



JOHDATUS AKSIOMAATTISEEN TASOGEOMETRIAAN

Mika Mäkelä

Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2019

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatuja järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MÄKELÄ; MIKA: Johdatus aksiomaattiseen tasogeometriaan.
Pro gradu -tutkielma, 31 s.
Matematiikka
Marraskuu 2019

Tutkielma käsittelee tasogeometrian aksiomaattista lähestymistapaa. Tutkielma on kirjoitettu aiheesta kiinnostuneille, kuten etevälle lukiolaiselle itseopiskelumateriaaliksi sekä matematiikan opettajalle avuksi tasogeometrian todistusten läpikäymiseen osana opetusta. Tutkielman alussa selvennetään matemaattisen todistamisen nykytilaa lukio-opetuksessa ja opetussuunnitelmassa sekä tutustutaan matemaattiseen todistamiseen pintapuolisesti.

Tutkielma perustuu Walter Meyerin esittämään aksiomajoukkoon. Aksiomien perusteella määritellään matemaattisia käsitteitä sekä esitetään näihin käsitteisiin liittyvä lauseita ja niiden todistuksia. Apuna on käytetty paljon kuvia ja tutkielmassa on pyritty siihen, ettei matemaattisia välivaiheita ole jätetty pois. Tutkielman matemaattinen osuus alkaa aksiomalla, joka määrää suoran yksikäsitteiseksi kahden määrätyn pisteen kautta kulkeväksi pistejoukoksi ja päättyy Pythagoran lauseeseen. Tutkielman keskeisimpiä käsitteitä ovat viivainfunktio, yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus.

Tutkielmassa käsitellään myös joitakin esimerkkejä aksiomien ja lauseiden poikkeustapauksista ja annetaan esimerkkejä, miksei jotkin sinänsä järkeviltä tuntuvat lauseet toimi tutkielman aksiomajoukossa.

Asiasanat: Geometria, aksioma, todistaminen, yhtenevyys, yhdenmuotoisuus.

Sisältö

1 Johdanto	1
1.1 Todistuksista yleisesti	1
1.2 Todistuksista lukiossa	1
1.3 Aksiomaattinen lähestymistapa	2
2 Aksiomia ja lauseita	3
2.1 Piste ja suora	3
2.2 Taso	7
2.3 Pinta-ala	25
3 Lopuksi	31
Kirjallisuutta	32

1 Johdanto

1.1 Todistuksista yleisesti

Matematiikan *lauseita* eli teoreemia, kuten Pythagoraan lausetta, pyritään todistamaan matemaattisesti, jotta voidaan olla varmoja lauseen pitävyydestä kaikilla halutuilla arvoilla. Matemaattisessa todistamisessa voidaan käyttää esimerkiksi induktiota tai suoraa ja epäsuoraa todistusta. Suorassa todistuksessa hyödynnetään *aksiomia* tai aiemmin varmoiksi todistettuja lauseita. Epäsuorassa todistuksessa pyritään saamaan ristiriita lauseen väitteen kanssa vastaoletuksen avulla. Induktio todistuksessa pyritään osoittamaan, että väite pätee pienimmällä arvolla ja induktioaskeleen nojalla aina seuraavalla arvolla. Lisäksi joskus väite voidaan osoittaa vääräksi vastaesimerkillä.

Aksioomat ovat matematiikan yksinkertaisia peruustotuuksia, jotka voidaan olettaa voimassa oleviksi. Aksioomat ovat siis tavallaan lauseita, joita ei voida todistaa oikeiksi käytetyssä aksioomajoukossa. Aksioomajoukon tulee olla ristiriidaton, riippumaton sekä niin kattava, että aksioomajoukon pohjalta voidaan johtaa lauseilla mielenkiintoisia ja merkittäviä tuloksia. Lisäksi eräs matematiikalle luonnollinen tavoite on aksioomien lukumäärän minimoiminen. Aksioomien ristiriidattomuudella tarkoitetaan, että aksioomat eivät saa kumota toisiaan eikä niiden perusteella voida todistaa kahta keskenään ristiriitaista lausetta. Riippumattomuudella tarkoitetaan, että yksikään aksiooma ei saa seurata muista aksioomasta, sillä tällöin se olisi lause ja se tulee poistaa aksioomajoukosta. Aksioomajoukon muodostaminen on siis jo hyvin vaativa prosessi. Matematiikan käsitteistä ainakin piste, suora ja taso ovat yleisesti muodoltaan ja olemukseltaan ristiriidattomia käsitteitä, joiden varaan geometrian aksioomia voidaan rakentaa (ks. myös [4]).

Matemaattisessa *määritelmässä* esitellään uusi käsite aiemmin tunnettujen käsitteiden ja aksioomien pohjalta. Määritelmässä sovitaan siis käsitteiden nimitystä ja merkintätavoista. Määritelmät eivät ole uusia tuloksia, joten niitä ei voida todistaa oikeiksi.

1.2 Todistuksista lukiossa

Lukiomatematiikka pohjautuu pitkälti annettuihin tuloksiin ja kaavoihin. Matemaattisia todistuksia ei juuri käydä läpi tai ainakin se on kunkin opettajan oman harkinnan varassa. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [6] todistukset mainitaan ”Lukuteoria ja todistaminen (MAA11)” -kurssin tavoitteissa ja keskeisissä sisällyksissä. Lisäksi muiden lukiokurssien oppikirjojen liiteosuuksissa tai johdannoissa tarkastellaan ainakin jonkin verran todistuksia [1]. Todistukset lukiokirjoissa eivät myöskään muodosta eheää kokonaisuutta ja niiden perusteluja ei käydä läpi viitaten aikaisempiin todistuksiin vaan ennemminkin yleisesti tiedettyihin asioihin matematiikassa. Todistaminen ei tällä hetkellä ole keskiössä opetussuunnitelmassa, minkä vuoksi se ei myöskään ole merkittävässä roolissa lukiokirjoissa eikä ylioppilaskirjoitusten tehtävätyypeissä.

Matemaattisen todistuksen osaamista ei siis kovin suuresti vaadita lukiolaiselta. Koska kuitenkin matematiikka pohjautuu todistuksiin, niin niitä toivoisi käytävän varsinkin lukiossa nykyistä enemmän. Etenkin etevimmät opiskelijat voisivat tutustua matemaattiseen todistamiseen itsenäisesti, jos todistuksia esitettäisiin selkeässä ja riittävän selittävässä muodossa.

Geometria on helppo matematiikan osa-alue lähteä harjoittelemaan matemaattista todistamista, sillä siinä todistuksia pystyy samalla hahmottamaan ja konkretisoimaan kuvioden avulla. Tällöin todistus ja sen eräänlainen soveltaminen kulkevat helposti käsi kädessä. Varsinkin nykyään, kun on siirrytty sähköisiin työskentelymuotoihin, on entistäkin helpompaa havainnoida, miten jokin muutos todistuksessa tai saadussa tuloksessa vaikuttaa kuvion muotoon, kokoon tai kuvion osien keskinäisiin suhteisiin.

Geometria on lainasana kreikan kielestä ja tarkoittaa *maan mittaamista*. Näin geometrialla on historiallisetkin yhteydet muun muassa maantietoon, fysiikkaan ja kemiaan.

1.3 Aksiomaattinen lähestymistapa

Ensimmäisenä geometriaa aksiomaattisesti lähestyi Eukleides noin 300 eaa. Hän esitteli teoksessaan *Stoikheia (Alkeet)* viisi aksioomaa. Tämä oli ensimmäisiä teoksia, jossa laajaa matematiikan osa-aluetta pyrittiin todistamaan loogisesti eikä kuviin tai oletuksiin nojautuen. Myöhemmin on havaittu, etteivät nämä aksioomat olleet täysin ristiriidattomia ja aksioomien kautta todistetut lauseet eivät olleet täysin päteviä. Tasogeometriaa mallintavia aksioomajoukkoja on myöhemmin kehitetty lisää muutamilla eri tavoilla, ja nykytiedon mukaan ristiriidattomia tasogeometrian aksioomajoukkoja on useita, joista yksi tunnetuimmista on Hilbertin aksioomajoukko. (ks. [3] [2])

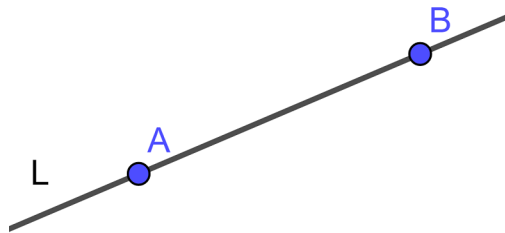
Tämä tutkielma perustuu pitkälti Walter Meyerin kirjaan ”Geometry and Its Applications” ([5]). Tutkielma on kirjoitettu edistyneelle lukiolaiselle, joka haluaa perehtyä matemaattiseen todistamiseen lukiokursseja enemmän. Apua tutkielmasta voi olla myös opettajille, jotka haluavat helposti ottaa matemaattista todistamista mukaan opetukseensa. Tutkielmaa voidaan hyödyntää osana ”Geometria (MAA3)” -kurssia tai osana omaa todistuksia läpikäyvästä kurssista. Tutkielma koostuu aksioomista, määritelmistä, lauseista sekä lauseiden todistuksista. Tuloksia on pyritty konkretisoimaan kuvilla. Tutkielma keskittyy tasogeometriaan.

2 Aksiomia ja lauseita

Tässä kappaleessa esitetään yksi tasogeometrian aksiomajoukko, siihen perustuvia lauseita sekä näiden lauseiden todistuksia. Lisäksi esitetään esimerkkejä siitä, miksei kaikki järkeviltä kuulostavia lauseita voida todistaa oikeiksi.

2.1 Piste ja suora

Aksioma 1. Suora, merkitään \overleftrightarrow{AB} , on tason pisteiden joukko. Jokaista kahta eri pistettä A ja B kohden on olemassa tarkalleen yksi niiden kautta kulkeva suora L . Tilanne on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: Vain yksi suora voi kulkea pisteiden A ja B kautta.

Määritelmä 2.1. Kaksi suoraa L ja M ovat *yhdensuuntaiset*, jos suorilla ei ole yhteisiä pisteitä.

Lause 2.2. Kaksi eri suoraa L ja M leikkaavat toisensa korkeintaan yhdessä pisteessä.

Todistus. Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että suorat L ja M leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä A ja B . Pisteiden A ja B kautta kulkee siis kaksi suoraa. Tämä on aksioman 1 vastaista, joten vastaoletuksesta syntyy ristiriita. Lauseen väite on siis totta. \square

Osa aksiomista on kaksi tai useampi osaisia, kuten seuraavaksi huomaamme:

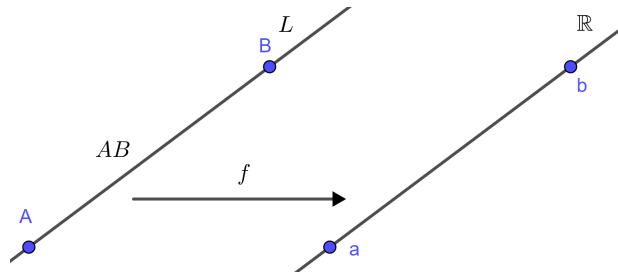
Aksioma 2. Seuraavat aksioman osat ovat voimassa samanaikaisesti

1. Jokaiselle kahdelle pisteelle A ja B on olemassa positiivinen reaaliluku, jota kutsutaan *etäisyydeksi* pisteestä A pisteeseen B . Tästä etäisyydestä käytetään merkintää AB .
2. Jokaisella suoralla L on *viivainfunktio* f , joka määrää reaaliluvun kullekin suoran L pisteelle seuraavasti:
 - a) Jokainen suoran L piste liittyy yksikäsitteiseen viivainfunktion f arvoon.
 - b) Kaikki reaaliluvut, oli se sitten positiivinen, negatiivinen tai nolla, saadaan jonkin suoran L pisteen *kuvana*.

c) Jos A ja B ovat suoran L pisteitä, niin silloin

$$|f(B) - f(A)| = |b - a| = AB$$

on pisteiden A ja B välinen etäisyys. Jos A ja B ovat sama piste, niin $AB = 0$.



