että metriikat $\tilde{g}$ ja g ovat *konformit*, jos [55]

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu}, \tag{3.43}$$

jollakin nollasta eroavalla differentioituvalla funktiolla Ω. Sanotaan myös, että metriikalle on tehty *konformimuunnos*. Yhtälön (3.41) määrittelemä uusi metriikka ja alkuperäinen ovat siis konformit. Konformimuunnos vaikuttaa ajan- tai paikanluonteisten intervallien pituuteen, mutta se jättää kausaalisuuden ennalleen. Valokartio pysyy siis muuttumattomana [56], [57].

Koska uuden metriikan tapauksessa konnektion komponentit ovat Christoffelin symboleita voidaan määritelmään (A.2) sijoittaa $\hat{g}_{\mu\nu} = \big(\sqrt{f'(R)}\big)^2 g_{\mu\nu}$, jolloin[4]

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\alpha\beta}\big[\partial_\mu \hat{g}_{\beta\nu} + \partial_\nu \hat{g}_{\beta\mu} - \partial_\beta \hat{g}_{\mu\nu}\big] \\
&= \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + \frac{g^{\alpha\beta}}{f'(R)}\big(g_{\beta\nu}\partial_\mu f'(R) + g_{\beta\mu}\partial_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\partial_\beta f'(R)\big) \\
&= \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + \frac{1}{f'(R)}\big(\delta^\alpha_\nu \partial_\mu f'(R) + \delta^\alpha_\mu \partial_\nu f'(R) g_{\beta\mu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\partial_\beta f'(R)\big) \\
&= \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + \big(\delta^\alpha_\nu \nabla_\mu \ln f'(R) + \delta^\alpha_\mu \nabla_\nu \ln f'(R) g_{\beta\mu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\nabla_\beta \ln f'(R)\big). \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Tässä on merkitty Christoffelin symbolia alkuperäisen metriikan suhteen $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$[5]. Koska konnektio tämän mukaan riippuu funktiosta $f'(R)$, joka edelleen riippuu konnektion derivaatasta, ei konnektio näytä määräytyvän täysin. Tähän mennessä on kenttäyhtälöistä tarkasteltu (3.26a), joten on aika katsoa myös yhtälöä (3.26b). Kontraktio tuottaa yhtälöksi

$$Rf'(R) - 2f(R) = -\kappa T, \qquad (3.45)$$

josta saa määrätyllä $f(R)$ ratkaistua $R = R(T)$. Konnektio siis riippuu energiaimpulssitensorin T derivaatasta. Kun materiatermi riippuu vain metriikasta, eikä sen derivaatoista, saadaan konnektiolle lauseke, joka riippuu vain metriikan ensimmäisistä derivaatoista. Kenttäyhtälöt ovat siis toista kertalukua metriikan suhteen.

Laskettaessa Riccin tensori ja -skalaari sijoittamalla (3.44) Riemannin kaarevuustensorin määritelmään (A.4) havaitaan, että nämä muodostuvat metrisistä osista $R_{\mu\nu}(g)$, $R(g)$ sekä joukosta korjaustermejä[6]:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(g) - \frac{3}{2(f')^2}\nabla_\mu f' \nabla_\nu f' + \frac{1}{f'}\nabla_\mu \nabla_\nu (f')^2 + \frac{1}{2f'} g_{\mu\nu}\Box f', \qquad (3.46a)$$

$$R = R(g) + \frac{3}{f'}\Box f' - \frac{3}{2(f')^2}\nabla_\mu f' \nabla_\nu f'. \qquad (3.46b)$$

Yhtälön (3.44) muodon perusteella saattoi jo päätelläkin, että Riccin tensorissa ja skalaarissa esiintyisi Christoffelin symboleista saatavat kaarevuussuureet. Korjaustermit riippuvat derivaatasta $f'(R)$. Koska korjaukset erottuvat erillisiksi termeiksi, voidaan ne kenttäyhtälössä siirtää samalle puolelle energiaimpulssitensorin kanssa ja nimetä koko oikea puoli muunnetuksi lähteeksi. Näin saadaan

$$R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}R(g)g_{\mu\nu} = -\kappa \tilde{T}_{\mu\nu}. \qquad (3.47)$$

[4] hawking73

[5] Tämä on Christoffelin symbolin perinteinen merkintä. Varhaisimmissa artikkeleissa, kuten Palatinin töissä, merkintä oli kuitenkin käänteinen $\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}$.

[6] Tässä on merkitty $f'(R) = f'$.

3.2.3 Erikoistapaus, lisätermi 1/R

Artikkelissaan [51][7] Vollick käsitteli erikseen mielenkiintoista tapausta, jossa

$$f(R) = R - \frac{\alpha^2}{3R}. \tag{3.48}$$

Hän osoitti, että Palatinin formalismissa maailmankaikkeuden kiihtyvä laajeneminen voidaan selittää ilman hankalaa pimeää energiaa. Tässä esityksessä seurataan pääosin hänen artikkeliaan. Tähän asti Palatinin formalismia oli käsitelty harvakseltaan lähinnä kuriositeettina – vaihtoehtoisena tapana johtaa Einsteinin yhtälöt, mutta ilman sen kummempaa omaa merkitystä.

Luonnollisesti ei kuitenkaan voida valita vain jotakin sopivalta näyttävää tiheyttä piittaamatta sen fysikaalisuudesta. Tässä tapauksessa valintaa voidaan kuitenkin perustella järkevästi. Lukuisat havainnot muun muassa Aurinkokunnan sisällä ovat osoittaneet, että Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria pitää paikkansa erittäin hyvin. Sen sijaan suurilla etäisyyksillä tilanne voi olla toinen. Pimeää energiaa tarvitaan selittämään ilmiöitä näillä pienen kaarevuuden alueilla. Lisätermi $\frac{\alpha^2}{3R}$ on siis hyvä ehdokas, koska se on Auringon lähistöllä pieni ja syvässä avaruudessa pieni.

Kun sijoitetaan (3.48) kenttäyhtälöön (3.26b), saadaan

$$(1 + \frac{\alpha^2}{3R^2})R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - \frac{\alpha^2}{3R})g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{3.49}$$

Kontraktio antaa

$$-R + \frac{\alpha^2}{R} = -\kappa T \;\Leftrightarrow\; R^2 - \kappa T R - \alpha^2 = 0, \tag{3.50}$$

jonka voi ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$R = \frac{1}{2}(\kappa T \pm \sqrt{\kappa T^2 + 4\alpha^2}). \tag{3.51}$$

Näiden kahden ratkaisun fysikaalisuus ei ole itsestään selvää, joten täytyy tehdä merkkitarkastelu. Jos $|T|$ kasvaa suureksi, pitäisi tuloksen olla Einsteinin yhtälön mukaisesti $R = \kappa T$. Täytyy siis valita positiivinen merkki, kun $T > 0$ ja negatiivinen kun $T < 0$. Jos tarkastellaan maailmankaikkeutta, jonka täyttää ideaalivirre (*perfect fluid*), jolle $T = -(\rho - 3P)$ on[8]

$$R = \frac{1}{2}(\kappa T - \sqrt{\kappa T^2 + 4\alpha^2}), \tag{3.52}$$

joka on vakuumirajalla $T \to 0$

$$R = -\alpha. \tag{3.53}$$

[7] Samaa tapausta tarkastellaan myös muun muassa viitteessä [58].

[8] Kun $\rho > 0$ ja $\rho \geq 3P$.

Tämä tarkoittaa, että maailmankaikkeus lähestyy vakiokaarevuuden avaruutta. Tarkastellaan seuraavaksi kaarevuutta, kun α on hyvin suuri tai pieni verrattuna tuloon $|\kappa T|$.

Kun $|\kappa T| >> \alpha$, saadaan tuloksena Einsteinin yhtälöt. Siis tiheässä pölyn täyttämässä maailmankaikkeudessa ei synny eroa Einsteinin yhtälöihin. Kun maailmankaikkeus laajenee ja aine harvenee, kasvaa lisätermin merkitys ja lopulta se muuttuu hallitsevaksi. Nykyisessä maailmankaikkeudessa ei materian osuus ole mitätön, joten (3.52) voidaan kehittää sarjaksi

$$R = \frac{1}{2}\Big(\kappa T - |\kappa T|\sqrt{1+\frac{4\alpha^2}{\kappa T^2}}\Big) \simeq \kappa T - \frac{2\alpha^2}{\kappa T^2}. \tag{3.54}$$

Tulos on kontraktoitu Einsteinin yhtälö pienellä kosmologisella vakiolla. Saatu tulos selviää siis samoista testeistä kuin Einsteinin yleinen suhteellisuusteoriakin. Havaintojen perusteella voidaan määrätä arvo α:lle.

Tarkastellaan maailmankaikkeutta, jossa myöhäisessä vaiheessa ($\alpha >> \kappa T$) voidaan käyttää metriikkaa

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \tag{3.55}$$

Koska α on hyvin suuri, voidaan yhtälöä (3.46) approksimoida jättämällä toinen termi pienenä pois:

$$R_{\mu\nu} \simeq R_{\mu\nu}(g) + \frac{1}{f'}\nabla_\mu\nabla_\nu(f')^2 + \frac{1}{2f'}g_{\mu\nu}\Box f'. \tag{3.56}$$

Kaarevuusskalaarille saadaan puolestaan arvio jättämällä huomiotta κT-termi neliöjuuren alla yhtälössä (3.52):

$$R \simeq \frac{1}{2}\kappa T - \alpha. \tag{3.57}$$

Tämä arvio kaarevuusskalaarille voidaan sijoittaa funktio $f(R)$ lausekkeeseen (3.48) ja saada

$$f(R) \simeq \frac{1}{2}\kappa T - \frac{\alpha^2}{\frac{3}{2}\kappa T - 3\alpha} \simeq \frac{1}{2}\kappa T - \frac{2}{3}\alpha + \frac{\kappa T}{6} = -\frac{2}{3}\alpha\Big(1 - \frac{\kappa T}{\alpha}\Big). \tag{3.58}$$

Derivaatalle puolestaan saadaan

$$f'(R) = 1 + \frac{\alpha^2}{3R^2} \simeq 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(\frac{\kappa T}{\alpha} - \frac{\kappa T^2}{4\alpha^2})} \simeq \frac{4}{3} + \frac{\kappa T}{3\alpha} = \frac{4}{3}\Big(1 + \frac{\kappa T}{4\alpha}\Big). \tag{3.59}$$

Nämä approksimoidut tulokset sijoitetaan yhtälöön (3.26b), jolloin kenttäyhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -\frac{\kappa}{f'}T_{\mu\nu} + \frac{f}{2f'}g_{\mu\nu} \simeq -\frac{\kappa T_{\mu\nu}}{\frac{4}{3}(1+\frac{\kappa T}{4\alpha})} + \frac{1}{2}\frac{-\frac{2}{3}\alpha(1-\frac{\kappa T}{\alpha})}{\frac{4}{3}(1+\frac{\kappa T}{4\alpha})}g_{\mu\nu} \\ &\simeq -\frac{3}{4}\kappa T_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{4}(1-\frac{\kappa T}{\alpha})(1-\frac{\kappa T}{4\alpha})g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}\alpha g_{\mu\nu} - \kappa\Big(\frac{3}{4}T_{\mu\nu} - \frac{5}{16}Tg_{\mu\nu}\Big). \end{aligned} \tag{3.60}$$

Approksimoidaan ainetta nykyisessä maailmankaikkeudessa pölyllä, jolla on $T = \frac{\rho_0}{a^3}$, tällöin voidaan laskea Riccin tensorin komponentit yhtälöstä (3.56). Esimerkiksi

$$R_{00} = R_{00}(g) + \frac{1}{f'}(\partial_0\partial_0 f' - \Gamma^{\alpha}_{00}\partial_\alpha f') + \frac{1}{2f'}(\partial_0\partial_0 f' + \Gamma^{0}_{0\alpha}\partial_0 f'). \tag{3.61}$$

Sijoitetaan tähän nyt (3.59):

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{6\kappa\rho_0}{8\alpha a^3}\Big[\frac{\ddot{a}}{a} + 4\big(\frac{\dot{a}}{a}\big)^2\Big] - \frac{3\kappa\rho_0}{8\alpha}\Big[\frac{\ddot{a}}{a} - 4\big(\frac{\dot{a}}{a}\big)^2\Big] + 3\frac{\dot{a}}{a}\Big[-3\frac{\dot{a}}{8a^4}\frac{\kappa\rho_0}{\alpha}\Big] \\ &= \frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{9\kappa\rho_0}{8\alpha a^3}\Big[\frac{\ddot{a}}{a} - 3\big(\frac{\dot{a}}{a}\big)^2\Big]. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Ei-diagonaalialkiot häviävät, koska metriikka on diagonaalinen. Muut diagonaalialkiot saadaan vastaavasti:

$$R_{ii} = -\Big[a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + \frac{3\kappa\rho_0}{8\alpha}\Big(\frac{\ddot{a}}{a} + \big(\frac{\dot{a}}{a}\big)^2\Big)\Big]. \tag{3.63}$$

Myöhäisinä aikoina maailmankaikkeus on lähellä de Sitter -tyyppiä, joten voidaan merkitä

$$a(t) = e^{Ht} + b(t), \tag{3.64}$$

jossa korjaus $b(t)$ on hyvin pieni. Asettamalla vielä $\alpha = 12H^2$ voidaan ratkaista $b(t)$ sijoittamalla (3.64) yhtälöihin (3.60),(3.62),(3.63). Huomioimalla $b(t)$-termit vain ensimmäisessä kertaluvussa saadaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöpari, joka voidaan ratkaista. Lopputulos on, että $b(t) \propto e^{-2Ht}$ eli myöhäisissä vaiheissa maailmankaikkeus lähenee de Sitter -mallia eksponentiaalisesti. Tässä tapauksessa siis maailmankaikkeus laajenee kiihtyvällä vauhdilla.

3.3 Einsteinin ja Jordanin puite

Artikkelissaan [59] Flanagan esitti, että havainnot elektroni–elektroni-sironnasta osoittavat Palatini-formalismin tulokset mahdottomiksi. Päättely perustuu suurelta osin Einsteinin ja Jordanin puitteen eroavaisuuksiin. Jo Bransin ja Dicken artikkelissa osoitettiin, että skalaaritensoriteorialle on kaksi formalismia [60], [61].

Jordanin puitteessa Einstein–Hilbert-vaikutusta muutetaan lisäämällä ei-kanoninen kineettinen termi ja potentiaali, jotka riippuvat skalaarikentästä. Materian vaikutus pysyy alkuperäisenä. Einsteinin puitteeseen päästään konformimuunnoksella. Tässä puitteessa gravitaation vaikutus on Einstein–Hilbert-vaikutus, johon lisätään kanoninen kineettinen termi ja efektiivinen potentiaali. Skalaarikenttä esiintyy näissä lisätermeissä, mutta se saattaa esiintyä myös materian vaikutuksessa. Tästä seuraa muun muassa se, että energiaimpulssitensori ei säily kovariantisti [62].

Flanaganin päättelyssä lähdetään liikkeelle $f(R)$-tyyppisestä vaikutuksesta

$$S(\bar{g}_{\mu\nu}, H^{\lambda}_{\mu\nu}, \psi) = \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\sqrt{-\bar{g}}f(\hat{R}) + S_M(\bar{g}_{\mu\nu}, \psi), \tag{3.65}$$

jossa viivalliset suureet viittaavat Jordanin puitteeseen ja $\hat{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu}$. Tässä kaarevuustensori $\hat{R}_{\mu\nu}$ liittyy symmetriseen konnektioon $\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$.Variointia ei nyt suoriteta konnektion suhteen, vaan tensorikententän $H^{\lambda}_{\mu\nu}$ suhteen:

$$H^{\lambda}_{\mu\nu}v^{\nu} \equiv \hat{\nabla}_{\mu}V^{\lambda} - \bar{\nabla}_{\mu}V^{\lambda}. \tag{3.66}$$

Tässä V^{μ} on mielivaltainen vektori. Kaarevuus kirjoitetaan tämän tensorikentän $H^{\lambda}_{\mu\nu}$ funktiona. Käyttäen hyväksi konformimuunnoksia siirrytään Einsteinin puitteeseen, jossa huomataan, että vaikutus on skalaaritensorimuotoa

$$\tilde{S}(g_{\mu\nu}, \Phi, \psi) = \int_U d\Omega\sqrt{-g}\Big(\frac{R}{2\kappa} - V(\Phi)\Big) + S_M(e^{2\alpha(\Phi)}g_{\mu\nu}, \psi). \tag{3.67}$$

Tässä on käytössä potentiaali $V(\Phi)$ ja Einsteinin puitteen metriikka $g_{\mu\nu}$:

$$V(\Phi) = \frac{\Phi f'(\Phi) - f(\Phi)}{2\kappa f'(\Phi)^2}, \quad g_{\mu\nu} = e^{-2\alpha(\Phi)}\bar{g}_{\mu\nu}. \tag{3.68}$$

Kun tähän sijoitetaan vapaiden elektronien Diracin vaikutus

$$S_M(\bar{g}_{\mu\nu}, \Psi) = \int_U d\Omega\bar{\Psi}(i\bar{\gamma}^{\mu}\bar{\nabla}_{\mu} - m_e)\Psi, \tag{3.69}$$

voidaan hankkiutua eroon Φ-osuudesta ratkaisemalla kenttäyhtälöt sen suhteen ja sijoittamalla tulos takaisin. Näin saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{S}_m(\bar{g}_{\mu\nu}, \Psi) = \int_U d\Omega\sqrt{-g}\Big(&\frac{R}{2\tilde{\kappa}^2} - \Lambda + i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\Psi - m_e\bar{\Psi}\Psi - \frac{3\sqrt{3}}{16m_*^4}(i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\Psi)^2 \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{m_e^2}{m_*^4}(\bar{\Psi}\Psi)^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}\frac{m_e^2}{m_*^4}(i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\Psi)(\bar{\Psi}\Psi) + \ldots\Big),\end{aligned} \tag{3.70}$$

missä $\tilde{\kappa} = \sqrt{4/3}\kappa, m_* = \sqrt{\mu/\kappa}, \Lambda = \mu^2/(\sqrt{3}\kappa)$. Tämä on tulos Einsteinin puitteessa. Kolme viimeistä termiä ovat korjauksia standardimalliin, jotka pitäisi pystyä havaitsemaan. Tällaista ei kuitenkaan ole nähty, joten tällä päättelyllä Palatinin formalismin tulos on mahdoton.

Kyseinen päättely ei kuitenkaan pidä paikkaansa [63]. Virhe tapahtuu siinä, että vaikka konformimuunnoksen päässä olevissa puitteissa teoriat ovat matemaattisesti ekvivalentit (ratkaisut ovat keskenään isomorfisia), ne eivät ole fysikaalisesti ekvivalentit. Siksi täytyykin siis päättää, mikä puite on fysikaalinen [64].

Flanagan kirjoitti materiatermit Jordanin puitteessa, joten laskut tulisi suorittaa nimenomaan Jordanin puitteessa. Se, että Einsteinin puitteessa vaikutukseen ilmestyy lisätermejä ei tarkoita vielä mitään, sillä tämä ei ole fysikaalinen puite. Mikäli pysytellään koko ajan Jordanin puitteessa, ongelmallisia lisätermejä ei synny. Vastaavasti myös jatkuva työskentely Einsteinin puitteessa tuottaa hyväksyttävän vaikutuksen. Flanaganin väite ei siis päde.

3.4 Yleinen tulos f(R)-vaikutusten tapauksessa

Viitteessä [65] on perehdytty yleisiin $f(R)$-vaikutuksiin Palatinin formalismissa. Tulos on, että lopulta saadaan Einsteinin yhtälöiden kaltaiset yhtälöt, mikäli yleensäkään saadaan yhtäpitävät yhtälöt.

Jos materiaa ei huomioida ja ulottuvuuksien määrää ei rajoiteta neljään (mutta vaaditaan vähintään kaksi) saadaan yhtälöstä (3.26b) kontraktio

$$f'(R)R - \frac{n}{2}f(R) = 0. \tag{3.71}$$

Olettaen, että $f(R)$ on analyyttinen, on voimassa jokin seuraavista

1. Yhtälöllä ei ole reaaliratkaisua, eikä näin ollen saada konsistenttejä kenttäyhtälöitä.

2. Yhtälöllä on numeroituva määrä reaalisia ratkaisuja $R = c_i$. Tämä tapaus jakautuu edelleen kolmeen alitapaukseen

   (a) Jos $n > 2$ ja $R = c_i$ siten, että $f'(R) \neq 0$, niin konnektiot ovat Levi-Civita konnektioita ja metriikka g toteuttaa Einsteinin yhtälöt kosmologisella vakiolla $\Lambda = \frac{c_i}{n}$.

   (b) Jos $n = 2$ ja $R = c_i$ siten, että $f'(R) \neq 0$, niin metriikka g jää mielivaltaiseksi ja konnektio Γ on Weylin konnektio, joka muodostuu Levi-Civita -konnektiosta ja mielivaltaisesta vektorikentästä B. Pari (g, B) toteuttaa yhtälön $\mathfrak{R}(g, B) = R(g, W(g, B)) = c_i$.

   (c) Jos $n \geq 2$ ja $R = c_i$ siten, että $f'(R) = 0$, niin Γ:n ja g:n välille ei saada muuta yhteyttä kuin $R(g, \Gamma) = c_i$

3. Yhtälö toteutuu identtisesti. Näin käy, kun $\mathfrak{L} \propto R^{n/2}$. Tämäkin mahdollisuus jakautuu kahteen erikoistapaukseen ulottuvuuksien määrän mukaan.

   (a) Jos $n > 2$, niin joko $R = 0$ on ainoa dynaaminen yhteys Γ:n ja g:n välillä tai jos näin ei ole, niin on voimassa: Jos pari (g, Γ) on yhtälön ratkaisu, niin on olemassa skalaarikenttä Ψ, jolla $\Psi g_{\mu\nu}$ on konformi alkuperäisen metriikan g

kanssa, joka toteuttaa Einsteinin yhtälöt ja Γ on konformimuunnetun metriikan $\Psi g_{\mu\nu}$ Levi-Civita-konnektio. Lisäksi alkuperäisten g ja Γ suhteen saatu kaarevuusskalaari on yhtäsuuri kuin Ψ.

(b) Jos $n = 2$, niin g on mielivaltainen metriikka ja Γ on Weylin konnektio, joka muodostuu g:n Levi-Civita -konnektiosta ja mielivaltaisesta vektorikentästä B.

Näistä tuloksista eräs huomattava erikoistapaus on $f(R) = R^2$, joka neliulotteisen avaruuden tapauksessa nousee esiin kohdasta 3(a). Tämän erikoistapauksen keksiminen ei tosin vaadi edellistä yleistä tulostal. Kyseinen kvadraattinen Lagrangen tiheys tuottaa Einsteinin yhtälöt, kunhan $R \neq 0$. Tätä tapausta on tutkittu melko paljon –jo 1950-luvulta lähtien. Myös Buchdahlin artikkeleissa [40], [24] tähän vaikutukseen on perehdytty.

Monet fysikaalisesti mielekkäät vaikutukset sopivat kategoriaan 2(a) eli tuottavat Einsteinin yhtälöt kosmologisella vakiolla. Tämä on positiivista, koska yleinen suhteellisuusteoria on selvinnyt monista testeistä. Metrinen variaatioperiaate sen sijaan tuottaisi tässä tapauksessa neljännen kertaluvun yhtälöt, jotka siis poikkeaisivat perinteisistä Einsteinin yhtälöistä merkittävästi. Selvää on, että tällaiset yhtälöt ovat selvästi vaikeampia ratkaista. Lisäksi huomattavaa on, että kosmologisella vakiolla voi olla useita arvoja liittyen eri arvoihin $R = c_i$.

4 Palatini-formalismin ongelmat

Edellisessä luvussa nähtiin, että Einstein-Hilbert-vaikutuksen tapauksessa puhtaasti metrinen ja metris-affiini variaatioperiaate tuottavat samat yhtälöt. Tämän vuoksi onkin näitä kahta tapaa pidetty ekvivalentteina. Tätä on pidetty yhtenä syynä luopua Palatinin menetelmästä. Itse asiassa tässä yksinkertaisessa tapauksessa metris-affiini variaatio tuottaa tuloksen helpommin ja elegantimmin. Kun vertaillaan metris-affiinin ja metrisen formalismin tuloksia pintaa syvemmältä, huomataan useita eroavaisuuksia jopa Einstein–Hilbert-vaikutuksen tapauksessa.

4.1 Pintatermit

Kenttäyhtälöillä on todettu olevan sama muoto puhtaasti metrisessä ja metris-affiinissa formalismissa. Näihin yhtälöihin pääseminen vaatii kuitenkin erilaiset oletukset. Ensimmäisenä tulee huomata, että variaation reunaehdot eivät ole samat [50]. Metris-affiinissa variaatiossa sekä metriikan että konnektion variaatiot häviävät alueen reunalla, mutta puhtaasti metrisessä variaatiossa luonnollisesti vain metriikan variaatiot häviävät. Tällöin[1] ongelma nousee esiin seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_U d\Omega(\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}) = \int_U d\Omega\big[R_{\mu\nu}\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha})\big] \\ &= \int_U d\Omega\big[\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \nabla_\alpha(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\nabla_\alpha\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \nabla_\nu(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}) - \delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\nabla_\nu\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Koska tässä tapauksessa ovat käytössä Christoffelin symbolit, on voimassa $\nabla_\alpha\mathfrak{g}^{\mu\nu} = 0$, joten

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_U d\Omega\big[\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \nabla_\alpha(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) + \nabla_\nu(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha})\big] \\ &= \int_U d\Omega\big[\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \nabla_\alpha(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha})\big], \end{aligned} \tag{4.2}$$

[1] Puhtaasti metrisessä tapauksessa on $S = S(g, \partial g, \partial^2 g)$.

jonka jälkimmäiseen termiin voidaan käyttää Gaussin lausetta ja saada

$$\delta S = \int_U d\Omega(\delta \mathfrak{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) + \int_{\partial U} d^3 S(\mathfrak{g}^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}). \tag{4.3}$$

Tavallisesti tämän pintaintegraalin oletetaan menevän nollaksi, koska metriikan variaatiot häviävät varioitavan alueen pinnalla. Pintaintegraali kuitenkin sisältää Γ:n variaation. Metrisessä tapauksessa tämä kieltämättä palautuu metriikkaan, mutta yleisessä tapauksessa ei ole pakko olettaa metriikan derivaattojen häviävän variaatioalueen pinnalla. Tämä termi ei siis välttämättä häviäkään.

Tarkkaan ottaen tulisi vaikutukseen lisätä tämän pintatermin kumoava termi – tai tehdä lisäoletus derivaatan häviämisestä. Metris-affiinissa tapauksessa tätä ongelmaa ei esiinny, koska konnektiota Γ varioidaan erikseen, joten sen variaatiot häviävät alueen pinnalla. Siis jo tässä yksinkertaisessa tapauksessa, jossa molemmat formalismit tuottavat samat yhtälöt, osoittautuu, etteivät menetelmät ole ekvivalentit.

4.2 Korkeamman kertaluvun vaikutukset

Jos metris-affiinissa tapauksessa Lagrangen tiheyden annetaan riippua toisista derivaatoista, on olemassa useita mahdollisia Lagrangen tiheyksiä. Ongelmaksi muodostuu valinta näiden välillä. Kaikissa tapauksissa ei saada Levi-Civita-konnektiota, jossa komponentteina ovat Christoffelin symbolit [66]. Einstein–Hilbert-vaikutuksen tapauksessa tällaista ongelmaa ei kuitenkaan synny, sillä vaadittaessa kenttäyhtälöiden olevan toista kertalukua ja yleistä kovarianssia määräytyy Lagrangen tiheys vakiota vaille.

Tavallisesti vaaditaan, että kenttäyhtälöiden tulee olla toista kertalukua. Tätä vaatimusta perustellaan sillä, että gravitaation lisäksi kaikki muut teoriat sisältävät toisen kertaluvun kenttäyhtälöitä. Metrisessä tapauksessa kaarevuusskalaari sisältää toisia derivaattoja metriikasta, joten Lagrangen tiheyden tulee riippua kaarevuusskalaarista lineaarisesti. Esimerkiksi R^2-termit tuottavat metrisellä variaatiolla metriikan neljänsiä derivaattoja. Näin päädytään neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin. Metris-affiinissa tapauksessa ei näin kuitenkaan ole, sillä kaarevuusskalaari sisältää vain ensimmäisiä derivaattoja konnektiosta. R^2-termit (muun muassa) ovat siis mahdollisia.

4.3 Moniston valinta

Koska Palatini-formalismissa ei oleteta konnektion Γ komponentteja Christoffelin symboleiksi, liikutaan yleisemmässä geometrisessa tapauksessa. Avaruus on yleinen affiini avaruus

A_4 eikä pseudo-Riemannin avaruus V_4, kuten metrisen varioinnin tapauksessa. Vaikutuksesta riippuen yleinen A_4 saattaa määräytyä avaruudeksi V_4, mutta on myös mahdollista, että näin ei käy. Metriikka voi jäädä jopa täysin mielivaltaiseksi. Näin käy muun muassa silloin, kun Lagrangen tiheys ei sisällä lainkaan riippuvuutta metriikasta – esimerkiksi jos $\mathfrak{L} = \sqrt{\det R_{\mu\nu}}$.

Tätä asiaa on pohdittu muun muassa artikkeleissa [40], [24], [50], [67]. Viimeksi mainitussa esitetään yksinkertaiseksi ratkaisuksi, että avaruus kiinnitetään *a priori*.

Buchdahl piti metriikan mahdollista mielivaltaisuutta ja ongelmia monistojen kanssa riittävänä syynä luopua Palatinin menetelmästä [40]. Artikkelissaan hän käsittelee myös epälineaaristen Lagrangen tiheyksien tapauksissa saatavia erikoisia tuloksia. Esimerkiksi kun $\mathfrak{L} = \sqrt{-g}(R^2 + a),\ a \neq 0$, saadaan

$$\delta\mathfrak{L} = (R^2 + a)\delta\sqrt{-g} + 2\mathfrak{R}\delta R = -(R^2 + a)\frac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2R(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \mathfrak{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}), \tag{4.4}$$

joten metriikan suhteen variointi tuottaa kenttäyhtälöt

$$-\frac{1}{2}(R^2 + a)g_{\mu\nu} + 2RR_{\mu\nu} = 0. \tag{4.5}$$

Tämän kontraktion mukaan pitäisi olla $a = 0$, mikä on mahdotonta. Metristä variaatioperiaatetta käyttäen tätä ongelmaa ei esiinny.

4.4 Materiatermit

Mahdollisesti eroa metris-affiinin ja metrisen variaation välille muodostuu materian osuudesta. Edellisen kappaleen käsittelyssä materiatermin S_M ei oletettu riippuvan konnektiosta Γ. Tämä ei kuitenkaan ole ainoa mahdollisuus. Konnektiosta riippuviin materian vaikutuksiin perehdytään tarkemmin seuraavassa luvussa. Mikäli tätä riippumattomuusoletusta ei tehtäisi, olisivat kenttäyhtälöt

$$G^{\mu\nu}(g, \Gamma) = -\frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}, \tag{4.6a}$$

$$\frac{\delta\mathfrak{R}}{\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} = \nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big) - \delta^\nu_\alpha\nabla_\beta\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\beta}\big) = \frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}. \tag{4.6b}$$

Alemman yhtälön oikeaa puolta kutsutaan joskus *hypermomentiksi*[2]. Nämä yhtälöt eivät ole yleisesti konsistentit [53], eivätkä ole ekvivalentit Einsteinin kenttäyhtälöiden kanssa ilman lisäolettamuksia. Tavallisesti tehdään oletukset, kuten edellisessä luvussa on tehty, että torsiotensori häviää ja ettei materiatermi sisällä riippuvuutta konnektiosta Γ. Mainitussa artikkelissa esitetään lievemmät vaatimukset ekvivalenssille ja kyseenalaistetaan näiden

[2] Hypermomenttia tarkastellaan tarkemmin luvussa 5.

kahden lisäolettamuksen fysikaalinen mielekkyys. Yhtälöiden (4.6) vaillinainen yhtäpitävyys nähdään tarkastelemalla konnektioiden projektiivisia muutoksia

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \lambda_\mu \delta^{\alpha}_{\nu}, \tag{4.7}$$

jotka A_4:ssä säilyttävät suuntien paralleelisuuden. Tässä λ_μ on jokin kovariantti vektori. Kun tämä sijoitetaan Riemannin kaarevuustensorin määritelmään (A.3), saadaan

$$\tilde{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu}\Gamma^{\kappa}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu}\Gamma^{\kappa}_{\nu\beta} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + \partial_\nu \lambda_\mu \delta^{\alpha}_{\beta} - \partial_\mu \lambda_\nu \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{4.8}$$

joka voidaan kontraktoida

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \partial_\nu \lambda_\mu - \partial_\mu \lambda_\nu \tag{4.9}$$

ja edelleen nähdään, että $\tilde{R} = R$ ja siten myös $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}$. Kaarevuusskalaari on siis projektiivisesti invariantti. Tämä tarkoittaa että $\mathfrak{R}(g, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \lambda_\mu \delta^{\alpha}_{\nu}) - \mathfrak{R}(g, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) = 0$ eli pienillä arvoilla λ

$$\frac{\delta \mathfrak{R}}{\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}} \delta^{\alpha}_{\nu} = 0. \tag{4.10}$$

Nämä tulokset tarkoittavat, että Einsteinin tensorin symmetrinen osa ja kaarevuusskalaarin tiheyden variaatio, jota joskus kutsutaan *Palatinin tensoriksi*, ovat projektiivisesti invariantteja. Toisaalta pitäisi siis yhtälöissä (4.6) myös oikeilla puolilla olla tämä ominaisuus. Yhtälö (4.6a) vaatii siis energiaimpulssitensoria ja yhtälö (4.6b) hypermomenttia projektiivisti invariantiksi. Tämä ei yleisessä tapauksessa toteudu.

4.5 Kaksiulotteinen tapaus

Ilmeiset havainnot osoittavat, että ulottuvuuksia on ainakin neljä. Yleensä kuitenkin pyritään teorioihin, jotka toimivat myös ulottuvuuksien määrän muuttuessa. Palatinin menetelmä kuitenkin joutuu ongelmiin, jos tarkastellaan kaksidimensioista avaruutta, kun hypermomentti häviää [68], [69]. Tässä tapauksessa konnektio ei määräydy täydellisesti, vaan jää vapaaksi. Aiemmin osiossa 3.2.2 osoitettiin, että konnektio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\mu} X_\nu + \delta^{\alpha}_{\nu} X_\mu - g_{\mu\nu} X^{\alpha}), \tag{4.11}$$

jossa $X_\mu = \nabla_\mu \ln \sqrt{-g} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \partial_\mu \ln \sqrt{-g}$. Käsittelyssä ei tarvittu ulottuvuuksien määrää, joten tämä tulos on voimassa myös, kun ulottuvuuksia on vain kaksi. Tästä voidaan nyt kontraktoida α ja ν saada

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \equiv \Gamma_\mu &= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\mu} X_\alpha + \delta^{\alpha}_{\alpha} X_\mu - g_{\mu\alpha} X^{\alpha}) \\
&= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(X_\mu + n X_\mu - X_\mu) = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} + \frac{n}{2} X_\mu \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial g_{\mu\nu} + \frac{n}{2}(\Gamma_\mu - \partial_\mu \ln \sqrt{-g}) \\
&\Rightarrow \Gamma_\mu (1 - \frac{n}{2}) + \frac{n}{2} \partial_\mu \ln \sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial g_{\mu\nu} \\
&\Rightarrow (1 - \frac{n}{2})(\partial_\mu \ln \sqrt{-g} - \Gamma_\mu) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial g_{\mu\nu} + \partial_\mu \ln \sqrt{-g}.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Saadun yhtälön oikea puoli häviää, joten saadaan lopulta yhtälö

$$
\big(1 - \frac{n}{2}\big)(\partial_\mu \ln \sqrt{-g} - \Gamma_\mu) = 0. \tag{4.13}
$$

Tästä voidaan ratkaista konnektio, kun $n \neq 2$. Jos kuitenkin $n = 2$, häviää vasen puoli identtisesti, eikä konnektio määräydy täysin.

5 Torsiollinen konnektio ja materia

Einsteinin yleisessä suhteellisuusteoriassa oletetaan torsion häviävän. Myös monet yleistetyt gravitaatioteoriat tekevät tämän oletuksen. Yksinkertaisuus on yksi syy tähän. Ennen havaintoja kiihtyvästi laajenevasta maailmankaikkeudesta ei monimutkaisemmille teorioille juuri ollut tilausta. Varsinaisesti torsiollisuuden poissulkevia tuloksia ei kuitenkaan ole. Tyhjiön torsio kuitenkin suljetaan intuition vastaisena yleisesti pois.

Torsion käsitteen esitteli ensimmäisenä Cartan[1]. Tämän johdosta torsiotensori $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ on nimetty hänen mukaansa. Hän kertoi tuloksistaan Einsteinille ja myöhemmin myös Schrödinger osallistui tutkimukseen, mutta aihe unohtui lähes kokonaan toisen maailmansodan aikana. Torsiota heräteltiin uudelleen henkiin 1950-luvulla lokaalien mittakenttäteorioiden synnyttyä.

Hehlin tutkimukset 1970-luvulla [71], [53] nostivat torsion suurimpaan loistoonsa. Toiveissa oli kvantisointi, mutta koska tämä ei onnistunut, torsio painui jälleen taka-alalle. Viimeisten kymmenen vuoden aikana torsiota on toiseen kertaan nostettu takaisin tutkimuksen kohteeksi. Laajenevan maailmankaikkeuden kuvaaminen vaatii uudenlaisia välineitä ja yksi niistä voi olla vanha tuttu torsio.

Metris-affiineissa teorioissa, joissa sallitaan torsio ja ei-metrisyys, käsitellään yleisesti *metris-affiinia avaruutta* (A_4, g). Metrisyysehto johtaa *Riemann-Cartanin avaruuteen* U_4. Jos torsion oletetaan häviävän päädytään *pseudo-Riemannin avaruuteen* V_4. Olettamalla myös kaarevuuden häviävän jäljelle jää *Minkowskin avaruus* M_4. Mahdollista on myös olettaa, että kaarevuus häviää, mutta ei torsio. Tällöin on kyse *Weitzenböckin avaruudesta* T_4 [72], [73].

Ei-metrinen tapaus eli tilanne, jossa metriikan kovariantti derivaatta ei häviä, tarkoittaa konkreettisesti, että pituus ei säily yhdensuuntaissiirrossa. Torsiota puolestaan voidaan havainnollistaa tarkastelemalla suunnikasta [72], [74].

Tarvitaan kaksi infinitesimaalista vektoria u^α ja v^α. Yhdensuuntaissiirretään vektori u^α pitkin vektoria v^α, jolloin saadaan vektori $u^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$. Vastaavasti saadaan suunnikkaan

[1] Käännös hänen työstään löytyy viitteestä [70].

vastakkaiselle puolelle $v^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\mu u^\nu$. Jotta suunnikas sulkeutuisi, pitäisi saada kahta eri tietä kulkemalla sama lävistäjävektori

$$u^\alpha + v^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} v^\mu u^\nu = v^\alpha + u^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \tag{5.1}$$

Sieventämällä saadaan ehdoksi torsion häviäminen

$$\left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) u^\mu v^\nu = 2S_{\mu\nu}{}^\alpha u^\mu v^\nu. \tag{5.2}$$

Tämä on yksinkertainen ajatus, mutta tuntuu intuitiivisesti oudolta, että edellisen valossa torsio ei häviäisi. Ei ole kuitenkaan onnistuttu keksimään koetta, jolla suunnikkaan sulkeutumista tai sulkeutumattomuutta voitaisiin mitata käytännössä.

5.1 Riemannin tensorista

Kuten aiemmin todettua, metris-affiini teoria ei vaadi oletusta konnektion torsiottomuudesta. Yleisessä tapauksessa Riemannin tensorilla ei ole totuttuja symmetrioita:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \tag{5.3a}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{5.3b}$$

Riemannin tensorin määritelmä (A.4) kertoo ainoastaan, että tensori on antisymmetrinen kahden viimeisen indeksin vaihdon suhteen. Tämä puolestaan paljastaa, että on mahdollista löytää useampi erilainen Riccin tensori. Mikäli Riccin tensori ei saa riippua metriikasta, on vaihtoehtoja kaksi ja kun tämä sallitaan, on vaihtoehtoja kolme [29]. Tavallinen valinta on kontraktio ensimmäisen ja kolmannen indeksin välillä. Koska viimeisten indeksien antisymmetrisyys on yleinen ominaisuus, ei kontraktio ensimmäisen ja neljännen indeksin välillä tuota kuin negatiivisella merkillä eroavan tuloksen.

Kontraktio ensimmäisen ja toisen indeksin suhteen sen sijaan tuottaa jotakin uutta. Vaihtoehdot ovat

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}, \tag{5.4a}$$

$$R'_{\mu\nu} = R'^\lambda_{\lambda\mu\nu} = -\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} + \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\sigma\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}. \tag{5.4b}$$

Toinen kontraktio tuottaa ylemmästä tavallisen Riccin skalaarin, mutta alempi antaa aina

$$R' = g^{\mu\nu} R'_{\mu\nu} = \partial^\mu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} - \partial^\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\nu} = 0. \tag{5.5}$$

Mikäli Riccin tensorin sallitaan riippua metriikasta on vielä kolmas mahdollisuus:

$$R''_{\mu\nu} = R_\mu{}^\sigma{}_{\sigma\nu}, \tag{5.6a}$$

$$R'' = g^{\mu\nu} g^{\sigma\alpha} g_{\mu\beta} R^\beta{}_{\alpha\sigma\nu} = R^{\nu\sigma}{}_{\sigma\nu} = -R^{\nu\sigma}{}_{\nu\sigma} = -R. \tag{5.6b}$$

Ainoaksi järkeväksi valinnaksi jää siis $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

5.2 Einstein–Straus-teoriat

Palatini-formalismissa on mahdollista tiputtaa pois oletus metriikan symmetrisyydestä ilman suurempia ongelmia. Metrisessä tapauksessa tämä tarkoittaa myös konnektion symmetrisyyttä, mutta Palatinin tapauksessa tämä on erillinen kysymys. Mikäli metriikka ei ole symmetrinen, mutta konnektio pidetään symmetrisenä, ei saada hyviä tuloksia [34]. Kun sen sijaan kummaltakaan ei vaadita symmetrisyyttä, saadaan Einstein–Straus-teoria. Eräs huomioitavista asioista tässä tapauksessa on, ettei kovariantti osittaisintegrointi enää ole triviaalia, vaan mukaan tulee lisätermejä. Uudemmat tutkimukset kuitenkin rajaavat ei-symmetrisen metriikan melko ahtaalle [75], [76].

5.3 Symmetrinen metriikka ja torsiollinen konnektio

Toisin kuin Einstein–Straus-teoriassa oletetaan tässä metriikka symmetriseksi. Konnektion suhteen ei kuitenkaan tehdä symmetriaoletuksia. Torsion mukanaolo tarkoittaa, että aika-avaruus voi kiertyä. Intuition perusteella tuloksen pitäisi olla, että torsion aiheuttaa materia – materia aiheuttaa kaarevuuttakin. Lähdetään tarkastelemaan vaikutusta, joka on jaettu jälleen kerran materia- ja gravitaatio-osiin $S = S_G + S_M$, jossa gravitaatio-osa on $f(R)$-tyyppiä $S_G = \frac{1}{2\kappa}\int d\Omega\sqrt{-g}f(R)$. Tuttuun tapaan saadaan

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[f'(R)\mathfrak{R}R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)\mathfrak{g}_{\mu\nu}\big]\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \tag{5.7}$$

jossa on merkitty $R_{(\mu\nu)}$ kaarevuusskalaarin symmetristä osaa[2].

5.3.1 Gravitaation vaikutus

Konnektiot saattavat sisältää torsiota, joten Palatinin yhtälöä ei voi käyttää vaikutuksessa (5.7). Oletettavissa on, että saadaan lisätermejä, jotka riippuvat konnektion antisymmetrisestä osasta[3]:

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} =& \partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\\
=& \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\\
&- \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\\
=& \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\\
=& \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + 2\Gamma^\sigma_{[\nu\lambda]}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

[2] Antisymmetriselle osalle $\delta g^{\mu\nu}R_{[\mu\nu]} = 0$.

[3] Antisymmetrisyyttä merkitään hakasuluilla, ks. liite A.

Kahteen ensimmäiseen termiin sovelletaan kovarianttia osittaisintegrointia. Tässä kuitenkin nousee esiin edellisen kappaleen ongelma, torsiollisessa tapauksessa osittaisintegrointi ei ole triviaalia. Torsiollisen tapauksen osittaisintegrointia on tarkasteltu liitteessä B.1. Tässä tarvitaan ainoastaan lopputulosta

$$\begin{aligned}
&\int_U d\Omega f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big(\nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\big) \\
&= \int_U d\Omega\big[\nabla_\nu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu})\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu})\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \\
&2f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big(\Gamma^\alpha_{[\alpha\lambda]}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{[\alpha\nu]}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\big)\big].
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Nyt vaikutuksen variaatiolle (5.7) on

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\Big[\big(f'(R)\mathfrak{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)\mathfrak{g}_{\mu\nu}\big)\delta g^{\mu\nu} - \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\nabla_\nu\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big) + \\
&\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\nabla_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big) + 2f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big(\Gamma^\alpha_{[\alpha\lambda]}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{[\alpha\nu]}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha_{[\nu\lambda]}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\big)\Big] \\
&= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\Big\{\big[f'(R)\mathfrak{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)\mathfrak{g}_{\mu\nu}\big]\delta g^{\mu\nu} + \big[\nabla_\nu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}) - \\
&\nabla_\alpha(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\alpha})\delta^\nu_\lambda + 2f'(R)\big(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{[\lambda\alpha]} - \mathfrak{g}^{\mu\sigma}\Gamma^\alpha_{[\sigma\alpha]}\delta^\nu_\lambda + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{[\alpha\lambda]}\big)\big]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Big\} \\
&= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\Big\{\big[f'(R)\mathfrak{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)\mathfrak{g}_{\mu\nu}\big]\delta g^{\mu\nu} + \big[\nabla_\nu(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}) - \\
&\nabla_\alpha(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\alpha})\delta^\nu_\lambda + 2f'(R)\big(\mathfrak{g}^{\mu\nu}S_{\lambda\alpha}{}^\alpha - \mathfrak{g}^{\mu\sigma}S_{\sigma\alpha}{}^\alpha\delta^\nu_\lambda + \mathfrak{g}^{\mu\alpha}S_{\alpha\lambda}{}^\nu\big)\big]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Big\}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

5.3.2 Materian vaikutus

Materian osuus oletetaan useimmiten riippumattomaksi konnektioista. Selvästikään tämä ei ole yleisin tapaus. On syytä hetki miettiä, mitä tällainen oletus tarkoittaa [77]. Materian vaikutuksessa kovariantit derivaatat ovat tällöin *a priori* yhteensopivia metriikan kanssa[4] eli Christoffelin symboleita. Konnektiot eivät siis ole määräämässä avaruuden geometrisia ominaisuuksia, kuten yleisessä tapauksessa. Se ei määrittele yhdensuuntaissiirtoa ja itse asiassa metriikka määrää koko avaruuden geometrisen rakenteen[5].

Konnektioista riippumattoman materian vaikutuksen tapauksessa konnektiot menettävät suurelta osin merkityksensä edellisen nojalla. Ne ovatkin siis eräänlainen materiaan kytkeytymätön apukenttä, joka voidaan tulkita fysikaalisesti samaan tapaan kuin skalaarikentät skalaaritensoriteorioissa. Näin siinä mielessä, että metriikka on ainoa osa gravitaatiokent-

[4] $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$

[5] Koska tässä tapauksessa tulos on tietyssä mielessä metrinen, erottaa Sotiriou artikkelissaan Palatini-formalismin ja metris-affiinin teorian. Palatini-formalismissa oletetaan materian vaikutus riippumattomaksi konnektioista. Metris-affiini teoria on edellisen yleistys, jossa oletusta ei tehdä.

tää, joka vaikuttaa materian kanssa. Konnektiot eivät sisällä kaarevuuden luonnetta, mutta vaikuttaa siihen, miten materia kaareuttaa avaruutta.

Koska konnektion tarkoitus on pohjimmiltaan määritellä yhdensuuntaissiirto, ei jatkossa tehdä oletusta materian vaikutuksen riippumattomuudesta konnektioista. Lisäksi mukaan otetaan kentät ψ[6], joten $S_M = S_M(g_{\mu\nu}, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \psi)$, jolloin saadaan

$$\delta S_M = \int_U d\Omega \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \int_U d\Omega \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \int_U d\Omega \sqrt{-g} \big(T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \Delta_{\lambda}{}^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \big). \quad (5.11)$$

Näin merkiten siis hypermomentin $\Delta_{\lambda}{}^{\mu\nu}$ häviäminen tarkoittaa materian vaikutuksen riippumattomuutta konnektioista. Jos tämä oletetaan *a priori*, päädytään ongelmiin, kuten aiemmin on todettu. Toisaalta tähän saatetaan päätyä *a posteriori* esimerkiksi skalaarikenttien tapauksessa. Silloin saadaan samat yhtälöt, tehtiinpä oletus materiasta tai ei.

5.3.3 Kenttäyhtälöt

Yhdistämällä nyt materian (5.11) ja gravitaation (5.10) osuudet saadaan yhtälöksi metriikan variaatiosta

$$f'(R) R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.12)$$

joka on jo tuttu. Konnektion tuottamat yhtälöt sen sijaan poikkeavat aiemmin saaduista, koska torsiottomuusoletuksesta luovuttiin. Nyt ne ovat muotoa

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \Big[\nabla_{\alpha} \big(f'(R) \mathfrak{g}^{\mu\alpha} \big) \delta^{\nu}_{\lambda} - \nabla_{\lambda} \big(f'(R) \mathfrak{g}^{\mu\nu} \big) \Big] +$$
$$2 f'(R) \big(g^{\mu\nu} S_{\lambda\alpha}{}^{\alpha} - g^{\mu\sigma} S_{\sigma\alpha}{}^{\alpha} \delta^{\nu}_{\lambda} + g^{\mu\alpha} S_{\alpha\lambda}{}^{\nu} \big) = \kappa \Delta_{\lambda}{}^{\mu\nu}. \quad (5.13)$$

Kontraktoimalla μ ja λ paljastuu, että

$$0 = \kappa \Delta_{\mu}{}^{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

koska hakasulkujen sisällä olevat termit kumoavat toisensa ja kaksi ensimmäistä torsiotermiä samaten hävittävät toisensa. Kolmas torsiotermi häviää symmetrisen metriikan ja antisymmetrisen tensorin kontraktiona.