Kuva 2: Suoran L pisteet A ja B kuvautuvat viivainfunktion f avulla reaalityluiksi a ja b

Funktiota f kutsutaan siis suoran L viivainfunktiksi ja reaalitylukuja $f(A)$ kutsutaan suoran L pisteiden A koordinaateiksi. Aksioma siirtää reaalitylukujen ominaisuuksia suoran pisteille. Esimerkiksi aksioman 2 perusteella kahden pisteen välinen etäisyys on yhtä suuri kuin viivainfunktion avulla määriteltyjen pisteitä vastaavien kahden reaalityluvun erotuksen itseisarvo. Kuvassa 2 suoran piste A vastaa reaalitylukua a ja piste B lukua b . Suoran pisteen ei tarvitse olla samassa kohtaa reaalitylukusuoraa, kuten kuvassa vaan reaalitylukujen erotuksen itseisarvo tulee olla yhtä suuri kuin suoran pisteiden välinen etäisyys. Aksioman 2 mukaan suoran nolapisteen paikka voidaan valita vapaasti.

Määritelmä 2.3. Olkoot A , B ja C suoralla L olevia pisteitä ja f suoran viivainfunktio. Näiden avulla määritellään seuraavat käsitteet:

1. Piste B on pisteiden A ja C välissä, jos

$$f(A) < f(B) < f(C)$$

tai

$$f(C) < f(B) < f(A)$$

Viivainfunktion koordinaattien arvojen suurusjärjestys on siis sama kuin pisteiden järjestys suoralla. Merkintä $A - B - C$ tarkoittaa, että piste B on pisteiden A ja C välissä ja $C - B - A$ tarkoittaa samaa kuin $A - B - C$.

2. Jana pisteestä A pisteeseen B , merkitään \overline{AB} , määritellään pistejoukoksi, joka sisältää pisteet A ja B sekä kaikki pisteet X , missä $A - X - B$.
3. Jos $AB = CD$, niin janat \overline{AB} ja \overline{CD} ovat yhtenevät.

Lause 2.4. Seuraavat tulokset ovat voimassa

1. $AB = BA$.
2. Jos $A - B - C$, niin $AB + BC = AC$.
3. Jos A, B ja C ovat suoran kolme eri pistettä, niin täsmälleen yksi niistä on kahden muun välissä.

Todistus. Todistetaan jokainen lauseen kohta erikseen.

1. Aksioman 2 ja itseisarvon laskusääntöjen mukaan on voimassa

$$\begin{aligned} AB &= |f(B) - f(A)| = |-[f(A) - f(B)]| \\ &= |f(A) - f(B)| = BA. \end{aligned}$$

2. Kohdan 2 todistus jakaantuu kahteen osaan. Tapaus $f(A) < f(B) < f(C)$ on esitetty Meyerin kirjassa [5] ja etenee vastaavasti kuin seuraavaksi esitettävä tapaus. Oletetaan, että $f(C) < f(B) < f(A)$. Nyt

$$\begin{aligned} CB + BA &= |f(B) - f(C)| + |f(A) - f(B)| \\ &= f(B) - f(C) + f(A) - f(B) \\ &= f(A) - f(C) \\ &= |f(A) - f(C)| \\ &= CA = AC \end{aligned}$$

3. Oletetaan, että a, b ja c ovat suoran pisteiden A, B ja C viivainfunktion koordinaatteja. Tunnetusti tarkalleen yksi kolmesta reaalityluvusta on kahden muun reaalityluvun välissä. Näin ollen tulos seuraa reaalitylukujen järjestyksen määritelmästä.

□

Lause 2.5. Minkä tahansa kahden pisteen A ja B välistä janaa \overline{AB} voidaan pidentää positiivisella pituudella e janan kummasta tahansa päästä.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 3. Olkoon L pisteiden A ja B kautta kulkeva suora. Olkoon $e > 0$ haluttu pidennyksen pituus janalle \overline{AB} . Janaa halutaan pidentää pisteestä B pisteeseen C eli piste B olisi pisteiden A ja C välissä ja janan pidennyksen pituus olisi $BC = e$. Olkoot a ja b reaalitylukuja $f(A)$ ja $f(B)$ eli pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran L viivainfunktion koordinaatteja.

Todistus jakaantuu kahteen osaan. Tapaus $a < b$ on esitetty Meyerin teoksessa [5]. Seuraavaksi esitetään tapaus $a > b$.

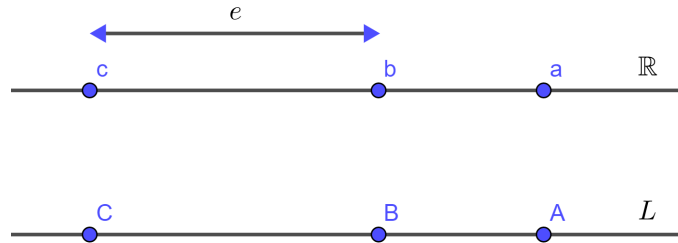
Määritellään $c = b - e$. Aksioman 2 mukaan on olemassa suoran L piste C , joka vastaa reaalitylukua c . Seuraavan perusteella \overline{BC} on janan \overline{AB} haluttu pidennys:

a) Piste B on pisteiden A ja C välissä, koska $b - e < b < a$.

b) Etäisyys $BC = |f(C) - f(B)| = |(b - e) - b| = |-e| = e$.

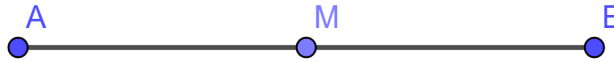
Vastaavasti löydettäisiin piste D reaaliluvulle $d = a + e$, joka pidentää janaa \overline{AB} etäisyydellä e pisteestä A pisteeseen D .

□



Kuva 3: Viivainfunktion avulla pidennetty jana \overline{AB}

Lause 2.6. Jokaisella janalla \overline{AB} on piste M , jota kutsutaan *keskipisteeksi* ja jolle on voimassa $AM = MB$.



Kuva 4: Piste M on janan \overline{AB} keskipiste.

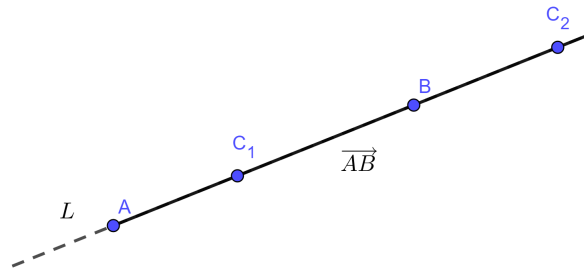
Todistus. Tarkastellaan kuvaa 4. Olkoon f pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran L viivainfunktio. Olkoon M sellainen suoran L piste, että $f(M) = \frac{f(A)+f(B)}{2}$. Tällainen piste suoralta L löytyy aksiooman 2 perusteella. Nyt

$$\begin{aligned} AM &= |f(M) - f(A)| = \left| \frac{f(A) + f(B)}{2} - f(A) \right| = \left| \frac{-f(A) + f(B)}{2} \right| \\ &= \left| f(B) - \frac{f(A) + f(B)}{2} \right| = |f(B) - f(M)| = MB \end{aligned}$$

Piste M on siis haettu janan \overline{AB} keskipiste.

□

Määritelmä 2.7. Jos A ja B ovat kaksi erillistä pistettä, niin *puolisuora* pisteestä A pisteen B kautta, merkitään \overrightarrow{AB} , on niiden suoran \overleftrightarrow{AB} pisteiden C joukko, jossa piste A ei ole pisteiden B ja C välissä. Tilanne on esitetty kuvassa 5. Pistettä A kutsutaan puolisuoran *päätepisteeksi*.



Kuva 5: Puolisuora kuvattuna yhtenäisellä viivalla.

Puolisuoran määritelmä kertoo, millainen pistejoukko puolisuora on. Seuraava lause kertoo tarkemmin, mitkä suoran pisteet puolisuoraan kuuluu.

Lause 2.8. Puolisuora \overrightarrow{AB} koostuu janasta \overline{AB} yhdessä pisteiden X kanssa, missä $A - B - X$.

Todistus. Huomataan ensin, että sekä janan \overline{AB} pisteet että sellaiset pisteet X , että $A - B - X$ ovat määritelmän 2.7 mukaan puolisuoralla \overrightarrow{AB} . Toisaalta, jos piste X on puolisuoralla \overrightarrow{AB} , niin se on määritelmän mukaan joko janalla \overline{AB} tai on voimassa $A - B - X$. \square

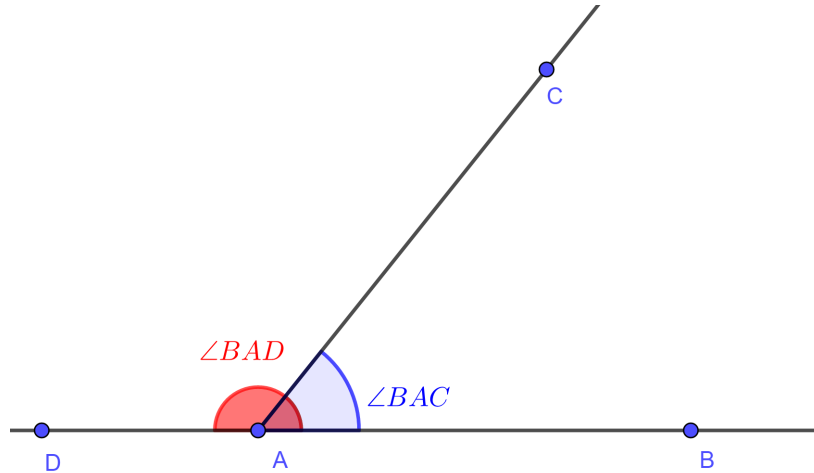
Määritelmä 2.9. Jos A , B ja C ovat kolme erillistä tason pistettä, niin puolisuorien unionia $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ kutsutaan *kulmaksi* $\angle BAC$, ja pistettä A kutsutaan kulman *kärjeksi*. Samasta kulmasta voidaan käyttää myös merkintää $\angle CAB$. Jos tarkoitettu kulma on yksikäsitteinen, niin kulmasta $\angle BAC$ voidaan käyttää lyhyempää merkintää $\angle A$. Jos pisteet A , B ja C sijaitsevat samalla suoralla, niin kulmaa $\angle BAC$ kutsutaan *oikokulmaksi*. Tällöin $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$. Kuvassa 6 on esitetty kaksi eri suuruista kulmaa.

2.2 Taso

Havaitaan, että jo kahdella aksioomalla voidaan johtaa useita lauseita. Edellä keskityttiin pisteisiin, suoriin sekä suoran osiin, kuten janoihin ja puolisuoriin. Geometriassa tarvitaan kuitenkin myös *tasolle* sekä sen osille nimiä ja ominaisuuksia. Tasojen ajatellaan jatkuvan äärettömyyksiin jokaiselta sivulta samoin kuin suora jatkuu äärettömyyksiin piirretyn osan molemmista päistä.

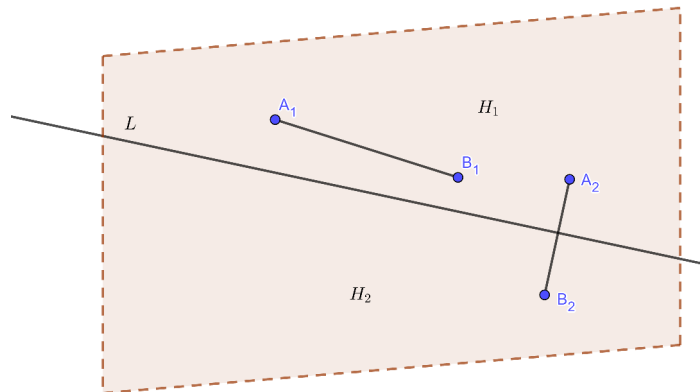
Seuraavan aksiooman Euklidiseen geometriaan lisäsi Pasch 1800-luvun lopulla, sillä alkuperäiset aksioomat eivät antaneet perusteluja kuvioiden leikkaamisominaisuuksille. Meyerin teoksessa aksiooma 3 on esitetty melko eritavalla kuin useissa muissa teoksissa (ks. [4]). Meyerin teoksessa esitetty aksiooma tarkastelee suorien ja janojen leikkaamista. Tavanomaisesti vastaava aksiooma esitetään suoran ja kolmion sivujen leikkausten ominaisuuksilla.

Aksiooma 3. Suora L jakaa tason T kahtia kahteen *epätyhjään* joukkoon H_1 ja H_2 , joita kutsutaan *puolitasoiksi*. Tason jakautuminen puolitasoihin on esitetty kuvassa 7.



Kuva 6: Kolme puolisuoraa ja kaksi niiden rajaamaa kulmaa, joista toinen on oikokulma $\angle BAD$

1. Jos pisteet A ja B ovat samalla puolitasolla, niin jana \overline{AB} on kokonaan samalla puolitasolla.
2. Jos pisteet A ja B ovat eri puolitasoilla, leikkaa jana \overline{AB} suoran L .

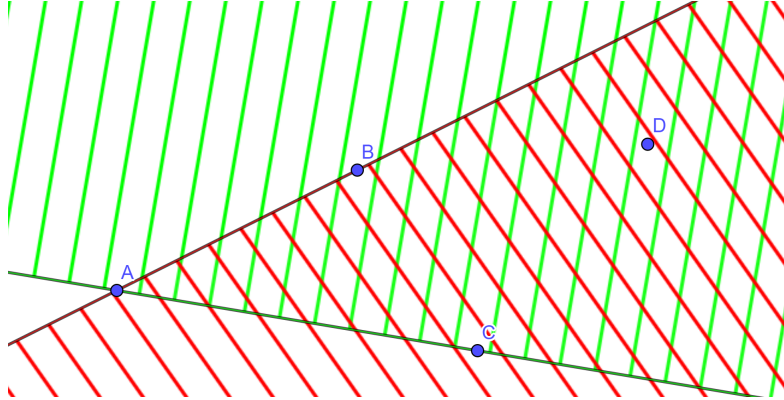


Kuva 7: Suora L jakaa tason kahteen puolitasoon. Jana on joko kokonaan samalla puolitasolla tai jana leikkaa suoran L ja sijaitsee molemmilla puolitasoilla.

Matematiikassa on aina pohdittava, mitä aksiooma tai lause todella kertoo annetusta tilanteesta. Esimerkiksi on huomattava, että suora L ei aksiooman 3 mukaan kuulu kumpaankaan puolitasoon H_1 ja H_2 . Tästä syystä puolitasoja kutsutaan toisinaan avoimiksi puolitasoiksi.

Määritelmä 2.10. Olkoot A , B ja C kolme tason pistettä, jotka eivät sijaitse samalla suoralla. Suora \overleftrightarrow{AB} määrittää puolitason H_C , joka sisältää pisteen C , ja suora

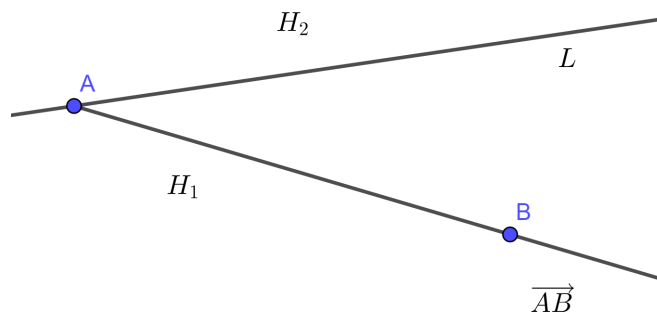
\overleftrightarrow{AC} määrää puolitason H_B , joka sisältää pisteen B . Kulman $\angle BAC$ rajaama alue on näiden kahden puolitason leikkaus $H_B \cap H_C$. Jos piste $D \in H_B \cap H_C$, niin sanotaan, että D on kulman $\angle BAC$ sisäpuolella. Kulman $\angle BAC$ rajaamaa aluetta ja pisteen D sijaintia havainnollistetaan kuvassa 8.



Kuva 8: Puolitaso H_B vihreällä viivoituksella, puolitaso H_C punaisella viivoituksella sekä niiden leikkaus $H_B \cap H_C$ molemmilla viivoituksilla.

Seuraavaa lausetta on havainnollistettu kuvassa 9.

Lause 2.11. Olkoot L suora sekä H_1 ja H_2 sen määräämät puolitasot. Jos puolisuoran \overrightarrow{AB} päätepiste A on suoralla L ja piste $B \in H_1$, niin kaikki puolisuoran \overrightarrow{AB} pisteet pistettä A lukuunottamatta ovat puolitasolla H_1 .



Kuva 9: Puolisuora, jonka päätepiste on suoralla L , sijaitsee kokonaan puolitasolla H_1 .

Todistus. Tehdään vastaoletus, että piste C on puolisuoralla \overrightarrow{AB} ja piste C on puolitasolla H_2 . Tällöin aksiooman 3 mukaan jana \overline{BC} leikkaa suoran L . Huomataan, että lauseen 2.2 mukaan suorat L ja \overleftrightarrow{AB} leikkaavat pisteessä A . Koska lisäksi $\overline{BC} \subset \overleftrightarrow{AB}$, niin jana \overline{BC} leikkaa suoran L pisteessä A . Syntyy ristiriita lauseen oletuksen kanssa, joten lauseen väite on totta. \square

Seuraavaksi käsittelemme *kolmioita*, jotka ovat keskeisessä roolissa geometriassa.

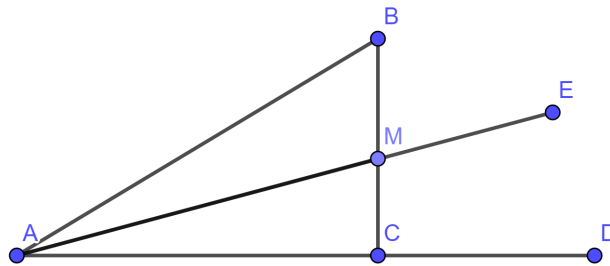
Määritelmä 2.12. Olkoot A , B ja C kolme tason pistettä, jotka eivät sijaitse samalla suoralla. Tällöin janojen unioni $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ muodostaa *kolmion* ABC .

Lause 2.13. Jos pisteet A , B ja C eivät sijaitse samalla suoralla ja pisteet D , E ja M ovat sellaiset, että

1. $A - C - D$,
2. $B - M - C$ ja
3. $A - M - E$,

niin piste E on kulman $\angle BCD$ sisäpuolella.

Tarkastellaan ensin kuvaa 10, jossa lauseen tilannetta on havainnollistettu. Kuvan perusteella todella näyttäisi, että lauseen väite pätee. Tarvitsemme kuitenkin matemaattisen todistuksen sille, että lause pätee kaikissa mahdollisissa tasogeometrian tilanteissa kolmion koosta ja kulmien suuruuksista riippumatta. Todistuksen täytyy myös perustua pelkästään edellä esitettyihin aksioomiin ja oikeiksi todistettuihin lauseisiin.



Kuva 10: Piste E näyttäisi olevan kulman $\angle BCD$ sisäpuolella

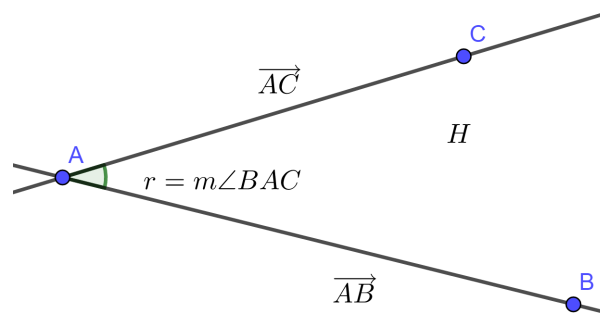
Todistus. Oletusten perusteella jana \overline{AD} leikkaa suoran \overleftrightarrow{BC} pisteessä C ja aksiooman 3 perusteella tällöin janan \overline{AD} päätepisteet sijaitsevat eri puolilla suoraa \overleftrightarrow{BC} . Samoin pisteet A ja E ovat eri puolilla suoraa \overleftrightarrow{BC} , sillä jana \overline{AE} leikkaa suoran \overleftrightarrow{BC} suoralla pisteessä M . Nyt siis pisteet E ja D sijaitsevat samalla puolella suoraa \overleftrightarrow{BC} . Koska alkuehtojen mukaan piste B ei sijaitse suoralla \overleftrightarrow{AC} , niin se ei sijaitse myöskään suoralla \overleftrightarrow{CD} , koska $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CD}$. Lauseen 2.11 perusteella puolisuora \overleftrightarrow{CB} sijaitsee pistettä C lukuunottamatta samalla puolella suoran \overleftrightarrow{CD} jakamaa tasoa. Piste M sijaitsee janalla \overline{BC} , sillä ehtona oli $B - M - C$. Pisteet M ja B sijaitsevat siis samalla puolella suoran \overleftrightarrow{CD} jakamaa tasoa. Samoin voidaan osoittaa, että pisteet M ja E ovat samalla suoran \overleftrightarrow{CD} jakamalla puolitasolla, sillä puolisuoran \overleftrightarrow{AE} pisteet M ja E sijaitsevat samalla puolella suoran \overleftrightarrow{CD} jakamaa tasoa. Näin ollen pisteet M , B ja E sijaitsevat samalla puolella suoran \overleftrightarrow{CD}

jakamaa puolitasoa. Nyt siis piste E sijaitsee kulman $\angle BCD$ sisällä, sillä piste E sijaitsee samalla puolella suoraa \overleftrightarrow{BC} kuin piste D ja samalla puolella suoraa \overleftrightarrow{CD} kuin piste B . \square

Aksiooma 4. Jokaisella tasogeometrian kulmalla on reaalinen *kulman suuruus*, joka vaihtelee 0° ja 180° välillä. Kulman $\angle BAC$ suuruudesta käytetään merkintää $m\angle BAC$

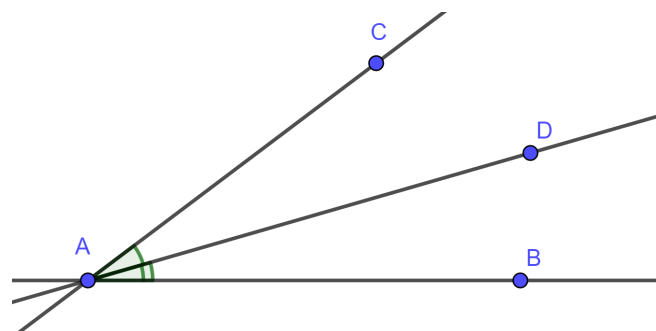
Määritelmä 2.14. Jos $m\angle BAC = m\angle PQR$, niin sanotaan, että kulmat $\angle BAC$ ja $\angle PQR$ ovat *yhtenevät*.

Aksiooma 5. Olkoot \overrightarrow{AB} puolisuora, joka sijaitsee kokonaan suoralla L ja H suoran L määräämä puolitaso. Kaikille reaaliluvuille r , $0^\circ \leq r \leq 180^\circ$, on olemassa tarkalleen yksi puolisuora \overrightarrow{AC} , missä C on unionin $H \cup L$ sisällä ja $m\angle BAC = r$. Aksiooman tilanne on esitetty kuvassa 11.



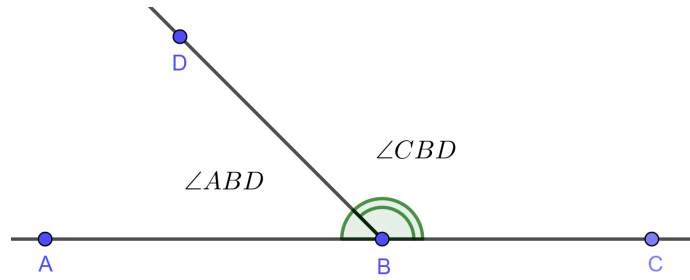
Kuva 11: Kulman suuruus määrää toisen kulman kyljistä yksikäsitteisesti.

Aksiooma 6. Jos piste D on kulman $\angle BAC$ sisäpuolella, silloin $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$. Aksiooman tilanne on esitetty kuvassa 12.