Yhtälö (5.14) on materian ominaisuuksia rajaava side-ehto [53]. Materian vaikutuksen variaation kontraktion pitää aina hävitä. Tämä ei ole tyydyttävä tulos, sillä kaikki materia ei ole tällaista. Teoria ei siis pysty kuvaamaan kuin tietynlaista ainetta. Tässä kappaleessa on käyttetty oletuksia, että metriikka on symmetrinen ja vaikutus riippuu ainoastaan kaarevuusskalaarista. Koska näillä alkuoletuksilla päädyttiin ongelmiin, täytyy toisesta oletuksesta

[6] Joiden suhteen ei tässä varioida.

luopua. Mikäli luovutaan metriikan symmetrisyydestä, saadaan Einstein–Straus-teoria [34]. Näin saadaan konsistentit yhtälöt, mutta niiden fysikaalisuus ei ole selviö. Tässä tapauksessa nimittäin ei-metrisyys ja torsio eivät häviä tyhjiössä. Torsio ei siis ole peräisin materiasta, vaan on gravitaatiolle luonteenomaista.

Toinen vaihtoehto on muuttaa vaikutusta lisäämällä termejä. Näiden avulla tulisi saada rikottua edellisessä luvussa mainittu projektiivinen invarianssi. Matemaattisesti tämä on mahdollista hyvinkin monilla lisäyksillä, mutta jälleen on syytä miettiä näiden fysikaalisuutta [77]. Korjauksien tulisi tyhjiössä johtaa torsion häviämiseen.

5.3.4 Lagrangen kertojien menetelmä

Korjaustermiä voidaan lähteä etsimään Lagrangen kertojien menetelmällä. Koska projektiivinen invarianssi tuottaa ongelmia, pitää tämä symmetria saada rikottua. Projektiivisen muunnoksen määritelmästä (4.7) nähdään, että kiinnitettäviä vapausasteita on neljä, vastaten λ_μ:n komponentteja. Ongelma siis vastaa nelivektorin kiinnittämistä. Hehl ehdotti [53] Weylin vektorin[7] kiinnittämistä eli lisätermiä

$$S_{LM} = \int_U d\Omega \sqrt{-g} A^\mu Q_\mu, \tag{5.15}$$

jossa A^μ on Lagrangen kerroin. Lisätermi ei kuitenkaan tuota toivottua tulosta. Tämä toimii ainoastaan, jos $f(R)$ on lineaarinen R:n suhteen [77]. Ei-metrisyyttä ei voida sitoa Weylin vektorin avulla, koska ei-metrisyys johtuu suoraan Lagrangen tiheyden muodosta. Vapausasteet eivät siis ole peräisin ei-metrisyydestä vaan torsiosta. Torsiottoman tapauksen yhtälöt, jotka johdettiin luvussa 3, ovat siis konsistentit. Hehlin artikkelissa[53] ongelma siis aiheutui lisäämällä yleisyyttä. Toisaalta kulkemalla yleisyyden tietä loppuun saakka, ongelmakin jää taakse, kuten seuraavassa havaitaan.

Torsiotensorin neljä vapausastetta tulee kiinnittää, joten vaaditaan $S_\mu \equiv S_{\alpha\mu}{}^{\alpha} = 0$ eli kontraktoidut konnektiot ovat symmetrisiä. Lagrangen kertojan B^μ avulla muodostetaan lisätermi

$$S_{LM} = \int_U d\Omega \sqrt{-g} B^\mu S_\mu. \tag{5.16}$$

Nyt varioidaan myös Lagrangen kertojan suhteen, joten uutena saatava yhtälö varmistaa, etteivät kenttäyhtälöt muutu. S_{LM} riippuu metriikasta, mutta uutena saatava yhtälö varmistaa tämän uuden termin häviämisen eli metriikan suhteen saadaan edelleen yhtälöksi (5.12). Konnektion suhteen varioitaessa sen sijaan tulee pieni lisäys yhtälöön (5.13), koska Cartanin

[7] Weylin vektori määritellään $Q_\mu \equiv -\frac{1}{4}\nabla_\mu g^\nu_\nu$, ks. liite A.

torsiotensori määritellään konnektioiden avulla. Tulos on[8]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\big)\delta^\nu_\lambda - \nabla_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big)\Big]+$$

$$2f'(R)\big(g^{\mu\nu}S_{\lambda\alpha}{}^\alpha - g^{\mu\sigma}S_{\sigma\alpha}{}^\alpha\delta^\nu_\lambda + g^{\mu\alpha}S_{\alpha\lambda}{}^\nu\big) = \kappa\big(\Delta_\lambda{}^{\mu\nu} - B^{[\mu}\delta^{\nu]}_\lambda\big). \tag{5.17}$$

Lagrangen kertojan variointi tuottaa tietenkin yhtälön

$$S_\mu = 0, \tag{5.18}$$

jonka avulla voidaan siistiä edellistä yhtälöä muotoon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\big)\delta^\nu_\lambda - \nabla_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big)\Big]+$$

$$2f'(R)g^{\mu\alpha}S_{\alpha\lambda}{}^\nu = \kappa\big(\Delta_\lambda{}^{\mu\nu} - B^{[\mu}\delta^{\nu]}_\lambda\big). \tag{5.19}$$

Kontraktoidaan μ ja λ, jolloin vasen puoli häviää kuten aiemminkin, mutta oikea puoli antaa yhtälön

$$B^\mu = \frac{2}{3}\Delta_\alpha{}^{\alpha\mu}. \tag{5.20}$$

Sijoittamalla tämä takaisin saadaan torsiollisen tapauksen kenttäyhtälöt lopullisessa muodossa

$$f'(R)R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{5.21a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\big)\delta^\nu_\lambda - \nabla_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big)\Big]+$$

$$2f'(R)g^{\mu\alpha}S_{\alpha\lambda}{}^\nu = \kappa\big(\Delta_\lambda{}^{\mu\nu} - \frac{2}{3}\Delta_\alpha{}^{\alpha[\nu}\delta^{\mu]}_\lambda\big), \tag{5.21b}$$

$$S_{\mu\alpha}{}^\alpha = 0. \tag{5.21c}$$

Nämä yhtälöt ovat konsistentit, eivätkä tee hankalia vaatimuksia materian suhteen. Lagrangen kertojan käytössä menetettiin hieman yleisyyttä. Rajoitus ei kuitenkaan koske tässä tapauksessa materiaa, vaan aika-avaruutta. Torsio on mahdollinen eli aika-avaruus voi kiertyä, mutta vain siten että $S_\mu = 0$. Ilman tällaista rajoitusta seuraa aiemman perusteella ongelmia yleisen $f(R)$-vaikutuksen tapauksessa. Kuten aiemmin nähtiin, on kuitenkin erikoistapauksia, jotka toimivat helpomminkin.

Tarkastellaan nyt erilaisia materian vaikutuksia S_M ja erityisesti erilaisia hypermomentteja $\Delta_\lambda{}^{\mu\nu}$.

[8] $B^\sigma\delta S_\sigma = \frac{1}{2}B^\sigma\delta\big(\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} - \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\big) = \frac{1}{2}\big(B^\sigma\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\lambda - B^\sigma\delta^\nu_\sigma\delta^\mu_\lambda\big)\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\big(B^\mu\delta^\nu_\lambda - B^\nu\delta^\mu_\lambda\big) = B^{[\mu}\delta^{\nu]}_\lambda$.

5.3.5 Hypermomentti häviää

Yksinkertaisin tapaus on luonnollisesti, että materian vaikutus ei riipu konnektioista eli $\Delta_\lambda{}^{\mu\nu} = 0$. Hypermomentin hävitessä häviää myös yhtälön (5.21) oikea puoli. Kontraktoimalla ν ja λ saadaan metrisyysehtoa muistuttava

$$\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\big) = 0. \tag{5.22}$$

Takaisin sijoittamalla saadaan

$$\nabla_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big) + 2f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\alpha}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu} = 0. \tag{5.23}$$

Koska metriikka on symmetrinen, tämän (μ,ν)-antisymmetrinen osa on

$$g^{\alpha[\mu}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu]} = 0 \;\Rightarrow\; S_{\mu\lambda\nu} = S_{\nu\lambda\mu}. \tag{5.24}$$

Torsiotensori on siis symmetrinen ensimmäisen ja viimeisen indeksin vaihdon suhteen. Koska määritelmän mukaan tämä tensori on lisäksi antisymmetrinen kahden ensimmäisen indeksin vaihdon suhteen, on

$$S_{\mu\nu\lambda} = S_{\lambda\nu\mu} = -S_{\nu\lambda\mu} = -S_{\mu\lambda\nu} = S_{\lambda\mu\nu} = S_{\nu\mu\lambda} = -S_{\mu\nu\lambda}. \tag{5.25}$$

Torsiotensori siis häviää eli

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = 0. \tag{5.26}$$

Tuloksena saadaan yhtälöt (3.26). Kuten aiemmin todettiin, konnektio on metrinen uuden metriikan $h_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu}$ suhteen. Tämä uusi metriikka on myös symmetrinen, koska se on konformimuunnoksen päässä alkuperäisestä. Koska konnektio on metrinen symmetrisen metriikan suhteen on myös $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ symmetrinen. Konnektioista riippumattomat materian kentät siis tuottavat torsiottoman aika-avaruuden. Toisin sanoen, kun annetaan materian vaikutuksen riippua konnektioista, torsion esiintyminen on mahdollista, mutta ei väistämätöntä. Materia siis määrää sekä kaarevuuden että kiertymisen.

5.3.6 Symmetrinen hypermomentti

Tarkastellaan (μ,ν)-symmetrisen hypermomentin tapausta $\Delta_\lambda{}^{[mn]} = 0$, jolloin konnektion variaatiosta saadussa kenttäyhtälössä (5.21b) myös vasemmalla puolella on vain antisymmetrinen osa eli

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha[\mu}\big)\delta^{\nu]}_\lambda + 2f'(R)g^{\alpha[\mu}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu]} = -\frac{2\kappa}{3}\Delta_\alpha{}^{\alpha[\nu}\delta^{\mu]}_\lambda. \tag{5.27}$$

Kontraktoimalla ν ja λ vasemman puolen toinen termi häviää, koska $S_\mu = 0$ ja saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha\mu}\big) = \frac{2}{3}\kappa\Delta^{\alpha\mu}_{\alpha}. \tag{5.28}$$

Sijoittamalla tämä takaisin oikea puoli ja vasemman puolen ensimmäinen termi kumoavat toisensa, joten on

$$g^{\alpha[\mu}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu]} = 0. \tag{5.29}$$

Hypermomentittomassa tapauksessa osoitettiin, että tämä tarkoittaa torsion häviämistä (5.26). Käyttämällä tätä hyväksi yhtälön (5.21) symmetrisessä osassa, kenttäyhtälöiksi saadaan

$$f'(R)R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{5.30a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\big)\delta^\nu_\lambda - \nabla_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big)\Big] = \kappa\Delta_\lambda{}^{(\mu\nu)}. \tag{5.30b}$$

Tämä on sama tulos kuin aiemmin torsiottomassa tapauksessa saatu yhtälö (3.24) – hypermomentilla lisättynä. Hypermomentti siis vaikuttaa ei-metrisyyteen. Vaikka tässä olisikin käytössä Einstein–Hilbert-vaikutus $f(R) = R$, ei saataisi metristä konnektiota. Koska hypermomentin antisymmetrisen osan hävitessä tulos on sama kuin torsiottomassa tapauksessa, voidaan päätellä, että juuri hypermomentin antisymmetrinen osa aiheuttaa torsion.

5.3.7 Antisymmetrinen hypermomentti

Koska edellisessä kohdassa todettiin torsion aiheutuvan kokonaan hypermomentin antisymmetrisestä osasta, voidaan symmetrisen palan hävitessä, $\Delta_\lambda{}^{(mn)} = 0$, odottaa torsion esiintymistä. Tarkastellaan jälleen yhtälön (5.21) symmetrisiä ja antisymmetrisiä osia

$$-\nabla_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big) + \nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha(\mu}\big)\delta^{\nu)}_\lambda + 2f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha(\mu}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu)} = 0, \tag{5.31a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha[\mu}\big)\delta^{\nu]}_\lambda + 2f'(R)g^{\alpha[\mu}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu]} = \kappa\big(\Delta_\lambda{}^{[\mu\nu]} - \frac{2}{3}\Delta_\alpha{}^{\alpha[\nu}\delta^{\mu]}_\lambda\big). \tag{5.31b}$$

Kontraktoimalla ν ja λ häviää vasemman puolen viimeinen termi ylemmästä yhtälöstä, koska kontraktoitu torsiotensori on symmetrinen. Näin saadaan kahden ensimmäisen termin avulla

$$\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha\mu}\big) = 0. \tag{5.32}$$

Sijoittamalla tämä takaisin saadaan sievennettyä antisymmetristä osaa

$$2f'(R)g^{\alpha[\mu}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu]} = \kappa\big(\Delta_\lambda{}^{[\mu\nu]} - \frac{2}{3}\Delta_\alpha{}^{\alpha[\nu}\delta^{\mu]}_\lambda\big). \tag{5.33}$$

Symmetrinen osa voidaan puolestaan saattaa metrisyysehdon kaltaiseen muotoon

$$
\begin{aligned}
&-\nabla_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big)+\nabla_\alpha\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha(\mu}\big)\delta_\lambda^{\nu)}+2f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha(\mu}S_{\alpha\lambda}{}^{\nu)}=0\\
\Rightarrow&-\sqrt{-g}\partial_\lambda\big(f'(R)g^{\mu\nu}\big)-f'(R)g^{\mu\nu}\nabla_\lambda(\sqrt{-g})-\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\mathfrak{g}^{\alpha\nu}-\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}\mathfrak{g}^{\alpha\mu}+\\
&+\frac{1}{2}\big(\mathfrak{g}^{\alpha\mu}\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}-\mathfrak{g}^{\alpha\mu}\Gamma^\nu_{\lambda\alpha}+\mathfrak{g}^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}-\mathfrak{g}^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\lambda\alpha}\big)=0\\
\Rightarrow&-\sqrt{-g}\partial_\lambda\big(f'(R)g^{\mu\nu}\big)-f'(R)g^{\mu\nu}\big(\partial_\lambda(\sqrt{-g})-\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha}\sqrt{-g}\big)-\\
&-\frac{1}{2}\big(\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}+\Gamma^\mu_{\lambda\alpha}\big)f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha\nu}-\frac{1}{2}\big(\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}+\Gamma^\nu_{\lambda\alpha}\big)f'(R)\mathfrak{g}^{\alpha\mu}=0\\
\Rightarrow&-\sqrt{-g}\partial_\lambda\big(f'(R)g^{\mu\nu}\big)-f'(R)g^{\mu\nu}\big(\partial_\lambda(\sqrt{-g})-\Gamma^\alpha{}_{(\lambda\alpha)}\sqrt{-g}\big)-\Gamma^\mu_{(\alpha\lambda)}\mathfrak{g}^{\alpha\nu}-\Gamma^\nu_{(\alpha\lambda)}\mathfrak{g}^{\alpha\mu}\\
=&\bar{\nabla}_\lambda\big(f'(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big)=0. \qquad (5.34)
\end{aligned}
$$

Tässä $\bar{\nabla}_\lambda$ tarkoittaa kovarianttia derivaattaa konnektion Γ symmetrisen osan suhteen. Apuna on käytetty side-ehtoa $S_{\mu\alpha}{}^{\alpha}=0$ eli $\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}=\Gamma^\alpha_{(\mu\alpha)}$. Kuten aiemminkin, voidaan määritellä symmetrinen metriikka $h_{\mu\nu}=f'(R)g_{\mu\nu}$, johon liittyvän metrisen konnektion symmetriset osat säilyttävät kovariantisti. Saadaan siis kaksi yhtälöä, joista toinen koskee ei-metrisyyttä (5.34) ja toinen torsiota (5.33). Näistä nähdään, että hypermomentin antisymmetrinen osa aiheuttaa torsion, mutta ei-metrisyyden synnyttää vaikutuksen gravitaatio-osa[9].

5.3.8 Lagrangen tiheyden muodostaminen

Puhtaasti metrisissä gravitaatioteorioissa lähdetään liikkeelle lokaalisti minkowskilaisista avaruuksista, joissa konnektiot häviävät. Kaarevan avaruuden Lagrangen tiheys saadaan tämän kautta sallimalla metriikan ja konnektion yleisyys. Tämä ajatus voidaan pukea sanoiksi seuraavasti: Gravitaatiokentän komponentteja tulee esiintyä materian vaikutuksessa vain tarvittaessa. Metrisessä tapauksessa tämä tarkoittaa, että metriikkaa tulee käyttää materian vaikutuksessa vain indeksien kontraktointiin ja rakentamaan lisätermejä, jotka vaaditaan kovarianssin saavuttamiseen. Koska tässä tapauksessa konnektiot eivät ole riippumattomia metriikasta, niitä tulee esiintyä vain kovarianttien derivaattojen sisällä. Ne eivät myöskään edistä kovarianssia, sillä ne eivät ole tensoreita.

Metris-affiinissa tapauksessa tilanne on kuitenkin toinen. Nyt konnektio on riippumaton kenttä ja kun torsio sallitaan, saadaan konnektiosta helposti rakennettua tensori, Cartanin torsiotensori. Minimikytkentäperiaate ei siis ole tässä sama kuin metrisessä tapauksessa. Metris-affiinissa tapauksessa minimikykentäperiaate sanoo: Metriikkaa tulee käyttää ainoastaan kontraktioissa ja konnektioita tulee käyttää rakentamaan lisätermejä, jotka varmistavat kovarianssin.

[9] Selvästikin, jos $f(R)=R$ saadaan tuttu metrisyysehto eli ei-metrisyyskään ei ole välttämätöntä.

5.4 Materian Lagrangen tiheydet

Tähän mennessä on enimmäkseen tarkasteltu geometrian aiheuttamaa vaikutusta ja materian kenttiä yleisellä tasolla. Jotta teoriaa on mahdollista testata myös käytännössä, tarvitaan kuitenkin tarkemmin määrättyjä vaikutuksia. Mikäli teoria tuottaa jonkin fysikaalisesti mielekkään vaikutuksen tapauksessa huomattavasti havainnoista poikkeavia tuloksia[10], on syytä pohtia koko teorian mielekkyyttä. Tässä jaksossa tarkastellaan muutamia esimerkkejä materian vaikutuksista.

5.4.1 Diracin vaikutus

Diracin vaikutusta tarkastellessa tulee tarpeelliseksi käyttää *tetradiformalismia*. Liitteessä C on lisää tietoa asiasta sekä erityisesti merkinnöistä ja määritelmistä. Lisäksi tarvitaan spinoreita ja Diracin γ-matriiseja, jotka on esitelty liitteessä D. Koska näitä määritelmiä, sekä niihin liittyviä identiteettejä, on runsaasti ja niitä tarvitaan ainoastaan tässä osiossa, esitetään ne vain liitteissä. Tämä esitys seuraa pitkälti Vollickin artikkelia [78]. Jälleen kerran vaikutus koostuu kahdesta palasta: gravitaatio-osasta ja materian osasta. Gravitaatio-osa pysyy samana $f(R)$-tyyppisenä kuin kappaleessa 5.3. Materian vaikutukseksi otetaan Diracin vapaiden fermionien vaikutus [59]

$$S_M = \int_U d\Omega \big[e\bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \big], \tag{5.35}$$

jossa Ψ on Diracin kenttä ja spinori; $\gamma^\mu = e_a{}^\mu \gamma^a$ eli Diracin matriisi, jossa koordinaatti-indeksi voidaan vaihtaa Lorentz-indeksiksi tetradin avulla. Determinantti $e = \det(e^a_\mu)$ on tetradien vastine tutulle $\sqrt{-g}$. Kovariantti derivaatta spinorille on

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}\Sigma_{ab}\Psi. \tag{5.36}$$

Vaikutuksessa on tulkittu Ψ ja $\bar{\Psi}$ riippumattomiksi kentiksi. Selvästi helpointa on varioida vaikutusta kentän $\bar{\Psi}$ suhteen. Gravitaatio-osassa spinoreita ei tietenkään esiinny, joten se tuottaa nollan. Oikealla puolella tämä puolestaan esiintyy derivaatan ulkopuolella, joten tulos on selvä:

$$i\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\Psi = 0, \tag{5.37}$$

jota kutsutaan *Diracin yhtälöksi*. Seuraavaksi tarkastellaan variointia tetradin suhteen. Torsiottomassa tapauksessa gravitaatio-osaa kannattaa varioida ensin metriikan suhteen ja kirjoittaa sitten metriikan variaatio tetradin avulla. Torsiollisessa tapauksessa sen sijaan täytyy

[10] Kuten esimerkiksi luvussa 3 mainittu Flanaganin päättely vapaiden fermionien – esimerkiksi elektronit – tapauksessa [59]

kirjoittaa kaarevuusskalaari tetradin avulla [78]:

$$R = e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}. \tag{5.38}$$

Näin saadaan

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[f(R)\delta e + ef'(R)\delta R\big] \\
&= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[-ef(R)e^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu + ef'(R)\big(R_{\mu\nu}{}^{a\nu}\delta e_a{}^\mu + R_{\mu\nu}{}^{\mu b}\delta e_b{}^\nu\big)\big] \\
&= \frac{1}{\kappa}\int_U d\Omega e\big[f'(R)R_\mu{}^a - \frac{1}{2}f(R)e^a{}_\mu\big]\delta e_a{}^\mu.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Diracin vaikutusta varioitaessa taas saadaan

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \int_U d\Omega\delta[e\bar{\Psi}(ie_a{}^\mu\gamma^a D_\mu - m)\Psi] \\
&= \int_U d\Omega\big[\bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi\delta e + ie\bar{\Psi}\gamma^a D_\mu\Psi(\delta e_a{}^\mu)\big]
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Ensimmäinen termi kuitenkin häviää Diracin yhtälön (5.37) nojalla. Kokonaisvaikutuksen variaatiolle on siis

$$\delta(S_G + S_M) = \int_U d\Omega\big[ef'(R)R_\mu{}^a - \frac{1}{2}ef(R)e^a{}_\mu + ie\bar{\Psi}\gamma^a D_\mu\Psi\big]\delta e_a{}^\mu = 0. \tag{5.41}$$

Näin saadaan kenttäyhtälöksi

$$\frac{e}{\kappa}\big[f'(R)R_\mu{}^a - \frac{1}{2}f(R)e^a{}_\mu\big] = -ie\bar{\Psi}\gamma^a D_\mu\Psi. \tag{5.42}$$

Kertomalla puolittain tetradilla $e_{a\nu}$ saavutetaan siistimpi muoto

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = -i\kappa\bar{\Psi}\gamma_\nu D_\mu\Psi. \tag{5.43}$$

Vielä on jäljellä variointi spin-konnektion suhteen. Tällä kertaa on helpompi lähteä liikkeelle Diracin vaikutuksen osuudesta

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \int_U d\Omega\delta\big[e\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \frac{i}{2}\gamma^\mu\omega_\mu{}^{ab}\Sigma_{ab}\Psi + m\Psi)\big] \\
&= \int_U d\Omega\big(\frac{i}{2}\gamma^\mu e\bar{\Psi}\Sigma_{ab}\Psi\big)\delta\omega_\mu{}^{ab}.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Gravitaatio-osassa on syytä kirjoittaa Riccin kaarevuusskalaari tavallisesta poikkeavalla tavalla, nimittäin

$$R = \frac{1}{4e}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abcd}e^a{}_\mu e^b{}_\nu R_{\alpha\beta}{}^{cd}. \tag{5.45}$$

Nyt on

$$
\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega e f'(R)\delta R = \frac{1}{8\kappa}\int_U d\Omega f'(R)\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abcd}e^a{}_\mu e^b{}_\nu \delta R_{\alpha\beta}{}^{cd} \\
&= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abcd}\tilde{e}^b{}_\nu \tilde{e}^a{}_\mu (\omega_{\alpha a}{}^d \delta\omega_\beta{}^{ca} - \partial_\alpha \delta\omega_\beta{}^{cd}) \\
&= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abcd}\tilde{e}^b{}_\nu (\partial_\alpha \tilde{e}^a{}_\mu + \omega_{\alpha a}{}^d \delta^d_a)\delta\omega_\beta{}^{cd} \\
&= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abcd}\big(D_\beta \tilde{e}^a{}_\mu\big)\tilde{e}^b{}_\nu \delta\omega_\alpha{}^{cd}.
\end{aligned} \tag{5.46}
$$