Kuva 12: $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$

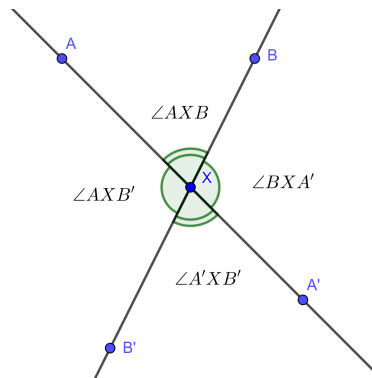
Määritelmä 2.15. Jos $A - B - C$ ja piste D ei ole suoralla \overleftrightarrow{AC} , niin kulmia $\angle ABD$ ja $\angle DBC$ kutsutaan toistensa *vieruskulmiksi*. Vieruskulman määritelmää on havainnollistettu kuvassa 13.



Kuva 13: Vieruskulmat $\angle ABD$ ja $\angle DBC$

Aksiooma 7. Jos kaksi kulmaa ovat toistensa vieruskulmat, niin niiden yhteenlaskettu suuruus on 180°

Määritelmä 2.16. Oletetaan, että suorat L_1 ja L_2 leikkaavat pisteessä X . Jos A ja A' ovat sellaiset suoran L_1 pisteet sekä B ja B' sellaiset suoran L_2 pisteet, että $A - X - A'$ ja $B - X - B'$, niin kulmat $\angle AXB$ ja $\angle A'XB'$ ovat toistensa *ristikulmia*. Samoin ovat kulmat $\angle A'XB$ ja $\angle AXB'$. Ristikulman määritelmää on havainnollistettu kuvassa 14.



Kuva 14: Ristikulmia ovat $\angle AXB$ ja $\angle A'XB'$ sekä $\angle A'XB$ ja $\angle AXB'$

Lause 2.17. *Ristikulmat* ovat yhtenevät.

Todistus. Käytetään todistuksessa määritelmän 2.16 ja kuvan 14 merkintöjä. Määritelmän 2.15 perusteella kulmat $\angle AXB$ ja $\angle BXA'$ ovat vieruskulmia. Samoin $\angle A'XB'$ ja $\angle BXA'$ ovat vieruskulmia. Nyt aksiooman 7 perusteella saadaan seuraavat kaksi yhtälöä:

$$\begin{aligned} m\angle AXB + m\angle BXA' &= 180^\circ \\ m\angle A'XB' + m\angle BXA' &= 180^\circ \end{aligned}$$

Vähentämällä ensimmäisestä yhtälöstä toisen saamme

$$m\angle AXB = m\angle A'XB'$$

Määritelmän 2.14 perusteella ristikulmat ovat siis yhtenevät. □

Yhtenevyydellä tarkoitetaan, että esimerkiksi kahdella tai useammalla monikulmiolla on sama muoto ja koko. Tämä tarkoittaa, että vertailtavien monikulmioiden vastaavat kulmat ovat yhtä suuret ja vastaavat sivut ovat yhtä pitkät riippumatta monikulmion sijainnista tasolla. Matemaattisesti sama todetaan kolmioiden osalta seuraavassa määritelmässä:

Määritelmä 2.18. Kaksi kolmiota ovat *yhtenevät*, jos on mahdollista löytää 1 : 1 yhtenevyudet kolmion pisteille seuraavasti:

1. kolmioiden vastaavat kulmat ovat yhtenevät ja
2. kolmioiden vastaavat sivut ovat yhtenevät eli saman pituiset.

Aksiooma 8. Kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhtenevät, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1. $m\angle BAC = m\angle B'A'C'$ ja
2. $AB = A'B'$ ja $AC = A'C'$

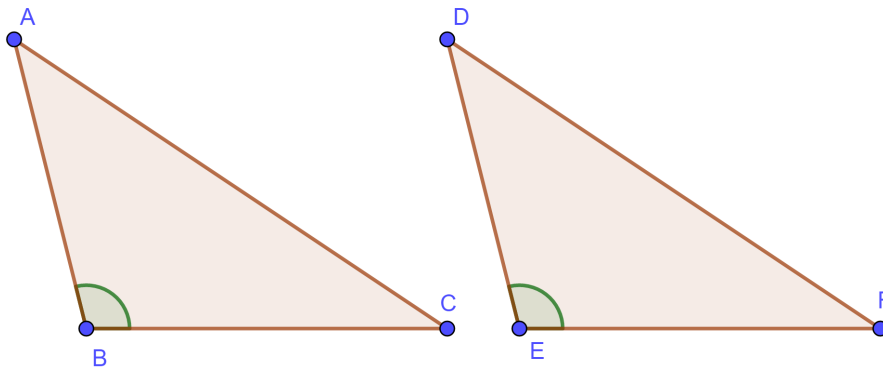
kun kolmioiden kärkien vastaavuudet ovat seuraavat: $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ ja $C \rightarrow C'$.

Yleisesti yhtenevien monikulmioiden kohdalla vastaavat kulmat nimetään samassa järjestyksessä, kuten aksioomassa 8. Aksioomaa 8 kutsutaan yleisesti sivu-kulma-sivu -aksioomaksi ja se on keskeisimpiä aksioomia tasogeometriassa.

Verrataan seuraavaksi aksioomaa 8 ja määritelmää 2.18. Määritelmä 2.18 vaatii, että kaikille vertailtavien kolmioiden sivuille ja kulmille löytyy vastaava kulma tai sivu toisestakin kolmiosta. Aksiooma 8 puolestaan kertoo, että kahden kolmion yhtenevyyteen riittää, että vertailtavista kolmioista löydetään yksi vastaava kulma, josta lähtevät sivut ovat myös yhtenevät.

Esimerkki 2.19. Miksi aksiooman 8 voidaan olettaa olevan totta? Katsotaan ensin kuvaa 15. Aksiooman 8 mukaan kolmioiden yhtenevyyden varmistamiseksi riittää, että yksi kulma ja siitä lähtevät sivut ovat vastaavia vertailtavissa kolmioissa. Oletetaan siis tunnetuksi, että $m\angle ABC = m\angle DEF$, $BA = ED$ ja $BC = EF$. Siirretään seuraavaksi kulma $\angle ABC$ kulman $\angle DEF$ tilalle sekä jana \overline{BA} puolisuoran \overrightarrow{ED} päälle ja jana \overline{BC} puolisuoran \overrightarrow{EF} päälle. Nyt selvästi piste B vastaa pistettä E , piste A vastaa pistettä D , ja piste C vastaa pistettä F . Näin ollen myös jana AC vastaa janaa DF . Kolmioiden jokaiselle kulmalle ja sivulle löytyy yhtenevä osa toisestakin kolmiosta, joten selvästi myös kolmiot ovat yhtenevät.

Seuraavaa aksioomaa kutsutaan paralleeliaksiomaksi, jonka tarpeellisuudesta aksioomaksi kiisteltiin matemaatikkojen keskuudessa pitkään. Lopulta 1820-luvulla toisistaan riippumatta matemaatikot Nikolai Ivanovitš Lobatševski ja Janos Bolyai todistivat paralleeliaksioman muista erilliseksi aksioomaksi eukliidisessä geometriassa, jota pitkälti lukiossa hyödynnetään (ks. [2]).

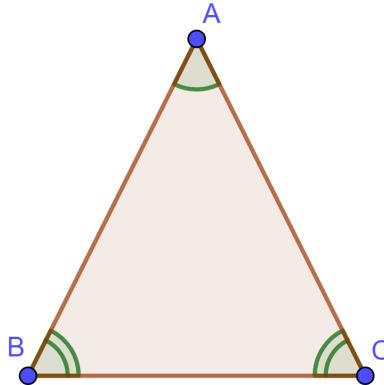


Kuva 15: Aksioman 8 havainnollistaminen esimerkin 2.19 avulla.

Aksiooma 9. Suoran L ulkopuolella olevan pisteen P kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi suora, joka ei leikkaa suoraa L .

Lauseen 2.20 mukaista kolmiota kutsutaan *tasasivuiseksi* kolmioksi ja sitä on havainnollistettu kuvassa 16.

Lause 2.20. Jos kolmion ABC sivut AB ja AC ovat yhtenevät eli $AB = AC$, niin kolmion kulmat $\angle ABC$ ja $\angle ACB$ ovat yhtenevät eli $m\angle ABC = m\angle ACB$.



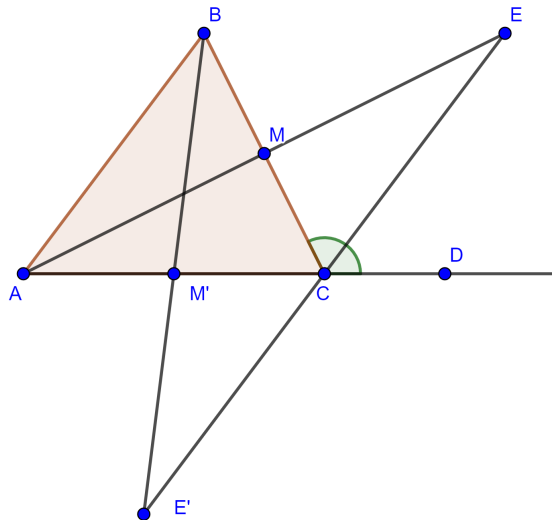
Kuva 16: Tasakylkinen kolmio, jossa $AB = AC$ ja $m\angle ABC = m\angle ACB$

Todistus. Pyritään todistamaan, että kolmiot ABC ja ACB kuvassa 16 ovat yhtenevät keskenään. Toisin sanoen pyritään osoittamaan, että jos lähdetään pisteestä A kiertämään kolmiota kumpaan tahansa suuntaan, niin aina saman pituinen sivu ja saman suuruinen kulma tulevat vastaan samassa järjestyksessä. Kulma $\angle BAC$ on molemmissa tapauksissa sama eli se on selvästi yhtenevä molemmissa kolmioissa. Lauseen oletusten mukaan $AB = AC$, joten kaksi sivua kummasakin kolmiossa ovat yhteneviä. Nyt aksioman 8 perusteella voidaan todeta, että kolmiot ABC ja ACB ovat yhtenevät eli $m\angle ABC = m\angle ACB$ \square

Määritelmä 2.21. Kolmion *sisäkulma* on kolmion kärjen viereisten sivujen välinen kulma, joka on kolmion sisäpuolella.

Määritelmä 2.22. Kolmion *ulkokulma* on kärjen viereisen sivun ja kärjen toisen viereisen sivun jatkeen välinen kulma.

Lause 2.23. Kolmion ulkokulma on aina suurempi kuin ne kolmion sisäkulmat, jotka eivät ole ulkokulman vieruskulmia.



Kuva 17: Kolmion ABC ulkokulma $\angle DCM$ on suurempi kuin kulma ja $\angle ABC$

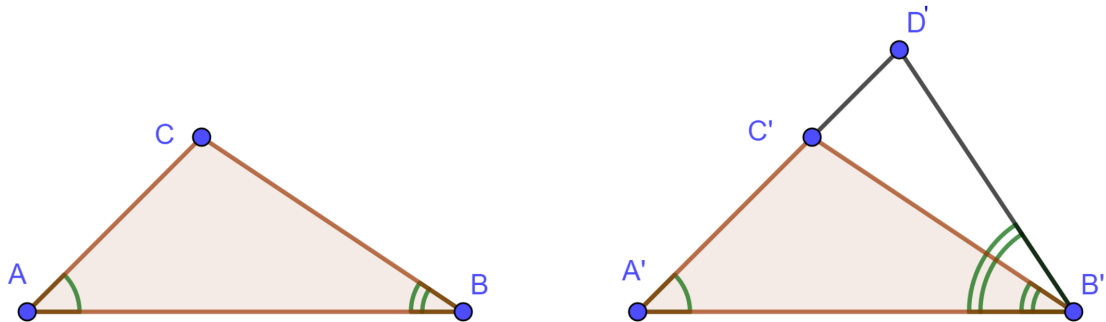
Todistus. Tarkastellaan kuvaa 17. Olkoon ABC kolmio. Nyt kolmion ABC yhtenä ulkokulmana on $\angle DCM$. On siis näytettävä, että kulmat $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ ovat pienempiä kuin kulma $\angle DCM$. Tarkastellaan ensin kulmaa $\angle ABC$. Olkoot piste M janan \overline{BC} keskipiste ja piste D suoralla \overleftrightarrow{AC} ja $A-C-D$ sekä E sellainen lauseen 2.5 perusteella saatu piste, että $\overline{AM} = \overline{ME}$. Pyritään osoittamaan, että kolmiot ABM ja ECM ovat yhtenevät. Koska kulmat $\angle AMB$ ja $\angle CME$ ovat toistensa ristikulmia, niin ne ovat lauseen 2.17 perusteella yhteneviä. Lisäksi sivut $\overline{BM} = \overline{MC}$, koska piste M on janan \overline{BC} keskipiste. Nyt aksiooman 8 perusteella voidaan todeta, että kolmiot ABM ja ECM ovat yhtenevät. Nyt $m\angle ABM = m\angle ECM$ ja kulma $m\angle ABM < m\angle DCM$.