Toiselta riviltä on päästy kolmannelle käyttämällä osittaisintegrointia ja tietoa, että variaatio häviää alueen reunalla. Lisäksi on merkitty $\tilde{e}^a{}_\mu = \big[f'(R)\big]^{1/2} e^a{}_\mu$. Tämän muunnetun tetradin kohdalla konnektio häviää:

$$
D_\beta \tilde{e}^a{}_\mu = \partial_\beta \tilde{e}^a{}_\mu + \omega_\beta{}^{ab}\tilde{e}_{b\mu}. \tag{5.47}
$$

Yhdistämällä vaikutukset saadaan tuttuun tapaan kenttäyhtälöt

$$
\frac{i}{2}\gamma^\mu e\bar{\Psi}\Sigma_{ab}\Psi = \frac{1}{2\kappa}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abcd}\big(D_\beta \tilde{e}^a{}_\mu\big)\tilde{e}^b{}_\nu. \tag{5.48}
$$

Käyttämällä liitteen D identiteettejä voidaan vasen puoli kirjoittaa muotoon

$$
\begin{aligned}
&-\frac{ie}{24}\bar{\Psi}e^\alpha{}_\xi \varepsilon^{\xi\mu\nu\beta}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_5\varepsilon_{cdab}\Sigma^{ab}\Psi \\
&= \frac{ie}{24}\bar{\Psi}e^\alpha{}_\xi \varepsilon^{\xi\mu\nu\beta}\varepsilon_{cdab}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\Sigma^{ab}\Psi \\
&= \frac{ie}{24}\bar{\Psi}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abcd}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\Sigma^{ab}\Psi.
\end{aligned} \tag{5.49}
$$

Tämän avulla voidaan kirjoittaa kenttäyhtälöistä uusi yhtälö

$$
\big(D_{[\beta}\tilde{e}^{[a}{}_\mu\big)\tilde{e}^{]b}{}_{\nu]} = \frac{ie\kappa}{12}\bar{\Psi}\gamma_{[\beta}\gamma_\mu\gamma_{\nu]}\Sigma^{ab}\Psi. \tag{5.50}
$$

Oikealla puolella voidaan jälleen käyttää liitteen identiteettejä, joten

$$
\big(D_{[\beta}\tilde{e}^{[a}{}_\mu\big)\tilde{e}^{]b}{}_{\nu]} = \frac{ie\kappa}{12}\bar{\Psi}\varepsilon_{\beta\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma\Sigma^{ab}\Psi. \tag{5.51}
$$

Tulosta (5.50) on mahdollista siistiä kertomalla puolittain $\tilde{e}_b{}^\nu$ ja $\tilde{e}_a{}^\mu$. Vasemmalla puolella suuri osa termeistä kumoutuu ja tulos voidaan kirjoittaa helposti ilman antikommutaattoria. Oikealla puolella puolestaan voidaan lisäksi käyttää identiteettiä (D.8b). Näin saadaan

$$
D_\beta \tilde{e}^a{}_\mu - D_\mu \tilde{e}^a{}_\beta = \frac{i\kappa}{4\sqrt{f'(R)}}\bar{\Psi}\big[2e\gamma_5\varepsilon_{\beta\mu\rho}{}^a\gamma^\rho - (e^a{}_\beta\gamma_\mu - e^a{}_\mu\gamma_\beta)\big]\Psi. \tag{5.52}
$$

Käyttämällä toista tetradipostulaattia saadaan vasemmalle puolelle torsio esiin. Näin nähdään, että torsio ei häviä. Sen muodoksi tulee

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\tilde{e}^{a}{}_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\tilde{e}^{a}{}_{\alpha} = S_{\mu\beta}{}^{\alpha}\tilde{e}^{a}{}_{\alpha} = \frac{i\kappa}{4\sqrt{f'(R)}}\bar{\Psi}\big[2e\gamma_5\varepsilon_{\beta\mu\rho}{}^{a}\gamma^{\rho} - (e^{a}{}_{\beta}\gamma_{\mu} - e^{a}{}_{\mu}\gamma_{\beta})\big]\Psi \\
\Rightarrow &S_{\mu\beta}{}^{\alpha}e^{a}{}_{\alpha} = \frac{i\kappa}{4f'(R)}\bar{\Psi}\big[2e\gamma_5\varepsilon_{\beta\mu\rho}{}^{a}\gamma^{\rho} - (e^{a}{}_{\beta}\gamma_{\mu} - e^{a}{}_{\mu}\gamma_{\beta})\big]\Psi \\
\Rightarrow &S_{\mu\beta a} = \frac{i\kappa}{4f'(R)}\bar{\Psi}\big[2e\gamma_5\varepsilon_{\beta\mu\rho a}\gamma^{\rho} - (e_{a\beta}\gamma_{\mu} - e_{a\mu}\gamma_{\beta})\big]\Psi. \qquad (5.53)
\end{aligned}
$$

Tämä on yksi esimerkki tapauksesta, jossa materia aiheuttaa torsion. Fermionit ovat tärkeä ja usein käsitelty materian muoto. Lisäksi Diracin vaikutus (5.35) on varsin yksinkertainen. Tästä huolimatta torsion muodon laskeminen ei ollut aivan suoraviivaista. Valitettavasti tämä on tavallista fermionien yhteydessä.

6 Symmetriset avaruudet

Vaikka yleensä pyritäänkin luomaan mahdollisimman yleisiä teorioita, on tavallisesti jossain vaiheessa rajoitettava yleisyyttä. Teoria saattaa olla yleisimmässä muodossaan liian raskas havaintotulosten tulkintaan. Toisaalta havainnot saattavat suoraan sulkea pois osan vaihtoehdoista. Tämä luku käsittelee konnektion vapausasteiden rajoittamista symmetrian avulla. Havaintojen nojalla tietyt symmetriat ovat perusteltuja, joten on olemassa muutakin motivaatiota kuin jatkotarkastelujen yksinkertaistaminen.

6.1 Affiinit vektorikentät aika-avaruudessa

Seuraava voidaan luonnollisesti yleistää erilaiseen dimensioiden määrään ja metriikkaan, jolla on mielivaltainen signatuuri. Tämän tutkielman puitteissa kiinnostus kuitenkin kohdistuu neliulotteiseen aika-avaruuteen.

Ensinnäkin tarvitaan tensorin säilymisen käsite. Sileän vektorikentän X sanotaan *säilyttävän* tensorin T monistolla M, jos kaikilla sileillä lokaaleilla diffeomorfismeilla ϕ_t on $T = \phi_t^* T$ diffeomorfismin ϕ_t määrittelyalueessa U. Tämä on yhtäpitävä väite sen kanssa, että $\mathcal{L}_X T = 0$ eli tämän tensorin *Lien derivaatta* häviää. Tätä on käsitelty liitteessä E.

Affiini vektorikenttä X on moniston M globaali sileä vektorikenttä, jos jokainen siihen liittyvä lokaali sileä diffeomorfismi ϕ_t on *affiini kartta*. Kartta ϕ_t on affiini, jos se säilyttää moniston geodeetit ja niiden affiinit parametrit. Voidaan osoittaa [79], että

$$\mathcal{L}_X \nabla\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big) = \Big(\nabla_\mu \nabla_\nu X^\alpha - R^\alpha_{\mu\nu\beta} X^\beta\Big) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{6.1}$$

ja että X on affiini silloin ja vain silloin kun $\mathcal{L}_X \nabla = 0$ eli

$$\nabla_\mu \nabla_\nu X^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} X^\beta. \tag{6.2}$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös toisin, jakamalla X:n kovariantti derivaatta symmetriseen ja antisymmetriseen osaan:

$$\nabla_\nu X_\mu = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}. \tag{6.3}$$

Symmetrinen osa vastaa metriikan Lien derivaattaa, kun konnektio on symmetrinen, sillä

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} = \nabla_\nu X_\mu + \nabla_\mu X_\nu = \mathcal{L}_X g_{\mu\nu}. \tag{6.4}$$

Sijoittamalla (6.3) yhtälöön (6.2) saadaan

$$\frac{1}{2}\nabla_\alpha h_{\mu\nu} + \nabla_\alpha F_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}X^\beta. \tag{6.5}$$

Kun otetaan huomioon indeksien symmetriat, saadaan kaksi ehtoa

$$\nabla_\alpha h_{\mu\nu} = 0\ ,\ \nabla_\alpha F_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}X^\beta. \tag{6.6}$$

Ensimmäinen näistä voidaan osoittaa ekvivalentiksi sen kanssa, että X on affiini vektorikenttä [79]. Usein käsitellyt *Killingin vektorikentät* ovat erikoistapaus tästä yleisemmästä vektorikentästä. Jos valitaan $h_{\mu\nu} \equiv 0$, saadaan

$$\nabla_{(\nu}X_{\mu)} = 0 \tag{6.7}$$

ja

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 0. \tag{6.8}$$

Ensimmäistä näistä sanotaan *Killingin yhtälöksi*. Saadaan muitakin mielenkiintoisia erikoistapauksia, kuten homoteettiset vektorikentät, mutta ne eivät ole tässä tutkielmassa oleellisia.

6.2 Muotoinvarianssi ja Killingin yhtälö

Vaihtoehtoisesti symmetriaa voidaan käsitellä tarkastelemalla *muotoinvarianssia*. Tensori T on muotoinvariantti [80] koordinaattimuunnoksessa $x \to x'$, jos

$$T'^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots}(y) = T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots}(y), \quad \forall y \in M. \tag{6.9}$$

Erityisen kiinnostava on muotoinvariantti metriikka, jonka ehto on tensorin muuntosääntöä käyttäen

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}g_{\alpha\beta}(x'). \tag{6.10}$$

Koordinaattimuunnosta, joka toteuttaa tämän ehdon sanotaan *isometriaksi*. Tämä ei kuitenkaan ole vielä kovin hyödyllinen vaatimus, mutta se yksinkertaistuu huomattavasti, mikäli rajaamme tarkastelun *infinitesimaalisiin muunnoksiin*:

$$x'^\mu = x^\mu + tX^\mu(x), \tag{6.11}$$

joissa t on pieni nollasta eroava parametri. Tässä tapauksessa saadaan

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(x^\alpha + tX^\alpha(x))}{\partial x^\mu} = \delta^\alpha_\mu + t\frac{\partial X^\alpha(x)}{\partial x^\mu}, \tag{6.12}$$

joka edelleen voidaan sijoittaa isometrisyysehtoon (6.10). Ensimmäisessä kertaluvussa saadaan

$$g_{\mu\nu}(x) = \Big(\delta^\alpha_\mu + t\frac{\partial X^\alpha(x)}{\partial x^\mu}\Big)\Big(\delta^\beta_\nu + t\frac{\partial X^\beta(x)}{\partial x^\nu}\Big)\Big(g_{\alpha\beta}(x) + tX^\alpha(x)\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha(x)}\Big). \tag{6.13}$$

Tämä sievenee muotoon

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} g_{\alpha\nu} + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\nu} g_{\mu\alpha} + X^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 0, \tag{6.14}$$

jossa muuttujana ei esiinny enää muunnettu x'. Saimme samalla esiin Lien derivaatan. Samanlainen käsittely voidaan suorittaa yleiselle tensorille, joten päädyttiin samaan ehtoon kuin edellä. Tavallinen tie tästä eteenpäin on edetä Killingin yhtälöön (6.7). Se vaatii kuitenkin lisäoletuksia, joita meillä ei ole käytössä. Tarkastellaan kuitenkin tätä toimenpidettä kiinnittäen erityisesti huomiota tarvittaviin lisäoletuksiin.

Kuten liitteessä E on todettu, Lien derivaatan tuottamat osittaisderivaatat voidaan muuttaa kovarianteiksi derivaatoiksi, mikäli konnektio on torsioton. Tätä oletusta ei kuitenkaan haluta vielä tehdä, joten jatketaan osittaisderivaattojen kanssa kirjoittaen

$$g_{\alpha\nu}\partial_\mu X^\alpha = \partial_\mu(g_{\alpha\nu}X^\alpha) - X^\alpha\partial_\mu g_{\alpha\nu} = \partial_\mu X_\nu - X^\alpha\partial_\mu g_{\alpha\nu}. \tag{6.15}$$

Näin saadaan metriikan Lien derivaataksi[1]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} &= \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu + \big(X^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu} - X^\alpha\partial_\mu g_{\alpha\nu} - X^\alpha\partial_\nu g_{\mu\alpha}\big)\\ &= 2\partial_{(\mu}X_{\nu)} - 2X^\alpha g_{\beta\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\\ &= 2\partial_{(\mu}X_{\nu)} - 2X_\alpha\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Toisaalta kirjoittamalla auki Killingin yhtälö saadaan

$$\nabla_{(\mu}X_{\nu)} = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}X_\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}X_\alpha. \tag{6.17}$$

Vertailemalla näitä kahta huomataan, että mikäli halutaan saada Killingin yhtälö voimaan täytyy olla

$$2X_\alpha\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}X_\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}X_\alpha. \tag{6.18}$$

[1] Tässä käytetään jälleen Christoffelin symbolin perinteistä merkintää $\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}$.

Koska vektorikenttä X^α on mielivaltainen, täytyy konnektion olla muotoa

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + C_{\mu\nu}{}^\alpha, \tag{6.19}$$

jossa $C_{\mu\nu}{}^\alpha$ on kahden ensimmäisen indeksin suhteen antisymmetrinen tensori. Liitteessä B.3 on esitetty konnektio hajotettuna kolmeen osaan: Christoffelin symboliin, torsioon perustuvaan osaan ja ei-metrisyyteen perustuvaan osaan. Yhtälön (6.19) mukaan Christoffelin symboli on sopiva, samaten torsio-osa käy, koska se on antisymmetrinen kahden ensimmäisen indeksin suhteen. Ei-metrisyysosan sen sijaan tulee hävitä, mikäli haluamme Killingin yhtälön voimaan. Artikkelissaan Bloomer [81] toteaa, että Killing-yhtälö on voimassa yleisellä konnektiolla, jotka ovat muotoa

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} S_{\mu\nu}{}^\alpha. \tag{6.20}$$

Tässä on hieman epätarkkuutta, sillä kuten edellä osoitettiin, tällainen konnektio toteuttaa kyllä Killing-yhtälön, mutta ei kuitenkaan ole yleisin mahdollinen konnektio.

6.3 Homogeenisuus ja isotrooppisuus

Homogeenisuutta ja isotrooppisuutta on käsitelty suhteellisuusteorian kurssilla[2], joten ne oletetaan tässä tunnetuiksi käsitteiksi. Yksinkertaisesti sanottuna homogeenisuus tarkoittaa, että avaruus on kaikissa pisteissään samanlainen. Isotropia puolestaan tarkoittaa, että kaikki suunnat ovat vastaavia. Todetaan vielä, että tähtitiede on tuottanut suuren määrän havaintoja, jotka tukevat ajatusta, että maailmankaikkeus on suuressa skaalassa homogeeninen ja isotrooppinen [82], [83], [84].

Jatkossa tarvitaan erityisesti kahta ominaisuutta, jotka seuraavat homogeenisuudesta ja isotrooppisuudesta. Killingin vektori voidaan valita siten, että annetun pisteen m ympäristössä $X^\alpha(m) = 0$ ja $\nabla_\mu X_\nu$ on mielivaltainen, kunhan (6.14) toteutuu. Tämä jälkimmäinen ehto on hyödyllisimmillään, kun ehto (6.19) toteutuu. Isotrooppinen ja homogeeninen avaruus on maksimaalisesti symmetrinen ja siis sallii $N(N+1)/2$ lineaarisesti riippumatonta Killing-vektoria.

Edellisessä luvussa käsiteltiin metriikan maksimaalista symmetriaa. Tätä ominaisuutta voidaan kuitenkin vaatia muiltakin tensoreilta, kuten kaarevuustensorilta tai torsiotensorilta. Toisaalta voidaan tutkia myös yleisten tensoreiden ominaisuuksia symmetrisissä avaruuksissa. Lähdetään tarkastelemaan aluksi tensoreita ja konnektioita symmetrisissä avaruuksissa. Käytännössä tämä ei kuitenkaan vielä riitä, sillä neliulotteisessa aika-avaruudessa on yksi

[2] Asiasta voi lukea muun muassa viitteestä [54].

aikaulottuvuus ja kolme symmetristä paikkaulottuvuutta. Jatkossa siis tarkastellaan myös symmetristen aliavaruuksien tapausta.

Liitteessä F on laskettu tuloksia eri rangin kovarianteille tensoreille maksimaalisesti symmetrisissä avaruuksissa. Kosmologian kannalta nämä eivät sinänsä ole kuitenkaan kovin kiinnostavia. Standardikosmologiassa kolme paikkaulottuvuutta ovat maksimaalisesti symmetrisiä, mutta aika jää ulkopuolelle. Myös pallosymmetrinen tapaus on kiinnostava. Näissä molemmissa tapauksissa on kyse *maksimaalisesti symmetrisistä aliavaruuksista*. Näille on johdettu tuloksia viitteessä [80].

6.3.1 Konnektion komponentit homogeenisessa ja isotrooppisessa avaruudessa

Homogeenisessa ja isotrooppisessa avaruudessa metriikka saadaan differentiaalisesta kaarenpituudesta [80]

$$-d\tau^2 = g(v)dv^2 + f(v)\big[d\mathbf{u}^2 + \frac{k(\mathbf{u}\cdot d\mathbf{u})^2}{1-k\mathbf{u}^2}\big], \tag{6.21}$$

missä $\mathbf{u}$ on kolmiavaruuden vektori ja v on aikakomponenttia. Yleensä tähän tehdään koordinaattimuunnos [80], [85], jonka avulla metriikka voidaan antaa siististi muodossa

$$g_m n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a(t)\tilde{g}_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)r^2\sin^2\theta \\ \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

Tässä $\tilde{g}_{ij}$ on kolmiavaruuden metriikka, joka ei riipu ajasta. Koko tämän osion ajan i ja j saavat arvoja joukosta $\{1,2,3\}$.

Perehdytään nyt konnektion muotoon, kun kolme paikkaulottuvuutta on maksimaalisesti symmetrisiä. Konnektiot eivät ole tensoreita, joten liitteen F tuloksia ei voida käyttää suoraan. Näiden tulosten avulla voidaan kuitenkin laskea konnektion komponenttien muoto. Tarkastellaan yleisten maksimaalisesti symmetristen tensorien kovariantteja derivaattoja, jolloin saadaan konnektioita koskevia relaatioita. Näin voidaan merkittävästi rajoittaa konnektion muotoa maksimaalisesti symmetristen aliavaruuksien tapauksessa.

Ensimmäisenä tarkastellaan maksimaalisesti symmetristä (ks. liite F) kovarianttia vektoria V_ν. Kovariantin vektorin komponentit ovat nollia lukuun ottamatta aikakomponenttia, joka on jokin vain ajasta riippuva funktio. Kun otetaan kovariantista vektorista kovariantti derivaatta, saadaan toisen kertaluvun kovariantti tensori, joka on muotoa

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} V_\alpha = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 0 & f(t)\tilde{g}_{ij} \end{pmatrix}, \tag{6.23}$$

joillakin ajasta riippuvilla funktioilla $b(t)$ ja $f(t)$. Tarkastellaan nyt tämän kovariantin derivaatan 00-komponenttia

$$\nabla_0 V_0 = \partial_0 V_0 - \Gamma^0_{00} V_0 = b(t) \;\Rightarrow\; \Gamma^0_{00} \equiv c(t). \tag{6.24}$$

Tämä komponentti riippuu siis vain ajasta. $0i$- ja $i0$-komponentit puolestaan kertovat

$$\nabla_0 V_i = \partial_0 V_i - \Gamma^\alpha_{0i} V_\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \Gamma^0_{0i} \equiv 0, \tag{6.25}$$

$$\nabla_i V_0 = \partial_i V_0 - \Gamma^\alpha_{i0} V_\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \Gamma^0_{i0} \equiv 0. \tag{6.26}$$

Valitettavasti ij-komponenteille ei saada yhtä kaunista tulosta, mutta sillekin saadaan kyllä rajoite:

$$\nabla_i V_j = f(t)\tilde{g}_{ij} = \partial_i V_j - \Gamma^\alpha_{ji} V_\alpha = -\Gamma^0_{ji} \;\Rightarrow\; \Gamma^0_{ji} = -\frac{f(t)}{V_0}\tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{c}(t)\tilde{g}_{ij}. \tag{6.27}$$

Tässä on viimeisessä vaiheessa käytetty hyväksi tietoa, että $f(t)$ ei voi riippua maksimaalisesti symmetrisistä paikkakoordinaateista. Näin saatiin vapausasteet rajattua johonkin funktioon $\tilde{c}(t)$, joka ei kuitenkaan ole täysin mielivaltainen, sillä se voi riippua vain ajasta. Konnektiolla on 64 komponenttia ja 16 niistä on nyt saatu rajoitettua. Kontravariantilla vektorilla on kovarianttia vastaavat komponentit eli ainoastaan aikakomponentti on nollasta eroava. Tarkastellaan seuraavaksi tätä tapausta:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\beta\mu} V^\beta. \tag{6.28}$$

Erityisesti ij-komponentin tapauksessa ensimmäinen termi oikealla häviää ja saadaan

$$\Gamma^i_{0j} = \hat{c}(t)\delta^i_j. \tag{6.29}$$

Tässä on $\hat{c}(t)$ jokin tuntematon ajan funktio. Näin saatiin 9 uutta rajoitusta. Otetaan seuraavaksi käsittelyyn toisen rangin kovariantin tensorin kovariantti derivaatta.

$$\nabla_\alpha B_{\mu\nu} = \partial_\alpha B_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} B_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} B_{\mu\beta}. \tag{6.30}$$

Liitteen F mukaan kolmannen rangin tensorit häviävät maksimaalisesti symmetrisessä aliavaruudessa. Samoin tulee hävitä komponenttien, joissa on sekä paikka- että aikaindeksejä. Tarkastelemalla $00i$-komponentti saadaan

$$0 = \nabla_0 B_{0i} = \partial_0 B_{0i} - \Gamma^\beta_{00} B_{\beta i} - \Gamma^\beta_{i0} B_{0\beta}, \tag{6.31}$$

jossa oikean puolen ensimmäinen ja viimeinen termi häviävät aiempien tulosten avulla. Tulokseksi saadaan siis

$$\Gamma^i_{00} = 0. \tag{6.32}$$

Vielä tarvitaan $0ij$-komponentti

$$0 = \partial_0 T_{ij} - \Gamma^k_{i0} T_{kj} - \Gamma^k_{j0} T_{ik}, \tag{6.33}$$

josta saadaan

$$\Gamma^j_{i0} = \bar{c}(t)\delta^j_i. \tag{6.34}$$

Jälleen kerran saatiin tuntematon ajan funktion, $\bar{c}(t)$. Nyt on saatu rajoituksia kaikille 37 komponentille, jotka eivät koske ainoastaan maksimaalisesti symmetristä aliavaruutta. Loppuja 27 komponenttia rajoittaa liitteessä F laskettu tulos

$$\Gamma^k_{ij} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}. \tag{6.35}$$

Konnektion paikkariippuvuus on siis peräisin metriikasta. Jos metriikka on tunnettu, ei konnektioon jää tuntemattomia paikan funktioita. Se ei kuitenkaan ole pelkästään metriikan funktio, vaan osa komponenteista sisältää aikariippuvuutta funktioissa $c(t), \tilde{c}(t), \hat{c}(t)$ ja $\bar{c}(t)$.