Tarkastellaan seuraavaksi kulmaa $\angle BAC$. Olkoot piste M' sivun AC keskipiste ja E' sellainen lauseen 2.5 perusteella saatu piste, että $\overline{BM'} = \overline{M'E'}$. Pyritään osoittamaan, että kolmiot ABM' ja $E'CM'$ ovat yhtenevät. Koska kulmat $\angle AM'B$ ja $\angle CM'E'$ ovat toistensa ristikulmia, niin ne ovat lauseen 2.17 perusteella yhteneviä. Lisäksi sivut $\overline{AM'} = \overline{M'C}$ ja $\overline{BM'} = \overline{M'E'}$. Nyt aksiooman 8 perusteella voidaan todeta, että kolmiot ABM' ja $E'CM'$ ovat yhtenevät. Nyt siis $m\angle BAC = m\angle E'CM'$. Lisäksi $\angle E'CM'$ ja $\angle ECD$ ovat toistensa ristikulmia eli $m\angle BAC = m\angle ECD < m\angle DCM$.

Nyt on siis osoitettu, että kolmion ABC yksi ulkokulmista $\angle MDC$ on suurempi kuin kulmat $\angle ABC$ ja $\angle BAC$. Vastaavasti löydettäisiin perustelut muille ulkokulmille. \square

Aksioomaa 8 kutsutaan usein sivu-kulma-sivu -aksioomaksi. Muita vastaavia kolmioiden yhtenevyyksiin liittyviä sääntöjä ovat kulma-kulma-sivu, sivu-sivu-sivu ja kulma-sivu-kulma. Tarkastellaan näitä sääntöjä ja niiden todistuksia seuraavissa lauseissa.

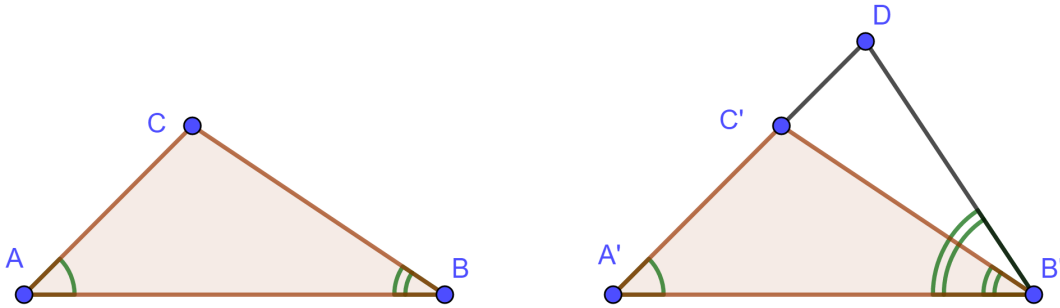
Lause 2.24. Kolmiot ovat yhtenevät, jos kaksi kulmaa ja toisen tunnetun kulman vastainen sivu ovat yhteneviä.



Kuva 18: Kulma-kulma-sivu -säännön havainnollistaminen.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 18. Olkoot ABC ja $A'B'C'$ kolmioita. Oletetaan, että sivut BC ja $B'C'$ ovat yhtenevät. Oletetaan lisäksi, että kulmat $\angle ABC$ ja $\angle A'B'C'$ sekä $\angle BAC$ ja $\angle B'A'C'$ ovat yhtenevät. Jos $AB = A'B'$, niin aksiooman 8 perusteella kolmiot ovat yhtenevät. Tarkastellaan tilanteita, jossa $AB \neq A'B'$ ja pyritään osoittamaan tämä ristiriidan kautta mahdottomiksi. Aloitetaan tilanteesta $AB > A'B'$. Olkoon D sellainen sivun AB piste, että $A'B' = DB$ ja $A-D-B$. Nyt kolmiot $A'B'C'$ ja DBC ovat yhtenevät aksiooman 8 nojalla. Nyt siis $m\angle BDC = m\angle B'A'C'$. Nyt oletusten perusteella myös $m\angle BDC = m\angle BAC$, mikä ei ole mahdollista lauseen 2.23 perusteella, sillä $\angle BDC$ on yksi kolmion ADC ulkokulmista. Tapauksessa $AB < A'B'$ valitaan sellainen piste D' , että $A'-D'-B'$ ja $A'D' = AB$ ja edetään samalla tavalla kuin ensimmäisessä tapauksessa. Molemissa tapauksissa syntyy ristiriita lauseen oletusten kanssa, joten \overline{AB} on oltava yhtä pitkä kuin $\overline{A'B'}$. \square

Lause 2.25. Kolmiot ovat yhtenevät, jos kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhteneviä.

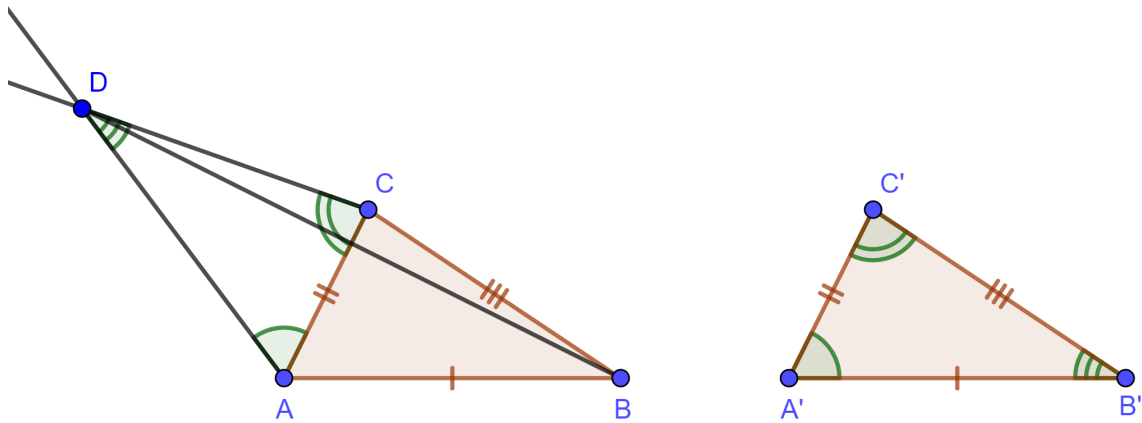


Kuva 19: Kulma-sivu-kulma -säännön havainnollistaminen.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 19. Olkoot ABC ja $A'B'C'$ kolmioita. Oletetaan, että $m\angle BAC = m\angle B'A'C'$, $AB = A'B'$ ja $m\angle ABC = m\angle A'B'C'$. Jos myös $AC = A'C'$, niin aksiooman 8 perusteella kolmiot ovat yhtenevät. Tarkastellaan siis tilanteita, kun $AC \neq A'C'$ ja pyritään osoittamaan ristiriita lauseen oletusten tai aikaisempien lauseiden ja aksioomien kanssa. Tarkastellaan ensin tilannetta, että $AC > A'C'$. Olkoon D' sellainen piste sivun $A'C'$ jatkeella, että $A' - C' - D'$ ja $AC = A'D'$. Nyt kolmiot ABC ja $A'B'D'$ ovat yhtenevät aksiooman 8 perusteella. Aksiooman 6 mukaan $m\angle ABC = m\angle A'B'D' > m\angle A'B'C'$. Syntyy ristiriita lauseen oletusten kanssa, joten sivu AC ei voi olla pidempi kuin $A'C'$. Vastaava ristiriita syntyy tapauksessa $AC < A'C'$, kun piste D valitaan sivun AC jatkeelta ja $AD = A'C'$. Lopulta saadaan $AC = A'C'$ ja väite seuraa aksiooman 8 perusteella. \square

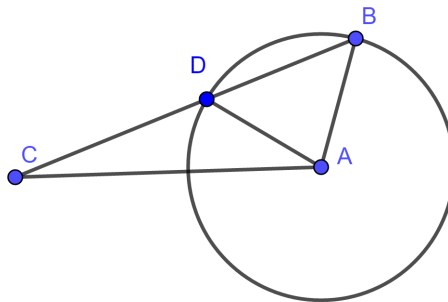
Lause 2.26. Kolmiot ovat yhtenevät, jos kaikki kolme sivua ovat yhteneviä.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 20. Olkoot ABC ja $A'B'C'$ kolmioita. Näissä kahdessa kolmiossa sivut AB ja $A'B'$, AC ja $A'C'$ sekä BC ja $B'C'$ ovat yhteneviä. Etsitään sellainen piste D toiselta puolelta suoraa \overleftrightarrow{AC} kuin piste B , että $m\angle CAD = m\angle C'A'B'$ ja $m\angle ACD = m\angle A'C'B'$. Tällainen piste D on mahdollista löytää aksiooman 5 perusteella. Nyt lauseen 2.25 perusteella kolmiot $A'B'C'$ ja ACD ovat yhtenevät. Nyt siis $A'B' = AD = AB$ ja $B'C' = CD = BC$. Yhdistämällä pisteet B ja D saadaan kaksi tasasivuista kolmiota ABD ja BDC . Nyt lauseen 2.20 perusteella saadaan $m\angle ADB = m\angle ABD$ ja $m\angle BDC = m\angle CBD$. Laskemalla kulmat puolittain yhteen saadaan aksiooman 6 mukaan $m\angle ADC = m\angle ABC$. Nyt aksiooman 8 perusteella kolmiot ABC ja ADC ovat yhtenevät, joten kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhtenevät ja lauseen väite pätee. \square



Kuva 20: Sivu-sivu-sivu -säännön havainnollistaminen.

Esimerkki 2.27. Osoitetaan, ettei sivu-sivu-kulma ole kolmioiden yhtenevyys sääntö. Tarkastellaan kuvaa 21. Kolmioissa ABC ja ADC sivu AC esiintyy molemmissa, sivut AB ja AD ovat yhtenevät sekä kulmat $\angle BCA$ ja $\angle DCA$ ovat yhtä suuret. Kolmiot eivät kuitenkaan ole yhtenevät, koska muun muassa sivut DC ja BC eivät ole yhteneviä, sillä piste D on aidosti pisteiden C ja B välissä.



Kuva 21: Sivu-sivu-kulma sääntöä ei ole olemassa

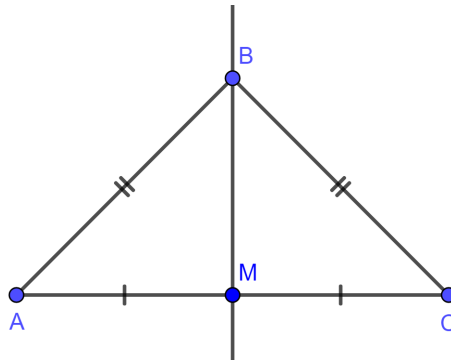
Määritelmä 2.28. Jos kahden leikkaavan suoran kaikki neljä kulmaa ovat yhteneviä, niin suorat leikkaavat toisensa *kohtisuorasti* ja kaikki kulmat ovat *suorakulmia*.

Suorakulman suuruus on 90° eli puolet oikokulmasta. Tämä seuraa aksioomisista 6 ja 7.

Määritelmä 2.29. Suoran L *normaali* on toinen suora M , joka leikkaa suoran L kohtisuorasti.

Määritelmä 2.30. Janan \overline{AB} keskinormaali on jana tai suora, joka leikkaa janan \overline{AB} kohtisuorasti janan keskipisteessä M .

Lause 2.31. Jos piste B on yhtä kaukana pisteistä A ja C , niin piste B sijaitsee janan \overline{AC} keskinormaalilla. Kääntäen, jos B sijaitsee janan \overline{AC} keskinormaalilla, niin pisteet A ja C ovat yhtä kaukana pisteestä B .



Kuva 22: Jos $AB = CB$, niin B sijaitsee janan \overline{AC} keskinormaalilla.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 22. Olkoon piste M janan \overline{AC} keskipiste. Nyt lauseen 2.26 todistuksen peusteella kolmiot ABM ja CBM ovat yhtenevät. Niinpä $m\angle AMB = m\angle CMB = 90^\circ$ ja \overline{BM} on osa janan \overline{AC} keskinormaalilla. Lauseen toinen osa todistetaan toteamalla, että aksiooman 8 perusteella kolmiot ABM ja CBM ovat yhtenevät eli sivut BA ja BC ovat yhtenevät. \square

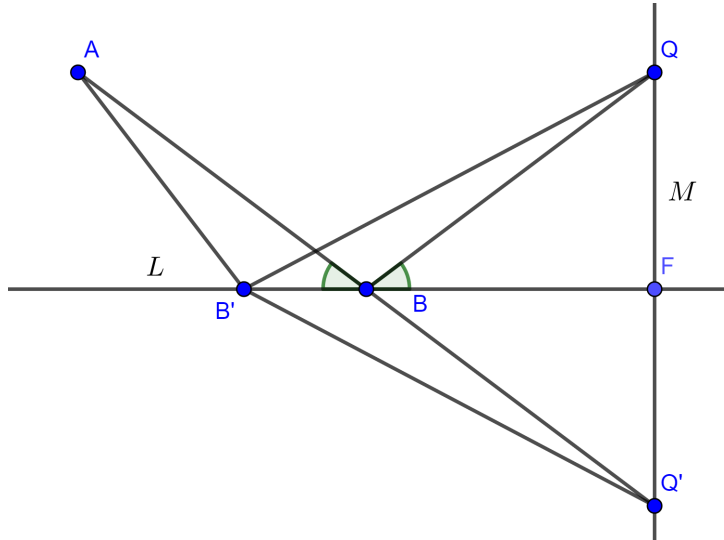
Seuraavan lauseen todistamiseen tarvitaan kolmioepäyhtälöä. Tässä ei käydä kolmioepäyhtälön todistamista läpi, vaan todetaan seuraavan lauseen todistamiseen tarpeellinen osa kolmioepäyhtälöstä: $PQ + QR \geq PR$. Kahden pisteen välinen etäisyys on siis aina pienimmillään ilman välipistettä Q .

Lause 2.32. Jos pisteet A ja Q ovat samalla puolella suoraa L , niin lyhin matka pisteestä A suoran L kautta pisteeseen Q muodostuu, kun tulo- ja heijastuskulma suoralla L ovat yhtä suuret.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 23. Olkoot L suora, M suoran L pisteen Q kautta kulkeva normaali ja F niiden leikkauspiste. Olkoon Q' normaalin M piste, joka sijaitsee yhtä kaukana suorasta L kuin piste Q , mutta eri puolella suoraa. Olkoot lisäksi piste A oletusten mukainen piste. Olkoot nyt $\angle ABC$ tulokulma ja $\angle QPF$ heijastuskulma.

Aksiooman 3 mukaan $\overline{AQ'}$ leikkaa suoran L pisteessä B . Olkoon B' jokin toinen suoran L piste. Kolmiot $QB'F$ ja $Q'B'F$ ovat aksiooman 8 perusteella yhtenevät samoin kuin kolmiot QBF ja $Q'BF$ ovat keskenään yhteneviä. Nyt siis $B'Q = B'Q'$ ja $BQ = BQ'$. Edellä olevat yhtälöt tarkoittavat, että matka pisteestä A suoran L kautta pisteeseen Q on yhtä pitkä kuin pisteiden A ja Q' välinen matka pisteiden B ja B' kautta. Kolmioepäyhtälön perusteella voidaan todeta, että etäisyys pisteen B kautta on lyhyempi kuin minkään muun pisteen B' kautta kulkeva etäisyys pisteiden A ja Q' välillä. Koska kolmiot QFB ja

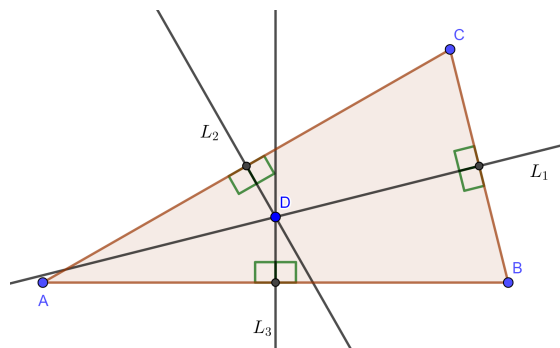
$Q'FB$ ovat yhtenevät, niin $m\angle QBF = m\angle Q'BF$. Lauseen 2.17 perusteella myös $m\angle B'BA = m\angle Q'BF = m\angle QBF$. Näin ollen tulo- ja heijastuskulmat ovat yhtäsuuret, kun matka pisteestä A pisteeseen Q suoran L kautta minimoidaan. \square



Kuva 23: Tulo- ja heijastuskulmat ovat yhtä suuret.

Lause 2.33. Kolmion kaikki keskinormaalit leikkaavat aina yhdessä pisteessä.

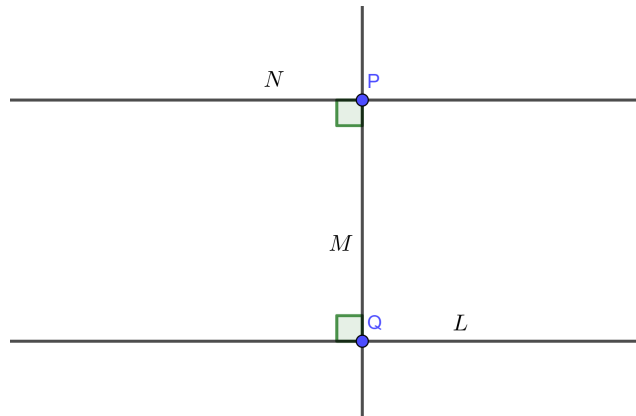
Todistus. Tarkastellaan kuvaa 24. Olkoot A, B ja C kolmion kärkipisteet, L_1, L_2 ja L_3 kolmion sivuja BC, AC ja AB vastaavat keskinormaalit sekä piste D kahden keskinormaalien L_1 ja L_2 leikkauspiste. Koska piste D on molemmilla keskinormaaleilla L_1 ja L_2 , niin lauseen 2.31 perusteella $DB = DC$ ja $DA = DC$. Edellisistä yhtälöistä saamme $DA = DB$. Nyt piste D on yhtä kaukana pisteistä A ja B joten lauseen 2.31 mukaan piste D sijaitsee janan \overline{AB} keskinormaalilla L_3 . Siis lauseen väite pätee. \square



Kuva 24: Kaikki kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat pisteessä D

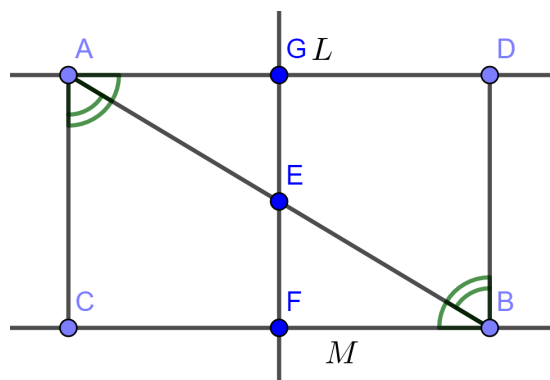
Lause 2.34. Olkoon M suoran L normaali. Olkoot Q suorien L ja M leikkauspiste sekä P piste normaalilla M . Jos suora N leikkaa normaalin M kohtisuorasti pisteessä P , niin suorat N ja L ovat yhdensuuntaisia, kuten kuvassa 25.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 25. Olkoot piste Q suoralla L ja piste P suoralla N . Käytetään epäsuoraa todistusta. Oletetaan, että suorat N ja L eivät ole yhdensuuntaisia. Oletetaan, että suorat leikkaavat pisteessä R . Nyt kolmion PQR kaksi ulkokulmaa ovat 90° samoin kuin kaksi sen sisäkulmista. Tästä syntyy ristiriita lauseen 2.23 kanssa, joten oletus on väärä ja lauseen väite pätee. \square



Kuva 25: Suorat L ja N ovat yhdensuuntaisia, jos M on niiden molempien normaali.

Lause 2.35. Jos kaksi suoraa L ja M ovat yhdensuuntaiset, niin suorien välinen jana muodostaa kaksi yhtenevää kulmaparia kuvan 26 tavoin. Kääntäen, jos suorien L ja M ja niiden välisen janan muodostamat kulmat ovat yhtenevät, niin suorat L ja M ovat yhdensuuntaiset.



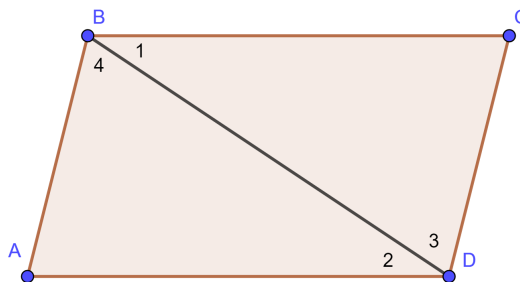
Kuva 26: Kaksi yhdensuuntaista suoraa ja niiden välinen jana muodostavat yhteneviä kulmia.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 26. Todistetaan ensin lauseen ensimmäinen osa eli oletetaan, että suorat L ja M ovat yhdensuuntaiset. Olkoot E janan \overline{AB} keskipiste ja jana \overline{FG} pisteen E kautta kulkeva suorien L ja M normaali, joka on olemassa aksiooman 9 perusteella. Nyt kulmat $\angle EGA$ ja $\angle EFB$ ovat yhtenevät ja $AE = EB$. Lisäksi lauseen 2.17 perusteella kulmat $\angle AEG$ ja $\angle BEF$ ovat yhtenevät. Nyt lauseen 2.24 perusteella kolmiot AEG ja BEF ovat yhtenevät, joten $m\angle EAG = m\angle EBF$. Todistetaan seuraavaksi lauseen toinen osa eli oletetaan, että $m\angle EAG = m\angle EBF$. Tehdään vasta oletus, että suorat L ja M leikkaavat pisteessä P . Nyt kolmion ABP yksi ulkokulmista on kulma $\angle EBF$, joka oli yhtenevä kulman $\angle EAG$ kanssa. Syntyy ristiriita lauseen 2.23 kanssa, joten lauseen väite on totta. \square

Määritelmä 2.36. Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia.

Lause 2.37. Jos $ABCD$ on suunnikas, niin nelikulmion

- vastakkaiset sivut ovat yhtenevät.
- vastakkaiset kulmat ovat yhtenevät.



Kuva 27: Suunnikas voidaan muodostaa kahden yhtenevän kolmion avulla.