Metriikka on yleensä tunnettu, joten konnektion kaikki vapausasteet ovat tuntemattomissa ajan funktioissa. Lisäoletuksin on näille mahdollista saada keskinäisiä relaatioita. Esimerkiksi voidaan vaatia konnektion olevan täysin torsioton. Kuten tässä tutkielmassa on useasti mainittu, tämä on varsin yleinen oletus. Tällöin olisi $\bar{c}(t) = \hat{c}(t)$. Koska liitteessä F on osoitettu, että maksimaalisesti symmetrisissä aliavaruuksissa torsio häviää, tämä toimii myös kääntäen. Jos $\bar{c}(t) = \hat{c}(t)$ eli $\Gamma^j_{0i} = \Gamma^j_{i0}$, niin konnektio on torsioton. Itse asiassa hieman rajatumpikin ehto, nimittäin edellisen kontraktio, olisi riittävä. Tämä on sama kuin luvussa 5 käytetty oletus (5.18), koska

$$\begin{aligned} S_\mu &= \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \Gamma^0_{0\mu} - \Gamma^0_{\mu 0} + \Gamma^i_{i\mu} - \Gamma^i_{\mu i}, \\ S_i &= \Gamma^0_{0i} - \Gamma^0_{i0} + \Gamma^j_{ji} - \Gamma^j_{ij} = \begin{Bmatrix} j \\ ji \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} j \\ ij \end{Bmatrix} = 0, \\ S_0 &= \Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00} + \Gamma^i_{i0} - \Gamma^i_{0i} = 2(\bar{c}(t) - \hat{c}(t)). \end{aligned} \tag{6.36}$$

Toisin sanoen on

$$\Gamma^i_{[i0]} = 0 \;\Leftrightarrow \bar{c}(t) = \hat{c}(t). \tag{6.37}$$

Käyttöön ei oteta kuitenkaan tätä torsioon liittyvää oletusta, vaan ei-metrisyyteen liittyvä. Liitteessä F on tehty oletus $\tilde{\nabla}_k \tilde{g}_{ij} = 0$, jotta Killing-yhtälö (6.7) saataisiin käyttöön. Tässä ˜ tarkoittaa, että käsitellään kolmiavaruuden suureita. Lisäämällä vielä vaatimus, että yleisemmin on $\nabla_i g_{\mu\nu} = 0$, saadaan hyödyllinen relaatio. Tämä oletus sisältää olennaisesti uutena ainoastaan

$$\nabla_i g_{0j} = \nabla_i g_{j0} = 0. \tag{6.38}$$

Sen sijaan lisäolettamuksia ei kaipaa

$$\nabla_i g_{00} = \partial_i g_{00} - \Gamma^\alpha_{0i} g_{\alpha 0} - \Gamma^\alpha_{0i} g_{0\alpha} = 0. \tag{6.39}$$

Koska koko luvun ajan on kannettu mukana oletusta maksimaalisesti symmetrisen aliavaruuden ei-metrisyyden häviämisestä, on luonnollisempaa tässä vaiheessa kasvattaa tätä oletusta kuin lisätä oletus torsiosta. Selvitetään tästä saatava relaatio. Voidaan kirjoittaa

$$\nabla_i V_j = \nabla_i (g_{j\alpha} V^\alpha) = (\nabla_i g_{j\alpha}) V^\alpha + g_{jk} \nabla_i V^k = V^0 \nabla_i g_{j0} + g_{jk} \nabla_i V^k = g_{jk} \nabla_i V^k. \tag{6.40}$$

Kirjoitetaan kovariantit derivaatat auki oikealla ja vasemmalla, jolloin saadaan

$$g_{jk} \Gamma^k_{0i} V^0 = -\Gamma^0_{ji} g_{00} V^0. \tag{6.41}$$

Vektori on mielivaltainen (mutta maksimaalisesti symmetrinen), joten oletetaan sen 0-komponentti nollasta eriäväksi. Tässä esiintyvät konnektion komponentit tiedetään yhtälöistä (6.27) ja (6.29), joten

$$g_{ji} \hat{c}(t) \delta^k_i = -\tilde{c}(t) \tilde{g}_{ji} g_{00}. \tag{6.42}$$

Tässä on esillä kahta eri metriikkaa. Vasemmalla puolella on neliavaruuden metriikka ja oikealla puolella kolmiavaruuden metriikka. Metriikan muoto ei kuitenkaan ole tuntematon [80], nimittäin $g_{ji} = -a(t)\tilde{g}_{ji}$ ja $g_{00} = g_{00}(t)$. Metriikka ei myöskään häviä, joten saadaan

$$\tilde{c}(t) = \frac{a(t)}{g_{00}} \hat{c}(t) \equiv \tilde{a}(t) \hat{c}(t). \tag{6.43}$$

Näin saatiin vapausasteita vähennettyä vielä yhdellä. Mukaan tuli uusi funktio $a(t)$, mutta tämä on metriikasta tunnettu. Itse asiassa tämä relaatio voidaan johtaa myös suoraan lisäoletuksesta (6.38). Nimittäin

$$\nabla_i g_{j0} = 0 = \partial_i g_{j0} - \Gamma^\alpha_{ji} g_{\alpha 0} - \Gamma^\alpha_{0i} g_{j\alpha}, \tag{6.44}$$

joka voidaan esittää

$$\Gamma^0_{ij} g_{00} = -\Gamma^k_{0j} g_{ik}, \tag{6.45}$$

josta saadaan sama relaatio.

6.3.2 Riccin tensori ja skalaari

Koska nyt konnektion kaikki komponentit tunnetaan voidaan laskea Riccin tensori ja skalaari. Käyttäen määritelmää (A.5) on siis

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} + \Gamma^\alpha_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\kappa\alpha}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}. \tag{6.46}$$

Otetaan ensimmäisenä käsittelyyn 00-komponentti

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_0 \Gamma^\alpha_{\alpha 0} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} + \Gamma^\alpha_{\kappa 0}\Gamma^\kappa_{0\alpha} - \Gamma^\alpha_{\kappa\alpha}\Gamma^\kappa_{00} \\ &= \partial_0\big(c(t) + 3\bar{c}(t)\big) + \big(\bar{c}(t)\delta^i_j \hat{c}(t)\delta^j_i + c^2(t)\big) \\ &= \dot{c}(t) + 3\dot{\bar{c}}(t) + 3\hat{c}(t)\bar{c}(t) + c^2(t). \end{aligned} \tag{6.47}$$

Komponentit $0i$ ja $i0$ häviävät, koska Riccin tensori on nimensä mukaisesti tensori. Tarvitsee siis enää laskea ij-komponenttien muoto. Tähän saadaan

$$\begin{aligned} R_{ij} =& \partial_j \Gamma^\alpha_{\alpha i} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{ji} + \Gamma^\alpha_{\kappa j}\Gamma^\kappa_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{\kappa\alpha}\Gamma^\kappa_{ij} \\ =& \partial_j \begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix} - \dot{\tilde{c}}(t)\tilde{g}_{ji} - \partial_k \begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix} + \left(\Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik} + \Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0} + \begin{Bmatrix} n \\ kj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ in \end{Bmatrix}\right) - \\ & - \left(c(t)\tilde{c}(t)\tilde{g}_{ij} + \Gamma^k_{0k}\Gamma^0_{ij} + \begin{Bmatrix} n \\ kn \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}\right) \\ =& \partial_j \begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix} - \dot{\tilde{c}}(t)g_{ij} - \partial_k \begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix} + \tilde{c}(t)\hat{c}(t)g_{ij} + \tilde{c}(t)\bar{c}(t)g_{ij} + \begin{Bmatrix} n \\ kj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ in \end{Bmatrix} - \\ & - c(t)\tilde{c}(t)g_{ij} - 3\tilde{c}(t)\hat{c}(t)g_{ij} - \begin{Bmatrix} n \\ kn \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} \\ =& \tilde{R}_{ij} - \big(2\tilde{c}(t)\hat{c}(t) + c(t)\tilde{c}(t) + \dot{\tilde{c}}(t) - \tilde{c}(t)\bar{c}(t)\big)g_{ij} \\ =& \tilde{R}_{ij} + \big(2a(t)\hat{c}^2(t) + \dot{a}(t)\hat{c}(t) + a(t)\dot{\hat{c}}(t) + a(t)c(t)\hat{c}(t) - a(t)\hat{c}(t)\bar{c}(t)\big)g_{ij}. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Esiin tuli siis kolmiavaruuden Riccin tensori Christoffelin symbolien suhteen, $\tilde{R}_{ij}$, ja kolme korjaustermiä yleisemmästä konnektiosta. Riccin skalaari saadaan helposti laskemalla yhteen yhtälö (6.47) ja kontraktio yhtälöstä (6.48). Merkintöjen lyhentämiseksi seuraavassa ei ole kirjoitettu funktioiden argumentteja näkyviin. Tulos on

$$\begin{aligned} R =& \tilde{R} + 3\big(2a\hat{c}^2 + \dot{a}\hat{c} + a\dot{\hat{c}} + ac\hat{c} - a\hat{c}\bar{c}\big) + \dot{c} + 3\dot{\bar{c}} + 3\hat{c}\bar{c} + c^2 \\ =& \tilde{R} + c^2 + \dot{c} + 3\Big(a\big(2\hat{c}^2 + \dot{\hat{c}} + c\hat{c} - \hat{c}\bar{c}\big) + \dot{a}\hat{c} + \hat{c}\bar{c} + \dot{\bar{c}}\Big). \end{aligned} \tag{6.49}$$

Käyttäen metriikkaa (6.22) tässä on

$$\tilde{R} = \frac{2k(kr^3 - 3)}{(kr^2 - 1)^2}. \tag{6.50}$$

Tulos on laskettu *Mathematicalla* RGTC-paketin avulla[3]. Riccin skalaari (6.49) voidaan sijoittaa edellisissä luvuissa laskettuihin kenttäyhtälöihin. Näin saaduissa yhtälöissä olisi huomattavasti vähemmän vapausasteita kuin alkuperäisissä.

6.4 Pallosymmetrinen tapaus

Edellisessä osiossa paikka-avaruus oli homogeeninen ja isotrooppinen. Jos homogeenisuusoletus jätetään, tilanne on pallosymmetrinen. Tämäkin on kosmologisesti kiinnostava malli [86]. Suunnat ovat edelleen samanarvoiset, kuten monet havainnot ovat osoittaneet. Rakenteita on kuitenkin havaittu hyvin suuressakin skaalassa [7], joten homogeenisuusajatuksen hylkäämiselle (kuten myös hyväksymiselle) on perusteet. Aine ei ole tasaisesti jakautunut maailmankaikkeuteen, vaan muistuttaa saippuavaahtoa. Tärkeä sovellusalue pallosymmetrisestä tapauksesta ovat stellaarikonfiguraatiot [87], [88]. Maksimaalisen aliavaruuden muodostavat kulmat ja dimensio on siten kaksi. Tällä kertaa saadaan siis vain kahdeksan konnektion komponenttia suoraan yhtälöstä (F.30). Muut komponentit täytyy laskea erikseen.

6.4.1 Konnektion komponentit

Pallosymmetrisessä tapauksessa metriikka ei ole yhtä yksinkertainen kuin (6.22). Siinä on kuitenkin paljon säännöllisyyttä, nimittäin

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{g}_{nm}(t,r) & 0 \\ 0 & f(t,r)\tilde{g}_{ij}(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{00}(\theta,\phi) & g_{01}(\theta,\phi) & 0 & 0 \\ g_{10}(\theta,\phi) & g_{11}(\theta,\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(t,r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(t,r)\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{6.51}$$

Kuten edellisessä osiossa, käytetään ˜-merkintää puhuttaessa maksimaalisesti symmetrisen aliavaruuden suureista. Tässä tapauksessa $\tilde{g}_{ij}$ ja $\hat{g}_{nm}$ ovat 2×2 matriiseja. $\tilde{g}_{ij}$ ei riipu ajasta eikä säteestä, vaan ainoastaan avaruuskulmasta. Tässä osiossa indeksit m, n, o, p saavat arvoja joukosta $\{0,1\}$ ja indeksit i, j, k, l joukosta $\{2,3\}$.

Lähdetään liikkeelle samaan tapaan kuin edellisessä kappaleessa eli tarkastelemalla maksimaalisesti symmetrisen kovariantin vektorin kovarianttia derivaattaa

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} V_\alpha = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^m_{\nu\mu} V_m = \begin{pmatrix} d_{mn}(t,r) & 0 \\ 0 & f(t,r)\tilde{g}_{ij} \end{pmatrix}, \tag{6.52}$$

[3]http://www.inp.demokritos.gr/ sbonano/RGTC/

jossa $d_{mn}(t,r)$ on jokin 2×2-matriisi. Jälleen kerran aloitetaan tarkastelemalla 00-komponenttia

$$\nabla_0 V_0 = d_{00}(t,r) = \partial_0 V_0 - \Gamma^0_{00} V_0 - \Gamma^1_{00} V_1. \tag{6.53}$$

Koska tämä on voimassa kaikilla maksimaalisesti symmetrisillä vektoreilla V_μ, voidaan erityisesti valita, että $V_0 = 0$ tai $V_1 = 0$. Näin saadaan selville kaksi komponenttia,

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{00}(t,r),\ \Gamma^1_{00} = \Gamma^1_{00}(t,r). \tag{6.54}$$

Vastaavasti saadaan 11-komponentista,

$$\Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{11}(t,r),\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{11}(t,r). \tag{6.55}$$

Myös 01- ja 10-tyyppiset termit saadaan aivan vastaavasti eli

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{01}(t,r),\ \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{10}(t,r),\ \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{01}(t,r),\ \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{10}(t,r). \tag{6.56}$$

Nämä 8 komponenttia jäivät siis tuntemattomiksi. Niistä saatiin selville vain, että ne eivät riipu avaruuskulmasta. Tarkastellaan seuraavaksi mi-komponenttia, jolloin siis

$$0 = \Gamma^0_{im} V_0 + \Gamma^1_{im} V_1. \tag{6.57}$$

Vektori on taas mielivaltainen, joten voidaan tarkastella näitä kahta termiä erikseen. Näiden konnektiotermien tulee siis hävitä,

$$\Gamma^n_{im} = 0. \tag{6.58}$$

Vastaavalla tavalla saadaan im-komponentista

$$\Gamma^n_{mi} = 0. \tag{6.59}$$

Maksimaalisesti symmetrisestä aliavaruudesta saadaan ij-komponentille

$$\nabla_i V_j = f(t,r)\tilde{g}_{ij} = \partial_i V_j - \Gamma^0_{ij} V_0 - \Gamma^1_{ij} V_1. \tag{6.60}$$

Käyttäen vektorin mielivaltaisuutta, saadaan

$$\Gamma^0_{ij} = b_1(t,r)\tilde{g}_{ij},\ \Gamma^1_{ij} = b_2(t,r)\hat{g}_{ij}. \tag{6.61}$$

Edeten samaan tapaan kuin edellisessä osiossa, tarkastellaan seuraavaksi kontravariantin vektorin kovarianttia derivaattaa,

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{m\mu} V^m. \tag{6.62}$$

Jatkossa käytetään vektorin mielivaltaisuutta hyväksi mainitsematta sitä erikseen joka komponentin yhteydessä. Tarkastelemalla ij-komponenttia nähdään, että

$$\Gamma^j_{0i} = b_3(t,r)\delta^j_i,\ \Gamma^j_{1i} = b_4(t,r)\delta^j_i. \tag{6.63}$$

Siirrytään nyt toisen rangin kovariantteihin tensoreihin, joita koskee yhtälö (F.12). Ensinnäkin mni-komponentti antaa

$$\partial_n T_{mi} - \Gamma^\alpha_{mn} T_{\alpha i} - \Gamma^\alpha_{in} T_{m\alpha} = 0. \tag{6.64}$$

Käyttäen hyväksi yhtälöitä (6.59) ja (6.58) saadaan

$$\Gamma^i_{mn} = 0. \tag{6.65}$$

Vielä puuttuu kahdeksan komponenttia ja nämä saadaan, kuten edellisessäkin kappaleessa, tarkastelemalla mij-komponenttia

$$0 = \partial_m T_{ij} - \Gamma^k_{im} T_{kj} - \Gamma^k_{jm} T_{ik}. \tag{6.66}$$

Tästä saadaan

$$\Gamma^j_{i0} = b_5\delta^j_i,\ \Gamma^j_{i1} = b_6\delta^j_i. \tag{6.67}$$

Etsitään nyt näille 14 funktiolle keskinäisiä riippuvuuksia. Otetaan käyttöön samantapainen metrisyysehto kuin edellisessä osiossa:

$$\nabla_m g_{ij} = 0. \tag{6.68}$$

Tämän avulla voidaan toimia samaan tapaan kuin yhtälön (6.40) suhteen, jolloin

$$g_{jk}\Gamma^k_{mi} V^m = -\Gamma^m_{ji} V_m. \tag{6.69}$$

Valitsemalla vuorotellen vektorin nolla- tai ykköskomponentti nollaksi saadaan kaksi relaatiota.

$$b_1(t,r) = -f(t,r)g^{00}(t,r)b_3(t,r) \equiv a_0 b_3(t,r), \tag{6.70a}$$

$$b_2(t,r) = -f(t,r)g^{11}(t,r)b_4(t,r) \equiv a_1 b_4(t,r). \tag{6.70b}$$

Tässä funktiot $a_m(t,r)$ saadaan metriikan avulla. Koska käsissämme on nyt 12 funktiota konnektion komponenteissa, on syytä miettiä, miten nämä kannattaa esittää. Ensinnäkin kahdeksan ensimmäistä funktiota (6.54), (6.55), (6.56) muodostavat blokin, joten näitä ei kannata erikseen ilmoittaa funktioina, vaan konnektion komponentteina Γ^p_{mn}. Kussakin paikassa on siis funktio ajasta ja säteestä. Indeksit p, m, n voivat saada arvoja 0 ja 1. Loput 4 funktiota yhtälöistä saadaan (6.61) ja (6.67) merkitään

$$b_n \equiv \begin{pmatrix} b_3(t,r) \\ b_4(t,r) \end{pmatrix},\ \tilde{b}_n \equiv \begin{pmatrix} b_5(t,r) \\ b_6(t,r) \end{pmatrix}. \tag{6.71}$$

6.4.2 Riccin tensori ja skalaari

Nyt voidaan laskea pallosymmetrisen tapauksen Riccin tensorin komponentit. Jatkossa lausekkeet ovat varsin pitkiä ja siksi käytetään seuraavanlaista merkintätapaa, joka on muunnos Einsteinin summauksesta. Kun termissä on kolme jostakin indeksistä riippuvaa tekijää, merkitään keskimmäinen indeksi ylös ja muut kaksi alas. Tällä ei ole tekemistä kovarianssin ja kontravarianssin kanssa. Tässä esityksessä tämä indeksi voi saada vain tietyt arvot, joten sitä merkitään aina o. Kuten edellisessä alaosiossa sanottiin, voi tämä indeksi saada arvot $\{0,1\}$. Merkitään esimerkiksi

$$\sum_{n=0}^{1} a_n b_n b_n = a_o b^o b_o \text{ ja } \sum_{n=0}^{1} a_n \partial_n b_n = a_o \partial^o b_o. \tag{6.72}$$

Indeksien nosto on siis tässä tapauksessa ainoastaan muistutus summauksesta.

Ensinnäkin mn-komponentille

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \partial_n \Gamma^{\alpha}_{\alpha m} - \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{nm} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa n}\Gamma^{\kappa}_{m\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\kappa\alpha}\Gamma^{\kappa}_{mn} \\ &= \partial_n \Gamma^{p}_{pm} + 2\partial_n \tilde{b}_m - \partial_p \Gamma^{p}_{nm} + \left(\Gamma^{p}_{qn}\Gamma^{q}_{mp} + \Gamma^{i}_{jn}\Gamma^{j}_{mi}\right) - \left(\Gamma^{p}_{qp}\Gamma^{q}_{mn} + \Gamma^{i}_{pi}\Gamma^{p}_{mn}\right) \\ &= 2\partial_{[n}\Gamma^{p}_{p]m} + 2\partial_n \tilde{b}_m + 2\Gamma^{p}_{q[n}\Gamma^{q}_{mp]} + 2\left(b_m \tilde{b}_n - b_p \Gamma^{p}_{mn}\right). \end{aligned} \tag{6.73}$$

Tähän sijoittamalla saadaan komponentit

$$\begin{aligned} R_{00} &= \dot{\Gamma}^{1}_{10} - \Gamma'^{1}_{00} + 2\dot{\tilde{b}}_0 + 2\Gamma^{p}_{q[0}\Gamma^{q}_{0p]} + 2\left(b_0\tilde{b}_0 - b_p\Gamma^{p}_{00}\right), \\ R_{01} &= \Gamma'^{0}_{00} - \dot{\Gamma}^{0}_{10} + 2\tilde{b}'_0 + 2\Gamma^{p}_{q[1}\Gamma^{q}_{0p]} + 2\left(b_0\tilde{b}_1 - b_p\Gamma^{p}_{01}\right), \\ R_{10} &= \dot{\Gamma}^{1}_{11} - \Gamma'^{1}_{10} + 2\dot{\tilde{b}}_1 + 2\Gamma^{p}_{q[0}\Gamma^{q}_{1p]} + 2\left(b_1\tilde{b}_0 - b_p\Gamma^{p}_{10}\right), \\ R_{11} &= \Gamma'^{0}_{01} - \dot{\Gamma}^{0}_{11} + 2\tilde{b}'_1 + 2\Gamma^{p}_{q[1}\Gamma^{q}_{1p]} + 2\left(b_1\tilde{b}_1 - b_p\Gamma^{p}_{11}\right). \end{aligned} \tag{6.74}$$

Tässä esiintyy aikaderivaatan lisäksi derivaattaa säteen suhteen, joka on merkitty heittomerkillä, esimerkiksi b'_n. Samaan tapaan kuin edellisessä osiossa, ovat R_{mi} ja R_{im}-tyyppiset termit ovat nollia tensorin muodon perusteella. Nyt tarvitaan enää ij-komponentit

$$\begin{aligned} R_{ij} =& \partial_j \Gamma^{\alpha}_{\alpha i} - \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{ji} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa j}\Gamma^{\kappa}_{i\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\kappa\alpha}\Gamma^{\kappa}_{ji} \\ =& \partial_j \begin{Bmatrix} k \\ ki \end{Bmatrix} - \tilde{g}_{ij}\left(a_o\partial^o b_o + b_o\partial^o a_o\right) - \partial_k \begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix} + \left(\Gamma^{n}_{kj}\Gamma^{k}_{in} + \Gamma^{k}_{nj}\Gamma^{n}_{ik} + \Gamma^{l}_{kj}\Gamma^{k}_{il}\right) - \\ & - \left(a_o b^o \Gamma^{n}_{on}\tilde{g}_{ij} + \begin{Bmatrix} l \\ kl \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} + 2a_o b^o b_o \tilde{g}_{ij}\right) \\ =& \tilde{R}_{ij} + \tilde{g}_{ij}\left(a_o b^o \tilde{b}_o - a_o b^o b_o - a_o b^o \Gamma^{n}_{on} - a_o \partial^o b_o\right). \end{aligned} \tag{6.75}$$

Tässä $\tilde{R}_{ij}$ on kaksidimensioisen paikka-avaruuden Riccin tensori. Yhtälöiden (6.74) ja (6.75) avulla saadaan Riccin skalaarin kontraktoimalla metriikan kanssa

$$\begin{aligned} R =& g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{mn} R_{mn} + g^{mi} R_{mi} + g^{im} R_{im} + g^{ij} R_{ij} \\ =& g^{00} R_{00} + g^{01} R_{01} + g^{10} R_{10} + g^{11} R_{11} + g^{ij} R_{ij} \\ =& \tilde{R} + 2\big(a_o b^o \tilde{b}_o - a_o b^o b_o - a_o b^o \Gamma^n_{on} - a_o \partial^o b_o\big) + \\ & + g^{00} R_{00} + g^{01} R_{01} + g^{10} R_{10} + g^{11} R_{11}. \end{aligned} \tag{6.76}$$

Tähän ei ole sijoitettu enää yhtälöitä (6.74), koska tulos ei sievene. Jos kuitenkin metriikka olisi muotoa

$$\begin{pmatrix} B(t,r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(t,r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(t,r)\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{6.77}$$

olisi yhtälö (6.76) oleellisesti yksinkertaisempi

$$\begin{aligned} R =& \tilde{R} + 2\big(a_o b^o \tilde{b}_o - a_o b^o b_o - a_o b^o \Gamma^n_{on} - a_o \partial^o b_o\big) + g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} \\ =& \tilde{R} + B\Big(\dot{\Gamma}^1_{10} - \Gamma'^1_{00} + 2\dot{\tilde{b}}_0 + 2\Gamma^p_{q[0}\Gamma^q_{0p]} + 2\big(b_0 \tilde{b}_0 - b_p \Gamma^p_{00}\big)\Big) + 2\big(b^n \tilde{b}_n - \partial_n b^n - \\ & - \Gamma^n_{pn} b^p + a b_n b^n\big) - A\Big(\Gamma'^0_{01} - \dot{\Gamma}^0_{11} + 2\tilde{b}'_1 + 2\Gamma^p_{q[1}\Gamma^q_{1p]} + 2\big(b_1 \tilde{b}_1 - b_p \Gamma^p_{11}\big)\Big) \\ =& 2 + B\big(\dot{\Gamma}^1_{10} - \Gamma'^1_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{01} - \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} + 2(b_0 \tilde{b}_0 - b_p \Gamma^p_{00})\big) \\ & - A\big(\Gamma'^0_{01} - \dot{\Gamma}^0_{11} + \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{11} + 2(b_1 \tilde{b}_1 - b_p \Gamma^p_{11})\big) \\ & + 2\big(a_o b^o \tilde{b}_o - a_o b^o b_o - a_o b^o \Gamma^n_{on} - a_o \partial^o b_o\big). \end{aligned} \tag{6.78}$$

Tässä on viimeiseen muotoon kirjoitettu $\tilde{R} = 2$. Tämä voidaan laskea metriikkaa (6.77) käyttäen. Kun Riccin tensori ja skalaari on näin saatu laskettua, ne voidaan sijoittaa kenttäyhtälöihin (esimerkiksi (3.26)). Näissä symmetriaa hyväksi käyttäen saaduissa yhtälöissä on huomattavasti alkuperäisiä vähemmän vapausasteita.

Tämän luvun tuloksia konnektion komponenteista ei tiettävästi ole laskettu aiemmin. Näillä tuloksilla on käyttöä muun muassa stellaarikonfiguraatioden yhteydessä [87], [88]. Rajatummat vapausasteet mahdollistanevat myös monimutkaisempia tietokonesimulaatioita yhtälöiden ollessa yksinkertaisempia. Kaarevuusskalaareista (6.49) ja (6.78) nähdään, että kenttäyhtälöt ovat ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä tai osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Tämä oli tietenkin odotettavissa metris-affiinissa eli ensimmäisen kertaluvun formalismissa. Se puolestaan ei ollut valmiiksi selvää, että kaarevuusskalaareihin ei ilmesty derivaattoja kaikista riippumattomista funktioista. Merkittävää on, että myös puhtaasti metrisessä tapauksessa vaikutus voidaan muokata muotoon, joka mahdollistaa näiden tulosten hyödyntämisen. Einstein–Hilbert-vaikutuksen tapauksessa kirjoitetaan

$$S = \int_U d\Omega \mathfrak{R}(g) = \int_U d\Omega \Big[\mathfrak{R}(\Gamma) + B(t,x)\big(R(g) - R(\Gamma)\big)\Big]. \tag{6.79}$$

Tässä $B(t,x)$ on Lagrangen kertojana toimiva kenttä. Sen varioinnin tuottama kenttäyhtälö varmistaa, että $R(g) = R(\Gamma)$. Tätä menettelyä käytetään usein kenttäteoriassa.

7 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa on tarkasteltu Palatinin formalismia $f(R)$-teorioiden tapauksessa. Luvussa 2 tarkasteltiin syitä etsiä uusia yleistettyjä gravitaatioteorioita. Siitä edettiin luvussa 3.2 Palatinin formalismin taustaan sekä käyttöön yksinkertaisessa tapauksessa tavanomaisten oletusten vallitessa. Eroja puhtaasti metriseen formalismiin ja mahdollisia ongelmakohtia pohdittiin luvussa 4. Luvussa 5 jätettiin tavallinen oletus konnektion torsiottomuudesta ja tarkasteltiin materian vaikutusta. Viimeisenä luvussa 6 pyrittiin konnektion vapausasteita rajoittamaan symmetrioita hyväksi käyttäen.

Tärkeimmät syyt yleistettyjen gravitaatioteorioiden tutkimukseen ja siten myös Palatinin tai metris-affiinin formalismin tutkimiseen ovat havainnot maailmankaikkeuden laajenemisesta ja pyrkimys kohti yhtenäistä kenttäteoriaa. Erityisesti kasvava määrä supernovahavaintoja hautaa vanhan käsityksen tasaisesti laajenevasta maailmankaikkeudesta. Samalla kerääntyy rajoituksia kosmologisten parametrien arvoille. Näissä malleissa ei kuitenkaan ole käytetty metris-affiinia formalismia.

Selityksiä kiihtyvään laajenemiseen voidaan hakea perinteisen Einsteinin gravitaation avulla, mutta se ei ole suinkaan ongelmatonta. Vaikka jokin yleistetty gravitaatioteoria nousisi ylitse muiden havaintojen selittäjänä, ei yhtenäinen kenttäteoria vielä häämötä aivan kulman takana. Nykyistä laajempi ymmärrys gravitaatiosta vie meitä kuitenkin askel askeleelta kohti kvanttigravitaatiota ja yhtenäistä kenttäteoriaa.

Palatinin formalismin taustan todettiin olevan kaukana historiassa, Einsteinin töissä. Siinä mielessä Palatinin formalismi ei ole yhtä hyvä nimitys kuin muutenkin kuvaavampi metris-affiini formalismi. Vaikutuksen ollessa $f(R)$-tyyppiä ja torsion hävitessä todettiin, ettei metris-affiini formalismi ole juurikaan monimutkaisempi kuin puhtaasti metrinen formalismi. Käyttämällä konformimuunnettua metriikkaa saatiin konnektiot esitettyä Christoffelin symboleina tämän muunnetun metriikan suhteen.

Einstein–Hilbert-vaikutuksen tapauksessa kuitenkin saavutetaan samat yhtälöt molemmilla tavoilla – ilman tarvetta muunnoksiin. Tietyillä funktion $f(R)$ valinnoilla todettiin voitavan selittää kiihtyvä laajeneminen ilman pimeää energiaa. Lopulta saatiin tulos, että yleinenkin $f(R)$-teoria tuottaa Einsteinin yhtälöiden kaltaisen tuloksen, kun materia jätetään huomiotta ja funktio $f(R)$ on analyyttinen.

Vaikka Einstein–Hilbert-vaikutus tuottaakin samat kenttäyhtälöt, eivät metris-affiini ja puhtaasti metrinen formalismi ole lainkaan ekvivalentit. Eroavaisuuksia muodostuu useimmilla muilla vaikutuksilla. Eroja löytyi myös esimerkiksi integrointirajoista. Ongelmiakin metris-affiinista formalismista löytyi, mutta ei mitään ohittamatonta, koko menetelmän poissulkevaa. Yksi ongelma ja samalla jossakin määrin vahvuus on avaruuden ja samalla konnektion vapaus. Osa ongelmista poistuu, kun yleisyyttä ei rajoiteta. Toisaalta osa ongelmista esiintyi fysikaalisesti mahdottomissa erikoistapauksissa, kuten ulottuvuuksien määrän ollessa kaksi.

Torsion salliminen luonnollisesti toi yleisyyden myötä hieman lisää töitä, mutta toisaalta poisti joitakin ongelmia. Mielenkiintoista oli, että jo Riemannin tensorin yksikäsitteisyys joutui tässä yleisemmässä tapauksessa koetukselle. Jälleen erikoistapauksena saatiin yleisen suhteellisuusteorian tulokset. Tarkasteltaessa erilaisia hypermomentteja saatiin selvitettyä torsion alkuperää. Työskentelyyn tarvittiin pieni oletus, joka seuraavan luvun 6 valossa ei ollut lainkaan luonnoton. Lisäksi todettiin kaikissa tapauksissa saatavilla yhtälöillä olevan yhteisiä piirteitä. Erikoistapauksena tarkasteltiin Diracin vaikutusta materiapuolella.

Kosmologiassa havaintojen nojalla avaruutta pidetään yleensä ainakin jossakin määrin symmetrisenä. Metris-affiinissa formalismissa konnektio on *a priori* täysin yleinen, joten sillä on nelidimensioisessa aika-avaruudessa 64 komponenttia. Mikäli aika-avaruus oletetaan homogeeniseksi ja isotrooppiseksi, saadaan konnektion komponentit riippumaan metriikasta ja kolmesta ajasta riippuvasta funktiosta. Tekemällä pieniä lisäoletuksia, olisi näitä vapausasteita voitu rajoittaa edelleen. Mikäli homogeenisuusoletus pudotetaan pois, nousee tuntemattomien funktioiden määrä 12 saakka. Nämä funktiot saavat lisäksi riippua säteestä. Tämä helpottaa huomattavasti kenttäyhtälöiden käsittelyä. Näitä tuloksia ei tiettävästi ole johdettu aiemmin.

Kaiken kaikkiaan on havaittu, että mikään ei sulje metris-affiinia formalismia pois gravitaation ja kosmologian työkaluna. Sen sijaan sillä saavutetaan huomattavia etuja, joista vähäisin ei suinkaan ole, että kenttäyhtälöt ovat ensimmäistä kertalukua. Tämä helpottaa huomattavasti jatkotutkimuksia. Einsteinin vaikutuksen tapauksessa metris-affiini formalismi osoittautui myös helpoksi ja elegantiksi tavaksi johtaa Einsteinin yhtälöt. Toisaalta ei ole mitään ehdotonta syytä, joka asettaisi metris-affiinin formalismin puhtaasti metrisen yläpuolelle.

Oleellista on, että yleisemmän metris-affiinin formalismin erikoistapauksena saadaan samat yhtälöt kuin yleisessä suhteellisuusteoriassa, joka on kestänyt vuosien saatossa useat kokeet. Mahdollisuuksia on kuitenkin paljoon muuhunkin, esimerkiksi tässä tutkielmassakin käsiteltyyn torsioon. Kieltämättä havainnot osoittavat, että totuus on hyvin lähellä yleistä suhteellisuusteoriaa, mutta tuon totuuden äärirajojen pienet korjaukset saattavat osoittautua hyvinkin arkijärjen vastaisiksi.

Tämä tutkielma on suurelta osin painottunut teoreettiseen tarkasteluun. Ongelmana on paljolti se, ettei vielä pystytä tekemään riittävän tarkkoja havaintoja, jotta voitaisiin tehokkaasti rajata pois ehdokkaita yleistetyiksi gravitaatioteorioiksi. Siksi on paljon tilaa kokeilla erilaisia vaihtoehtoja. Lähestulkoon ainoa kriteeri on, että erikoistapauksena pitää saada yleistetty suhteellisuusteoria. Vastaavalla tavalla yleistä suhteellisuusteoriaa testattiin aikanaan vaatimalla, että se rajalle mentäessä tuottaa Newtonin gravitaatiota vastaavat tulokset.

Ottamalla havainnot mukaan, saatiin symmetrioiden avulla rajattua konnektion muotoa. Tämä on suuri apu tarkasteltaessa kenttäyhtälöitä ja sitä kautta maailmankaikkeutta siinä muodossa, jossa metris-affiini formalismi sen näyttää. Tietyin keinoin tätä tietoa voidaan hyödyntää myös metrissä tapauksessa. Kysymys onkin paljolti siitä, missä järjestyksessä olettamukset tehdään. Puhtaasti metrinen formalismi oletti suoraan torsion ja ei-metrisyyden häviävän. Tällaisiin päädyttiin ajoittain myös metris-affiinissa formalismissa, mutta lopputuloksena, ei alkuehtona. Metrisen ja metris-affiinin formalismin vertailu onkin usein mielenkiintoinen syiden ja seurausten vyyhti.

Viktoriaanisen ajan ihmisten mielestä maailman salat oli jotakuinkin selvitetty. Maailma kuitenkin järkkyi pois rauhallisilta raiteiltaan. Fysiikan alalla järkyttäjät olivat kvanttimekaniikka ja suhteellisuusteoria. Käymättömiä teitä luodatessa syntyi monia uusia ajatuksia, joista osalle oli käyttöä – osalle ei. Metris-affiini formalismi oli yksi niistä keksinnöistä, joita testattiin ja heitettiin sitten tarpeettomana pöydän nurkkaan. Yleinen suhteellisuusteoria riitti selittämään sen ajan havainnot, joten monimutkaisemmille teorioille ei ollut käyttöä.

Kosmologeille havainto maailmankaikkeuden kiihtyvästä laajenemisesta oli melkoinen vallankumous. Nyt alettiin miettiä uusia keinoja – ja kaivettiin esiin jo kokeiltuja. Kun Vollick totesi, että metris-affiinissa formalismissa voidaan kiihtyvä laajeneminen selittää ilman hypoteettisen pimeän energian olemassaoloa, alettiin tähän formalismiin tutustua laajemmaltikin. Sittemmin on paljastunut useita muitakin mielenkiintoisia ominaisuuksia.

Yleinen suhteellisuusteoria asettaa tiukan oletuksen konnektion muodolle. Toisaalta yleisellä suhteellisuusteorialla on vaikea selittää kaikkia kummallisuuksia, jotka maailmankaikkeus eteemme asettaa. Ehkä on siis aika luopua tuosta kätemme sitovasta oletuksesta ja hyväksyä, ettei maailmankaikkeus olekaan niin yksinkertainen kuin toivoimme. Todennäköisesti ei metris-affiini formalismi kerro koko totuutta, mutta se saattaa hyvinkin valaista kokonaiskuvaa.

Kirjallisuutta

[1] M. J. Nye, *Cambridge History of Science Volume 5: The Modern Physical and Mathematical Sciences* (Cambridge University Press Cambridge, 2003).

[2] S. Weinberg, *The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe* (Basic Books New York, 1993).

[3] C. Kilmister, *General Theory of Relativity* (Pergamon Press Oxford, 1973).

[4] A. K. Raychaudhuri, *Theoretical Cosmology* (Clarendon Press Oxford, 1979).

[5] A. Einstein, *Relativity: the Special and the General Theory* (Methuen & Co. Ltd. London, 1920).

[6] A. Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* (Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig, 1954).

[7] A. R. Liddle ja D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press Cambridge, 2000).

[8] *The Physics of the Early Universe*, edited by E. Papantonopoulos (Springer New York, 2005).

[9] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, hep-th/0503203.

[10] A. G. Riess *et al.*, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).

[11] S. Perlmutter *et al.*, *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

[12] H. Karttunen *et al.*, *Tähtitieteen perusteet* (Tähtitieteellinen yhdistys Ursa Helsinki, 2003).

[13] G. W. C. II, *The Fundamentals of Stellar Astrophysics* (W.H. Freeman and Company San Francisco, 1989).

[14] C. Deffayet, G. R. Dvali, ja G. Gabadadze, *Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions*, Phys. Rev. **D65**, 044023 (2002).

[15] H. Friedrich ja A. D. Rendall, *The Cauchy Problem for the Einstein Equations*, Lect. Notes Phys. **540**, 127 (2000).

[16] P. Teyssandier ja P. Tourrenc, *The Cauchy problem for the $R + R^2$ theories of gravity without torsion*, J. Math. Phys. **24**, 2793 (1983).

[17] N. Lanahan-Tremblay ja V. Faraoni, *The Cauchy problem of f(R) gravity*, arXiv:0709.4414 [gr-qc].

[18] E. Alvarez, *Quantum gravity: an introduction to some recent results*, Rev. Mod. Phys. **61**, 561 (1989).

[19] P. Kanti, J. Rizos, ja K. Tamvakis, *Singularity-free cosmological solutions in quadratic gravity*, Phys. Rev. **D59**, 083512 (1999).

[20] V. Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity* (Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 2004).

[21] M. Blagojevic, *Gravitation and Gauge Symmetries* (Taylor & Francis Boca Raton, 2001).

[22] H. Bondi ja J. Samuel, *The Lense–Thirring Effect and Mach's Principle*, gr-qc/9607009.

[23] T. Chiba, *1/R gravity and scalar-tensor gravity*, Phys. Lett. **B575**, 1 (2003).

[24] H. A. Buchdahl, *Quadratic Lagrangians and Palatini's device*, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, 1229 (1979).

[25] G. J. Olmo, *Post-Newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric formalism*, gr-qc/0505135.

[26] R. Dick, *On the Newtonian limit in gravity models with inverse powers of R*, Gen. Rel. Grav. **36**, 217 (2004).

[27] C. M. Will, *The confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev. Rel. **4**, 4 (2001).

[28] M. Ferraris, M. Francaviglia, ja C. Reina, *Variational Formulation of General Relativity from 1915 to 1925 "Palatini's Method"Discovered by Einstein in 1925*, Gen. Rel. Grav. **14**, 243 (1982).

[29] M. Tsamparlis, *On the Palatini method of Variation*, J. Math. Phys. **19**, 555 (1977).

[30] A. Palatini, *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*, Rend. Circ. Mat. Palermo **43**, 203 (1919).

[31] N. J. Poplawski, *f(R) gravity in purely affine formulation*, .

[32] M. Ferraris ja J. Kijowski, *On the Equivalence of the Relativistic Theories of Gravitation*, Gen. Rel. Grav. **14**, 165 (1982).

[33] N. J. Poplawski, *The affine theory of gravitation and electromagnetism. I*, .

[34] E. Schrödinger, *Space-Time Structure*, 2nd ed. (Cambridge University Press Cambridge, 1954).

[35] A. Einstein, *Die Grundlagen der Allgemeinene Relativitätstheorie*, Ann. Phys. **49**, 769 (1916).

[36] A. Einstein, *The principle of relativity* (Dover Publications New York, 1952).

[37] A. Einstein, *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. **XLII**, 1111 (1916).

[38] P. G. Bergmann ja V. de Sabbata, *Cosmology and Gravitation* (NATO Advanced Study Institutes Series , 1980).

[39] H. Weyl, *Space Time Matter*, 4th ed. (Dover Publications New York, 1952).

[40] H. A. Buchdahl, *Non-linear Lagrangians and Palatini's device*, Proc. Camb. Phil. Soc. **56**, 396 (1960).

[41] A. Ashtekar, *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).

[42] A. Ashtekar, *New Hamiltonian Formulation of General Relativity*, Phys. Rev. **D36**, 1587 (1987).

[43] J. F. Barbero, *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times*, Phys. Rev. **D51**, 5507 (1995).

[44] S. Holst, *Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert–Palatini action*, Phys. Rev. **D53**, 5966 (1996).

[45] O. Grøn ja S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity* (Springer New York, 2007).

[46] M. Han, W. Huang, ja Y. Ma, *Fundamental structure of loop quantum gravity*, gr-qc/0509064.

[47] A. Ashtekar ja J. Lewandowski, *Background independent quantum gravity: A status report*, Class. Quant. Grav. **21**, R53 (2004).

[48] B. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press Cambridge, 1985).

[49] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press Oxford, 1992).

[50] L. Querella, Ph.D. thesis, Université de Liège, 1998.

[51] D. N. Vollick, *Curvature Corrections as the Source of the Cosmological Acceleration*, Phys. Rev. **D68**, 063510 (2003).

[52] S. I. Goldberg ja R. L. Bishop, *Tensor Analysis on Manifolds* (Dover Publications New York, 1980).

[53] F. W. Hehl ja G. D. Kerlick, *Metric-Affine Variational Principles in General Relativity. I. Riemannian Space-Time*, Gen. Rel. Grav. **9**, 691 (1977).

[54] C. Misner, K. Thorne, ja J. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman and Company San Francisco, 1973).

[55] S. Hawking ja G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press Cambridge, 1973).

[56] V. Faraoni, E. Gunzig, ja P. Nardone, *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*, Fund. Cosmic Phys. **20**, 121 (1999).

[57] R. Wald, *General Relativity* (Chicago University Press Chicago, 1984).

[58] N. J. Poplawski, *The present and late universe in the Einstein frame, metric-affine 1/R gravity*, Class. Quant. Grav. **23**, 4819 (2006).

[59] E. E. Flanagan, *Palatini form of 1/R gravity*, Phys. Rev. Lett. **92**, 071101 (2004).

[60] C. Brans ja R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

[61] V. Faraoni ja E. Gunzig, *Einstein frame or Jordan frame?*, Int. J. Theor. Phys. **38**, 217 (1999).

[62] R. Catena, M. Pietroni, ja L. Scarabello, *Einstein and Jordan frames reconciled: a frame-invariant approach to scalar-tensor cosmology*, Phys. Rev. **D76**, 084039 (2007).

[63] D. N. Vollick, *On the viability of the Palatini form of 1/R gravity*, Class. Quant. Grav. **21**, 3813 (2004).

[64] G. Magnano ja L. M. Sokolowski, *On physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general relativistic selfgravitating scalar field*, Phys. Rev. **D50**, 5039 (1994).

[65] M. Ferraris, M. Francaviglia, ja I. Volovich, *Universality of Einstein equations in Palatini formalism*, gr-qc/9303007.

[66] H. Burton ja R. B. Mann, *Palatini variational principle for an extended Einstein-Hilbert action*, Phys. Rev. D **57**, 4754 (1998).

[67] T. Koivisto, *Covariant conservation of energy momentum in modified gravities*, Class. Quant. Grav. **23**, 4289 (2006).

[68] S. Deser, *Inequivalence of First and Second Order Formulations in D=2 Gravity Models*, gr-qc/9512022.

[69] J. Gegenberg, P. F. Kelly, R. B. Mann, ja D. Vincent, *Theories of Gravitation in Two-Dimensions*, Phys. Rev. **D37**, 3463 (1988).

[70] Élie Cartan, *On Manifolds with an Affine Connection and the Theory of General Relativity* (Bibliopolis Napoli, 1986).

[71] F. W. Hehl, P. von der Heyde, ja G. D. Kerlick, *General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects*, Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976).

[72] F. W. Hehl, *On the Kinematics of the Torsion of Space-Time*, Found. Phys. **15**, 451 (1985).

[73] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, ja Y. Ne'eman, *Metric-affine Gauge Theory of Gravity: Field equations, Noether Identities, World Spinors, and Breaking of Dilation Invariance*, Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[74] R. T. Hammond, *Torsion gravity*, Rep. Prog. Phys. **65**, 599–649 (2002).

[75] T. Damour, S. Deser, ja J. G. McCarthy, *Nonsymmetric gravity theories: Inconsistencies and a cure*, Phys. Rev. **D47**, 1541 (1993).

[76] T. Damour, S. Deser, ja J. G. McCarthy, *Nonsymmetric gravity has unacceptable global asymptotics*, gr-qc/9312030.

[77] T. P. Sotiriou ja S. Liberati, *Metric-affine $f(R)$ theories of gravity*, Annals Phys. **322**, 935 (2007).

[78] D. N. Vollick, *On the Dirac field in the Palatini form of 1/R gravity*, Phys. Rev. **D71**, 044020 (2005).

[79] G. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, Vol. 46 of *World Scientific Notes in Physics* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 2004).

[80] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley et Sons, Inc. New York, 1972).

[81] I. Bloomer, *A Maximally Symmetric Space with Torsion*, Gen. Rel. Grav. **9**, 763 (1978).

[82] S. J. Stoeger, William R., R. Maartens, ja G. F. R. Ellis, *Proving almost homogeneity of the universe: An Almost Ehlers-Geren-Sachs theorem*, Astrophys. J. **443**, 1 (1995).

[83] A. Kashlinsky, I. I. Tkachev, ja J. Frieman, *Microwave background anisotropy in low omega 0 inflationary models and the scale of homogeneity in the universe*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1582 (1994).

[84] F. K. Hansen, A. J. Banday, ja K. M. Gorski, *Testing the cosmological principle of isotropy: local power spectrum estimates of the WMAP data*, astro-ph/0404206.

[85] P. Dirac, *General Theory of Relativity* (John Wiley et Sons, Inc. New York, 1975).

[86] K. Kainulainen, J. Piilonen, V. Reijonen, ja D. Sunhede, *Spherically symmetric space-times in f(R) gravity theories*, Phys. Rev. **D76**, 024020 (2007).

[87] K. Henttunen, T. Multamaki, ja I. Vilja, *Stellar configurations in f(R) theories of gravity*, arXiv:0705.2683 [astro-ph].

[88] T. Multamaki ja I. Vilja, *Constraining Newtonian stellar configurations in f(R) theories of gravity*, arXiv:0709.3422 [astro-ph].

[89] P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, Physics Reports **68**, 189 (1980).

[90] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Springer New York, 1984).

[91] C. Itzykson ja J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill International Editions New York, 1985).

[92] J. Stewart, *Advanced General Relativity* (Cambridge University Press Cambridge, 1991).

A Määritelmiä ja merkintöjä

Tensorin käsite fysiikan ja matematiikan puolella on jonkin verran erilainen. Fysiikassa käytetään yleensä tensorikenttiä ja matematiikassa puhutaan lineaarikuvauksista. Esimerkiksi Kari Ylisen Differentiaaligeometrian (matematiikan laitos) luentomonisteessa on määritelty seuraavasti:

> Olkoon E äärellisulotteinen vektoriavaruus, E^* tämän duaali ja r sekä s epänegatiivisia kokonaislukuja. Merkitään $T_0^0 = \mathbb{R}$ ja jos $r + s \geq 1$ käytetään merkintää $T_s^r(E)$ kaikkien $(r+s)$-lineaaristen kuvausten
>
> $$t : E^* \times \cdots \times E^* \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$$
>
> joukolle, jossa tekijöitä E^* on r ja tekijöitä E on s kappaletta. Vektoriavaruuden $T_s^r(E)$ alkioita kutsutaan *r:sti kontravarianteiksi ja s:sti kovarianteiksi tensoreiksi* avaruudella E tai lyhyemmin $\binom{r}{s}$*-tensoreiksi.* Jos $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$ ja $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$, missä $r_1 + s_1 \geq 1$ ja $r_1 + s_1 \geq 1$ määritellään tensoritulo $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}$ kaavalla
>
> $$\begin{aligned} & t_1 \otimes t_2(\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2}, b_1, \ldots, b_{s_1}, c_1, \ldots, c_{s_2}) \\ & = t_1(\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, b_1, \ldots, b_{s_1}) t_2(\gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2}, b_1, \ldots, c_1, \ldots, c_{s_2}), \end{aligned}$$
>
> missä $\beta^j, \gamma^j \in E^*$ ja $b_j, c_j \in E$.

Sen sijaan Iiro Viljan Elektrodynamiikan (fysiikan laitos) luentomonisteessa on tensorit määritelty komponenttiensa muuntumisen kautta:

> Suure $T(x)$ on tyypin $\binom{r}{s}$*-tensori*, jos sen $r \cdot s$ komponentin muuntuminen koordinaattimuunnoksessa $x \to \bar{x} = \bar{x}^a(x)$ on
>
> $$T_{b_1 \ldots b_s}^{a_1 \ldots a_r}(x) \to \bar{T}_{b_1 \ldots b_s}^{a_1 \ldots a_r}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^{a_1}}{\partial x^{n_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{a_r}}{\partial x^{n_r}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{b_1}} \cdots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial \bar{x}^{b_s}} T_{m_1 \ldots m_s}^{n_1 \ldots n_r}(x).$$

Kiinnitetty vektori on vektori, johon on liitetty piste, ja vektorikenttä jonkin alueen yli tarkoittaa, että jokaiseen alueen pisteeseen liittyy vektori. Samaan tapaan tensori määrittelee joukon suureita jossakin moniston pisteessä. Jossakin moniston osassa määritelty tensorikenttä taas liittää samaa tyyppiä olevan tensorin jokaiseen osan pisteeseen [52].