Todistus. Edeltävät lauseet ovat koskeneet kolmioiden yhtenevyyksiä, joten muodostetaan suunnikkaasta $ABCD$ kaksi kolmiota diagonaalin \overline{BD} avulla, kuten kuvassa 27. Nyt lauseen 2.35 mukaan $m\angle DBC = m\angle BDA$ ja $m\angle BDC = m\angle DBA$. Nyt kolmioissa on kaksi yhtenevää kulmaa ja kulmien välinen sivu \overline{BD} on kolmioissa yhtenevä, joten lauseen 2.25 perusteella kolmiot ovat yhtenevät. Tämän perusteella saadaan $AB = CD$ ja $AD = BC$. Samoin $\angle DAB = m\angle DCB$ ja $\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC = \angle CDB + m\angle BDA = m\angle CDA$. \square

Lause 2.38. Nelikulmiossa $ABCD$, missä

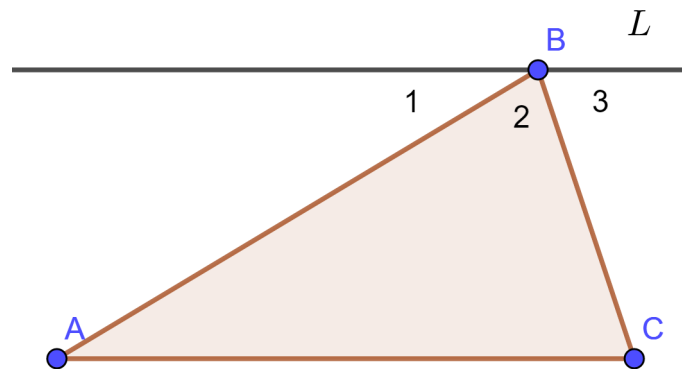
- sivut eivät leikkaa toisiaan kuin kärkipisteissä ja
- vastakkaiset sivut ovat yhtenevät,

vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia eli $ABCD$ on suunnikas.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 27. Kolmiot ABD ja CDB ovat yhtenevät lauseen oletusten ja lauseen 2.26 perusteella. Nyt kulma $\angle A$ vastaa kulmaa $\angle C$, $\angle ADB$ vastaa $\angle CBD$ ja $\angle ABD$ vastaa $\angle CDB$. Edellä esitetyt kulmat ovat kaikki kolmioiden ABD tai CDB sisäkulmia. Nyt lauseen 2.35 mukaan suorat \overleftrightarrow{BC} ja \overleftrightarrow{AD} ovat yhdensuuntaisia. Vastaavasti \overleftrightarrow{AB} ja \overleftrightarrow{DC} ovat yhdensuuntaisia, joten $ABCD$ on suunnikas. \square

Lause 2.39. Kaikkien kolmioiden kulmien summa on 180°

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 28. Aksioman 9 perusteella löydetään pisteen B kautta kulkeva suora L , joka on yhdensuuntainen kolmion sivun AC kanssa. Merkitään suoran L ja kolmion sivujen välisiä kulmia $\angle 1$, $\angle 2$ ja $\angle 3$. Lauseen 2.35 perusteella $m\angle A = m\angle 1$ ja $m\angle C = m\angle 3$. Lisäksi aksioman 7 perusteella $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$. Koska $\angle B = \angle 2$, niin $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$. \square



Kuva 28: Kolmion kulmien summa on sama kuin oikokulman eli 180°

Määritelmä 2.40. Ympyrä on niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys keskipisteestä on yhtä suuri.

Lause 2.41.

- Jos pisteet B , C ja D ovat ympyrän kehällä ja ympyrän keskipiste A sijaitsee janalla \overline{BC} , niin $m\angle BDC = 90^\circ$.
- Jos B ja C ovat kiinnitettyjä pisteitä, niin kaikkien niiden pisteiden D joukko, joille $m\angle BDC = 90^\circ$, koostuu halkaisijaltaan BC olevan ympyrän kaikista pisteistä lukuunottamatta pisteitä B ja C .

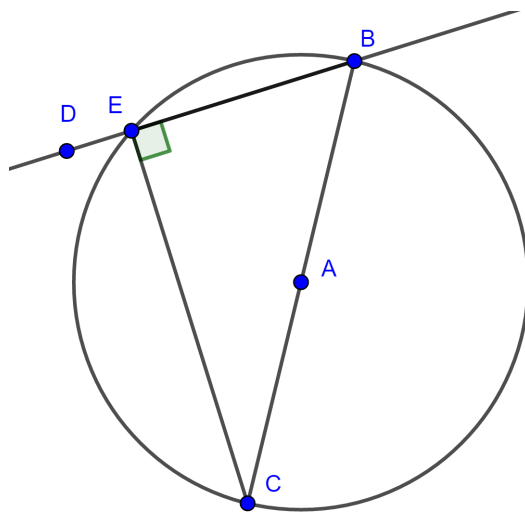
Todistus. Tarkastellaan kuvaa 29. Todistetaan ensin kohta a). Olkoot pisteet B , C ja D ympyrän kehän pisteitä ja A ympyrän keskipiste. Nyt $AB = AC = AD$. Lauseen 2.20 perusteella kolmiot ABD ja ACD ovat tasakylkisiä, joten $m\angle ABD = m\angle ADB$ ja $m\angle ACD = m\angle ADC$. Nyt aksioman 6 mukaan

$$m\angle BDC = m\angle ADC + m\angle ADB = m\angle ACD + m\angle ABD$$

ja lauseen 2.39 mukaan

$$m\angle BDC + m\angle ACD + m\angle ABD = 2(m\angle BDC) = 180^\circ \Leftrightarrow m\angle BDC = 90^\circ$$

Todistetaan seuraavaksi kohta b). Tarkastellaan ympyrää O , jonka keskipisteenä on A ja säteenä $AB = AC$. Pisteet B ja C ovat siis ympyrällä. Olkoon E nyt sellainen ympyrän O piste, että E on suoralla \overleftrightarrow{BD} . Kohdan a) perusteella kulma $\angle BEC$ on suora. Nyt siis lauseen 2.24 mukaan kolmiot BDC ja BEC ovat yhtenevät, ja D on siis ympyrän O kehällä. \square



Kuva 29: Kulma $\angle BDC = 90^\circ$, jos piste D sijaitsee ympyrän kehällä.

2.3 Pinta-ala

Seuraavat pinta-aloihin liittyvät aksioomien oletukset ovat kaikille tasogeometri-
aan vähänkään tutustuneille tuttuja. Ne ovat kuitenkin tärkeä määrittää, jotta tule-
vissa lauseissa ei ole kyseenalaistettavia kohtia. Vastaavanlaisia aksioomia löy-
detään avaruusgeometrian kappaleille ja tilavuuksille [5], mutta niitä ei käydä nyt
läpi.

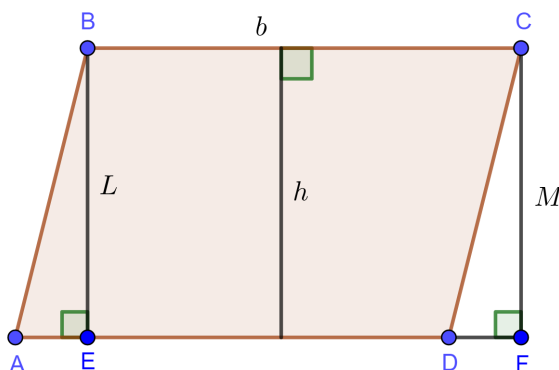
Aksiooma 10. Jokaiselle monikulmaiselle alueelle R on määritelty tietty positiiv-
inen reaalityyppinen luku, jota kutsutaan *pinta-alaaksi*. Käytetään siitä jatkossa merkintää
 $a(R)$.

Aksiooma 11. Monikulmainen alue R muodostuu kahden monikulmaisen alueen R_1
ja R_2 unionista, jos R_1 ja R_2 leikkaavat toisensa korkeintaan äärellisen monella si-
vulla tai yksittäisessä pisteessä, niin $a(R) = a(R_1 \cup R_2) = a(R_1) + a(R_2)$.

Aksiooma 12. Yhtenevien kolmioiden pinta-alat ovat samat.

Aksiooma 13. Suorakulmion pinta-ala on kahden vierekkäisen sivun, eli kannan
ja korkeuden, pituuksien tulo.

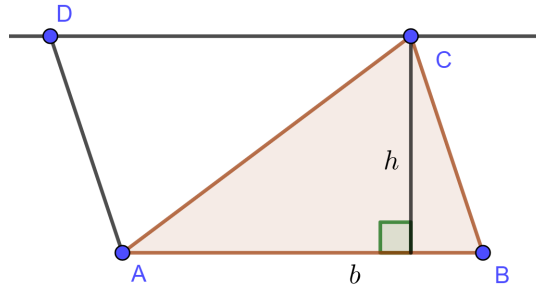
Lause 2.42. Suunnikkaan $ABCD$ pinta-ala on tulo bh , missä b on kannan pituus
ja h on kannan ja sen vastaisen sivun välinen etäisyys.



Kuva 30: Suunnikkaan pinta-ala lasketaan kertomalla kannan pituus b suunnik-
kaan korkeudella h .

Todistus. Olkoon $ABCD$ suunnikas, kuten kuvassa 30. Olkoot L suunnikkaan
kärjen B kautta kulkeva normaali suoralle AD ja M suunnikkaan kärjen C kautta
kulkeva normaali suoralle AD . Olkoot E normaalin L ja suoran AD leikkauspiste
ja F normaalin M ja suoran AD leikkauspiste. Lauseen 2.37 perusteella $AB =$
 DC ja lauseen 2.35 perusteella $m\angle BEA = m\angle CFD$ ja $m\angle BAE = m\angle CDF$,
joten näin lauseen 2.24 mukaan kolmiot CFD ja BEA ovat yhtenevät. Koska
nyt aksiooman 12 mukaan $a(AEB) = a(CDF)$, niin aksioomien 11 ja 13 mukaan
saadaan $a(ABCD) = a(AEB) + a(BCDE) = a(CDF) + a(BCDE) = a(BCFE) =$
 $EF \cdot h = (ED + DF) \cdot h = (AE + ED) \cdot h = bh$. \square

Lause 2.43. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}bh$, missä b on minkä tahansa sivun pituus ja h kyseisen sivun ja sen vastaisen kärjen välinen etäisyys.

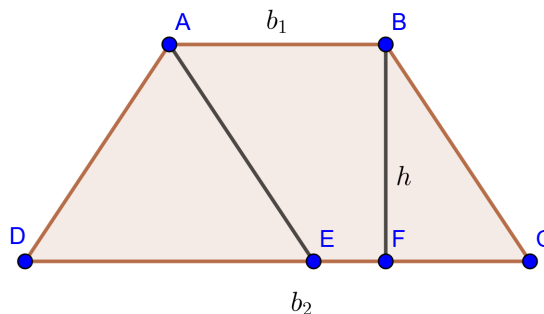


Kuva 31: Kolmion pinta-ala on puolet suunnikkaan pinta-alasta.

Todistus. Olkoot kolmio ABC ja \overline{AB} sen tutkittava kanta, kuten kuvassa 31. Piirretään suoran \overleftrightarrow{AB} suuntainen suora L pisteen C kautta ja suoran \overleftrightarrow{BC} suuntainen suora M pisteen A kautta. Olkoon D suorien L ja M leikkauspiste. Määritelmän 2.36 perusteella $ABCD$ on suunnikas. Kolmiot ADC ja CBA ovat yhtenevät lauseen 2.37 todistuksen perusteella ja niiden pinta-alat ovat yhtä suuret aksiooman 12 perusteella. Kolmion ABC pinta-ala on siis puolet suunnikkaan $ABCD$ pinta-alasta, joka oli edellisen lauseen perusteella bh . Kolmion pinta-ala on siis $\frac{1}{2}bh$. \square

Määritelmä 2.44. Puolisuunnikas on nelikulmio, jossa toiset vastakkaisista sivuista ovat yhdensuuntaiset. Näitä kahta sivua kutsutaan puolisuunnikkaan kannoiksi ja niiden pituuksille käytetään merkintöjä b_1 ja b_2 . Kantojen välistä kohtisuoraa etäisyyttä kutsutaan korkeudeksi, josta käytetään merkintää h .

Lause 2.45. Puolisuunnikkaan pinta-ala on $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$



Kuva 32: Puolisuunnikkaan pinta-ala voidaan muodostaa kolmion ja suunnikkaan pinta-alojen avulla.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 32. Olkoot $ABCD$ puolisuunnikas ja E sellainen suoran \overleftrightarrow{DC} piste, että $ABCE$ on suunnikas. Lauseen 2.42 mukaan $a(ABCE) = \frac{1}{2}b_1h$ ja lauseen 2.43 mukaan $a(AED) = \frac{1}{2}(b_2 - b_1)h$. Aksioman 11 mukaan

$$\begin{aligned} a(ABCD) &= a(ABDE) + a(AED) \\ &= b_1h + \frac{1}{2}(b_2 - b_1)h \\ &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h \end{aligned}$$

□

Yhtenevyydellä tarkoitettiin sitä, että kaksi monikulmiota vastasivat täysin toisiaan. Yhdenmuotoisuudella tarkoitetaan, että monikulmiot ovat samanmuotoisia, mutta ne voivat olla eri kokoisia.

Määritelmä 2.46. Kaksi monikulmiota ovat *yhdenmuotoiset*, jos on olemassa seuraavat ehdot täyttävä bijektiivinen funktio f monikulmioiden kärkien välillä.

- 1) Vastaavat kulmat ovat yhtenevät eli jokaiselle kärjelle A on voimassa $m\angle A = m\angle f(A)$
- 2) Vastaavien sivujen pituuksien suhde on vakio. Eli on olemassa sellainen vakio r , että jos monikulmion viereiset kärjet ovat A ja B , niin $\frac{AB}{f(A)f(B)} = r$

Lause 2.47. Jos kolmiossa ABC piste D sijaitsee sivulla \overline{AB} , piste E sivulla \overline{BC} sekä janat \overline{AC} ja \overline{DE} ovat yhdensuuntaiset, niin $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$.

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 33. Olkoon F janan \overline{AB} ja pisteen E kautta kulkevan janan \overline{AB} normaalin leikkauspiste. Lauseen 2.43 perusteella seuraavat yhtälöt pätevät.

$$\begin{aligned} a(AEB) &= \frac{1}{2}(FE)(AB) \\ a(DEB) &= \frac{1}{2}(FE)(BD) \end{aligned}$$

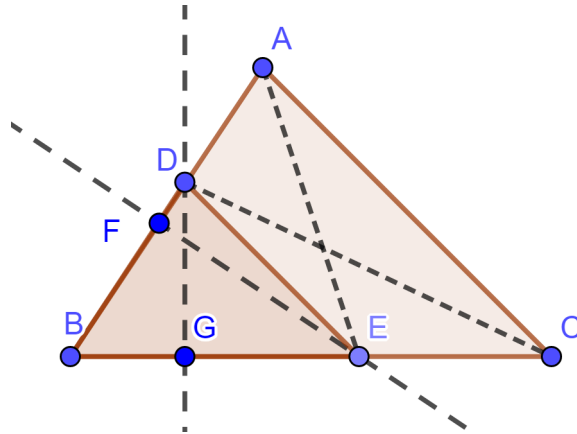
Havaitaan, että kolmioiden AEB ja DEB korkeus kärkipisteen D kautta on yhtä suuri. Jakamalla edelliset yhtälöt puolittain saadaan

$$\frac{a(AEB)}{a(DEB)} = \frac{(BA)}{(BD)}$$

Olkoon G janan \overline{CB} ja kärkipisteen D kautta kulkevan janan \overline{CB} normaalin leikkauspiste. Vastaavasti saadaan

$$\frac{a(CDB)}{a(DEB)} = \frac{(CB)}{(BE)}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $a(CDB) = a(AEB)$, jotta edellisten yhtälöiden oikeat puolet voidaan merkitä yhtä suuriksi. Koska molempien kolmioiden pinta-alaan kuuluu kolmion DEB pinta-ala, niin täytyy osoittaa, että $a(DEA) = a(CDE)$. Näiden molempien kolmioiden yksi sivu on jana \overline{DE} . Käytetään sitä kantana. Koska suorat \overleftrightarrow{AC} ja \overleftrightarrow{DE} ovat yhdensuuntaiset, niin kohtisuorat etäisyydet kärjistä A ja C suoralle \overleftrightarrow{DE} ovat yhtä pitkiä. Näin kolmioiden DEA ja CDE korkeudet ovat samat ja $a(DEA) = a(CDE)$. Nyt siis $a(CDB) = a(AEB)$. Lopulta saadaan $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$ \square



Kuva 33: Kahden kolmion sivujen pituuksien suhteiden laskemiseen tarvitaan useita apupisteitä ja -kolmioita.

Lause 2.48. Jos kolmiossa ABC piste D sijaitsee sivulla \overline{AB} , piste E sivulla \overline{BC} ja sivujen suhteet ovat vakiot seuraavasti $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$, niin janat \overline{AC} ja \overline{DE} ovat yhdensuuntaiset.

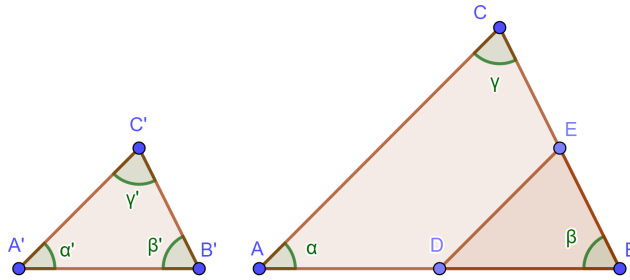
Todistus. Tarkastellaan kuvaa 33. Tehdään vastaoletus, että \overline{DE} ja \overline{AC} eivät ole yhdensuuntaiset ja pyritään osoittamaan ristiriita. Olkoon F sellainen suoralla \overleftrightarrow{BA} oleva piste, että suorat \overleftrightarrow{EF} ja \overleftrightarrow{AC} ovat yhdensuuntaiset. Edellisen lauseen ja oletusten perusteella

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} = \frac{BA}{BF}$$

Tämän perusteella saadaan $BF = BD$. Koska pisteet F ja E ovat samalla sivulla \overleftrightarrow{BA} , niin voidaan todeta, että $F = D$. Näin ollen $\overleftrightarrow{ED} = \overleftrightarrow{EF}$. Syntyy ristiriita eli lauseen väite pätee eli suorat \overleftrightarrow{DE} ja \overleftrightarrow{AC} ovat yhdensuuntaisia. \square

Edellä käytiin läpi yhtenevyyksiin liittyviä lauseita, joiden ansiosta yhtenevyyden päättämiseen kolmiosta ei tarvinnut tietää kaikkia kulmien suuruuksia ja sivujen pituuksia. Yhdenmuotoisuudelle löydetään vastaavia uusia helpottavia sääntöjä.

Lause 2.49. Kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhdenmuotoisia, jos $m\angle A = m\angle A'$, $m\angle B = m\angle B'$ ja $m\angle C = m\angle C'$ ja kärkipisteet vastaavat toisiaan seuraavasti $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ ja $C \rightarrow C'$.



Kuva 34: Kolmiot ovat yhdenmuotoisia, jos niiden kaikki vastaavat kulmat ovat saman suuruisia

Todistus. Tarkastellaan kuvaa 34. Jos $AB = A'B'$, niin kolmiot ovat yhtenevät lauseen 2.25 perusteella. Riittää tarkastella tilannetta, jossa $A'B' < AB$. Olkoon D sellainen piste janalla \overline{AB} , että $BD = A'B'$. Etsitään sellainen piste E janalta \overline{BC} , että

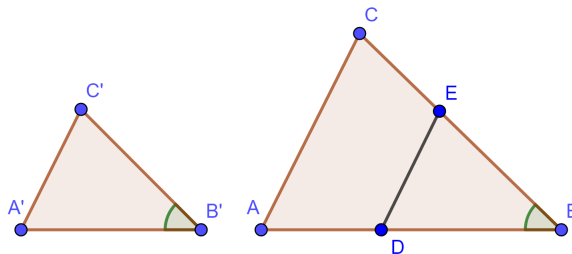
$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD}.$$

Edellisen lauseen perusteella janat \overline{AC} ja \overline{DE} ovat yhdensuuntaiset. Nyt edellisen lauseen ja oletusten perusteella $m\angle BDC = m\angle A = m\angle A'$ eli lauseen 2.24 perusteella kolmiot DBE ja $A'B'C'$ ovat yhtenevät. Nyt korvaamalla pisteet D ja E pisteillä A' ja C' saadaan

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BA}{B'A'}$$

Vastaava todistus voidaan tehdä myös kärjistä A tai C . Voidaan todeta, että lauseen väite pätee. \square

Lause 2.50. Kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhdenmuotoisia, jos $m\angle B = m\angle B'$, $\frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'}$.

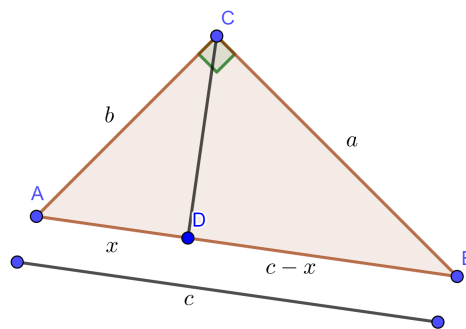


Kuva 35: Yhdenmuotoisuus lauseen 2.50 tapauksessa.

Todistus. Riittää tarkastella tilannetta, jossa $A'B' < AB$. Tarkastellaan kuvaa 35. Olkoot D ja E sellaisia pisteitä sivuilla \overline{BA} ja \overline{BC} , että $BD = B'A'$ ja $BE = B'C'$. Korvaamalla nämä lauseen oletukseen saadaan $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$. Lauseen 2.48 perusteella havaitaan, että $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$. Nyt siis vastaavat kulmat $\angle BDE$ ja $\angle BAC$ sekä $\angle BED$ ja $\angle BCA$ ovat yhtenevät. Lauseen 2.49 perusteella kolmiot ABC ja DBE ovat samanmuotoiset. Koska aksioman 8 perusteella kolmiot DBE ja $A'B'C'$ ovat yhtenevät, niin kolmiot $A'B'C'$ ja ABC ovat yhdenmuotoiset \square

Määritelmä 2.51. Olkoot ABC suorakulmainen kolmio. Suorankulman viereisiä sivuja kutsutaan *kateeteiksi* ja vastaista sivua *hypotenuusaksi*

Lause 2.52. Jos suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat a ja b ja hypotenuusan pituus c , niin $a^2 + b^2 = c^2$.



Kuva 36: Pythagoraan lause

Todistus. Olkoon kolmio ABC suorakulmainen kuten kuvassa 36. Suorankulman kärjestä C hypotenuusalle kulkeva normaali leikkaa hypotenuusan pisteessä D . Nyt kolmiot BCD ja BAC ovat molemmat suorakulmaisia kolmioita ja molemmat kolmiot sisältävät kulman $\angle B$. Lauseen 2.39 mukaan kolmioiden kolmaskin kulma on molemmissa yhtä suuri ja näin lauseen 2.49 perusteella kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Nyt

$$\frac{a}{c-x} = \frac{c}{a}$$

Vastaavasti kolmiot CDA ja BCA ovat yhdenmuotoiset ja

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{b}$$

Kun ylläolevat yhtälöt kertoo ristiin, niin saadaan yhtälöt $a^2 = c(c-x)$ ja $b^2 = cx$. Laskemalla edelleen nämä yhteen saadaan Pythagoraan lause $a^2 + b^2 = c^2$. \square

3 Lopuksi

Tutkielmassa käsiteltiin Meyerin [5] aksioomajoukkoa. Tutkielman alkoi aksioomalla, jonka perusteella kahden pisteen kautta kulkeva suora saatiin yksikäsitteiseksi Euklidisessa geometriassa. Aksioomien ja lauseiden avulla tarkasteltiin janoja, puolisuoria, kulmia sekä kolmioita ja niiden yhtenevyyksiä ja yhdenmuotoisuuksia. Lopulta päädyttiin pinta-alojen tarkasteluun ja Pythagoraan lauseeseen. Seuraavaksi tarkasteluun voisi ottaa Meyerin tavoin tilavuuksia, ei-eukliidista geometriaa sekä yhtenevyysskuvauksia. Geometrian aksioomajoukkoja tunnetaan nykyään useita, joten myös näiden välisiä eroja voisi tarkastella tarkemmin ja etenkin sitä, millä aksiooma joukolla päästään pisimmälle geometrian tiedoissa mahdollisimman pienellä määrällä aksioomia.

Kirjallisuutta

- [1] P. Heiskanen, P. Kaakinen ym. Tekijä, lukion pitkä matematiikka Sanomapro. Helsinki. 2016
- [2] S. Kivelä: *Niin kuin matematiikka. Lukiotason matematiikan tietosanakirja.* Teknillinen korkeakoulu, Helsinki. 2000
- [3] L. Kurittu, V. Hokkanen ja L. Kahanpää *GEOMETRIA.* Jyväskylän yliopisto. Vuosi tuntematon.
- [4] M. Lehtinen, J. Merikoski ja T. Tossavainen: *Geometrisia konstruktioita, Johdatus tasogeometriaan.* 2007.
- [5] W. Meyer: *Geometry and Its Applications.* Department of Mathematics and Computer Science Adelphi University Garden City, New York
- [6] *Lukion opetus suunnitelman perusteet 2015.* Opetushallitus, Helsinki