Integroinnit suoritetaan neliulotteisen avaruuden U mitan Ω suhteen ja on merkitty

$$\int_U d^4xA \equiv \int_U d\Omega A. \tag{A.1}$$

Mikäli ei toisin mainita, tarkoittaa $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ yleistä affiinia konnektiota. Välillä kuitenkin tarkastellaan erikoistapauksia, joissa kyseessä on Levi-Civita-konnektio. Tällöin komponentit ovat Christoffelin symboleita. Yleensä näille käytetään samaa merkintätapaa. Tilanteissa, joissa on sekaantumisen vaara, käytetään kuitenkin perinteistä Christoffelin symbolin merkintätapaa [1]

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}]. \tag{A.2}$$

Lisäksi usein tulee käyttöön *Riemannin kaarevuustensori* $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$, joka määritellään

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)u^\alpha = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}u^\beta, \tag{A.3}$$

jossa u^α on jokin kontravariantti vektori. Riemannin kaarevuustensori siis on kovarianttien derivaattojen kommutaattori. Kovarianttien derivaattojen tuloksien mukaan (esim. [54], [49]) tässä on

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \partial_\mu\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu}\Gamma^{\kappa}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu}\Gamma^{\kappa}_{\beta\nu}. \tag{A.4}$$

Josta saadaan kontraktoimalla *Riccin kaarevuustensori* ja *-skalaari*

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{A.5}$$

Ajoittain käytetään myös Einsteinin tensoria

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{A.6}$$

Kreikkalaiset aakkoset käyvät indekseinä läpi neljä ulottuvuutta, joista ajalla on negatiivinen merkki ja avaruudellisilla ulottuvuuksilla positiivinen. Erikseen mainituissa tapauksissa käsitellään yleisempiä n-dimensioisia tapauksia. Metriikka on aina symmetrinen.

Käytössä ovat luonnolliset yksiköt, joissa valon nopeus on yksi.

Tensoreista puhuttaessa käytetään usein symmetristen ja antisymmetristen osien yhteydessä merkintöjä [ ] ja ( ). Ne poimivat vastaavasti tensorin symmetrisen osan

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}\right) \tag{A.7}$$

[1] Historiallinen merkintätapa Christoffelin symboleille on $\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}$ eli käänteinen nykyiseen nähden. Tämä johtuu summauskäytännön muuttumisesta.

ja antisymmetrisen osan

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\big(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}\big). \tag{A.8}$$

Ei-metrisyystensori määritellään metriikan kovarianttina derivaattana

$$Q_{\alpha\mu\nu} \equiv -\nabla_\alpha g_{\mu\nu}, \tag{A.9}$$

joka on tässä tutkielmassa aina symmetrinen kahden jälkimmäisen indeksin suhteen koska käsitellään ainoastaan symmetrisen metriikan tapauksia.

Weylin vektori määritellään ei-metrisyyden kontraktion avulla

$$Q_\mu \equiv \frac{1}{4}Q_{\mu\nu}{}^{\nu} \equiv -\frac{1}{4}\nabla_\mu g^\nu_\nu. \tag{A.10}$$

Konnektion antisymmetristä osaa eli torsiota voidaan merkitä *Cartanin torsiotensorilla*

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}. \tag{A.11}$$

Tensoritiheyksiä merkitään fraktuurakirjaimilla eli

$$\mathfrak{A}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}A^{\mu\nu}. \tag{A.12}$$

Energiaimpulssitensori määritellään tavalliseen tapaan

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{A.13}$$

Muodostetaan vastaavanlainen tensori materian vaikutuksen variaatiosta konnektioiden suhteen. Tätä kutsutaan *hypermomentiksi*: [53].

$$\Delta_\lambda{}^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}. \tag{A.14}$$

Derivaattaa koordinaattiajan suhteen merkitään pisteellä eli esimerkiksi

$$\partial_t A_\mu = \dot{A}_\mu. \tag{A.15}$$

Yhden muuttujan funktion derivaattaa muuttujansa suhteen merkitään yleensä heittomerkillä, eli esimerkiksi

$$\frac{df(R)}{dR} = f'(R). \tag{A.16}$$

Heittomerkkiä käytetään luvussa 6 merkitsemään derivaattaa säteen suhteen (erotuksena derivaatasta ajan suhteen) eli esimerkiksi

$$\partial_r a(t,r) = a'(t,r). \tag{A.17}$$

B Yhtälöiden johtoja

B.1 Kovarianttia integrointitekniikkaa

Tensoritiheyksille voidaan kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu \mathfrak{A}^\nu &= \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\nu + A^\nu \nabla_\mu \sqrt{-g} \\
&= \sqrt{-g}\partial_\mu A^\nu + \sqrt{-g}\Gamma^\nu_{\alpha\mu} A^\alpha + A^\nu \partial_\mu \sqrt{-g} - A^\nu \Gamma_\mu \sqrt{-g} \\
&= \partial_\mu \mathfrak{A}^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}\mathfrak{A}^\alpha - \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\mathfrak{A}^\nu,
\end{aligned} \tag{B.1}
$$

josta saadaan edelleen kontraktiolla

$$
\nabla_\mu \mathfrak{A}^\mu = \partial_\mu \mathfrak{A}^\mu + 2\Gamma^\alpha_{[\alpha\mu]}\mathfrak{A}^\mu \tag{B.2}
$$

eli tensoritiheyden kovariantti derivaatta on torsiottomassa tapauksessa tavallinen osittaisderivaatta.

Tarkastellaan nyt integraalia

$$
I = \int_U d\Omega (B^{\cdots}{}_{\ldots}) \nabla_\mu (C^{\cdots}{}_{\ldots}), \tag{B.3}
$$

jossa B ja C ovat joitakin tensoreita tai tensoritiheyksiä. Integrandiksi täytyy tulla skalaaritiheys, joten $B^{\cdots}{}_{\ldots} C^{\cdots}{}_{\ldots}$ täytyy olla kontravariantti vektoritiheys, jota merkitään $\mathfrak{A}^\mu$. Kovariantilla derivaatalla pätee Leibnitzin sääntö, joten voidaan kirjoittaa

$$
(B^{\cdots}{}_{\ldots})\nabla_\mu (C^{\cdots}{}_{\ldots}) = \nabla_\mu (B^{\cdots}{}_{\ldots} C^{\cdots}{}_{\ldots}) - \nabla_\mu (B^{\cdots}{}_{\ldots})(C^{\cdots}{}_{\ldots}). \tag{B.4}
$$

Integraali saadaan kaavojen (B.2), (B.4) avulla muodossa

$$
\begin{aligned}
I &= \int_U d\Omega [\nabla_\mu \mathfrak{A}^\mu - \nabla_\mu (B^{\cdots}{}_{\ldots})(C^{\cdots}{}_{\ldots})] \\
&= \int_U d\Omega [\partial_\mu \mathfrak{A}^\mu + 2\Gamma^\alpha_{[\alpha\mu]}\mathfrak{A}^\mu - \nabla_\mu (B^{\cdots}{}_{\ldots})(C^{\cdots}{}_{\ldots})],
\end{aligned} \tag{B.5}
$$

jossa ensimmäinen termi on puhdas divergenssi, joka Gaussin lauseen avulla voidaan muuntaa pintaintegraaliksi. Tätä integrointitekniikkaa tarvitaan vaikutusta varioitaessa, kun variaatiot häviävät pinnalla. Siis varioitaessa vaikutusta konnektion ollessa yleinen on

$$I = \int_U d\Omega \big[2\Gamma^{\alpha}_{[\alpha\mu]} B^{\cdots}{}_{\dots} - \nabla_\mu B^{\cdots}{}_{\dots}\big] C^{\cdots}{}_{\dots}. \tag{B.6}$$

Ja luonnollisesti, jos torsiota ei sallita, saadaan siistimpi

$$I = -\int_U d\Omega C^{\cdots}{}_{\dots} \nabla_\mu B^{\cdots}{}_{\dots}. \tag{B.7}$$

B.2 Christoffelin symbolin variaatio

Seuraavassa osoitetaan, että Christoffelin symbolin olevan tensori samalla tavalla kuin Palatini omassa artikkelissaan [30]. Tulosta tarvitaan muun muassa Palatinin yhtälön todistuksessa. Lähdetään liikkeelle Riccin identiteetistä:

$$D_\gamma g_{\alpha\mu} = \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} - [\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} g_{\alpha\beta}] = 0, \tag{B.8}$$

jota varioimalla saadaan

$$\delta \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} - [\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} \delta g_{\beta\mu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \delta g_{\alpha\beta}] - [\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu} + \delta\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} g_{\alpha\beta}] = 0. \tag{B.9}$$

Kun nimetään $\delta g_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}$, huomataan kahden ensimmmäisen termin muodostavan kovariantin derivaatan eli

$$D_\gamma e_{\alpha\mu} = g_{\beta\mu} \delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\beta} \delta\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}. \tag{B.10}$$

Tämän perusteella saadaan permutoimalla

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu\alpha} &\equiv \frac{1}{2}(D_\mu e_{\nu\alpha} + D_\nu e_{\mu\alpha} - D_\alpha e_{\nu\mu}) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\beta\alpha}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} + g_{\nu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} + g_{\beta\alpha}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + g_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - g_{\beta\mu}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - g_{\nu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\beta\alpha}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} + g_{\beta\alpha}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}) \\
&= g_{\beta\alpha}\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{B.11}$$

kun tarkastellaan tapausta, jossa metriikka on symmetrinen (ja siten myös Christoffelin symbolit). Viimeiseltä riviltä nähdään, että

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \eta^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{B.12}$$

Tämä muistuttaa suuresti Christoffelin symbolin määritelmää, mutta sillä erotuksella, että tavallisten osittaisderivaattojen tilalla on kovariantteja derivaattoja. Koska tensorien kovariantit derivaatat ovat tensoreita, on $\eta^{\alpha}_{\mu\nu}$ tensori. Vastaavasti myös oikean puolen tulee olla tensori eli Christoffelin symbolin variaatiot ovat tensoreita. Tämä todistus ei tietenkään päde yleisen affiinin konnektion tapauksessa, koska Riccin identiteetti on voimassa ainoastaan metrisellä konnektiolla.

B.3 Konnektio esitettynä torsion ja ei-metrisyystensorin avulla

Yleinen konnektio voidaan esittää Cartanin torsiotensorin ja ei-metrisyystensorin avulla muodossa

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = g^{\kappa\lambda}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\big(\frac{1}{2}\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - g_{\gamma\delta}S_{\alpha\beta}{}^{\delta} + \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta\gamma}\big), \tag{B.13}$$

jossa on käytetty permutaatiotensoria [71]

$$\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda} \equiv \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\lambda} + \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\gamma}_{\mu}. \tag{B.14}$$

Identiteetti (B.13) saadaan lähtemällä kovariantin derivaatan määritelmästä metriikan suhteen

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}g_{\mu\alpha}. \tag{B.15}$$

Permutoidaan indeksejä, kerrotaan puolittain (-) puolikkaalla ja summataan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big(\nabla_{\nu}g_{\lambda\mu} + \nabla_{\mu}g_{\nu\lambda} - \nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}\big) &= \frac{1}{2}\big(\partial_{\nu}g_{\lambda\mu} + \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}\big) + \\ +\frac{1}{2}\big(\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}g_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g_{\lambda\alpha} &- \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}g_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}g_{\nu\alpha}\big).\end{aligned} \tag{B.16}$$

Tästä vasen puoli voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin ei-metrisyystensorin ja permutaatiotensorin avulla. Oikean puolen ensimmäinen termi voidaan myös kirjoittaa lyhyemmin permutaatiotensorin avulla. Toisesta termistä puolestaan saadaan kaksi torsiotensoria ja kahdesta keskimmäisestä konnektio-metriikkaparista muodostuu konnektion symmetrinen osa

$$-\frac{1}{2}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\big(Q_{\alpha\beta\gamma}\big) = \frac{1}{2}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\big(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma}\big) + S_{\lambda\nu}{}^{\delta}g_{\delta\mu} + S_{\mu\lambda}{}^{\delta}g_{\nu\delta} - \Gamma^{\delta}_{(\mu\nu)}g_{\lambda\delta}. \tag{B.17}$$

Symmetrinen osa voidaan kirjoittaa konnektion itsensä ja sen antisymmetrisen osan erotuksena, joten

$$-\frac{1}{2}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\big(Q_{\alpha\beta\gamma}\big) = \frac{1}{2}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\big(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - S_{\mu\nu}{}^{\delta}g_{\lambda\delta}\big) - \Gamma_{\mu\nu\lambda}. \tag{B.18}$$

Nyt tarvitsee enää siirtää termejä puolelta toiselle ja kertoa puolittain metriikalla $g^{\kappa\lambda}$, jotta saadaan

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = g^{\kappa\lambda}\Delta^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\mu\lambda}\big(\frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\beta\gamma} - g_{\gamma\delta}S_{\alpha\beta}{}^{\delta} + \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta\gamma}\big). \tag{B.19}$$

Tässä on hyvä tehdä muutama havainto. Ensinnäkin oikean puolen ensimmäinen termi vastaa Christoffelin symbolia. Mikäli oletamme torsion häviävän, sieventynyt yhtälö muistuttaa kappaleessa 3.2.2 konformimuunnosten yhteydessä saatua tulosta. Jos sen sijaan vaadimme ei-metrisyystensorin häviämistä eli konnektion metrisyyttä, jää oikealle puolelle jäljelle Christoffelin symboli ja *vääntötensoriksi*[1] kutsuttu torsiotensoreiden kolmikko

$$K_{\mu\nu}{}^{\kappa} = S_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\mu} - S_{\mu\nu}{}^{\kappa} - S^{\kappa}{}_{\mu\nu}. \tag{B.20}$$

Torsiollisessa tapauksessa ei-metrisyyden häviäminen ei siis vielä määrää konnektiota Levi-Civita-konnektioksi. Tässä muodossa näkyy selvästi, että konnektio voidaan kirjoittaa Levi-Civita-konnektion ja korjaustermien avulla. Korjaustermit ovat torsion osuus ja ei-metrisyyden osuus.

[1] en. *contortion tensor*

C Tetradiformalismi

Tetradiformalismista löytyy tietoa muun muassa viitteistä [80], [89], [90]. Jatkossa latinalaiset aakkoset ovat Lorentz-indeksejä. Ekvivalenssiperiaatteen nimissä voidaan missä tahansa avaruuden pisteessä X monistolla M muodostaa lokaalisti inertiaalinen koordinaatisto ξ_X^a. Yleisesti inertiaalikoordinaatisto voidaan kuitenkin valita vain, jos avaruus on litteä. Kahden pisteen x^μ ja $x^\mu + dx^\mu$ välisen etäisyyden neliö voidaan antaa differentiaalisen kaarenpituuden avulla:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -\frac{\partial \xi_X^a}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi_X^b}{\partial x^\nu} dx^\nu \eta_{ab} \\ &\equiv -e^a{}_\mu dx^\mu e^b{}_\nu dx^\nu \eta_{ab} \\ &\equiv -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \tag{C.1}$$

On siis voimassa

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}, \tag{C.2}$$

jossa on

$$e^a{}_\mu = \left.\frac{\partial \xi_X^a}{\partial x^\mu}\right|_{x=X}. \tag{C.3}$$

Inertiaalinen koordinaatisto ξ_X^a on kiinnitetty kaikissa pisteissä X, joten osittaisderivaatan avulla määritelty *tetradi* e_μ^a muuntuu yleisessä koordinaattimuunnoksessa

$$e_\mu^a \to \hat{e}_\mu^a = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} e_\nu^a. \tag{C.4}$$

Tetradi ei siis muunnu kuin $\binom{1}{1}$-tensori. Se muodostaa neljä kovarianttia vektorikenttää. Tätä neljän vektorin joukkoa kutsutaan paitsi tetradiksi, myös nimellä *vierbein*[1].

Tetradin avulla kontravariantin vektori $A^\mu(x)$ komponentit voidaan esittää pisteessä x lokaalisti inertiaalisessa koordinaatistossa ${\xi_X}^a$

$$A^a \equiv e^a{}_\mu A^\mu. \tag{C.5}$$

[1]Mikäli dimensioita ei ole neljä, saatetaan puhua esimerkiksi triadeista tai pentadeista. Yleisesti näitä kaikkia kutsutaan dimensiosta riippumatta nimellä *vielbein*.

Koska tässä kontraktoidaan kovarianttia vektoria neljällä kontravariantilla vektorilla, saadaan lopputuloksena neljä skalaaria. Tässä on yksi tetradiformalismin etu. Vastaavasti voidaan toimia kovarianttien vektorien ja itse asiassa yleisten tensorien kanssa. Esimerkiksi on

$$B^a{}_b = e^a{}_\mu e_b{}^\nu B^\mu{}_\nu. \tag{C.6}$$

Tässä esiintyvä $e_b{}^\nu$ on tetradi (C.3), jonka ensimmäinen indeksi on laskettu ja toinen nostettu. On tärkeää huomata, että Lorentz-indeksiä nostetaan ja lasketaan Minkowskin metriikalla ja tensori-indeksiä metrisellä tensorilla eli

$$e_b{}^\nu \equiv \eta_{ab} g^{\mu\nu} e^a{}_\mu. \tag{C.7}$$

Tästä saadaan selville, että

$$e^a{}_\mu e_b{}^\nu = e^a{}_\mu \eta_{ab} g^{\mu\alpha} e^a{}_\alpha = g_{\alpha\nu} g^{\mu\alpha} = \delta^\mu_\nu \tag{C.8}$$

eli tetradi (C.7) on tetradin (C.3) käänteisalkio. Vastaavasti saadaan myös

$$\delta^a_b = e^a{}_\mu e_b{}^\mu. \tag{C.9}$$

Metrisen tensorin skalaarikomponentit ovat siis

$$g_{ab} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu g_{\mu\nu} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu e^c{}_\mu e^d{}_\nu \eta_{cd} = \delta^c_a \delta^d_b \eta_{cd} = \eta_{ab}, \tag{C.10}$$

mikä oli odotettavissa, koska jokaisessa pisteessä valittiin lokaalisti inertiaalinen koordinaatisto.

Tähän tapaan voidaan mikä tahansa tensori muuntaa skalaarien joukoksi ja muodostaa Lagrangen tiheys skalaarien avulla. Tämä on tarpeen muuan muassa Diracin vaikutuksen tapauksessa. Diracin vaikutus sisältää spinoreja, jotka käyttäytyvät eri tavoin kuin muut varioitavat kentät. Spinoreita kohdataan aina, kun käsitellään fermioneja. Tetradien avulla spinoreita voidaan kuitenkin käsitellä kuten muitakin kenttiä.

Kaikki fysikaalisesti mielekkäät vaikutukset sisältävät derivaattoja [80]. Koska kaikkien kenttien – tetradeja lukuunottamatta – vaaditaan olevan koordinaattiskalaareja, eivät tavalliset derivaatat ole mahdollisia. Ne pitää ensinnäkin kontraktoida tetradin avulla. Vaikutukseen tulee mukaan siis Lorentz-indeksejä, joten on luonnollista, että vaikutuksen vaaditaan olevan Lorentz-invariantti. Tämän vuoksi tarvitaan kovarianttia derivaattaa Lorentz-indeksin suhteen. Yleisen kentän ψ derivaatta ei kuitenkaan ole vielä Lorentz-invariantti:

$$\begin{aligned} e^\mu_a(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) &\to \Lambda_a{}^b(x) e_b{}^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}[D(\Lambda(x))\psi(x)] \\ &= \Lambda_a{}^b(x) e_b{}^\mu(x)\Big\{D(\Lambda(x))\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) + \big[\frac{\partial}{\partial x^\mu}D(\Lambda(x))\big]\psi(x)\Big\}. \end{aligned} \tag{C.11}$$

Tässä $\Lambda^a{}_b(x)$ ovat Lorentz-muunnoksia esitettynä komponenttimuodossa ja $D(\Lambda)$ on Lorentz-ryhmän matriisiesitys. Tarkoitus on, että kovariantti derivaatta käyttäytyisi kuten Lorentz-vektori eli

$$\mathcal{D}_a\psi(x) \to \Lambda_a{}^b(x) D\big(\Lambda(x)\big)\mathcal{D}_b\psi(x). \tag{C.12}$$

Yhtälössä (C.11) on siis jälkimmäinen termi liikaa. Tätä tarkoitusta varten tarvitaan *spinkonnektiota* $\omega_\mu{}^{ab}$, jonka muunnos tuottaa vastakkaismerkkisen termin. Nyt voidaan kirjoittaa kontravariantin vektorin kovariantti derivaatta

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b. \tag{C.13}$$

Yleisen suhteellisuusteorian metrisyysehtoa vastaava yhtälö on

$$D_\mu e^a_\nu = \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(g) e^a_\nu + \omega_\mu{}^a{}_b(e) e^b{}_\nu = 0, \tag{C.14}$$

jossa $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ on Christoffelin symboli. Tätä kutsutaan *ensimmäiseksi tetradipostulaatiksi*. Tästä seuraa spinkonnektio [78]

$$\omega_\mu{}^{ab}(e) = \frac{1}{2}\big[e^{a\nu}(\partial_\mu e^b{}_\nu - \partial_\nu e^b{}_\nu) - e^{\nu b}(\partial_\mu e^a{}_\nu \partial_\nu e^a{}_\mu) - e^{a\rho} e^{b\sigma} e^c{}_\mu(\partial_\rho e_{c\sigma} - \partial_\sigma e_{c\rho})\big]. \tag{C.15}$$

Metris-affiinissa teoriassa tarvitaan riippumattomat konnektiot eli

$$D_\mu e^a_\nu = \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e^a_\nu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu = 0, \tag{C.16}$$

joka on *toinen tetradipostulaatti*.

Tetradiformalismissa Riemannin kaarevuustensori annetaan spinkonnektioiden avulla muodossa [89]

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ac}\omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu{}^{ac}\omega_{\mu c}{}^b. \tag{C.17}$$

Riccin skalaari saadaan tuttuun tapaan kontraktoimalla, mutta tässä tapauksessa kontraktio suoritetaan tetradien avulla

$$R = e_a{}^\mu e_b{}^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}. \tag{C.18}$$

Tetradeja käytettäessä Lagrangen tiheyksissä esiintyy usein e perinteisen $\sqrt{-g}$ sijaan. Nämä on helppo osoittaa samoiksi:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &= \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = \sqrt{-\det(e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab})} = \sqrt{-\det(e^a{}_\mu)\det(e^b{}_\nu)\det(\eta_{ab})} \\ &= \sqrt{\det(e^a{}_\mu)\det(e^b{}_\nu)} = \det(e^a{}_\mu) = e.\end{aligned} \tag{C.19}$$

Gravitaatio-osaa varioitaessa voidaan kirjoittaa metriikka ja kaarevuustensori suoraan tetradin avulla, mutta on olemassa lyhyempikin tie torsiottomassa tapauksessa. Variointi metriikan suhteen on suoritettu luvussa 3, joten nyt tarvitaan ainoastaan metriikan variaatiota tetradin suhteen. Määritelmästä (C.3) saadaan tarvittava lauseke variointia varten:

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} &= e^a{}_\mu \delta e_{a\nu} + e_{a\nu}\delta e^a{}_\mu = e^a{}_\mu \delta e_{a\nu} + e^a{}_\nu \delta e_{a\mu} \\ &= -(g_{\alpha\mu}e^a{}_\nu + g_{\alpha\nu}e^a{}_\mu)\delta e_a{}^\alpha. \end{aligned} \tag{C.20}$$

$f(R)$-teorian tapauksessa on siis

$$\begin{aligned}\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[f'(R)\mathfrak{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)\mathfrak{g}_{\mu\nu}\big]\delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[f'(R)\mathfrak{R}^{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big]\delta g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[f'(R)\mathfrak{R}^{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)\mathfrak{g}^{\mu\nu}\big]\big[g_{\alpha\mu}e^a{}_\nu + g_{\alpha\nu}e^a{}_\nu\big]\delta e_a{}^\alpha \\ &= -\frac{1}{2\kappa}\int_U d\Omega\big[f'(R)\mathfrak{R}_\alpha{}^\nu e^a{}_\nu + f'(R)\mathfrak{R}_\alpha{}^\mu e^a{}_\mu - \frac{1}{2}\mathfrak{f}(R)\delta^\nu_\alpha e^a{}_\mu - \frac{1}{2}\mathfrak{f}(R)\delta^\mu_\alpha e^a{}_\nu\big]\delta e_a{}^\alpha \\ &= -\frac{1}{\kappa}\int_U d\Omega\big[f'(R)\mathfrak{R}_\alpha{}^a - \frac{1}{2}\mathfrak{f}(R)\delta^a_\alpha\big]\delta e_a{}^\alpha. \end{aligned} \tag{C.21}$$

Jos näin ei voida toimia, esimerkiksi torsiollisessa tapauksessa, tarvitaan tetradin determinantin e variaatiota. Tämä onnistuu samaan tapaan kuin metriikan determinantin variaation laskeminen. Ensin johdetaan tetradin derivaatta käänteisen tetradin suhteen. Lähdetään liikkeelle Kroneckerin deltan derivoinnista, joka on luonnollisesti nolla:

$$\begin{aligned}\partial\delta^\mu_\nu &= \partial(e_b{}^\mu e^b{}_\nu) = \partial e_b{}^\mu e^b{}_\nu + e_b{}^\mu \partial e^b{}_\nu = 0 \\ &\Rightarrow e_b{}^\mu \partial e^b{}_\nu = -e^a{}_\nu \partial e_a{}^\mu \\ &\Rightarrow e_a{}^\mu \partial e^b{}_\nu = -e^b{}_\nu \partial e_a{}^\mu \\ &\Rightarrow e_a{}^\mu \partial e^b{}_\nu = -e_a{}^\mu e^a{}_\nu e^b{}_\mu \partial e_a{}^\mu \\ &\Rightarrow \partial e^b{}_\nu = -e^a{}_\nu e^b{}_\mu \partial e_a{}^\mu \\ &\Rightarrow \frac{\partial e^b{}_\nu}{\partial e_a{}^\mu} = -e^a{}_\nu e^b{}_\mu. \end{aligned} \tag{C.22}$$

Lisäksi tarvitaan tetradin determinantin derivaattaa

$$\frac{\partial e}{\partial e^a{}_\mu} = E^a{}_\mu = e e_a{}^\mu, \tag{C.23}$$

jossa $E^a{}_\mu$ on matriisin alkion alideterminantti. Koska $e_a{}^\mu$ ja $e^a{}_\mu$ ovat toistensa käänteisalkiot matriiseiksi tulkittuina, on $e_a{}^\mu = \frac{1}{e}E^a{}_\mu$. Nyt voidaan kirjoittaa determinantin e derivaatta tetradin $e_a{}^\mu$ suhteen

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial e_a{}^\mu} &= \Big(\frac{\partial e}{\partial e^b{}_\nu}\Big)\Big(\frac{\partial e^b{}_\nu}{\partial e_a{}^\mu}\Big) = (e e_b{}^\nu)(-e^a{}_\nu e^b{}_\mu) = -e\delta^a_b e^b{}_\mu. \\ &= -e e^a{}_\mu \end{aligned} \tag{C.24}$$

Näiden tulosten perusteella voidaan kirjoittaa haluttu variaatio

$$\delta e = -e e^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu. \tag{C.25}$$

Sivutuotteena saatiin myös variaatio käänteisen tetradin suhteen varioitaessa:

$$\delta e = e e_a{}^\mu \delta e^a{}_\mu. \tag{C.26}$$

D Diracin matriiseista ja spinoreista

Tavallisesti hiukkasfysiikassa käytetään metriikassa erilaista merkkisopimusta kuin tässä tutkielmassa. Johdonmukaisuuden nimissä pysytään liitteen A merkkisopimuksessa. Tästä johtuen osa esitettävissä identiteeteistä poikkeaa hieman kirjallisuudesta löytyvistä.

Diracin γ-matriiseista löytyy tietoa lähes kaikista kvanttikenttäteorian kirjoista [91]. Nämä γ-matriisit ovat 4×4 matriisien joukko γ^μ, joille on voimassa

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu} \tag{D.1a}$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \tag{D.1b}$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i. \tag{D.1c}$$

Yhdessä identiteettimatriisin kanssa γ-matriisit muodostavat Cliffordin algebran. Tämä algebra on suljettu summan ja antikommutaattorin määrittelemän tulon suhteen. Määritelmästä seuraa suoraan, että

$$(\gamma^0)^2 = -1, \tag{D.2a}$$

$$(\gamma^i)^2 = 1. \tag{D.2b}$$

Lisäksi määritellään γ^5-matriisi

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{D.3}$$

Gammamatriiseille voidaan johtaa monia ominaisuuksia, kuten

$$\gamma_5^2 = I, \tag{D.4a}$$

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \tag{D.4b}$$

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4I, \tag{D.4c}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -6\gamma^\nu, \tag{D.4d}$$

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = -(\gamma^\mu)^\dagger, \tag{D.4e}$$

$$\gamma^0\gamma^5\gamma^0 = \gamma^5, \tag{D.4f}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \tag{D.4g}$$

Lisäksi γ-matriisien jäljille voidaan johtaa joukko relaatioita. Näitä ei kuitenkaan tarvita tässä tutkielmassa[1].

Diracin γ-matriisit voidaan esittää usealla tavalla. Edellä mainitut relaatiot pitävät kuitenkin yleisesti paikkansa. Käytössä ovat muun muassa Diracin esitys, Majorana-esitys, Weylin esitys ja kiraalinen esitys. Näissä γ-matriisit esitetään 2×2-blokkimatriiseina, joissa blokkeina on Paulin spinmatriiseja. Esimerkiksi Diracin esityksessä ovat

$$\gamma^i = -i\sigma^2 \otimes \sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{D.5}$$

Spinoreista löytyy tietoa sekä kenttäteorian kirjoista, mutta myös suhteellisuusteoriaa käsittelevistä teoksista, kuten [92]. Spinoreiden muuntumisen kuvaamiseksi tarvitaan Diracin esityksen generaattoreita Σ_{ab}

$$\Sigma_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b] \tag{D.6}$$

ja varauskonjugointimatriiseja C, jotka täyttävät ehdon

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu. \tag{D.7}$$

Esityksen valinta ei kiinnitä varauskonjugointimatriiseja yksikäsitteisesti.

Diracin vaikutusta varioitaessa tarvitaan seuraavia identiteettejä:

$$\Sigma_{cd} = -\frac{1}{2}\gamma_5 \varepsilon_{cdab}\Sigma^{ab}, \tag{D.8a}$$

$$\gamma_\mu \Sigma_{ab} = \frac{1}{2}(e_{a\mu}\gamma_b - e_{b\mu}\gamma_a + e^c{}_\mu \varepsilon_{abcd}\gamma_5\gamma^d), \tag{D.8b}$$

$$\gamma^a = \frac{1}{6}\varepsilon^{abcd}\gamma_5\gamma_b\gamma_c\gamma_d, \tag{D.8c}$$

$$\gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]} = \varepsilon_{abcd}\gamma_5\gamma^d. \tag{D.8d}$$

Diracin spinorit määritellään niiden muuntumisella Lorentz-muunnoksissa. Spinorikentillä kuvataan sekä fermioneja että bosoneja. Bosoneja voidaan kuitenkin kuvata myös helpommin käsiteltävillä tensoreilla. Tämän vuoksi spinorit astuvat kehään yleensä fermioneja ja erityisesti elektroneja käsiteltäessä. Spinori Ψ koostuu neljästä kompleksisesta komponentista. Se muuntuu rajoitetuissa Lorentz-muunnoksissa ($x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$)

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{\frac{1}{4}\Sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}}\Psi. \tag{D.9}$$

Lisäksi voidaan muodostaa kaksi muuta spinoria, konjugaattispinori

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0 \rightarrow \bar{\Psi}e^{-\frac{1}{4}\Sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} \tag{D.10}$$

[1] Nämä löytyvät tarvittaessa muun muassa viitteestä [91].

ja varauskonjugoitu spinori

$$\Psi^c = \eta_c C \bar{\Psi}^T \to \eta_c e^{\frac{1}{4}\Sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} \Psi^c, \tag{D.11}$$

jossa $\{\eta_c \in \mathbb{C} \big| \, |\eta_c| = 1\}$.

Kovariantteja kenttäyhtälöitä etsiessä tarvitaan Lagrangen tiheys, joka on kvadraattinen, reaalinen, Lorentz-invariantti ja sisältää vain ensimmäisiä derivaattoja. $\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi$ on hyvä kandidaatti, sillä se täyttää kolme vaadituista ehdoista. Valitettavasti se ei kuitenkaan ole reaalinen. Vaihtoehdot olisivat siis kombinaatiot

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi + (\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi)^\dagger, \quad i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - i(\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi)^\dagger. \tag{D.12}$$

Tarkasteltaessa variaatiota Gaussin lauseen avulla huomataan, että reaalinen osa häviää ja imaginääriosan termit ovat samat. Lisäksi Lagrangen tiheyteen voidaan ottaa selvästi Lorentz-invariantti termi $\bar{\Psi}\Psi$. Tämän vuoksi Lagrangen tiheydeksi otetaan yksinkertaisesti

$$L_D = \sqrt{-g}\bar{\Psi}[i\gamma^\mu D_\mu - m]\Psi. \tag{D.13}$$

Tämä muistuttaa suuresti relativistisen kvanttimekaniikan spin-$\frac{1}{2}$ hiukkasille antamaa tulosta

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0. \tag{D.14}$$

E Lien derivaatta

Lien derivaatan määrittelemiseksi tarvitaan moniston M vektorikenttää X ja yleistä tensorikenttää T. Indusoikoon vektorikenttä $X = X^\mu \mathbf{e}_\mu$ infinitesimaalisen koordinaattimuunnoksen

$$x^\mu \to x^\mu + tX^\mu, \tag{E.1}$$

jossa t on jokin pieni vakio. Tässä siis tensorikenttä T_x pisteessä x, muuntuu tensorikentäksi $T'_{x'}$. Nämä ovat *a priori* eri kentät. Nyt tensorikentän T Lien derivaatta voidaan kirjoittaa

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[T'_{x'} - T_x]. \tag{E.2}$$

Tämä raja on aina olemassa ja lopputulos on tensori [79]. Jotta saataisiin käyttökelpoisempi muoto esimerkiksi kovariantille tensorille, tarvitaan vektorikenttään X liittyvää lokaalia diffeomorfismia ϕ_t. Kun siis t on infitesimaalinen, voidaan approksimoida

$$\phi_t(x^\mu) \equiv x'^\mu = x^\mu + tX^\mu. \tag{E.3}$$

Kovariantille tensorille kirjoitetaan

$$T'_{x'} = \phi_t^* T_{\phi(x)} \tag{E.4}$$

eli sen Lien derivaataksi tulee

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\phi_t^* T_{\phi(x)} - T_x]. \tag{E.5}$$

Lien derivaatalla on myös yhteys *Lien hakatuloon* [79]

$$[X, Y] = X\nabla Y - Y\nabla X. \tag{E.6}$$

Tämä yhteys saadaan tarkastelemalla vektoria Y. Ensimmäisessä kertaluvussa saadaan

$$\begin{aligned} Y_{x'} = (Y^\mu e_\mu)_{x'} &\simeq (Y^\mu + tX^\nu \nabla_\nu Y^\mu)_x (e_\mu)_{x'} = (Y^\mu + tX^\nu \nabla_\nu Y^\mu)_x (\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} e_\alpha)_x \\ &\simeq (Y^\mu + tX^\nu \nabla_\nu Y^\mu)_x (\delta^\alpha_\mu - t\nabla_\mu X^\alpha)_x (e_\alpha)_x \simeq (Y^\alpha + tX^\nu \nabla_\nu Y^\alpha - tY^\mu \nabla_\mu X^\alpha)_x (e_\alpha)_x. \end{aligned} \tag{E.7}$$

Sijoitetaan tämä nyt määritelmään (E.2), jolloin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\left[Y^\alpha + t(X^\nu\partial_\nu Y^\alpha - Y^\nu\partial_\nu X^\alpha)\right]_x (e_\alpha)_x - (Y^\alpha)_x(e_\alpha)_x\right\} \\ &= (X^\nu\partial_\nu Y^\alpha - Y^\nu\partial_\nu X^\alpha)_x(e_\alpha)_x = [X,Y]. \end{aligned} \tag{E.8}$$

Lien derivaatalle saadaan muitakin ominaisuuksia. Selvästikin määritelmästä seuraa, että tämä on $\mathbb{R}$-lineaarinen ja kommutoi kontraktioiden kanssa. Tässä yhteydessä ei kuitenkaan tarvita muita ominaisuuksia[1], mutta on hyvä huomata, että

$$\phi_t^* T = T \quad \forall\ \phi_t \quad \Leftrightarrow \mathcal{L}_X T = 0. \tag{E.9}$$

ja, että alueessa, jossa T:llä ja X:llä on komponentit $T^{\alpha\ldots\beta}_{\mu\ldots\nu}$ ja X^α, voidaan esittää myös tensori $\mathcal{L}_X T$ komponenttimuodossa

$$(\mathcal{L}_X)^{\alpha\ldots\beta}_{\mu\ldots\nu} = T^{\alpha\ldots\beta}_{\mu\ldots\nu,\delta}X^\delta - T^{\delta\ldots\beta}_{\mu\ldots\nu}X^\alpha_{,\delta} - \cdots - T^{\alpha\ldots\delta}_{\mu\ldots\nu}X^\beta_{,\delta} + T^{\alpha\ldots\beta}_{\delta\ldots\nu}X^\delta_{,\mu} + \cdots + T^{\alpha\ldots\beta}_{\delta\ldots\nu}X^\delta_{,\mu}. \tag{E.10}$$

Tässä voidaan osittaisderivaatat vaihtaa kovarianteiksi derivaatoiksi, mikäli konnektio on symmetrinen. Eräs tärkeä erikoistapaus on metriikan Lien derivaatta, jolle saadaan symmetrisen konnektion tapauksessa

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = X^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\partial_\mu X^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\nu X^\delta \\ =&X^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\partial_\mu X^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\nu X^\delta - \Gamma^\delta_{\alpha\mu}g_{\delta\nu}X^\alpha + g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\delta\mu}X^\delta - \Gamma^\delta_{\alpha\nu}g_{\mu\delta}X^\alpha + g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\delta\mu}X^\delta \\ =&X^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\delta_{\mu\alpha}g_{\delta\nu}X^\alpha - \Gamma^\delta_{\nu\alpha}g_{\mu\delta}X^\alpha + g_{\alpha\nu}\partial_\mu X^\alpha + g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\delta\mu}X^\delta + g_{\mu\alpha}\partial_\nu X^\delta + g_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\delta\nu}X^\delta \\ =&\nabla_\alpha g_{\mu\nu}X^\alpha + g_{\alpha\nu}\nabla_\mu X^\alpha + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu X^\alpha. \end{aligned} \tag{E.11}$$

[1] Näitä löytyy muun muassa viitteistä [79] ja [45].

F Tensorien muotoinvarianssi

Tensorien muotoinvarianssin määritelmän (6.9) voidaan kirjoittaa yleiselle kovariantille tensorille

$$T_{\mu\nu\ldots}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \ldots T_{\alpha\beta\ldots}(x') \tag{F.1}$$

ja sijoittamalla tähän infinitesimaalinen muunnos

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + tX^{\mu}(x), \tag{F.2}$$

saadaan

$$0 = \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} T_{\alpha\nu\ldots}(x) + \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}} T_{\mu\beta\ldots}(x) + \cdots + X^{\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T_{\mu\nu\ldots}(x). \tag{F.3}$$

Skalaarille voidaan tästä lukea viimeisestä termistä, että maksimaalisesti symmetrisessä avaruudessa kyseessä on aina vakioskalaari. Korkeamman rangin tensoreilla voidaan lähteä liikkeelle valitsemalla Killing-vektori siten, että jossakin pisteessä m

$$X^{\lambda}(m) = 0 \tag{F.4}$$

ja kovariantti derivaatta on

$$\nabla_{(\mu} X_{\alpha)} = g_{\alpha\beta}(m) \Big(\frac{\partial X^{\alpha}(m)}{\partial x^{\mu}} \Big)_{x=m}. \tag{F.5}$$

Nämä sijoitetaan yhtälöön (F.3). Tulos on pisteessä $x = X$

$$(\delta^{\alpha}_{\mu} T^{\beta}{}_{\nu\ldots} + \delta^{\alpha}_{\nu} T_{\mu}{}^{\beta}{}_{\ldots} + \ldots) \nabla_{\beta} X_{\alpha} = 0. \tag{F.6}$$

Tästä eteenpäin pääseminen kuitenkin vaatii jotakin lisää. Oletetaan nyt, että konnektio on muotoa

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + C_{\mu\nu}{}^{\alpha} \tag{F.7}$$

eli ei-metrisyystensori häviää. Tästä seuraa, että Killingin yhtälö

$$\nabla_{(\nu} X_{\mu)} = 0 \tag{F.8}$$

on voimassa. Kovariantti derivaatta $\nabla_\beta X_\alpha$ on siis antisymmetrinen, mutta muuten mielivaltainen. Yhtälössä (F.6) täytyy siis suluissa olevan kertoimen olla (α,β)-symmetrinen eli

$$\delta^\alpha_\mu T^\beta{}_{\nu\ldots} + \delta^\alpha_\nu T_\mu{}^\beta{}_{\ldots} + \cdots = \delta^\beta_\mu T^\alpha{}_{\nu\ldots} + \delta^\beta_\nu T_\mu{}^\alpha{}_{\ldots} + \ldots \tag{F.9}$$

Luvussa 6 tarvitaan tuloksia kovariantille vektorille sekä toisen ja kolmannen rangin tensoreille. Lasketaan siis näiden muoto maksimaalisesti symmetrisissä avaruuksissa.

Kontravariantin vektorin A^μ tapaus on yksinkertainen, sillä (F.9) antaa ainoastaan

$$\delta^\alpha_\mu A^\beta = \delta^\beta_\mu A^\alpha. \tag{F.10}$$

Kontraktoimalla α ja μ saadaan

$$(N-1)A^\beta = 0. \tag{F.11}$$

Lukuun ottamatta tapausta $N = 1$, häviävät siis kovariantit vektorit symmetrisissä avaruuksissa. Otetaan seuraavaksi käsittelyyn kovariantti toisen rangin tensori $B_{\mu\nu}$, jolle (F.9) antaa

$$\delta^\alpha_\mu B^\beta{}_\nu + \delta_\nu{}^\alpha B_\mu{}^\beta = \delta^\beta_\mu B^\alpha{}_\nu + \delta^\beta_\nu B_\mu{}^\alpha. \tag{F.12}$$

Kontraktoidaan jälleen α ja μ sekä lasketaan β,

$$(N-1)B_{\beta\nu} + B_{\nu\beta} = g_{\alpha\nu} B^\mu_\mu \tag{F.13}$$

Kirjoitetaan tämä yhtälö vaihtaen β ja ν päittäin ja vähennetään yhtälöt toisistaan. Tulokseksi saadaan

$$(N-2)(B_{\beta\nu} - B_{\nu\beta}) = 0. \tag{F.14}$$

Eli kun avaruuden dimensio on 3 tai enemmän, ovat toisen kertaluvun kovariantit tensorit symmetrisiä[1]. Sijoitetaan tulos takaisin yhtälöön (F.13), jolloin saadaan

$$B_{\beta\nu} = \frac{B^\mu_\mu}{N} g_{\beta\nu} \equiv f g_{\beta\nu}. \tag{F.15}$$

Tässä f ei riipu maksimaalisesti symmetrisiin ulottuvuuksiin liittyvistä koordinaateista [80]. Tarkastellaan vielä kovarianttia rangin 3 tensoria $C_{\mu\nu\lambda}$, jolle

$$\delta^\alpha_\mu C^\beta{}_{\nu\lambda} + \delta^\alpha_\nu C_\mu{}^\beta{}_\lambda + \delta^\alpha_\lambda C_{\mu\nu}{}^\beta = \delta^\beta_\mu C^\alpha{}_{\nu\lambda} + \delta^\beta_\nu C_\mu{}^\alpha{}_\lambda + \delta^\beta_\lambda C_{\mu\nu}{}^\beta. \tag{F.16}$$

Jälleen kerran lähdetään liikkeelle kontraktoimalla α ja μ

$$(N-1)C^\beta{}_{\nu\lambda} + C_\nu{}^\beta{}_\lambda + C_{\mu\nu}{}^\beta = \delta^\beta_\nu C_\mu{}^\mu{}_\lambda + \delta^\beta_\lambda C_{\mu\lambda}{}^\mu. \tag{F.17}$$

[1] Vastaava tulos saadaan myös, kun $N = 2$ [80].

Tässä oikealla puolella kontraktiot $C_\mu{}^\mu{}_\lambda$ ja $C_{\mu\lambda}{}^\mu$ häviävät, koska ne ovat kovariantteja vektoreita. Vastaavalla tavalla voidaan kontraktoida myös α ja ν tai α ja λ. Lasketaan vielä indeksi β ja saadaan kolme yhtälöä

$$(N-1)C_{\beta\nu\lambda} + C_{\nu\beta\lambda} + C_{\lambda\nu\beta} = 0 \tag{F.18a}$$

$$C_{\beta\nu\lambda} + (N-1)C_{\nu\beta\lambda} + C_{\nu\beta\lambda} = 0 \tag{F.18b}$$

$$C_{\beta\nu\lambda} + C_{\nu\beta\lambda} + (N-1)C_{\lambda\nu\beta} = 0. \tag{F.18c}$$

Keskimmäisessä on lisäksi nimetty μ indeksiksi ν ja viimeisessä μ indeksiksi λ. Näin kaikissa kolmessa yhtälössä on samat nimet indekseillä. Permutoimalla näitä yhtälöitä on mahdollista saada lisää vastaavia yhtälöitä. Ensimmäinen hyödyllinen ominaisuus kolmannen rangin kovarianteille tensoreille saadaan vähentämällä yhtälöstä (F.18a) permutoitu yhtälö (F.18b)

$$(N-1)C_{\beta\nu\lambda} + C_{\nu\beta\lambda} + C_{\lambda\nu\beta} - (N-1)C_{\beta\nu\lambda} - C_{\nu\beta\lambda} - C_{\beta\lambda\nu} = 0. \tag{F.19}$$

Suurin osa termeistä kumoutuu ja tulos on

$$C_{\lambda\nu\beta} = C_{\beta\lambda\nu} \tag{F.20}$$

eli tensori ei muutu syklisissä permutaatioissa. Seuraavaksi hankitaan muutama antisymmetriaominaisuus. Näistä ensimmäinen saadaan käyttäen yhtälöiden (F.18a) ja (F.18b) permutaatioita,

$$\begin{aligned}&[(N-1)C_{\nu\beta\lambda} + C_{\beta\nu\lambda} + C_{\lambda\beta\nu} - (N-1)C_{\nu\lambda\beta} - C_{\lambda\nu\beta} - C_{\beta\lambda\nu}]- \\ &-[(N-1)C_{\beta\lambda\nu} + C_{\lambda\beta\nu} + C_{\nu\lambda\beta} - (N-1)C_{\nu\lambda\beta} - C_{\lambda\nu\beta} - C\nu\beta\lambda] = 0.\end{aligned} \tag{F.21}$$

Tämä sievenee ja antaa tuloksen

$$C_{\nu[\beta\lambda]} = C_{[\lambda\beta]\nu}. \tag{F.22}$$

Tarvitaan vielä toinen vastaavantyyppinen tulos. Tämä saadaan jälleen käyttämällä hyväksi permutaatioita (F.18a), (F.18b) ja (F.18c). Kirjoitetaan ensin yhtälöt

$$\begin{aligned}(N-1)C_{\beta\nu\lambda} + C_{\nu\beta\lambda} + C_{\lambda\nu\beta} - (N-1)C_{\nu\beta\lambda} - C_{\beta\nu\lambda} - C_{\lambda\beta\nu} = 0, \\ (N-1)C_{\beta\nu\lambda} + C_{\nu\beta\lambda} + C_{\lambda\nu\beta} - (N-1)C_{\nu\beta\lambda} - C_{\beta\nu\lambda} - C_{\nu\lambda\beta} = 0\end{aligned} \tag{F.23}$$

eli

$$\begin{aligned}(N-2)C_{[\beta\nu]\lambda} &= C_{\lambda[\beta\nu]}, \\ (N-2)C_{[\beta\nu]\lambda} &= C_{[\nu\lambda]\beta}.\end{aligned} \tag{F.24}$$

Jos $N = 2$, saadaan, että antisymmetriset osat häviävät eli indeksit voi laittaa haluamaansa järjestykseen. Mikäli $N \neq 2$, voidaan näistä yhtälöistä ratkaista $(N-2)$, jolloin saadaan relaatio

$$C_{[\nu\lambda]\beta} = C_{\nu[\lambda\beta]}. \tag{F.25}$$

Käyttäen tuloksia (F.25), (F.22) ja (F.20) saadaan

$$C_{[\nu\lambda]\beta} = C_{\nu[\lambda\beta]} = C_{\beta[\nu\lambda]} = C_{[\lambda\nu]\beta} \tag{F.26}$$

eli

$$C_{\nu\lambda\beta} = C_{\lambda\nu\beta}. \tag{F.27}$$

Näiden tulosten mukaan kolmannen rangin kovariantin tensorin indeksit voidaan vaihtaa mielivaltaiseen järjestykseen muuttamatta sen arvoa. Tätä tulosta voidaan hyödyntää yhtälössä (F.18a), jolloin saadaan

$$(N-1)C_{\beta\nu\lambda} + C_{\beta\nu\lambda} + C_{\beta\nu\lambda} = (N+1)C_{\beta\nu\lambda} = 0. \tag{F.28}$$

Koska $(N+1)$ ei voi hävitä, saamme tuloksen

$$C_{\mu\nu\lambda} = 0 \tag{F.29}$$

Tämä on merkittävä tulos. Koska kaikki kolmannen rangin tensorit häviävät, häviävät erityisesti myös torsiotensori ja ei-metrisyystensori. Ei-metrisyys tosin oletettiin nollaksi jo aiemmin. Edelleen tämä tarkoittaa, että symmetrisissä avaruuksissa konnektio on Levi-Civita-konnektio eli komponentit saadaan Christoffelin symboleista

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix}. \tag{F.30}$$